



3. Elektromagnetische Potentiale

(14 Punkte)

Das Rechnen mit Potentialen soll trainiert werden.

Bereitstellung von Relationen für zwei stetig differenzierbare Vektorfelder $\underline{A}, \underline{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- i. $\partial_{\underline{x}} (\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{A} + (\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{B} + \underline{B} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}) + \underline{A} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B})$;
- ii. $\partial_{\underline{x}} \times (\underline{A} \times \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{A} - (\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{B} + \underline{A} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B}) - \underline{B} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A})$.

Dabei bezeichnet $\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}$ den Differentialoperator, der sich durch das formale Skalarprodukt des Vektorfeldes $\underline{A}$ mit $\partial_{\underline{x}}$ ergibt.

- (a) *Lemma:* Sei s_{ij} eine symmetrische Größe (z.B. Matrix, Operator, Tensor etc.), d.h. $s_{ij} = s_{ji}$ und sei a_{ij} eine antisymmetrische Größe, d.h. $a_{ij} = -a_{ji}$. Beweisen Sie:
Die Spur des Produktes einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Größe verschwindet, also

$$s_{ij} a_{ji} = 0. \quad (1)$$

- (b) Betrachten Sie die zeitunabhängige (statische) Form des Faraday-Gesetzes:

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = 0 \quad . \quad (2)$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise, Summenkonvention und Lemma (a), dass diese Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{E} = -\partial_{\underline{x}} \Phi \quad \text{mit} \quad \Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (3)$$

gelöst wird.

- (c) Zeigen Sie, dass Φ in der Form

$$\Phi(\underline{x}) = - \int_{\infty}^1 \underline{E}(\tau \underline{x}) \cdot \underline{x} d\tau \quad (4)$$

dargestellt werden kann, wenn die elektrische Feldstärke im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet.

- (d) Betrachten Sie die elektrische Feldstärke einer Punktladung Q im Ursprung $\underline{x} = 0$ und im Vakuum:

$$\underline{E}(\underline{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\underline{x}}{r} \quad , \quad r = |\underline{x}| \quad (5)$$

Skizzieren Sie $\underline{E}$. Überzeugen Sie sich davon, dass $\underline{E}$ wirbelfrei ist.

- (e) Für die Punktladung Q im Ursprung und im Vakuum gilt das Potential

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad . \quad (6)$$

Bestätigen Sie dieses Ergebnis mit Hilfe der Formel aus (c), indem Sie $\underline{E}$ aus (d) einsetzen.

Bitte wenden $\longrightarrow$

(f) Magnetfelder haben keine Quellen:

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} = 0 \quad . \quad (7)$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise, Summenkonvention und Lemma (a), dass diese Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad \text{mit} \quad \underline{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (8)$$

gelöst wird. Das Feld $\underline{A}$ ist das sog. *Vektorpotential*.

(g) Zeigen Sie, dass $\underline{A}$ in der Form

$$\underline{A}(\underline{x}) = \int_0^1 \underline{B}(\tau \underline{x}) \times (\tau \underline{x}) \, d\tau \quad (9)$$

dargestellt werden kann, wobei das Integral über den $\mathbb{R}^3$ -wertigen Integranden komponentenweise aufzufassen ist.

(h) Betrachten Sie die magnetische Induktion

$$\underline{B} = (x_1 x_3 - 2x_3) \underline{e}_1 - x_2 x_3 \underline{e}_2 + x_1 \underline{e}_3 \quad . \quad (10)$$

Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass $\underline{B}$ quellenfrei ist.

(i) Bestimmen Sie ein geeignetes Vektorpotential $\underline{A}$ mit der Formel aus (g) für die magnetische Induktion aus (h).

4. Feld einer elektrischen Punktladung

(6 Punkte)

(a) Leiten Sie im zeitunabhängigen Fall und im Vakuum die Poisson-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11)$$

aus dem Faraday- und dem Gauß-Gesetz ab.

(b) Für eine Punktladung Q im Ursprung gilt

$$\rho(\underline{x}) = Q \delta(\underline{x}) \quad (12)$$

mit der Delta-Distribution $\delta(\underline{x})$. Die Poisson-Gleichung ergibt sich zu

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\underline{x}) \quad . \quad (13)$$

Überprüfen Sie, dass das in Aufgabe 3(e) angegebene Potential die Poisson-Gleichung erfüllt. Zeigen Sie dazu mit Hilfe der Definition der Delta-Distribution und des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$\partial_{\underline{x}}^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\underline{x}) \quad (14)$$

gilt.