



1. Wissensfragen

Benennen Sie alle auftretenden Symbole.

- (a) Geben Sie die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form an. Benennen Sie die Gleichungen. Leiten Sie daraus das Poynting-Theorem her.
- (b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Laplace Gleichung für ein zylindersymmetrisches Problem an.
- (c) Wie muss man die elektromagnetischen Potentiale $\underline{A}$ und Φ einführen, damit die beiden homogenen Maxwellschen Gleichungen identisch erfüllt werden?
- (d) Geben Sie die Definitionen von elektrischem Monopol-, Dipolmoment und Quadrupoltensor an. Wie lauten die Beiträge der einzelnen Momente und des Quadrupoltensors zum Potential $\Phi(\underline{r})$?
- (e) Was sind die Lienert-Wiechert-Potentiale?
- (f) Was besagt das Larmorsche Theorem?
- (g) Was geben die Fresnelschen Formeln an?
- (h) Wie transformieren sich die kovarianten Komponenten eines Lorentz-Tensors zweiter Stufe unter der Lorentz-Transformation?
- (i) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen in invarianter Tensorform an.
- (j) Skizzieren Sie die Magnetfeldlinien eines magnetischen Dipols mit Dipolmoment $\underline{m}$.

2. Punktladung vor einer dielektrischen Kugel

Eine homogene dielektrische Kugel mit Radius R hat ihren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Die Permittivität des Materials der Kugel ist ϵ . Im Außenraum liegt Vakuum vor und bei $\underline{x}_e = a \underline{e}_3$ befindet sich eine Punktladung e mit $e > 0$.

- (a) Beschreiben Sie die Wirkung der Punktladung auf das Dielektrikum der Kugel.
- (b) Geben Sie die Rand- und Grenzbedingungen für das skalare Potential Φ an.

Bitte wenden →

- (c) Leiten Sie die Differentialgleichung für Φ innerhalb und außerhalb der Kugel her und schreiben Sie den jeweiligen Lösungsansatz auf.
- (d) Bestimmen Sie die freien Parameter des Lösungsansatzes und geben Sie die Lösungen für Φ im Innen- und Außenraum der Kugel an.

3. Zylinderkondensator

Zwei metallische Zylindermäntel der Länge L mit den Radien R_1 und R_2 sind so ineinander geschoben, dass die Querschnitte senkrecht zur Zylinderachse konzentrische Kreise sind. Der innere Mantel trage die konstante Flächenladungsdichte σ_1 ; der äußere Mantel sei mit σ_2 aufgeladen. Vernachlässigen Sie Randeffekte, d.h. benutzen Sie $R_1, R_2 \ll L$.

- (a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ in den Raumbereichen I ($\rho < R_1$, ρ in Zylinderkoordinaten), II ($R_1 < \rho < R_2$) und III ($R_2 < \rho$). Ist $\underline{E}$ stetig bei $\rho = R_1$ bzw. $\rho = R_2$? Begründen Sie Ihre Beobachtung!
- (b) Geben Sie das Potential Φ in den Bereichen I, II und III an. Ist Φ stetig?
- (c) Wie müssen σ_1 und σ_2 gewählt werden, damit das elektrische Feld im Außenraum III verschwindet? Geben Sie für diesen Fall die Kapazität $C = Q/\delta\Phi$ an. Mit $\delta\Phi$ wird die Potentialdifferenz zwischen den Zylindern bezeichnet. Q ist die Gesamtladung eines Zylindermantels.

4. Relativitätstheorie

Die Teilaufgaben (a) und (b) können *voneinander unabhängig* bearbeitet werden.

- (a) *Transformation von Beschleunigungen*

Aus der Sicht eines Inertialsystems Σ bewege sich ein Teilchen mit der konstanten Beschleunigung $\underline{a} = a_1 \underline{e}_1$. Welche Beschleunigung a'_1 parallel zur x'_1 -Achse misst ein Beobachter aus einem Inertialsystem Σ' , das sich relativ zu Σ mit der konstanten Geschwindigkeit $\underline{v} = v \underline{e}_1$ bewegt?

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst dx'_1, dt' und ermitteln Sie dann $u'_1 = dx'_1/dt'$ und $a'_1 = du'_1/dt'$. Verwenden Sie die spezielle Lorentz-Transformation.

- (b) *Zentraler Stoß: Relativistische Betrachtung*

Bei einem zentralen, eindimensionalen Stoß zweier Elektronen (Index '1' bzw. '2') mit Ruhemasse m_e werden in einem Experiment vor und nach dem Stoß die folgenden relativistischen Energien E (Ruhe + kinetisch) beobachtet:

$$\begin{array}{ll} E_{1,\text{vor}} = m_e c^2 & E_{1,\text{nach}} = 2m_e c^2 \\ E_{2,\text{vor}} = 4m_e c^2 & E_{2,\text{nach}} = 3m_e c^2 \end{array}$$

Mit m_e wird die Ruhemasse eines Elektrons bezeichnet. Die Angaben beziehen sich auf das Inertialsystem, in dem das Elektron 1 vor dem Stoß ruht.

Untersuchen Sie, ob ein Stoßereignis mit den angegebenen Energien überhaupt möglich ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Methode der Bildladungen

Eine Punktladung q befinde sich in einem Volumen V , das durch zwei geerdete leitende Ebenen begrenzt wird, die sich unter dem Winkel α schneiden.

- (a) Betrachten Sie $\alpha = 90^\circ$, d.h. das Volumen $V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 > 0\}$. Die Punktladung q befinde sich am Ort $\underline{x} = (a \cos(\alpha/2), a \sin(\alpha/2), 0)$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie das Potential Φ mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen. Zeigen Sie explizit, dass Ihre Wahl der Bildladungen die Randbedingung $\Phi(\underline{x})|_{\underline{x} \in \partial V} = 0$ erfüllt.
- (b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall, dass die Platten den Winkel $\alpha = 180^\circ/n$ einschließen, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Skizzieren Sie Position und Vorzeichen der Bildladungen für $\alpha = 60^\circ$ und $\alpha = 45^\circ$. Wie viele Bildladungen werden allgemein in Abhängigkeit von n benötigt?

6. Magnetfeld einer quadratischen Leiterschleife

Die Teilaufgaben (a),(b) und (c) können *voneinander unabhängig* bearbeitet werden.

Wir betrachten eine quadratische Leiterschleife der Kantenlänge a , die so in der (x, y) -Ebene liegt, dass sich der Mittelpunkt im Ursprung befindet. Die Leiterschleife wird von einem konstanten Strom I im Uhrzeigersinn durchflossen. Der Durchmesser des Drahtes darf vernachlässigt werden.

- (a) Skizzieren Sie die Anordnung.
- (b) *Ampèresches Gesetz*
 - i. Bestimmen Sie zunächst unter Benutzung des Gesetzes von Ampère die magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{r})$ außerhalb eines unendlich langen **geraden** Drahtes. Machen Sie dabei für $\underline{B}(\underline{r})$ einen Ansatz, der die Symmetrie des Problems berücksichtigt.
 - ii. Nehmen Sie an, dass a hinreichend groß ist um Randeffekte zu vernachlässigen. Bestimmen Sie die magnetische Induktion im Mittelpunkt der Leiterschleife durch Superposition.

- (c) *Biot-Savart-Gesetz*

Verwenden Sie nun das Biot-Savart-Gesetz um wiederum das Magnetfeld im Mittelpunkt zu bestimmen. Beachten Sie die Geometrie der Leiterschleife bei der Wahl des Koordinatensystems. *Hinweis:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(A^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{2}{A^2} \quad .$$

Die Integration von $-\infty$ bis ∞ entspricht hierbei einem Vernachlässigen der Randeffekte.