

Gravimetrie

Institut für Geophysik und Extraterrestrische Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Gravimetrie	3
3	Tachymeter	13
4	GPS	16

Stichworte: Schwerefeld der Erde, Geoid, geographische Koordinaten, UTM-Koordinaten, Poisson-Gleichung, Schwereanomalie, Gravimeter, Gezeitenkorrektur, Driftkorrektur, Breitenkorrektur, Freiluftkorrektur, Bouguerkorrektur, Topographiekorrektur, Tachymeter, Impulsmethode, Phasenvergleichsverfahren, GPS, Fehlerquellen bei der Satellitenortung, differentielles GPS.

1 Einleitung

Die Gravimetrie ist eine geophysikalische Messmethode, die auf der Vermessung von Variationen des Schwerefeldes der Erde beruht. Da diese Schwerevariationen auf Dichtestörungen im Untergrund und diese wiederum zum Beispiel auf Erzvorkommen, Tunnel oder andere Strukturen von Interesse zurückzuführen sind, zählt die Gravimetrie zu den Verfahren der angewandten Geophysik. Die Schwerevariationen werden im Rahmen einer gravimetrischen Untersuchung gemessen, bearbeitet und in geeigneter Form dargestellt. Anschließend können resultierende Schwereanomalien interpretiert und Aussagen über den Untergrund abgeleitet werden.

Das Schwerefeld und seine Vermessung sind dabei nicht nur Untersuchungsgegenstand der Geophysik, sondern ebenfalls ein Teilgebiet der Geodäsie. Beispielsweise lässt sich die Erdfigur über das Schwerefeld und seine Variationen bestimmen. Auch die Höhe

Letzte Aktualisierung im September 2022, grundlegende Überarbeitung finanziert durch Studienqualitätsmittel

über einem Referenzniveau bzw. die Höhendifferenz zwischen zwei Punkten kann über gravimetrische Messungen bestimmt werden.

1.1 Erdfigur und Normalschwerefeld

Die Erde hat keine regelmäßige Form, sondern weist eine Vielzahl von Erhöhungen und Senken an ihrer Oberfläche auf. Da eine exakte Beschreibung dieser Form sehr kompliziert und für die meisten Betrachtungen nicht notwendig ist, werden vereinfachte Modelle der Erdfigur benötigt.

In erster Näherung kann die Erde als Kugel betrachtet werden. Der Radius dieser Kugel wird hierbei so gewählt, dass das Volumen der Kugel dem tatsächlichen Volumen der Erde entspricht. Auf diese Weise ergibt sich ein mittlerer Erdradius von $R_E = 6371$ km. Durch die Rotation der Erde und die daraus resultierende Zentrifugalbeschleunigung hat die Erde allerdings eine abgeplattete Form; der Erdradius ist an den Polen kleiner als am Äquator. Aus diesem Grund stellt das Rotationsellipsoid eine bessere Näherung der tatsächlichen Erdform dar.

Während das Schwerfeld für die Kugelnäherung recht einfach über ein Kugelpotential beschrieben werden kann, ergibt sich für das Erdellipsoid eine Abhängigkeit von der geographischen Breite β . Diese Abhängigkeit wird durch die Internationale Schwereformel wiedergegeben (Kertz, 1995):

$$g(\beta) = 9,780\,490 (1 + 5,2884 \cdot 10^{-3} \sin^2(\beta) - 5,9 \cdot 10^{-6} \sin^2(2\beta)) \text{ m s}^{-2}. \quad (1)$$

Die reale Form der Erde und somit auch das tatsächliche Schwerfeld werden jedoch auch durch das Erdellipsoid noch nicht genau genug beschrieben. Für eine noch genauere Beschreibung der Erdfigur verwendet man häufig eine Äquipotentialfläche des Schwerepotentials, das sogenannte Geoid. Aufgrund der Definition über das Schwerepotential beinhaltet das Geoid alle Massenüberschüsse und -defizite, wenn auch in teils stark geglätteter Form. Das Geoid entspricht in etwa dem mittleren Meeresspiegel.

1.2 Koordinatensysteme

Da durch gravimetrische Messungen in der Regel die räumliche Variation der Schwerebeschleunigung untersucht werden soll, ist eine Verortung der einzelnen Messpunkte in einem geeigneten Koordinatensystem notwendig.

Für großskalige Messungen bietet sich dafür ein geographisches Koordinatensystem an. Die Lage eines Punktes wird in einem geographischen Koordinatensystem durch die zwei Winkelgrößen Länge λ und Breite β sowie die Höhe über dem Meeresspiegel beschrieben. Als geographische Länge wird hierbei die Position in Ost-West-Richtung und als geographische Breite die Position in Nord-Süd-Richtung bezeichnet. Als Nulllinien dienen der Nullmeridian (für λ) und der Äquator (für β).

Eine häufig genutzte Alternative zum geographischen Koordinatensystem stellt das UTM-System (von englisch *Universal Transverse Mercator*) dar. Bei diesem System wird die Erdoberfläche in 6° breite Meridianstreifen aufgeteilt, denen jeweils eine Zonennummer

zwischen 1 und 60 zugeteilt wird. Die Zonennummer Z kann über die Gleichung

$$Z = \frac{\lambda_H + 3^\circ}{6^\circ} + 30 \quad (2)$$

berechnet werden (Witte et al., 2020). Die Größe λ_H beschreibt hierbei den Längengrad des Hauptmeridians; nach Definition gilt $\lambda_H = 3^\circ + n \cdot 6^\circ$ mit einem $n \in \mathbb{N}$. Für Braunschweig ergibt sich die Zone 32. Durch Streckung bzw. Stauchung ergibt sich für jede Zone ein kartesisches Koordinatensystem, in dem ein Nord- und ein Ostwert in m angegeben werden kann. Zusätzlich dazu wird die Erde in der Breite in 8° breite Streifen eingeteilt, die mit einem Buchstaben dargestellt werden (für Deutschland U).¹

Für Messungen auf kleinerer Skala kann es sich außerdem anbieten ein lokales kartesisches Koordinatensystem zu definieren. Dieses kann anschließend im geographischen oder im UTM-Koordinatensystem verortet bzw. georeferenziert werden.

Liegen die Koordinaten im UTM-System oder einem kartesischen Koordinatensystem vor, ist die Berechnung des Abstandes d zwischen zwei Punkten trivial. Für geographische Koordinaten kann unter Annahme einer Kugelgeometrie die Näherungsformel

$$d = R_E \arccos(\sin(\beta_1) \sin(\beta_2) + \cos(\beta_1) \cos(\beta_2) \cos(\lambda_2 - \lambda_1)) \quad (3)$$

benutzt werden. Diese Gleichung läßt sich einfach durch trigonometrische Überlegungen herleiten.

2 Gravimetrie

2.1 Schwerebeschleunigung und Schwerepotential

In der Gravimetrie wird die Schwerebeschleunigung \mathbf{g} untersucht. Diese setzt sich aus drei Anteilen zusammen: Der Gravitationsbeschleunigung \mathbf{g}_{grav} der Erde, der Zentrifugalbeschleunigung \mathbf{g}_Z am Punkt der Messung sowie dem gravitativen Einfluss anderer Himmelskörper, der als Gezeitenbeschleunigung \mathbf{g}_G bezeichnet wird.

Unter der Annahme einer kugelförmigen Erde mit symmetrischer Dichteverteilung berechnet sich der gravitative Anteil zu

$$\mathbf{g}_{\text{grav}} = \gamma \frac{M_E}{R_E^2} \mathbf{r}, \quad (4)$$

wobei $\gamma = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ die Gravitationskonstante und $M_E = 5,79 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ die Masse der Erde sind (Clauser, 2018, Clauser, 2018). Der Einheitsvektor in radialer Richtung \mathbf{r} zeigt zum Massenschwerpunkt der Erde.

Der Zentrifugalbeschleunigungsanteil kann aus der Umdrehungsrates $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ der Erde sowie ihrem Radius berechnet werden und hängt von der geographischen Breite β ab (Clauser, 2014):

$$g_Z = \Omega^2 R_E \cos^2(\beta). \quad (5)$$

¹Z.B. liegt bei den UTM-Koordinaten 32U E 605604 N 5793338 der Eingang des Physikzentrums.

Er ist stets senkrecht zur Rotationsachse der Erde ausgerichtet.

Für die Gezeitenbeschleunigung sind vor allem die Einflüsse von Sonne und Mond relevant, die zum Beispiel für die Entstehung von Ebbe und Flut verantwortlich sind. Betrag und Richtung der Gezeitenbeschleunigung durch diese beiden Himmelskörper hängen von deren jeweiligen Positionen am Himmel ab und sind daher zeitlich variabel. Durch Superposition aller drei Anteile ergibt sich das Schwerefeld $\mathbf{g}(\mathbf{r})$. Da das Schwerefeld ein konservatives Feld ist, kann es durch das Schwerepotential $V(\mathbf{r})$ beschrieben werden, aus dem es durch Gradientenbildung hervorgeht (Militzer und Weber, 1964):

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (6)$$

Das Schwerepotential erfüllt die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi\gamma\rho(\mathbf{r}), \quad (7)$$

wobei $\rho(\mathbf{r})$ eine Dichteverteilung ist (Militzer und Weber, 1964). Die Poisson-Gleichung (7) besitzt die Lösung (Clauser, 2018)

$$V(\mathbf{r}_0) = -\gamma \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d^3\mathbf{r}. \quad (8)$$

Die SI-Einheit der Schwerebeschleunigung ist m s^{-2} . Die gemessenen Schwerebeschleunigungen sind allerdings häufig um einige Größenordnungen geringer, sodass stattdessen die Verwendung der Untereinheit „gravity unit“ zweckmäßig ist, wobei $1 \text{ g.u.} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$. Aus historischen Gründen wird jedoch in vielen Fällen die Einheit $\text{Gal} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ bzw. die Untereinheiten mGal und μGal verwendet.

2.2 Schwereanomalien

Für die angewandte Geophysik ist der absolute Wert der Schwerebeschleunigung oft weniger relevant als lokale Schwerestörungen $\delta\mathbf{g}(\mathbf{r})$, die von lokalen Dichteveränderungen $\delta\rho(\mathbf{r})$ herrühren. In diesem Fall beschreibt $\delta\rho$ lediglich die Dichtedifferenz zum umgebenden Gestein. Für das entsprechende (Störungs-)Potential gilt dann

$$\delta V(\mathbf{r}_0) = -\gamma \int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d^3\mathbf{r}. \quad (9)$$

Aufgrund ihres Aufbaus (siehe Abschnitt 2.3) können Gravimeter lediglich die Projektion der Schwerestörung auf die z -Komponente des Schwerefeldes messen (Clauser, 2018):

$$\delta g(\mathbf{r}_0) = \hat{\mathbf{z}} \cdot \delta\mathbf{g}(\mathbf{r}_0) = -\frac{\partial \delta V(\mathbf{r}_0)}{\partial z_0} = \gamma \int \frac{(z - z_0)\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} d^3\mathbf{r}. \quad (10)$$

Der Gleichung (10) liegt hierbei ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) zugrunde, wobei die z -Achse positiv nach unten gewählt ist. Prinzipiell lässt sich mit Gleichung (10) die Schwerestörung jeder beliebigen dreidimensionalen Dichtestörung $\delta\rho$ berechnen.

Beispielsweise ergibt sich für eine in der Tiefe h vergrabene Kugel der Masse M die Schwerestörung (Kertz, 1995)

$$\delta g(x, y, z) = -\gamma M \frac{z - h}{(x^2 + y^2 + (z - h)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11)$$

Hierbei gilt es zu beachten, dass M nicht die absolute Masse der Kugel beschreibt, sondern lediglich der Massenüberschuss bzw. das Massendefizit, das durch die Dichteänderung der Kugel entsteht.

Wie sich anhand von Gleichung (11) illustrieren lässt, lassen Gravimetriemessungen keine eindeutigen Schlüsse über die tatsächliche Dichteverteilung im Boden zu: Die beschriebene Schwereanomalie hängt lediglich von der Differenzmasse M der Kugel ab, wodurch der Radius der Kugel und die vorliegende Dichtedifferenz nicht aufgelöst werden können. Aus diesem Grund müssen für die Interpretation zusätzliche Annahmen getroffen werden, zum Beispiel die, dass die Anomalie durch eine möglichst kompakte Dichtestörung hervorgerufen wird. Häufig werden aus den gravimetrischen Daten auch Schätzwerte für verschiedene Größen abgeleitet. Beispielsweise lässt sich die Tiefe h einer Dichtestörung über die einfache Formel

$$h \approx \frac{b_{1/2}}{2} \quad (12)$$

abschätzen (Clauser, 2018). $b_{1/2}$ gibt die Halbwertsbreite der Anomalie an. Die mit Gleichung (12) berechnete Tiefe bezieht sich auf den Mittelpunkt der Störung.

Dies soll am Beispiel der kugelförmigen Dichtestörung (Gleichung 11) erläutert werden: Abbildung 1 zeigt die Schwereanomalie für drei Störungen unterschiedlicher Masse M und unterschiedlicher Tiefe h . Masse und Tiefe sind hierbei so gewählt, dass alle Schwerestörungen die gleiche maximale Anomalie aufweisen. Allerdings unterscheiden sich die Schwereanomalien in ihrer Halbwertsbreite, die sich aufgrund der unterschiedlichen Tiefe unterscheidet.

Neben kompakten Störkörpern, wie am Beispiel der Kugel diskutiert, treten häufig Strukturen auf, die sich in einer Richtung (z.B. Tunnel) oder sogar in zwei Raumrichtungen (z.B. ausgedehnte Gesteinsplatte) nicht signifikant ändern. Man spricht dann von zwei- bzw. eindimensionalen Strukturen.

Geht man in diesen Fällen vereinfachend von einer unendlichen Ausdehnung in die entsprechende(n) Richtung(en) aus, vereinfacht sich Gleichung (10). Für eine zweidimensionale Störung mit unendlicher Ausdehnung in y -Richtung ergibt sich nach Integration über y (Talwani, 1973)

$$\delta g(x_0, z_0) = 2\gamma \int \frac{(z - z_0) \delta \rho(x, z)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx dz. \quad (13)$$

Gleichung (13) kann beispielsweise zur Berechnung der Schwerestörung einer zweidimensionalen Struktur verwendet werden, deren Querschnitt durch ein Polygon angenähert werden kann. Werden die Eckpunkte des Polygons (x_i, z_i) mit $i = 1, \dots, N$ im Uhrzeigersinn nummeriert und ist das Polygon geschlossen, d.h. $(x_{N+1}, z_{N+1}) = (x_1, z_1)$, kann mithilfe geometrischer Überlegungen das Integral in Gleichung (13) umgeformt

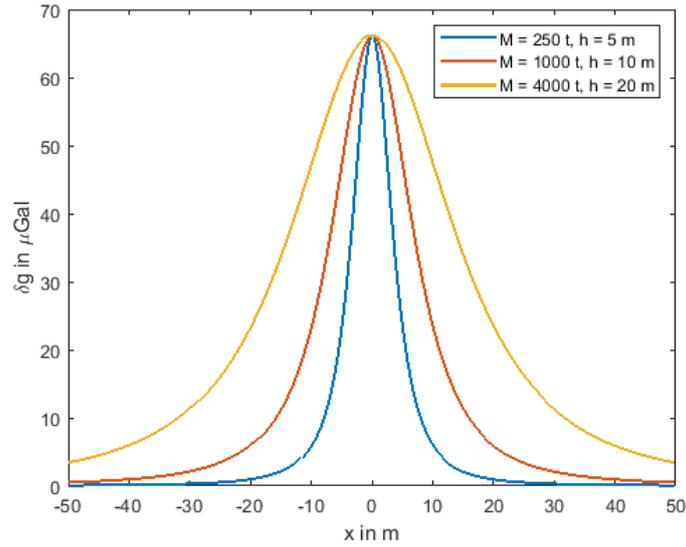


Abbildung 1: Schwereanomalie für unterschiedlich schwere Kugeln in unterschiedlicher Tiefe. Alle Schwerestörungen haben die gleiche maximale Anomalie, unterscheiden sich aber in ihrer Halbwertsbreite.

werden. Die anschließende Integration ergibt dann für die Schwerestörung im Ursprung des Koordinatensystems

$$\delta g = 2\gamma \delta\rho_0 \sum_{i=1}^N \frac{x_i z_{i+1} - z_i x_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \times \left((x_{i+1} - x_i)(\theta_i - \theta_{i+1}) + (z_{i+1} - z_i) \log \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) \quad (14)$$

mit den Abkürzungen $r_i = \sqrt{x_i^2 + z_i^2}$ und $\theta_i = \arctan(z_i/x_i)$ (Talwani, 1973).

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Interpretation der Messdaten stellen Inversionsverfahren dar, bei denen aus den Schweredaten ein (Dichte-)Modell des Untergrundes abgeleitet wird. Die Schwerestörung des abgeleiteten Modells entspricht wiederum den gemessenen Schweredaten. Ein einfacher Ansatz stellt die parametrische Inversion dar, bei der eine feste Geometrie (z.B. eine Kugelform oder eine zweidimensionale Störung mit einem Polygon als Querschnitt) vorgegeben wird und anschließend verschiedene Parameter (z.B. die Dichte oder die Tiefe des Störkörpers) angepasst wird.

Möchte man auf keine feste geometrische Struktur des Untergrundes vorgeben, kann auch ein freier Inversionsansatz gewählt werden. Hierbei wird der Untergrund in ein Gitter aus Zellen (bei einer 2D-Inversion) oder Blöcken (bei einer 3D-Inversion) eingeteilt und die Dichte für jeden Gitterpunkt einzeln angepasst. Aufgrund der zuvor diskutierten Mehrdeutigkeit in der Gravimetrie müssen hierbei jedoch noch geeignete Nebenbedingungen aufgestellt werden: Beispielsweise kann von einer möglichst kompakten Störung

(mit einem möglichst kleinen Volumen) ausgegangen werden. Alternativ kann auch ein möglichst glattes Modell (ohne große Dichtegradienten) gefordert werden.

2.3 Funktionsweise des Gravimeters

Für Schweremessungen stehen verschiedene Messsysteme zur Verfügung. Diese Messsysteme beruhen auf der Wirkung der Schwere auf eine Testmasse. Betrachtet man beispielsweise ein Masse m , die aus einer Höhe h fallen gelassen wird und nach einer Zeit t im freien Fall auf dem Boden aufkommt, lässt sich die Schwerebeschleunigung einfach berechnen über

$$g = \frac{2h}{t^2}. \quad (15)$$

Allerdings ist diese Zeit oft sehr kurz und lässt sich nicht genügend genau messen. Historisch wurden daher für Schweremessungen Pendel verwendet: Betrachtet man für ein mathematisches Pendel der Länge l die Schwingungsperiode T lässt sich hieraus ebenfalls die Schwerebeschleunigung bestimmen (Clauser, 2018)

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (16)$$

Für die meisten Anwendungen in der angewandten Geophysik sind diese einfachen Messsysteme jedoch zu ungenau, weshalb spezielle Geräte, die sogenannten Gravimeter, zum Einsatz kommen. Ein mittlerweile in die Jahre gekommenes, aber immer noch weit verbreitetes System ist das LaCoste-Romberg-Gravimeter, das in diesem Versuch zur Anwendung kommt und schematisch in Abbildung 2 dargestellt ist.

Eine Testmasse m ist an einer Feder aufgehängt, auf sie wirkt die Schwerkraft mg sowie die Kraft der Feder, die allgemein durch das Hook'sche Gesetz beschrieben werden kann (Clauser, 2018):

$$mg = -k(l - l_0) \quad (17)$$

Die Feder besitzt die Ausgangslänge l_0 und die Federkonstante k . Durch die Schwerkraft wird ein Drehmoment am Gelenk erzeugt, dass die Feder auf die Länge l ausgedehnt. Bei der hier verwendeten Nulllängenfeder ist die effektive Ausgangslänge $l_0 = 0$, wodurch die Federkraft direkt von der Länge der Feder abhängt. Die Nulllängenfeder im LaCoste-Romberg-Gravimeter ist eine Spiralfeder mit Vorspannung. Die so hervorgerufene Kraft wirkt in die gleiche Richtung wie die Schwerkraft; das so hervorgerufene Drehmoment ist somit dem rückstellenden Drehmoment entgegengerichtet.

Erhöht sich nun die Schwerebeschleunigung g um Δg , wird die Feder stärker ausgelenkt. Das Gravimeter arbeitet hierbei in einem indifferenten Gleichgewicht. Das heißt, dass sich in der veränderten Lage ebenfalls ein Gleichgewicht einstellt, da auf die Testmasse kein (Netto-)Drehmoment wirkt. Diese sogenannte Astasierung wird über die Aufhängung der Feder gewährleistet, die in Abbildung 2 zu sehen ist. Durch dieses Verfahren kann eine hohe Sensitivität erreicht werden.

Die Änderung der Schwere äußert sich in einer Änderung der Federlänge. Um nun den Wert dieser Schwereänderung zu bestimmen, wird die Testmasse über eine Schraube in die Ausgangslage zurückgestellt, indem die Federaufhängung höher bzw. niedriger

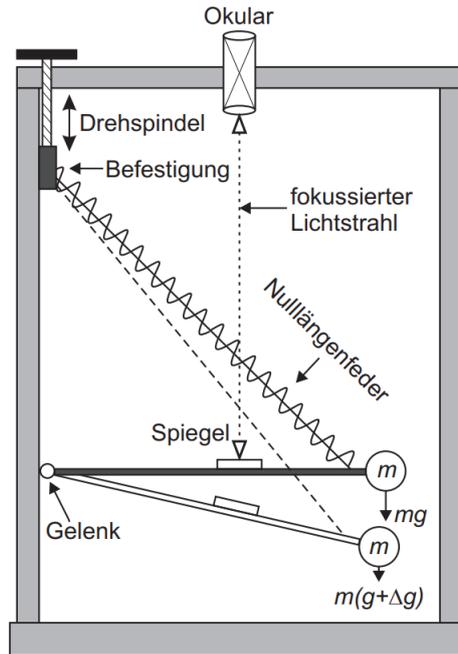


Abbildung 2: Funktionsprinzip eines astasierten Relativgravimeters mit Nulllängenfeder.
Aus: Clauser (2018).

gestellt wird. Anhand der Anzahl an notwendigen Drehungen kann der Wert der Schwereänderung abgelesen werden. Alternativ kann die Gleichgewichtslage über ein elektrisches Rückstellsystem eingestellt werden. Der Messwert wird aus der hierzu benötigten Spannungsänderung berechnet.

Der tatsächliche Aufbau des Gravimeters ist um einiges komplexer als hier beschrieben. So müssen die Federeigenschaften während der Messung konstant bleiben, weshalb der Messaufbau in einem Gehäuse mit thermostatisch geregelter Temperatur installiert wird. Die Messgenauigkeit des verwendeten LaCoste-Romberg-Gravimeters beträgt in etwa 0,1 mGal.

Neben dem hier vorgestellten LaCoste-Romberg-Gravimeter gibt es noch weitere Messsysteme. Die heute viel benutzten Gravimeter der Firma *SCINTREX* beispielsweise enthalten eine Testmasse, die durch eine vertikal aufgehängte Feder und eine elektrostatische Kraft in einer Ruhelage gehalten wird. Ändert sich die Position der Testmasse durch eine Änderung der Schwerkraft, wird die Auslenkung durch eine Änderung der elektrostatischen Kraft kompensiert. Die Schwereänderung ist hierbei proportional zur benötigten Steuerspannung.

Mit vielen für den Feldgebrauch gedachten Gravimetern, wie den hier erwähnten Systemen von LaCoste-Romberg und *SCINTREX*, ist es allerdings nicht möglich den absoluten Betrag der Schwere zu messen, sondern lediglich deren Änderung. Daher spricht man von Relativinstrumenten.

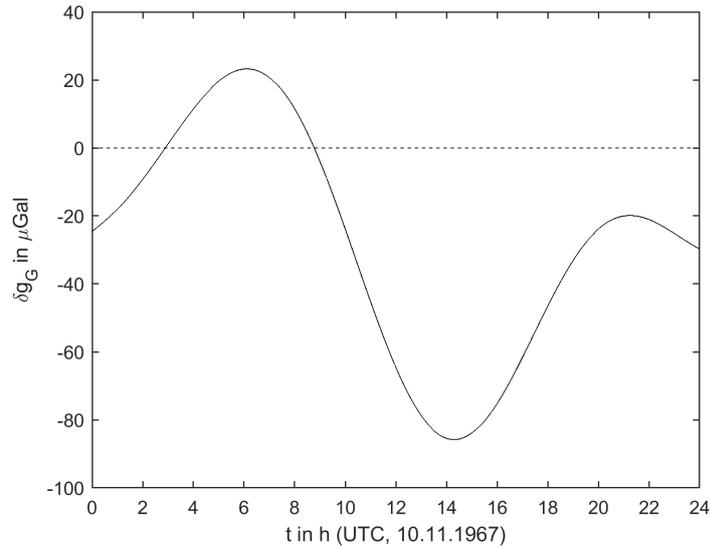


Abbildung 3: Beispiel des zeitlichen Verlaufs für die Gezeitenkorrektur am 10. November 1967, berechnet auf Grundlage von Gleichung (19).

2.4 Korrekturen der Messdaten

Neben Dichteanomalien im Untergrund beeinflusst eine Vielzahl anderer Effekte die gemessenen Schwerewerte. Um die Messdaten korrekt interpretieren zu können, müssen diese Effekte berücksichtigt und korrigiert werden. Hierzu werden alle (relevanten) Korrekturterme berechnet oder abgeschätzt und anschließend auf den Messwert δg_{obs} addiert:

$$\delta g = \delta g_{\text{obs}} + \delta g_G + \delta g_D + \delta g_L + \delta g_F + \delta g_B + \delta g_T. \quad (18)$$

Die verschiedenen Korrekturen und ihre Berechnung werden im Folgenden näher erläutert.

2.4.1 Gezeitenkorrektur δg_G

Zunächst werden die Messdaten um Beitrag der Gezeiten von Mond und Sonne bereinigt. Da die Gezeitenbeschleunigung zeitlich variabel ist, muss bereits während der Messung zu jedem Messwert die Zeit t notiert werden. In der Radialkomponente der Schwerebeschleunigung beträgt die durch die Gezeiten herangerufene Störung (Kertz, 1995, Jung, 1961)

$$\delta g_G(t) = \Gamma_m \left(\cos(2\theta_m(t)) + \frac{1}{3} \right) + \Gamma_s \left(\cos(2\theta_s(t)) + \frac{1}{3} \right) \quad (19)$$

mit $\Gamma_m = 82 \mu\text{Gal}$ und $\Gamma_s = 38 \mu\text{Gal}$ sowie den Zenitdistanzen von Mond θ_m und Sonne θ_s . Abbildung 3 zeigt ein typisches Beispiel für den Tagesgang der Gezeitenkorrektur.

2.4.2 Driftkorrektur δg_D

Da das Messprinzip des verwendeten LaCoste-Romberg-Gravimeters auf der schwerabhängigen Längenänderung einer Feder basiert (siehe Abschnitt 2.3), führen eventuelle Änderungen der Federkonstante k zu Messfehlern. Meist weist die Feder eine Drift auf, die mit fortschreitender Messdauer zunimmt und korrigiert werden muss.

In erster Näherung lässt sich diese Drift als lineare Variation der gemessenen Schwerebeschleunigung annehmen. Um die lineare Drift korrigieren zu können, wird ein Messpunkt zu Beginn (Zeitpunkt t_0) und zum Ende der Messung (t_1) wiederholt vermessen. Die Driftkorrektur δg_D ergibt sich dann durch die lineare Interpolation

$$\delta g_D(t) = -\frac{\delta g(t_1) - \delta g(t_0)}{t_1 - t_0} t. \quad (20)$$

Wie schon für die Gezeitenkorrektur muss auch für die Durchführung der Driftkorrektur für jeden Messpunkt die Zeit t bekannt sein, zu der er aufgenommen wurde. Für eine größere Genauigkeit können im Laufe des Versuchstages zusätzliche Wiederholungsmessungen an einem oder mehreren Referenzpunkten durchgeführt werden. Der Proportionalitätsfaktor für die Driftkorrektur kann anschließend durch einen linearen Fit an die Wiederholungsmessungen ermittelt werden.

Wichtig: Grundlage für die Driftkorrektur sind die bereits um den Einfluss der Gezeiten korrigierten Messdaten!

2.4.3 Breitenkorrektur δg_L

Aufgrund des Einflusses der Zentripetalkraft sowie der abgeplatteten Form der Erde nimmt die Schwerebeschleunigung mit der geographischen Breite zu. Diese Variation wird durch die Internationalen Schwereformel (1) beschrieben und muss korrigiert werden, sobald man sich während der Messung in Nord-Süd-Richtung bewegt. Auf der nördlichen Halbkugel auf dem Breitengrad β kann die entsprechende Breitenkorrektur δg_L bei einer in Richtung Norden zurückgelegten Strecke von Δs über

$$\delta g_L = -0,81 \mu\text{Gal m}^{-1} \sin(2\beta) \Delta s \quad (21)$$

berechnet werden (Militzer und Weber, 1964, Clauser, 2014).

2.4.4 Freiluftkorrektur δg_F

Die Freiluftkorrektur δg_F berücksichtigt die Abnahme der Schwerebeschleunigung mit zunehmender Höhe. An der Erdoberfläche beträgt die globale Schwerebeschleunigung

$$g(r) = g_0 \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \quad (22)$$

mit $g_0 = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ Kertz (1995). Der Radialgradient an der Erdoberfläche, aus dem sich die Variation der Schwerebeschleunigung mit der Höhe ergibt, berechnet sich zu (Kertz, 1995)

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{2g_0}{R_E} = -308 \mu\text{Gal m}^{-1}. \quad (23)$$

Um die Freiluftkorrektur auf die Schwerewerte anwenden zu können muss ein Referenzniveau definiert werden, auf das sich die Höhenmessungen beziehen. Dieses Referenzniveau kann grundsätzlich frei gewählt werden. Wird nun ein Messwert an einem Punkt aufgenommen, der eine Höhendifferenz Δh zum Referenzniveau aufweist, führt der Schweregradient zu einer Abweichung in den Messdaten, die die Schwereanomalien durch Dichtevariationen überlagern. Aus diesem Grund muss der Messwert mit der Freiluftkorrektur

$$\delta g_F = \frac{\partial g}{\partial r} \Delta h = 308 \mu\text{Gal m}^{-1} \Delta h \quad (24)$$

korrigiert werden (Militzer und Weber, 1964).

2.4.5 Bouguer- oder Gesteinsplattenkorrektur δg_B

Die Freiluftkorrektur berücksichtigt den Einfluss des radialen Schweregradienten und ist somit nur dann hinreichend, wenn der Raum zwischen dem Messpunkt und dem Referenzniveau materiefrei ist. In den meisten Fällen ist dieser Raum jedoch mit Materie gefüllt, deren Schwerewirkung aus dem Messwert herausgerechnet werden muss.

Zur Berechnung des entsprechenden Korrekturterms muss Gleichung (10) für eine in x - und y -Richtung unendlich ausgedehnte Platte der Dicke Δh und der Dichte ρ_B ausgewertet werden. Nach Ausführung der Integrale ergibt sich die Bouguer- oder Gesteinsplattenkorrektur (Militzer und Weber, 1964)

$$\delta g_B = -2\pi\gamma\rho_B\Delta h. \quad (25)$$

Die Dichte ρ_B muss hierbei passend gewählt werden. Ist die Dichte des Untergrundes nicht anderweitig bekannt, wird häufig die mittlere Dichte $\rho_B = 2670 \text{ kg m}^{-3}$ des Krustengesteins verwendet. Ist ρ_B passend gewählt, besteht zwischen dem reduzierten Schwereprofil $\delta g(x)$ und der Topographie $\Delta h(x)$ keine Korrelation mehr.

Analog zur Gesteinsplattenkorrektur müssen entsprechende Korrekturen bei marinen Messungen (Schwerewirkung der Wasserschicht) oder bei Messungen auf Satelliten oder im Flugzeug (Schwerewirkungen der Luftmassen) berücksichtigt werden. Für diesen Versuch sind diese Korrekturen jedoch nicht relevant.

2.4.6 Topographiekorrektur δg_T

Die Bouguerkorrektur berücksichtigt lediglich den Einfluss zusätzlicher oder fehlender Masse unterhalb oder oberhalb des Ortes der Messung. Jedoch haben auch Masseüberschüsse und -defizite, die sich aus der Topographie der unmittelbaren Umgebung ergeben, einen Einfluss auf die gemessene Schwerebeschleunigung. Liegt etwa, wie in Abbildung 4a verdeutlicht, ein Masseüberschuss (z.B. in Form eines Gebäude oder einer Felswand) vor, übt die zusätzliche Masse oberhalb des Messortes eine der lokalen Schwerebeschleunigung entgegengerichtete Anziehungskraft aus, wodurch die gemessene Schwerebeschleunigung verringert ist. Der gemessene Schwerewert muss um einen positiven Beitrag korrigiert werden.

Analog verhält es sich bei einem Massedefizit (z.B. in Form einer Grube oder eines Abhanges), wie in Abbildung 4b dargestellt. Die fehlende Masse trägt nicht zur Schwerebeschleunigung bei, weshalb die vertikale Schwerebeschleunigung gegenüber einer ebenen Topographie verringert ist. Auch hier muss eine positive Korrektur angebracht werden. Allgemein ist die Berechnung der Topographiekorrektur vergleichsweise aufwendig, da die Topographie genau bekannt sein muss. Liegt letztere beispielsweise in Form eines digitalen Geländemodells vor, kann das Gelände in der Umgebung des Messpunktes in Quader zerlegt werden. Sind die Koordinaten der Eckpunkte (x_i, y_i, z_i) eines solchen Quaders bekannt, kann durch Integration von Gleichung (10) der Beitrag des Quaders zur Schwerebeschleunigung im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems zu

$$\delta g_{T_i} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_i \gamma \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx dy dz}{r} \right) \quad (26)$$

$$= \rho_i \gamma \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z}{r^3} dx dy dz \quad (27)$$

$$= \rho_i \gamma \left[x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z \arctan\left(\frac{xy}{zr}\right) \right] \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} = \rho_i T_i \quad (28)$$

berechnet werden (Clauser, 2014, Clauser, 2018). Dabei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der Abstand des jeweiligen Eckpunktes vom Ursprung. Wird die Topographie in N solcher Quader zerlegt, ergibt sich die Topographiekorrektur aus der Summe aller Beiträge, d.h.

$$\delta g_T = \sum_{i=1}^N \delta g_{T_i} = \sum_{i=1}^N \rho_i T_i. \quad (29)$$

Häufig ist es jedoch auch möglich, die relevanten topographischen Strukturen durch einen oder mehrere wenige Quader anzunähern, weshalb die Störung ebenfalls über Gleichung (28) bzw. (29) abgeschätzt werden kann.

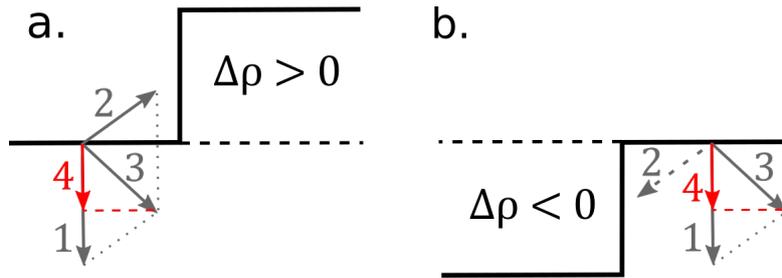


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Topographiekorrektur. a. Aus der Schwerebeschleunigung des Untergrundes (1) und der Schwerebeschleunigung des Masseüberschusses (2) ergibt sich ein Schwerevektor (3) mit einer verringerten Vertikalkomponente (4). b. Die Schwerebeschleunigung des Untergrundes (1) wird um die fehlende Schwerebeschleunigung des Massedefizits (2) verringert, wodurch sich ein Schwerevektor (3) mit einer verringerten Vertikalkomponente ergibt (4).

3 Tachymeter

Zur Vermessung der Lage der Messpunkte steht ein Tachymeter zur Verfügung. Mithilfe des Tachymeters (altgr. tachýs „schnell“ und métron „Maß“) lassen sich aus Horizontal- und Vertikalwinkeln sowie Entfernungen schnell die relativen Positionen der einzelnen Messpunkte ermitteln. Die Entfernung wird mittels elektromagnetischer Wellen bestimmt. Zudem werden die Messgeräte digital ausgelesen und die Berechnungen vom Tachymeter digital durchgeführt.

3.1 Positionsbestimmung

Mit dem Tachymeter kann die Position eines Punktes relativ zu einem Bezugspunkt bestimmt werden. Hierzu wird über einem der beiden Punkte das Tachymeter aufgebaut, das auf einem transportablen Dreibein montiert ist. Auf den anderen Punkt wird ein Prisma gestellt, das am oberen Ende einer Teleskopstange befestigt ist. Mithilfe eines Laserstrahls wird die direkte Distanz D_{dir} zwischen Tachymeter und Prisma gemessen. Das eigentliche Messverfahren wird im folgenden Abschnitt genauer behandelt.

Um aus dieser Distanzmessung den Höhenunterschied sowie die horizontale Distanz zwischen den beiden Punkten zu bestimmen, muss zusätzlich zur Entfernung der Vertikalwinkel α gemessen werden, um den die Achse der Laseroptik des Tachymeters gegen die Horizontale verkippt ist. Hierzu muss das Tachymeter im Vorfeld der Messung nivelliert werden. Die verschiedenen geometrischen Größen sind in Abbildung 5 dargestellt. Über die direkte Distanz D_{dir} und den Kippwinkel α lässt sich der Höhenunterschied

$$h' = D_{\text{dir}} \sin \alpha \quad (30)$$

zwischen Tachymeter und Prisma berechnen. Um hieraus den Höhenunterschied Δh zwischen den beiden Punkten zu berechnen, muss die Instrumentenhöhe h_i des Tachymeters

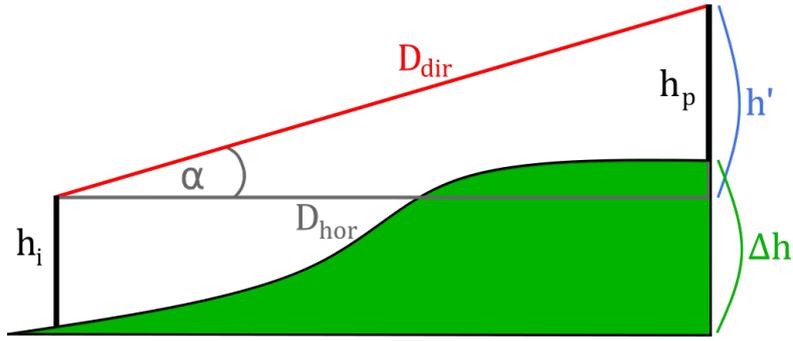


Abbildung 5: Messgeometrie zur Bestimmung des Höhenunterschiedes Δh . h_i gibt die Höhe des Tachymeters, h_p die Höhe des Prismas über dem Boden an. D_{dir} ist die gemessene, direkte Distanz, D_{hor} die horizontale Distanz. α ist der gemessene Kippwinkel des Tachymeters.

zu h' addiert und anschließend die Höhe h_p des Prismas subtrahiert werden (Witte et al., 2020):

$$\Delta h = h' + h_i - h_p = D_{\text{dir}} \sin \alpha + h_i - h_p. \quad (31)$$

Aus diesem Grund müssen vor jeder Messung die Höhen von Tachymeter und Prisma über dem Boden bekannt sein. Ist zudem die absolute Höhe von einem der beiden Punkte bekannt oder wird diese entsprechend festgelegt, kann mittels Δh die absolute Höhe des anderen Punktes bestimmt werden.

Neben der Höhendifferenz kann auch die horizontale Entfernung D_{hor} zwischen den beiden Messpunkten aus D_{dir} und α berechnet werden:

$$D_{\text{hor}} = D_{\text{dir}} \cos \alpha. \quad (32)$$

Diese kann genutzt werden, um den zweiten Messpunkt in einem geeigneten Koordinatensystem zu verorten. Grundsätzlich kann ein beliebiges Koordinatensystem gewählt werden. Oft wird die y -Achse in Richtung Norden und die x -Achse in Richtung Osten ausgerichtet. Ein solches Koordinatensystem ist in Abbildung 6 dargestellt.

Um die x - und die y -Komponente im gewählten Koordinatensystem zu berechnen, muss neben der horizontalen Distanz auch der Horizontalwinkel β bekannt sein. Hierzu wird das Tachymeter nach Norden (oder einen anderen Bezugspunkt) ausgerichtet und der Winkel auf null gestellt. Anschließend richtet man das Tachymeter auf das Prisma, wobei das Tachymeter um den Winkel β gedreht wird. Die Koordinaten können nun über die trigonometrischen Beziehungen berechnet werden (Witte et al., 2020):

$$x = D_{\text{hor}} \sin \beta, \quad y = D_{\text{hor}} \cos \beta. \quad (33)$$

Steht das Tachymeter nicht im Koordinatenursprung, sondern im Punkt $(x_0|y_0)$, müssen die Tachymeterkoordinaten zu den in Gleichung (33) berechneten Koordinaten addiert werden.

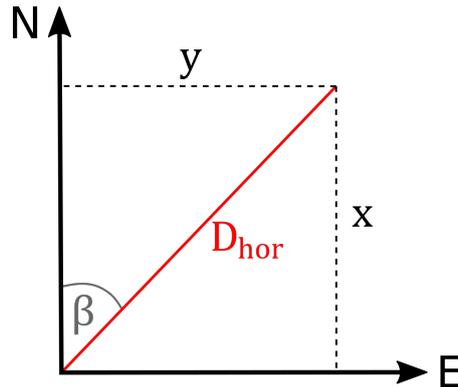


Abbildung 6: Nach Norden ausgerichtetes Koordinatensystem mit der horizontalen Distanz D_{hor} zum Ursprung und der x - und y -Koordinate des Messpunkts. β gibt den Winkel zwischen der Richtung des Messpunktes und der Nordrichtung an.

3.2 Distanzmessung

Die Distanzmessung mit dem Tachymeter beruht auf der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. Das Tachymeter sendet hierzu einen Laserstrahl aus, der vom Prisma zum Tachymeter zurück reflektiert und dort von einem Detektor gemessen wird. Für die Bestimmung der Distanz werden zwei verschiedene Verfahren angewendet: Die Impulsmethode und das Phasenvergleichsverfahren.

Bei der Impulsmethode wird anstelle eines kontinuierlichen Strahls ein einzelner Laser-Impuls ausgesendet und anschließend die Zeit gemessen, den das Laserlicht zum Prisma und zurück benötigt. Mit der Lichtgeschwindigkeit c kann aus dieser Laufzeit die Distanz D zwischen Tachymeter und Prisma bestimmt werden (Kahmen, 2005, Witte et al., 2020):

$$D = \frac{ct}{2}. \quad (34)$$

Das Phasenvergleichsverfahren basiert auf einer Messung der Phasenlage des Laserlichts. Die vom Licht zurückgelegte Strecke kann hierbei in ein ganzzahliges vielfaches der bekannten Wellenlänge λ und einen Term aufgeteilt werden, der proportional zur Phasenverschiebung ϕ ist (Kahmen, 2005, Witte et al., 2020):

$$D = \frac{\lambda}{2} \left(N + \frac{\phi}{2\pi} \right). \quad (35)$$

Da durch eine Messung der Phasenverschiebung nur die Reststrecke zwischen dem Ende des letzten vollen Wellenzuges und dem Empfänger gemessen werden kann, kann nur eine Distanz kleiner als die halbe Wellenlänge direkt gemessen werden. Aus diesem Grund wird die Messung bei verschiedenen Frequenzen wiederholt. Die Frequenzen müssen hierbei so gewählt werden, dass sowohl eine ausreichend große Wellenlänge als

auch eine hinreichend gute Auflösung erreicht werden kann.

Neben den hier beschriebenen elektrooptischen Geräten, bei denen Sender und Empfänger in einem Gerät verbaut sind und die ein Prisma als Reflektor nutzen, gibt es auch Mikrowellengeräte. In diesen Geräten sind der Sender und der Empfänger getrennt und werden je auf einem der beiden Punkte positioniert. Die Messung verläuft analog, jedoch fällt in diesem Fall der Faktor $1/2$ in den Gleichungen (34) bzw. (35) weg, da der Lichtstrahl die zu messende Entfernung nur einfach durchläuft.

4 GPS

4.1 Funktionsweise

Für die Auswertung geophysikalischer Messdaten ist eine möglichst genaue Kenntnis der Lage der Messpunkte nötig. Neben der Vermessung mittels Tachymeter bietet sich gerade für Messungen auf größeren Skalen die Positionsbestimmung per Satellitenortung an. Dabei wird die momentane Position über die Messung der Signallaufzeiten zwischen mehreren Satelliten (Sender) und dem Messgerät (Empfänger) bestimmt. Das bekannteste System ist das US-amerikanische *Global Positioning System (GPS)*. Weitere Systeme sind das russische *Global Navigation Satellite System (GLONASS)* oder das europäische Programm *Galileo*.

Alle Systeme bestehen aus einem dichten Netz von Satelliten im Erdorbit, die in regelmäßigen, sehr kurzen Abständen elektromagnetische Signale aussenden. Dem Signal ist die Position des Satelliten sowie die Uhrzeit zum Zeitpunkt der Aussendung aufmoduliert. Dieses Signal wird von einem Empfänger auf der Erde empfangen, der die aufmodulierten Informationen ausliest. Für eine genaue Positionsbestimmung muss die vom Satelliten ausgesandte Uhrzeit möglichst genau sein. GPS- und Galileo-Satelliten realisieren die Anforderung mithilfe von Atomuhren, die in den einzelnen Satelliten verbaut sind.

Durch den Vergleich der vom Satelliten ausgesandten Uhrzeit mit einer im Empfänger verbauten Uhr lässt sich aus dem Satellitensignal die Signallaufzeit τ bestimmen, die sich durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c in eine Distanz umrechnen lässt. Anschließend wird um die Position des Satelliten eine Kugel mit dem Radius $c\tau$ aufgespannt. Wiederholt man dieses Vorgehen für zwei weitere Satelliten, kann die Position des Empfängers, wie in Abbildung 7 dargestellt, aus dem Schnittpunkt der drei Kugeln bestimmt werden. Die Genauigkeit steigt hierbei an, je größer das Volumen der von den drei beteiligten Satelliten und dem Empfänger aufgespannten Pyramide ist.

Da jedoch die Uhren der Satelliten zwar untereinander, aber nicht mit der Uhr im Empfänger synchronisiert sind, weicht die Laufzeit um einen zunächst unbekanntem Offset, den Laufzeitfehler $\Delta\tau$, von der tatsächlichen Laufzeit ab. Durch Hinzunehmen eines vierten Satelliten kann dieser Fehler bestimmt werden. Mathematisch ergibt sich ein Gleichungssystem, das aus je einer Gleichung für jeden der vier Satelliten und vier Unbekannten (der Position x , y und z des Empfängers sowie dem Laufzeitfehlers $\Delta\tau$)

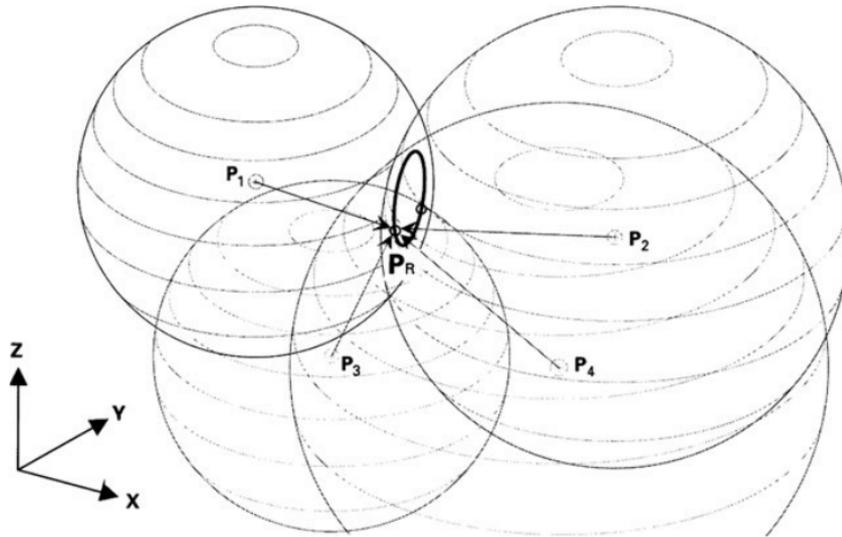


Abbildung 7: Die Satellitenortung basiert auf der Positionsbestimmung im dreidimensionalen Raum. Aus: Schüttler (2018).

besteht (Schüttler, 2018):

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} &= c(\tau_1 + \Delta\tau), \\
 \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2} &= c(\tau_2 + \Delta\tau), \\
 \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2} &= c(\tau_3 + \Delta\tau), \\
 \sqrt{(x_4 - x)^2 + (y_4 - y)^2 + (z_4 - z)^2} &= c(\tau_4 + \Delta\tau).
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Hierbei geben x_i , y_i und z_i die Position des i -ten Satelliten und τ_i die Signallaufzeit zwischen dieser Position und dem Empfänger an. In der Realität werden zur Verbesserung der Genauigkeit weitere Satelliten hinzugezogen. Dann wird das Gleichungssystem (36) um die entsprechenden Gleichungen erweitert und die vier Unbekannten durch eine Optimierungsrechnung bestimmt.

4.2 Fehlerquellen der Positionsbestimmung

Die Genauigkeit der GPS-Ortung hängt von der Genauigkeit der Satellitenpositionen und der berechneten Signallaufzeit ab. Neben einer genauen Kenntnis der Bahnen der beteiligten Satelliten ist vor allem eine korrekte Bestimmung der Signallaufzeit notwendig.

Durch die Bewegung der Satelliten mit teils sehr hohen Geschwindigkeiten sowie durch das Gravitationsfeld der Erde treten relativistische Effekte auf, die eine Korrektur der Laufzeitmessungen erforderlich machen. Mit geeigneten Modellen aus der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie können die hieraus resultierenden Messfehler berechnet und korrigiert werden.

Schwieriger abschätzen lassen sich zusätzliche Fehler, die durch den Einfluss der Atmosphäre entstehen: Da das Satellitensignal auf dem Weg zum Empfänger verschiedene Atmosphärenschichten durchqueren muss, können eine Reihe von Effekten das Signal und damit die gemessenen Laufzeiten verfälschen. Die Abweichungen hängen hierbei von vielen verschiedenen Faktoren ab, wie beispielsweise der Tages- und Jahreszeit oder der geographischen Lage.

Besonders relevant sind die Einflüsse von Ionosphäre und Troposphäre. Zeitlich variable Ionenverteilungen in der Ionosphäre führen zu einer nicht konstanten Brechung der elektromagnetischen Wellen, wodurch sich der zurückgelegte Weg verlängert oder verkürzt. Somit liefert das Gleichungssystem (36) nicht mehr die direkte Distanz des Empfängers zum Satelliten und folglich auch nicht mehr die exakte Position des Empfängers.

Beim Durchqueren der Troposphäre wird das Signal zudem abgeschwächt. Bereits bei trockenem Wetter bewirken Wasser- und Ozonmoleküle in der Troposphäre eine deutliche Dämpfung des Signals. Niederschläge in Form von Regen, Hagel oder Schnee führen sogar zu einer noch stärkeren Dämpfung.

Diese atmosphärischen Störeinflüsse können durch eine erhöhte Sonnenaktivität verstärkt werden, da in diesem Fall die oberen Atmosphärenschichten stärker ionisiert werden.

4.3 Differentielles GPS

Durch die Effekte der zuvor beschriebenen Fehler lässt sich bei der einfachen GPS-Ortung die Position des Empfängers lediglich auf einige Meter genau bestimmen. Zwar ist diese Genauigkeit für viele gängige Anwendungen, wie beispielsweise für Navigationszwecke, ausreichend. In anderen Fällen, wie zum Beispiel kleinskaligere geophysikalische Messungen, ist jedoch eine größere Genauigkeit nötig. Eine Möglichkeit, die Genauigkeit zu erhöhen, stellt die Methode des differentiellen GPS dar, mit der sich die Genauigkeit - je nach Korrekturmethode - auf einige Millimeter bis Dezimeter verbessern lässt.

Das Grundprinzip des differentiellen GPS ist in Abbildung 8 zu sehen. An einem festen Ort im Messgebiet wird eine Referenzantenne aufgestellt, deren Position durch die Vermessung mit anderen geodätischen Methoden (z.B. Tachymeter) möglichst genau bekannt ist. Anschließend wird die Antennenposition mittels GPS gemessen und das Ergebnis mit dem bekannten Ort verglichen.

Aus der Abweichung ergibt sich ein Korrekturdatensatz, der mittels Funkverbindung an die mobilen GPS-Geräte übermittelt wird. Diese können nun wiederum ihre Position mithilfe des Datensatzes korrigieren. Dabei muss natürlich beachtet werden, dass die Korrektur am Ort der Referenzantenne am genauesten ist und mit zunehmendem Abstand ungenauer wird.

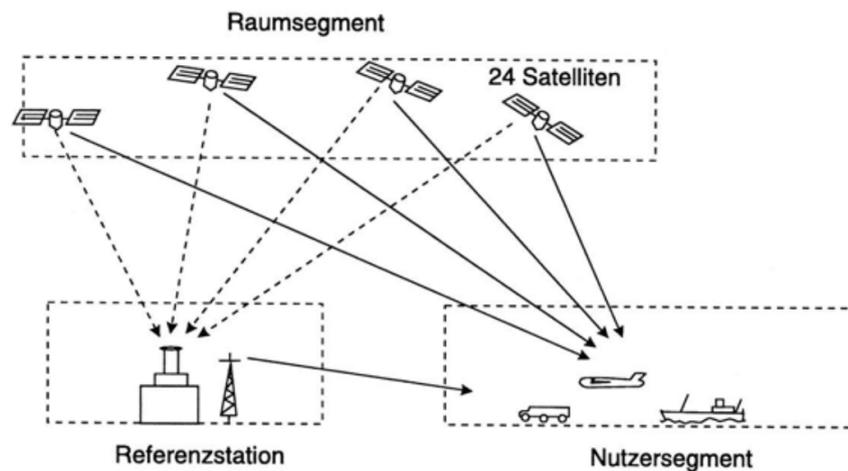


Abbildung 8: Grundprinzip der genaueren Positionsbestimmung mithilfe differenzieller GPS-Messungen. Aus: Mansfeld (1998).

Literatur

- Clauser, C. (2014). *Einführung in die Geophysik. Globale physikalische Felder und Prozesse in der Erde*. Springer Spektrum, 1. Auflage.
- Clauser, C. (2018). *Grundlagen der angewandten Geophysik - Seismik, Gravimetrie*. Springer Spektrum, 1. Auflage.
- Deumlich, F. (1972). *Instrumentenkunde der Vermessungstechnik*. Verlag für Bauwesen, 5. Auflage.
- Dodel, H. und Häupler, D. (2010). *Satellitennavigation*. Springer, 2. Auflage.
- Fett, J. (1992). *Instruction Manual, Model G and D Gravity Meters*. LaCoste & Romberg Gravity Meters, Inc., Austin, Texas.
- Fischer (1962). *Fischer Lexikon Technik I*. Fischer Verlag, Band 30.
- Großmann, W. (1972, 1971 und 1973). *Vermessungskunde I-III*. Sammlung Göschen, Bände 4468, 4469 und 6062, 14., 11. und 10. Auflage.
- Jung, K. (1961). *Schwerkraftverfahren in der Angewandten Geophysik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 5. Auflage.
- Kahmen, H. (2005). *Angewandte Geodäsie: Vermessungskunde*. De Gruyter, 20. Auflage.
- Kertz, W. (1995). *Einführung in die Geophysik I*. Spektrum Akademischer Verlag, 1. Auflage.

-
- Mansfeld, W. (1998). *Satellitenortung und Navigation*. Vieweg+Teubner Verlag, 1. Auflage.
- Melchior, P. (1973). *Harmonic analysis of earth tides*, Band 13 in *Methods in Computational Physics*, Seiten 271–341. Academic Press.
- Militzer, H. und Weber, F. (1964). *Angewandte Geophysik, Band 1: Gravimetrie und Magnetik*. Akademie-Verlag, 1. Auflage.
- Schänzer, G. (1994). Vierundzwanzig fixe Sterne, Das Global Positioning System. *ELRAD*, 4/94: S. 28–36.
- Schüttler, T. (2018). *Relativistische Effekte bei der Satellitennavigation*. Springer Vieweg, 1. Auflage.
- Talwani, M. (1973). *Computer usage in the Computation of gravity anomalies*, Band 13 in *Methods in Computational Physics*, Seiten 343–389. Academic Press.
- Telford, W. M., Geldart, L. P., und Sheriff, R. E. (1990). *Applied Geophysics*. Cambridge University Press, 2. Auflage.
- Witte, B., Sparla, P., und Blankenbach, J. (2020). *Vermessungskunde für das Bauwesen mit Grundlagen des Building Information Modeling (BIM) und der Statistik*. Wichmann, 9. Auflage.
- Zill, W. (1971). *Vermessungskunde für Bauingenieure*. Teubner, 6. Auflage.