Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer

Elektrodynamik SS 2020

6. Übungsblatt Abgabe: 11. Juni 2020 bis 9:45 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

13. **Fresnelsche Formeln** **(20 Punkte)**

Eine ebene elektromagnetische Welle

$$\underline{E}^I = \underline{E}_0^I \, e^{i(\underline{k}^I \cdot \underline{x} - \omega^I t)} \quad ; \quad \underline{B}^I = \frac{1}{\omega^I} \, \underline{k}^I \times \underline{E}^I$$

treffe bei $x_3 = 0$ auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei homogenen isotropen Isolatoren mit den Permittivitätszahlen $\epsilon_1 \neq 1$ und $\epsilon_2 \neq 1$ sowie den Permeabilitätszahlen $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Der Normalenvektor der Grenzfläche sei $\underline{e}_3$. Die einfallende Welle komme aus dem Medium 1 und breite sich in der $x_1 - x_3$-Ebene aus.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder $\underline{E}, \underline{D}, \underline{H}, \underline{B}$ bei $x_3 = 0$ erfüllen? Folgern Sie aus den allgemeinen Stetigkeitsbedingungen Beziehungen für die Komponenten der einfallenden (I), reflektierten (R) und transmittierten Felder (T).

(b) Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle den Ansatz

$$\underline{E}^{R,T} = \underline{E}_0^{R,T} \, e^{i(\underline{k}^{R,T} \cdot \underline{x} - \omega^{R,T} t)} \quad .$$

Geben Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$ in beiden Medien an. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\omega^I = \omega^R = \omega^T \tag{1}$$

$$|\underline{k}^R| = |\underline{k}^I| \quad ; \quad |\underline{k}^T| = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} |\underline{k}^I| \tag{2}$$

$$k_2^I = k_2^T = k_2^R = 0 \quad ; \quad k_1^I = k_1^T = k_1^R \quad . \tag{3}$$

(c) Nutzen Sie diese Beziehungen aus, um das Reflexionsgesetz "Einfallswinkel=Ausfallswinkel", sowie $k_3^R = -k_3^I$ und das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.

(d) Folgern Sie aus den Maxwellschen Gleichungen, dass es zwei unabhängige Sätze von Lösungen gibt:

$$\mathrm{TE-Welle:} \quad \{E_2, B_1, B_3\} \quad ; \quad \mathrm{TM-Welle:} \quad \{B_2, E_1, E_3\}$$

(TE: transversal-elektrische Welle, TM: transversal-magnetische Welle).

(e) Formulieren Sie alle Randbedingungen aus Aufgabenteil (a) so, dass sich Bestimmungsgleichungen für die Amplituden $\underline{E}_0^R$ und $\underline{E}_0^T$ der reflektierten und der transmittierten Welle ergeben. Ermitteln Sie für die TM-Welle die Verhältnisse $t = |\underline{E}_0^T|/|\underline{E}_0^I|$ und $r = |\underline{E}_0^R|/|\underline{E}_0^I|$ und stellen Sie diese als Funktion von α (Einfallswinkel) und von ϵ_1 bzw. ϵ_2 dar. Plotten Sie $R = r^2$ und $T = 1 - R$ als Funktion des Einfallswinkels für $\epsilon_1 = 2$ und $\epsilon_2 = 4$. Diskutieren Sie den Verlauf.

Bitte wenden ⟶

(f) In Teilaufgabe (e) sollte sich für die reflektierte Welle

$$\frac{E_0^R}{E_0^I} = \frac{\epsilon_2 \cos\alpha - \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2\alpha}}{\epsilon_2 \cos\alpha + \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2\alpha}} \tag{4}$$

ergeben, wobei α den Einfallswinkel der Welle bezeichnet. Bestimmen Sie aus dieser Beziehung den *Brewster-Winkel* α_B. Das ist derjenige Einfallswinkel, bei dem die reflektierte Welle verschwindet.

14. **Zusatzaufgabe** **(8 Zusatzpunkte)**

Ausgehend von den Ergebnissen in Aufgabe 13:

(a) Nehmen Sie an, eine beliebig polarisierte Welle falle unter dem Brewster-Winkel α_B auf die Grenzfläche ein. Welche Polarisation beobachtet man dann im reflektierten Strahl und in welche Richtung zeigt $\underline{E}^R$?

(b) Betrachten Sie den Fall, dass das Licht vom optisch dichteren auf das optisch dünnere Medium einfällt ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Bestimmen Sie denjenigen Winkel α_{total}, ab dem Totalreflexion eintritt. Begründen Sie, dass k_3^T für $\alpha > \alpha_{total}$ imaginär wird und zeigen Sie, dass die reflektierte Welle und die transmittierte Welle im Fall der Totalreflexion jeweils eine Phasenverschiebung δ^R, δ^T bezogen auf die einfallende Welle aufweisen. Ermitteln Sie δ^R und δ^T als Funktion von $\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha$. Geben Sie reelle Lösungen für $\underline{E}^T(\underline{x}, t)$ und $\underline{B}^T(\underline{x}, t)$ für $\alpha > \alpha_{total}$ an.