INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer

Elektrodynamik SS 2020

Übersicht zu möglichen Lösungsansätzen am Beispiel

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

Homogen geladene Vollkugel

Gegeben sei eine homogen geladene Vollkugel mit Radius R und Ladungsdichte ρ_0. Berechnen Sie das Potential Φ und das elektrische Feld $\underline{E}$ im gesamten Raum mit Hilfe

(a) des Gauß-Gesetzes

(b) des Poisson-Integrals für Φ

(c) der Poisson-Gleichung für Φ

Lösung

(a) Gauß-Gesetz

$$\oint_{\partial V} \underline{E}\,\mathrm{d}\underline{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi \begin{cases} r^3 & , r < R \\ R^3 & , r \geq R \end{cases} \tag{1}$$

- Symmetrie: $\underline{E} = E(r)\,\underline{e}_r$
- der Gaußsche Integralssatz gilt für jedes Volumen V. An das Problem angepasst ist jedoch eine Kugel
- $\mathrm{d}\underline{A} = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\underline{e}_r$

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \underline{E}\,\mathrm{d}\underline{A} = E(r)r^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi r^2 E(r) \tag{2}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\begin{cases} r & , r < R \\ \frac{R^3}{r^2} & , r \geq R \end{cases} \tag{3}$$

- $\underline{E} = -\partial_{\underline{x}}\Phi = -\partial_r\Phi\,\underline{e}_r$, da $\underline{E} \sim \underline{e}_r$

$\Rightarrow \partial_r\Phi = -E(r)$

$$\Rightarrow \Phi(r) = -\int E(r')\,\mathrm{d}r' = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 + \mathcal{K}_1 & , r < R \\ \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} + \mathcal{K}_2 & , r \geq R \end{cases} \tag{4}$$

Bestimmung von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ aus Randbedingungen:

- $\Phi(r \to \infty) = 0 \Rightarrow \mathcal{K}_2 = 0$
- Stetigkeit bei $r = R$:

$$-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}R^2 + \mathcal{K}_1 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}_1 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}R^2$$

Damit ergibt sich das Potential zu:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) & , r < R \\ \\ \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} & , r \geq R \end{cases} \tag{5}$$

(b) Poisson-Integral

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{x}')}{\left|\underline{x}-\underline{x}'\right|} \, \mathrm{d}^3x' \tag{6}$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{{r'}^2 \sin(\theta')}{\sqrt{r^2 + {r'}^2 - 2rr'\cos(\theta)}} \, \mathrm{d}\varphi' \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}r' \tag{7}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{{r'}^2 \sin(\theta')}{\sqrt{r^2 + {r'}^2 - 2rr'\cos(\theta)}} \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}r', \tag{8}$$

da das Koordinatensystem so gewählt werden kann, dass $\theta' = \sphericalangle(\underline{x}, \underline{x}')$ ist.

- θ'-Integral:

$$\begin{aligned} &\tau := -\cos(\theta'), \quad \theta' \in [0,\pi] \Rightarrow \tau \in [-1,1] \\ &\mathrm{d}\tau = \sin(\theta')\,\mathrm{d}\theta' \\ &a := r^2 + {r'}^2, \quad b := 2rr' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin(\theta')}{\sqrt{a - b\cos(\theta')}} \, \mathrm{d}\theta' = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{a + b\tau}} \, \mathrm{d}\tau$$

setze $t := a + b\tau \Rightarrow \mathrm{d}\tau = \frac{1}{b}\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin(\theta')}{\sqrt{a - b\cos(\theta')}} \, \mathrm{d}\theta' &= \frac{1}{b} \int_{t(-1)}^{t(1)} t^{-1/2} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{b} \sqrt{a + b\tau}\Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{b}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}\right) \\ &= \frac{1}{rr'}\left(\sqrt{r^2 + {r'}^2 + 2rr'} - \sqrt{r^2 + {r'}^2 - 2rr'}\right) \\ &= \frac{1}{rr'}\left(\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}\right) \\ &= \frac{\left|r+r'\right| - \left|r-r'\right|}{rr'} \end{aligned}$$

- r'-Integral:

  <u>– innen</u>: $r < R$ (Aufteilen des Integrationsgebietes)

$$\begin{aligned} &\int_0^R \frac{\left|r+r'\right| - \left|r-r'\right|}{rr'} {r'}^2 \, \mathrm{d}r' \\ &= \int_0^r \frac{r + r' - \left|r-r'\right|}{rr'} {r'}^2 \, \mathrm{d}r' + \int_r^R \frac{r + r' - \left|r-r'\right|}{rr'} {r'}^2 \, \mathrm{d}r' \\ &= \int_0^r \frac{r + r' - (r-r')}{rr'} {r'}^2 \, \mathrm{d}r' + \int_r^R \frac{r + r' - (r'-r)}{rr'} {r'}^2 \, \mathrm{d}r' \\ &= \int_0^r \frac{2r'}{rr'} {r'}^2 \, \mathrm{d}r' + \int_r^R \frac{2r}{rr'} {r'}^2 \, \mathrm{d}r' \\ &= \frac{2}{r} \int_0^r {r'}^2 \, \mathrm{d}r' + 2\int_r^R r' \, \mathrm{d}r' \\ &= \frac{2}{3} r^2 + R^2 - r^2 \\ &= -\frac{1}{3} r^2 + R^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(3R^2 - r^2\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{3}\left(3R^2 - r^2\right) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)\,, \quad r < R \tag{9}$$

$\underline{-\text{ außen}}$: $r > R$, $r' \le R \le r \Rightarrow \left|r - r'\right| = r - r'$

$$\begin{aligned}
&\int_0^R \frac{\left|r + r'\right| - \left|r - r'\right|}{rr'}\, r'^2 \,\mathrm{d}r' \\
= &\int_0^R \frac{r + r' - (r - r')}{rr'}\, r'^2 \,\mathrm{d}r' \\
= &\int_0^R \frac{2r'}{rr'}\, r'^2 \,\mathrm{d}r' \\
= &\,\frac{2}{r}\int_0^R r'^2 \,\mathrm{d}r' = \frac{2}{3}\,\frac{R^3}{r}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\,\frac{2}{3}\,\frac{R^3}{r} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\frac{R^3}{r}\,, \quad r \ge R \tag{10}$$

Insgesamt also

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) & , r < R \\ \\ \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\frac{R^3}{r} & , r \ge R \end{cases} \tag{11}$$

Mit $\underline{E} = -\partial_{\underline{x}}\Phi = -\partial_r\Phi\,\underline{e}_r$ folgt

$$\underline{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\underline{e}_r \begin{cases} r & , r < R \\ \\ \frac{R^3}{r^2} & , r \ge R \end{cases} \tag{12}$$

(c) Poisson-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} & , r < R \\ \\ 0 & , r \geq R \end{cases} \tag{13}$$

- Radialsymmetrie: $\Phi = \Phi(r)$

$$\Rightarrow \partial_{\underline{x}}^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \Phi \right)$$

- außen:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \Phi \right) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\partial_r \left(r^2 \partial_r \Phi \right) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &r^2 \partial_r \Phi = C_1 \\ \Longleftrightarrow\ &\partial_r \Phi = \frac{C_1}{r^2} \\ \Longleftrightarrow\ &\Phi = -\frac{C_1}{r} + C_2 \end{aligned}$$

- innen:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \Phi \right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \\ \Longleftrightarrow\ &\partial_r \left(r^2 \partial_r \Phi \right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} r^2 \\ \Longleftrightarrow\ &r^2 \partial_r \Phi = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r^3 + C_3 \\ \Longleftrightarrow\ &\partial_r \Phi = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r + \frac{C_3}{r^2} \\ \Longleftrightarrow\ &\Phi = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{C_3}{3r^3} + C_4 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

- $\Phi(r \to \infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$
- $\Phi(r \to 0) < \infty \Rightarrow C_3 = 0$

Zwischenstand:

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} r^2 + C_4 & , r < R \\ \\ -\frac{C_1}{r} & , r \geq R \end{cases} \tag{14}$$

Im Bereich $r \geq R$ muss Φ mit dem Potential einer Punkladung

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

mit der Ladung $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$ übereinstimmen

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ &\frac{C_1}{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} \\ \Longleftrightarrow\ &C_1 = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R^3 \end{aligned}$$

Stetigkeit von Φ bei $r = R$:

$$\begin{aligned} &-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} R^2 + C_4 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R^2 \\ \Rightarrow\ &C_4 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} R^2 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) & , r < R \\ \\ \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} & , r \geq R \end{cases} \tag{15}$$

Das $\underline{E}$-Feld ergibt sich analog zu Teil (b).

Zusammenfassung

Alle Lösungswege liefern dasselbe Ergebnis und sind somit äquivalent. Es spielt daher für das Endergebnis keine Rolle, welcher Lösungsweg gewählt wird. Es stellt sich lediglich die Frage, welcher Weg der kürzere/bequemere ist. Dafür gibt es jedoch kein Kochrezept, denn das hängt von der jeweiligen Aufgabenstellung ab. Um ein Gefühl für den kürzesten/bequemsten Weg zu bekommen, hilft daher nur Training!