Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer

10. Übungsblatt Abgabe: 9. Juli 2020 bis 9:45 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

24. Punktladung im konstanten elektrischen Feld (7 Punkte)

Die relativistischen Bewegungsgleichungen eines Teilchens der Ruhemasse m_0 und der Ladung q, das sich in einem konstanten elektrischen Feld $\underline{E} = E_0 \underline{e}_1$ in der (x_1, x_2)-Ebene bewegt, sind:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m_0 \dot{x}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = qE_0 \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m_0 \dot{x}_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \quad \text{mit} \quad \beta^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{c^2} \quad .$$

Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen und geben Sie $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ sowie $(x_1(t), x_2(t))$ an. Vergleichen Sie mit dem nicht-relativistischen Fall. Die Anfangsbedingungen seien

$$\dot{x}_1(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}_2(0) = v_0 \quad ; \quad x_1(0) = 0 \quad ; \quad x_2(0) = 0 \quad .$$

Hinweise:

(1) Die erste Integration der beiden Gleichungen lässt sich leicht ausführen. Dividieren Sie die so erhaltenen Gleichungen durcheinander. So erhalten Sie einen linearen Zusammenhang zwischen $\dot{x}_1$ und $\dot{x}_2$. Eliminieren Sie danach $\dot{x}_1$ aus der Gleichung für $\dot{x}_2$.

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \text{const.}$

25. Plattenkondensator (8 Punkte)

Wir betrachten einen Plattenkondensator, dessen dünne Platten in der x_1-x_2-Ebene bei $x_3 = -a$ und $x_3 = a$ liegen. Im Inneren des Kondensators sei ein Dielektrikum mit der Permittivität ϵ. Die Platten tragen die Flächenladungsdichten ρ_s bei $x_3 = -a$ und $-\rho_s$ bei $x_3 = +a$. Die Ausdehnung der Platten sei groß im Vergleich zu ihrem Abstand, so dass alle Differentiationen in x_1 -und x_2-Richtung vernachlässigt werden können (Vernachlässigung von Randeffekten).

(a) Skizzieren Sie die Anordnung. Markieren Sie die drei auftretenden Gebiete: Index I für das Vakuum bei $x_3 < -a$. Index II für das Dielektrikum bei $-a < x_3 < +a$. Index III für das Vakuum bei $x_3 > a$. Zeichnen Sie die Normalenvektoren $\underline{n}$ der Grenzflächen ein. Geben Sie die Grenzbedingungen an den Platten für das Potential Φ und die dielektrische Verschiebung $\underline{D}$ an. Der Außenraum des Kondensators sei feldfrei.

(b) Lösen Sie die Potentialgleichung in den Gebieten I, II und III. Überlegen sie vorab, ob Sie die Poisson-Gleichung oder die Laplace-Gleichung benutzen müssen. Passen Sie die drei Lösungen mittels der Grenzbedingungen aneinander an. Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials und den Betrag des elektrischen Feldes entlang der x_3-Achse.

Bitte wenden ⟶

(c) Die Kapazität eines Kondensators ist definiert als

$$C = \frac{Q}{\delta\phi} \quad . \tag{1}$$

Q ist die Gesamtladung einer Platte. Die Plattengröße sei S. $\delta\phi$ ist die Potentialdifferenz zwischen den Platten.

Geben sie die Kapazität des Plattenkondensators in Abhängigkeit von den geometrischen Größen an.

(d) Bestimmen Sie die Energiedichte u im Inneren des Kondensators in Abhängigkeit von den geometrischen Größen. Zeigen Sie, dass im Kondensator insgesamt die Energie

$$U = \frac{1}{2} C \left(\delta\phi\right)^2 \tag{2}$$

gespeichert ist.

26. **Homogen geladene Kugel mit Vakuole** **(5 Punkte)**

Eine Kugel mit Radius R_1 ist mit Ausnahme eines kugelförmigen Hohlraums mit der konstanten Ladungsdichte ρ_0 aufgeladen. Der Hohlraum hat den Radius R_2, sein Mittelpunkt $\mathcal{O}_2$ befindet sich in der Entfernung a vom Mittelpunkt $\mathcal{O}_1$ der grossen Kugel. Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ sowie das Potential Φ in einem beliebigen Punkt im Inneren des Hohlraums. Welchen Wert hat Φ im Mittelpunkt der Hohlkugel? Im Unendlichen soll das Potential verschwinden.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie das Problem durch Superposition zweier bereits bekannter einfacher Probleme lösen können.