Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

0. Übungsblatt

Abgabe: Di, 27.10.2020 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

1. **Wissensfragen**

   Diese Fragen sind unbepunktet und sollen Ihren derzeitigen Wissensstand eingrenzen. Bitte beantworten Sie sie also ohne umfangreiche Recherche.

   Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen. Beantworten Sie alle Fragen nur kurz.

   (a) Bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2}$.
   (b) Geben Sie die Definition der Poisson-Klammern an.
   (c) Wie lauten die kanonischen (Hamilton-) Bewegungsgleichungen?
   (d) Was besagt das Hamilton-Prinzip?
   (e) Was besagt das Noether-Theorem?
   (f) Wie lautet die Wellengleichung?
   (g) Was ist das Eikonal und wie hängt es mit der Wellengleichung zusammen?
   (h) Welchen Wert hat die Ionisierungsenergie eines Wasserstoffatoms?
   (i) Was ist das Bohr-Sommerfeld-Modell?
   (j) Beschreiben Sie das (quantenmechanische) Doppelspalt-Experiment.

2. **Eigenschaften der Fourier-Transformation (10 Punkte)**

   Die Fourier-Transformation $\hat{f}$ einer Funktion f ist in Dimension d definiert als

   $$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \mathrm{d}^d x\, f(\vec{x})\, \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,. \tag{1}$$

   Ferner ist die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g definiert über

   $$(f * g)(\vec{y}) = \int \mathrm{d}^d x\, f(\vec{x})\, g(\vec{y} - \vec{x})\,. \tag{2}$$

Bitte wenden! →

(a) Nehmen Sie an, dass Sie Integrale und Ableitungen vertauschen dürfen und verifizieren Sie folgende Aussagen für $d = 1$:

i. Faltungssatz:

$$\widehat{(f * g)}(k) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)\,. \tag{3}$$

ii. Differentiationssatz:

$$\widehat{(x\, f)}(k) = i(\hat{f})'(k)\,. \tag{4}$$

(b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der

i. Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & -2 \leq x \leq 0, \\ 2 - x & 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & |x| > 2, \end{cases} \tag{5}$$

ii. und der Faltung $g * g$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1, \\ 0 & |x| > 1\,. \end{cases} \tag{6}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

3. **Diffusion in einer Dimension (10 Punkte)**

Die eindimensionale Diffusionsgleichung lautet

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}\,. \tag{7}$$

Die Lösung kann als Fourier-Integral angesetzt werden

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \hat{n}(k,t)\, \mathrm{e}^{ikx}\,. \tag{8}$$

(a) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen die Koeffizienten $\hat{n}(k,t)$? Geben Sie die allgemeinen Lösungen für $\hat{n}(k,t)$ an.

(b) Geben Sie die Lösung $n(x,t)$ der eindimensionalen Diffusionsgleichung zu den Anfangsbedingungen

$$n(x,0) = N\,\delta(x) \tag{9}$$

für Zeiten $t \geq 0$ als Fourier-Integral an. Führen Sie die k-Integration aus und stellen Sie das Endergebnis als Funktion von x dar.

Bitte wenden! →

Δ 4. **Hamilton-Jacobi-Methode: Harmonischer Oszillator (10 Punkte)**

Gegeben sei die Hamiltonfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + k\frac{q^2}{2}, \tag{10}$$

wobei k die Federkonstante ist.

(a) Führen Sie eine kanonische Transformation so durch, dass die Hamilton-Jacobi Gleichung erfüllt wird.

(b) Stellen Sie jeweils eine Gleichung für die erzeugende Funktion S und die charakteristische Funktion W auf.

(c) Schreiben Sie H als Funktion der Wirkungsvariablen J.

(d) Bestimmen Sie über $H(J)$ die Frequenz des eindimensionalen harmonischen Oszillators.