Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer

Übersicht zu möglichen Lösungsansätzen

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

Allgemeine Hinweise

- die Übersicht betrifft jene Punkte, die Sie in Ihren kürzlichen Emails angesprochen haben
- die folgenden Übersicht stellt mögliche Lösungsansätze für die Berechnung von elektromagnetischen Feldern und deren Potentialen dar
- auch wenn die Lösungswege verschieden sind, entstammen sie alle aus den Maxwell-Gleichungen und sind damit äquivalent
- es führen daher alle Lösungswege zum Ziel; der eine Weg ist kürzer, der andere länger
- zudem wird der Indexkalkül und die Frage nach dem "richtigen" Indexbild an einem Beispiel illustriert

1. **Elektrostatik**

Maxwell-Gleichungen:

- $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{D} = \rho$ bzw. $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}$
- $\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} = 0$ (Elektrostatik)

$\Rightarrow$ $\exists$ skalares Potential Φ: $\underline{E} = -\partial_{\underline{x}} \Phi$

(a) Bestimmung von $\underline{E}$ (oder $\underline{D}$) bei bekannter Ladungsdichte ρ:

- wenn Φ bekannt, nutze $\underline{E} = -\partial_{\underline{x}} \Phi$
- wenn Φ nicht bekannt, nutze Gauß-Gesetz:

$$\int_V \partial_{\underline{x}} \cdot \underline{E} \, \mathrm{d}V = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \, \mathrm{d}V \tag{1}$$

$$\Longleftrightarrow \oint_{\partial V} \underline{E} \, \mathrm{d}\underline{A} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \, \mathrm{d}V \tag{2}$$

- Welche Symmetrie liegt vor? (z.B. Kugel- oder Zylindersymmetrie)
- aus Symmetrie ergibt sich Wahl des Koordinatensystems und Ansatz für $\underline{E}$ (z.B. $\underline{E} = E(r) \, \underline{e}_r$)
- Auswahl eines geeigneten Volumens V mit zugehörigem Rand ∂V
- Ausführen der Integration liefert $\underline{E}$

Bitte wenden→

(b) Bestimmung von Φ bei bekannter Ladungsdichte ρ:

- wenn $\underline{E}$ mit (einfacher) Symmetrie bekannt, kann $\underline{E} = -\partial_{\underline{x}}\Phi$ durch Integration für Φ gelöst werden
- wenn $\underline{E}$ nicht bekannt, ergibt sich Φ als Lösung der Poisson-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon} \tag{3}$$

  Für einfache Symmetrien (z.B. $\Phi = \Phi(r)$) reduziert sich diese auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Anderfalls lässt sich das Potential über das Poisson-Integral

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\underline{x}')}{\left|\underline{x}-\underline{x}'\right|}\,\mathrm{d}^3x' \tag{4}$$

  (für den Fall $\varepsilon = \text{const.}$) berechnen
- wenn keine wahren Ladungen vorliegen oder wahre Ladungen als Oberflächenladungen durch Nebenbedingungen eingearbeitet werden können, ist Φ Lösung der Laplace-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2\Phi = 0 \tag{5}$$

  Im Fall von Zylindersymmetrie (Unabhängigkeit von φ) ist die Lösung der Laplace-Gleichung durch die Reihe der Legendre-Polynome gegeben. Dann ist die Lösungsstruktur bekannt und die Entwicklungskoeffizienten können aus den Randbedingungen für die Felder ($\underline{E}$, $\underline{D}$) und dem Potential bestimmt werden

2. **Stationäre Magnetfelder**

Maxwell-Gleichungen:

- $\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = \mu_0\mu\,\underline{j}$ bzw. $\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \underline{j}$ (statisch)
- $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} = 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ Vektorpotential $\underline{A}$: $\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}$

(a) Berechnung von $\underline{A}$ durch:

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int_V \frac{\underline{j}(\underline{x}')}{\left|\underline{x}-\underline{x}'\right|}\mathrm{d}^3x' \tag{6}$$

$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}$ liefert das Magnetfeld.

(b) *Biot-Savart-Gesetz*

- Mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes kann $\underline{B}$ direkt bestimmt werden, ohne zuvor $\underline{A}$ auszurechnen:

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int_V \frac{\underline{j}(\underline{x}') \times (\underline{x}-\underline{x}')}{\left|\underline{x}-\underline{x}'\right|^3}\mathrm{d}^3x' \tag{7}$$

- Für den Spezialfall eines linienförmigen Leiters mit $\underline{j}(\underline{x}')\mathrm{d}^3x' = J(\underline{x}')\mathrm{d}x'$ ergibt sich

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int_V J(\underline{x}')\frac{\mathrm{d}\underline{x}' \times (\underline{x}-\underline{x}')}{\left|\underline{x}-\underline{x}'\right|^3} \tag{8}$$

Bitte wenden→

(c) *Gesetz von Oersted*

- Fließt der Strom in einem Volumen (z.B. stromdurchflossener Draht endlicher Dicke etc.), bietet sich die Berechnung von $\underline{B}$ mit Hilfe des Gesetzes von Oersted an:

$$\int_A \partial_{\underline{x}} \times \underline{B}\,\mathrm{d}\underline{A} = \int_A \mu_0\mu\,\underline{j}\,\mathrm{d}\underline{A} \tag{9}$$

$$\oint_{\partial A} \underline{B}\,\mathrm{d}\underline{s} = \int_A \mu_0\mu\,\underline{j}\,\mathrm{d}\underline{A} \tag{10}$$

- Welche Symmetrie liegt vor? (z.B. Kugel- oder Zylindersymmetrie)
- aus Symmetrie ergibt sich Wahl des Koordinatensystems und Ansatz für $\underline{B}$ (z.B. $\underline{B} = B(r)\,\underline{e}_\varphi$)
- Auswahl einer geeigneten Fläche A mit zugehörigem Rand ∂A
- Ausführen der Integration liefert $\underline{B}$

(d) Stromfreiheit (Statisches Magnetfeld)

- im Fall von Stromfreiheit gilt $\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = 0$ bzw. $\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ skalares Potential Ψ: $\underline{H} = -\partial_{\underline{x}}\Psi$

- Einrichten der Divergenzfreiheit führt auf die Laplace-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2\Psi = 0 \tag{11}$$

als Bestimmungsgleichung für das Potential. Für einfache Symmetrien (z.B. $\Psi = \Psi(r)$) reduziert sich diese auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Im Fall von Zylindersymmetrie (Unabhängigkeit von φ) ist die Lösung der Laplace-Gleichung durch die Reihe der Legendre-Polynome gegeben. Dann ist die Lösungsstruktur bekannt und die Entwicklungskoeffizienten können aus den Randbedingungen für die Felder ($\underline{B}$, $\underline{H}$) und dem Potential bestimmt werden

3. **Indexkalkül**

- es wird zwischen freien Indizes und Summationsindizes unterschieden
- *Beispiel* $\mathcal{B}_{ij}\mathcal{B}^{jk}$: j ist ein Summationsindex, i und k sind freie Indizes. Das Ergebnis ist ein Tensor 2. Stufe mit den Indizes i und k

Wie findet man das "richtige" Indexbild bei einer Koordinatentransformation?

- betrachte exemplarisch den Tensor 2. Stufe $T_i^{\,j}$ in Σ
- gesucht wird der Tensor $T_{i'}^{\,j'}$ in Σ'
- für die Transformation werden zwei Transformationsmatrizen $L_?^{\,?}$ benötigt:

$$T_{i'}^{\,j'} = L_?^{\,?}\,L_?^{\,?}\,T_i^{\,j} \tag{12}$$

- das Endergebnis der Transformation ist ein Tensor mit unterem (freien!) Index i' und oberem (freien!) Index j'
- um jeden Index zu transformieren bedeutet dies:

$$T_{i'}^{\,j'} = L_?^{\,j'}\,L_{i'}^{\,?}\,T_i^{\,j} \tag{13}$$

- für die Summation über die Indizes i und j muss bei den L's noch ein oberer Summationsindex i sowie ein unterer Summationsindex j ergänzt werden
- die Transformation ergibt sich damit zu

$$T_{i'}^{\,j'} = L_j^{\,j'}\,L_{i'}^{\,i}\,T_i^{\,j} \tag{14}$$