INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.



0. Übungsblatt | Abgabe: keine Abgabe

**Fragen zu den Aufgaben:** Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

1. **Hyperbelfunktionen**

Die Hyperbelfunktionen sind die korrespondierenden Funktionen der trigonometrischen Funktionen an der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$. Die Hyperbelfunktionen sind über

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \tag{1}$$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \tag{2}$$

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \tag{3}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(b) Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x) \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x) \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \tag{6}$$

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen der Hyperbelfunktionen für $x \in \mathbb{R}$.

(d) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Hyperbelfunktionen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

(e) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Hyperbelfunktionen.

(f) Bestimmen Sie die Extrema der Hyperbelfunktionen für $x \in \mathbb{R}$.

(g) Skizzieren Sie die Hyperbelfunktionen.

(h) Berechnen Sie die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh}(x)$ und $\operatorname{arcosh}(x)$.

*Bitte wenden* ⟶

2. **Implizites Differenzieren**

   Das implizite Differenzieren ermöglicht es, die Ableitung einer Funktion $y(x)$, die nicht explizit, sondern implizit durch eine Gleichung der Form

   $$F\left(x, y(x)\right) = 0 \tag{7}$$

   gegeben ist nach $x$ zu differenzieren. Dabei ist $F\left(x, y(x)\right)$ eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion. Im Folgenden soll das Verfahren des impliziten Differenzierens anhand der Hyperbelfunktionen trainiert werden.

   Gegeben sei die Funktion

   $$F\left(x, y(x)\right) := y - \sinh(x+y) = 0, \tag{8}$$

   wobei $y = y(x)$ ist. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x)$.

3. **Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen**

   Im Folgenden seien $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie

   $$\sinh(x+y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(y) \cdot \cosh(x) \tag{9}$$

   (b) Zeigen Sie

   $$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(y) \cdot \sinh(x) \tag{10}$$

   (c) Zeigen Sie

   $$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} \tag{11}$$