Aufgabe: Dynamisches Verhalten einer PT_2-Strecke

Das Bild 5.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Drehspulinstruments. Eine vom zu messenden Strom durchflossene Spule ist drehbar in einem örtlich homogenen Magnetfeld gelagert (Trägheitsmoment J).

Neben dem stromproportionalen Antriebsmoment

$$m_a = k_a \cdot i$$

wirkt ein Rückstellmoment

$$m_f = k_f \cdot \alpha,$$

das durch eine Spiralfeder aufgebracht wird. Zusätzlich greift eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

$$m_d = k_d \cdot \dot{\alpha}$$

am Zeiger an.

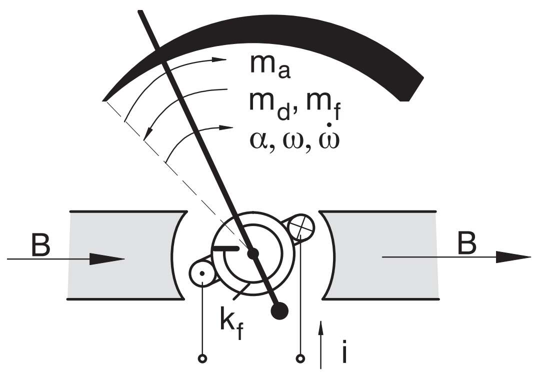

Bild 5.1: Funktionsskizze eines Drehspulinstruments

Der Dämpfungsfaktor k_d soll so eingestellt werden, dass das Instrument ein schnellstmögliches Einschwingen bei sprungförmiger Änderung des Stromes i zeigt. Die Parameter k_a und k_f sind bekannt.

a) Stellen Sie die normierte Bewegungsgleichung auf. Führen Sie die Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung und den Dämpfungsfaktor D ein.

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems zweiter Ordnung und untersuchen Sie die Lage der Pole des Systems. Wie lässt sich die Übertragungsfunktion für $D > 1$ und $D = 1$ vereinfachen?

c) Berechnen Sie mittels der Laplace-Transformation die Sprungantwort $h(t)$ für $D > 1$ unter der Annahme verschwindender Anfangsbedingungen ($\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$).

Korrespondenztafel zur Laplace-Transformation:

$$1 \quad ○\!\!-\!\!● \quad \frac{1}{s}$$

$$t \quad ○\!\!-\!\!● \quad \frac{1}{s^2}$$

$$\mathrm{e}^{-a\,t} \quad ○\!\!-\!\!● \quad \frac{1}{s+a}$$

$$t^n\,\mathrm{e}^{-a\,t} \quad ○\!\!-\!\!● \quad \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\beta\,t}\sin\alpha t \quad ○\!\!-\!\!● \quad \frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$$

Hinweis: Im Allgemeinen gilt für dir Laplace-Transformation im Zeitbereich $t \geq 0$.

d) Bild 5.2 zeigt die Sprungantworten für verschiedene Werte von D. Wann ergibt sich das schnellste Einschwingverhalten? Wie muss demnach k_d gewählt werden?

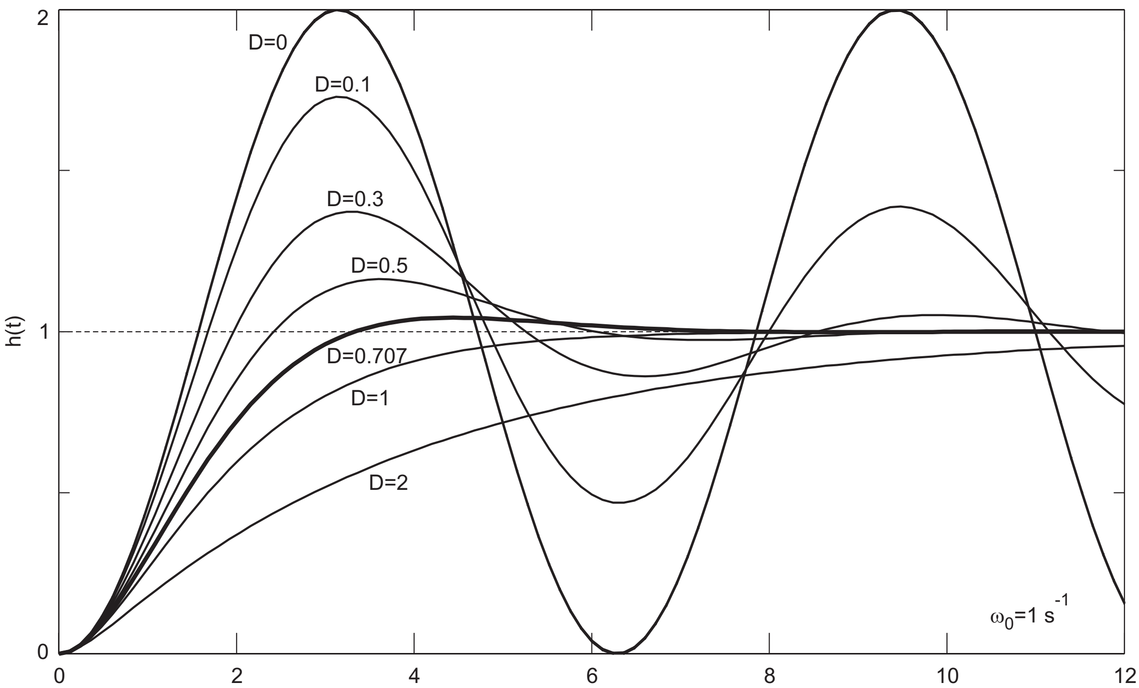

Bild 5.2: Sprungantworten für verschiedene Dämpfungen

e) Zeichnen Sie das Blockschaltbild in Regelungsnormalform. Wie lässt sich das Blockschaltbild umzeichnen, wenn $D \geq 1$ ist?

Ergänzung zu Aufgabenteil 5c)

Sprungantwort für $0 \leq D < 1$

$$H(s) = \frac{1}{s}\,\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\,D\,\omega_0\,s + \omega_0^2} = \frac{A}{s} + \frac{B\,s + C}{s^2 + 2\,D\,\omega_0\,s + \omega_0^2}$$

Parzialbruchzerlegun: $\quad A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = -2\,D\,\omega_0$

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 2\,D\,\omega_0\,s + \omega_0^2} - \frac{2\,D\,\omega_0}{s^2 + 2\,D\,\omega_0\,s + \omega_0^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s}{(s + D\,\omega_0)^2 + \omega_0^2\,(1 - D^2)} - \frac{2\,D\,\omega_0}{(s + \underbrace{D\,\omega_0}_{\beta})^2 + \underbrace{\omega_0^2\,(1 - D^2)}_{\alpha^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\} \\
&= 1 - e^{-\beta\,t}\left(\cos(\alpha\,t) - \frac{\beta}{\alpha}\sin(\alpha\,t)\right) - \frac{2\,\beta}{\alpha}\,e^{-\beta\,t}\sin(\alpha\,t) \\
&\;\vdots \\
&= 1 - \frac{1}{\alpha}e^{-\beta\,t}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,\sin\left(\alpha\,t + \arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{\cos\varphi}\right) \\
&= \arctan\left(\tan\varphi\right) = \varphi \qquad \text{o.k.}
\end{aligned}$$

wenn $D = \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos(D) = \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$

$$\Rightarrow \quad h(t) = 1 - \frac{e^{-D\,\omega_0\,t}}{\sqrt{1 - D^2}}\,\sin\left(\omega_0\sqrt{1 - D^2}\,t + \arccos(D)\right)$$