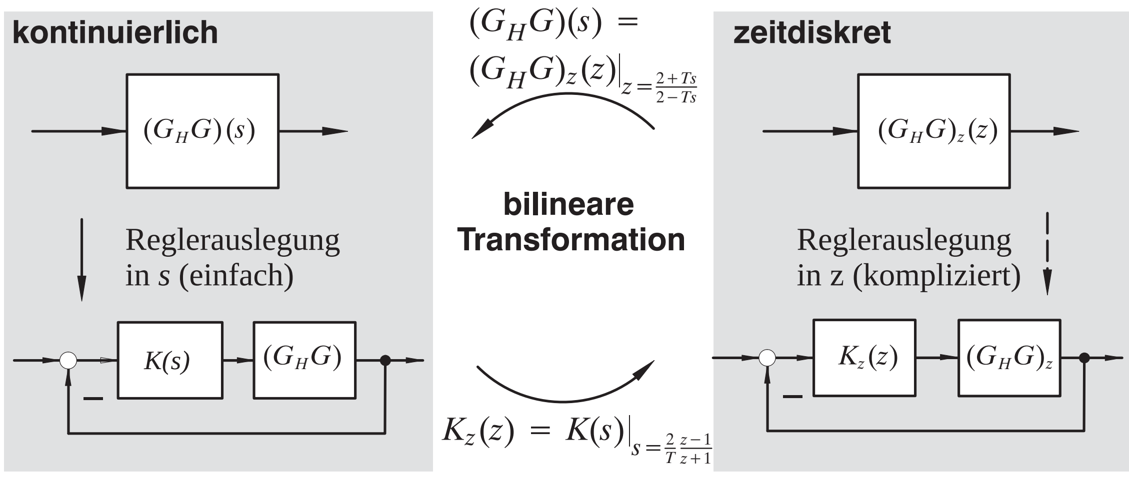
Aufgabe: Reglerauslegung in s mit der bilinearen Transformation

Die Abbildungseigenschaften der bilinearen Transformation wurden bereits untersucht. In der vorherigen Übung wurde eine vereinfachte Reglerauslegung in s durchgeführt, indem der Regler im Kontiniuierlichen wie gewohnt ausgelegt und anschließend mit der Tustin-Formel nach z transformiert wurde. Für hohe Abtastfrequenzen lieferte dies ein ausreichend gutes Verhalten. Dabei wurden die Effekte durch die Abtasthalteglieder völlig vernachlässigt.

Für niedrigere Abtastfrequenzen müssen die Abtasthalteglieder dagegen berücksichtigt werden. Dies erfordert folgendes Vorgehen:

1. Diskretisieren der kontinuierlichen Strecke mit der exakten $\mathcal{Z}$-Transformation unter Berücksichtigung der Abtasthalteglieder
2. Transformieren der diskreten Strecke nach s mit der inversen Tustin-Formel unter der Einschränkung, dass für Pole und Nullstellen der diskreten Übertragungsfunktion ($0.4 \leq |z_i| \leq 1, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \zeta_i \leq \frac{\pi}{4}$) gilt (Approximation der $\mathcal{Z}$-Transformation
3. Reglerauslegung in s wie gewohnt
4. Rücktransformation des kontinuierlich berechneten Reglers nach z mittels der Tustin-Formel

Entsprechend den vorgestellten Schritten lässt sich häufig eine komplizierte Reglerauslegung in z vermeiden.



Bemerkung: Eine Erweiterung der vereinfachten Reglerauslegung in s unter Berücksichtigung der Abtasthalteglieder führt dagegen zu einer transzendenten Übertragungsfunktion. Eine Annäherung des Laufzeitanteils durch ein PT1 entspräche nicht mehr der eigentlichen Kombination aus Halteglied und Strecke, sodass ein berechneter Regler unzureichend sein wäre.

Gegeben ist die kontinuierliche PT_2-Strecke

$$G(s) = \frac{V}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

mit $V = 1$, $T_1 = 1\,\mathrm{s}$ und $T_2 = 5\,\mathrm{s}$. Sie soll mit einem diskreten PI-Regler mit der Abtastzeit $T_A = 0,5\,\mathrm{s}$ geregelt werden. Der Ausgang des D/A-Umsetzers sind Stufenfunktionen. Die Impulsübertragungsfunktion mit Halteglied $(G_H G)_z(z)$ berechnet sich allgemein bekanntlich nach:

$$(G_H G)_z(z) = (G_H\, G)_z(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{R_\lambda}{-s_\lambda} \frac{1 - z_\lambda}{z - z_\lambda}$$

und führt bei der vorliegenden Strecke auf eine Impulsübertragungsfunktion der Form (vgl. Übung: *Übertragung von Impulsreihen*):

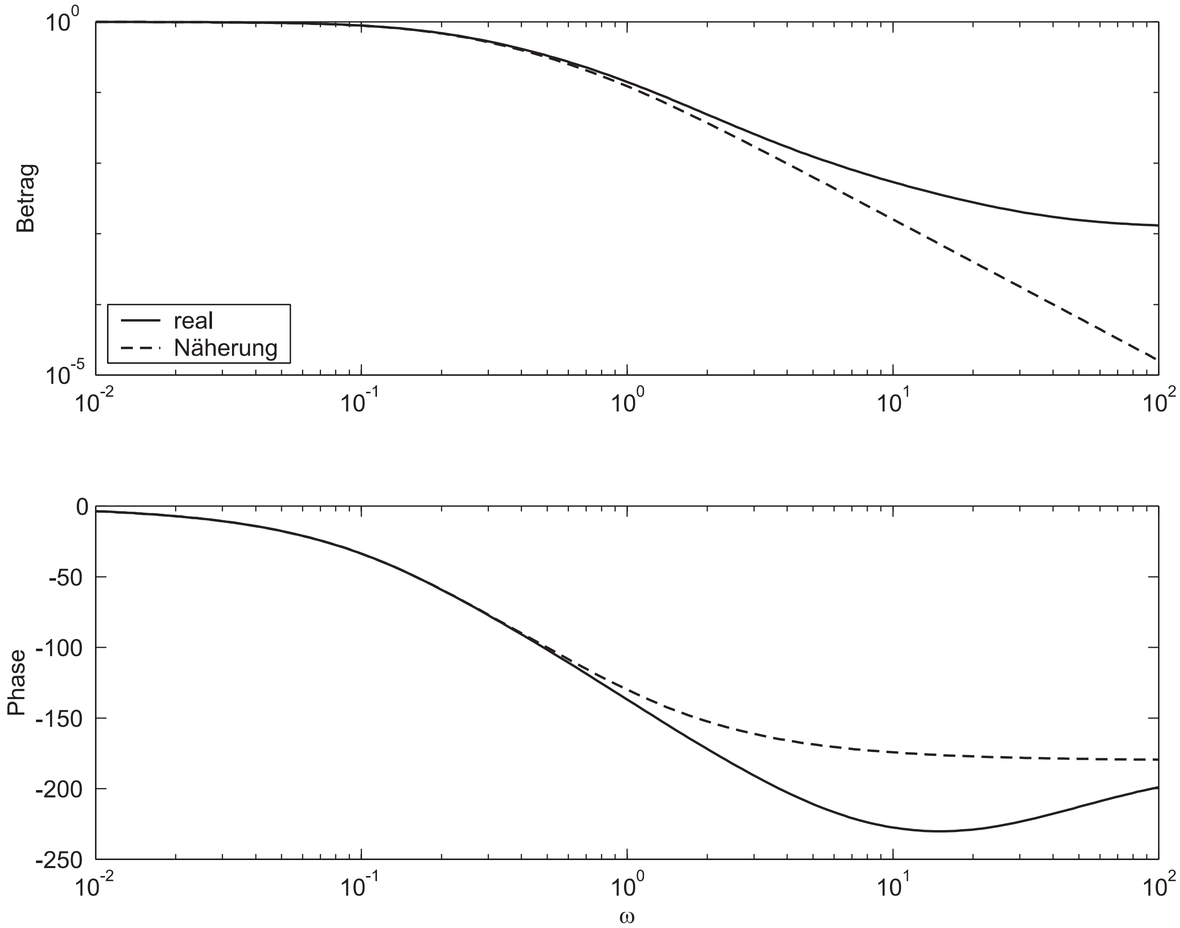
$$(G_H G)_z(z) = r_1 \frac{z - z_{01}}{(z - z_1)(z - z_2)}\,.$$

a) Bestimmen Sie $(G_H G)(s)$. Wo liegen die Pole und Nullstellen? Vergleichen Sie $(G_H G)(s)$ mit $G(s)$.

b) Machen Sie eine Näherung für die Nullstellen (Ersatzzeitkonstante). Überprüfen Sie die Näherung im Bode-Diagrammm.

c) Legen Sie jetzt einen kontinuierlichen PI-Regler für eine Dämpfung des geschlossenen Kreises von $D_g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ aus.

d) Bestimmen Sie $K_z(z)$ mit der bilinearen Transformation. Wo liegen die Pole und Nullstellen?



10^0
Betrag
10^-5
real
Näherung
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
0
-50
-100
-150
-200
-250
Phase
ω