Aufgabe: Bilineare Abbildung

In der vorherigen Übung wurde ein diskreter Integrator über die numerische Integration nach der Rechteckregel hergeleitet.

a) Berechnen Sie aus den diskreten Integratoren für die Ober- und Untersumme die Übertragungsfunktion $G_z(z)$ eines Integrators, der die Trapezregel verwendet. Zeichnen Sie das Blockschaltbild in z.

b) Skizzieren Sie Pole und Nullstellen sowie die Sprung- und Impulsantwort.

Betrachten Sie jetzt die bilineare Abbildung

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

sowie ihre inverse Abbildung

$$z = \frac{2+T\,s}{2-T\,s}\,.$$

c) Wo werden die Punkte $z = 1$, $z = 0$, $z = j$, $z = -j$ und $z = -1$ auf die s-Ebene abgebildet? Wohin wird der z-Einheitskreis abgebildet?

Hinweis: bilineare Abbildungen sind kreistreu

d) Kennzeichnen Sie den Bereich in z und s, der durch die bilineare Transformation die beste Approximation der inversen z-Transformation erfährt.

Gegeben sei nun die Übertragungsfunktion eines Integrators in s:

$$G(s) = \frac{1}{s}\,.$$

e) Transformieren Sie den Integrator mit der bilinearen Transformation nach z.

Gegeben sei die Stufenübertragungsfunktion eines PT2-Gliedes:

$$(G_H G)_z(z) = r_1 \frac{z - z_{01}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,.$$

f) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte. Was lässt sich über Pole und Nullstellen bei Verwendung der bilinearen Transformation feststellen? Unter welcher Voraussetzung liefert die bilineare Transformation eine gute Näherung für das ursprüngliche System in s?

Lokale Approximation der $\mathcal{Z}$-Transformation durch eine bilineare Abbildung