

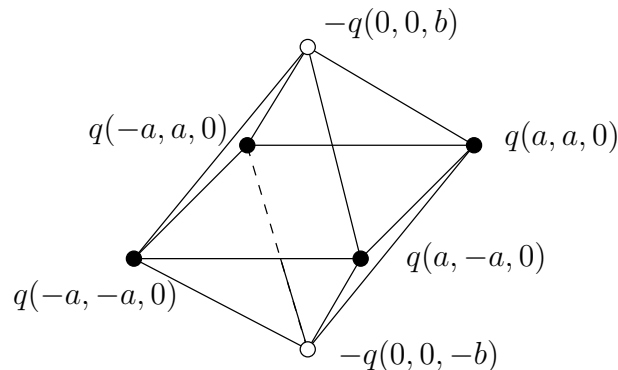


27. Multipolentwicklung II: Quadrupoltensor

(4 Punkte)

In Aufgabe 9 (Blatt 4) wurden bereits das Monopol- und Dipolmoment für zwei konkrete Ladungsverteilungen berechnet. In dieser Aufgabe sollen für selbige Ladungsverteilungen die Quadrupoltensoren bestimmt werden.

- (a) Bestimmen Sie den Quadrupoltensor für die skizzierte Anordnung von sechs Punktladungen.



- (b) Bestimmen Sie den Quadrupoltensor für einen Zylinder mit Radius R und Länge L , der mit der homogenen Ladungsdichte

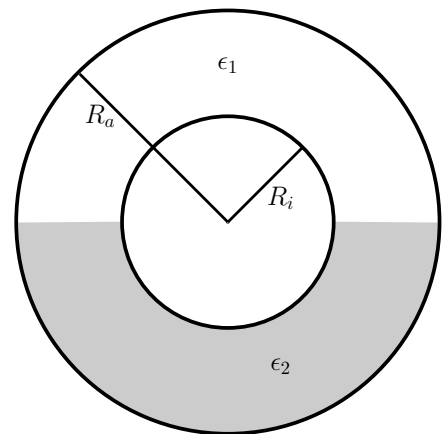
$$\rho(\underline{x}) = \{\rho_0; \text{ für } -L/2 \leq x_3 \leq L/2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\} \quad (1)$$

belegt ist.

28. Halb gefüllter Kugelkondensator

(8 Punkte)

Ein Kugelkondensator mit Innenradius R_i und Außenradius R_a sei zur Hälfte mit Luft ($\epsilon_1 \approx 1$) und zur Hälfte mit einem Dielektrikum mit $\epsilon_2 \neq 1$ gefüllt (siehe Skizze). Die innere Kugelschale trage die Ladung $+Q$, die äußere Schale trage die Ladung $-Q$.



- (a) Begründen Sie mit Hilfe der Grenzbedingungen für das elektrische Feld $\underline{E}$ an den Stirnflächen beim Übergang von Gebiet mit ϵ_1 in das Gebiet mit ϵ_2 , dass der Ansatz $\underline{E} = E(r)\underline{e}_r$ für das elektrische Feld im Inneren des Kondensators ($R_i < r < R_a$) zielführend ist.

Bitte wenden →

- (b) Bestimmen Sie $E(r)$ mit Hilfe der integralen Form des Gauß'schen Gesetzes im Inneren des Kondensators. Berechnen Sie anschließend die dielektrische Verschiebung $\underline{D}$ im Inneren des Kondensators.

Bonusaufgabe:

(6 Zusatzpunkte)

- (c) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte der freien Ladungsträger ρ_S auf der inneren Kugelschale.
- (d) Berechnen Sie die durch die Polarisation $\underline{P}$ induzierte Oberflächen-Polarisationsladungsdichte σ_P auf der Oberfläche des Dielektrikums bei $r = R_i$.

29. Methode der Spiegelladung

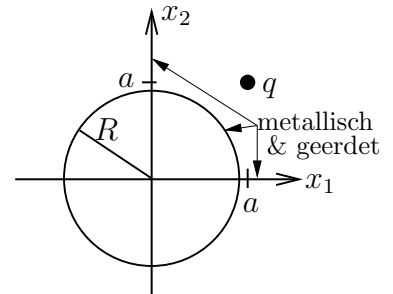
(8 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Methode der Spiegelladung (auch genannt Bildladung) anhand zweier etwas komplizierterer Geometrien geübt werden.

- (a) Bestimmen Sie das Potential Φ im Bereich $\{\underline{x} \mid x_1, x_2 > 0; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > R\}$ für die in der Skizze dargestellte Geometrie. Eine Punktladung q befindet sich bei $(a, a, 0)$. Die Metallplatten bei $x_1 = 0, x_2 = 0$ sowie die Kugel um den Ursprung mit Radius R seien geerdet. Positionieren Sie geeignete Spiegelladungen, so dass $\Phi = 0$ für $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ und auf der Oberfläche der Kugel erfüllt ist.

Hinweis: Gehen Sie für die Lösung der Aufgabe in zwei Schritten vor:

- (1) Konstruieren Sie eine Spiegelladung q_B im Abstand r_B vom Ursprung, sodass zunächst $\Phi = 0$ auf der Kugeloberfläche erfüllt ist. Berechnen Sie q_B und r_B .
- (2) Spiegeln Sie nun die Ladungen q und q_B jeweils an der x_1 - und x_2 -Achse, damit $\Phi = 0$ für $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ erfüllt ist. Skizzieren Sie die resultierende Anordnung.



- (b) Eine Punktladung q befinde sich in einem Volumen V , das durch zwei geerdete leitende Ebenen begrenzt wird, die sich unter dem Winkel $\alpha = 180^\circ/n$ schneiden, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Skizzieren Sie Position und Vorzeichen der Spiegelladungen für $\alpha = 60^\circ$ und $\alpha = 45^\circ$. Wie viele Spiegelladungen werden allgemein in Abhängigkeit von n benötigt?