Lösung Übung 18

Aufgabe: Vereinfachte Reglerauslegung in s

a) Reglerauslegung im Kontinuierlichen

Wähle PI-Regler für PT2-Strecke:

$$G(s) = \frac{V}{(T_1\,s+1)(T_2\,s+1)}, \qquad K(s) = V_R\,\frac{T_i\,s+1}{T_i\,s} \tag{18.1}$$

Kompensiere größte Zeitkonstante $\Rightarrow$ wähle $T_i = T_2$:

$$G_K(s) = V_R\,\frac{T_i\,s+1}{T_i\,s}\cdot\frac{V}{(T_1\,s+1)(T_2\,s+1)} = \frac{V_R\,V}{T_2\,s\,(T_1\,s+1)} \tag{18.2}$$

Geschlossener Kreis:

$$\begin{aligned} G_g(s) &= \frac{G_K(s)}{1+G_K(s)} = \frac{V_R V}{T_2\,T_1 s^2 + T_2 s + V_R V} \\ &= \frac{1}{\underbrace{\frac{T_2\,T_1}{V_R V}}_{\frac{1}{\omega_0^2}}\,s^2 + \underbrace{\frac{T_2}{V_R V}}_{\frac{2D}{\omega_0}}\,s + 1} \end{aligned} \tag{18.3}$$

Koeffizientenvergleich mit der Normalform liefert:

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{T_2\,T_1}{V_R V} \quad\Leftrightarrow\quad \omega_0^2 = \frac{V_R V}{T_2\,T_1} \tag{18.4}$$

$$\frac{2D}{\omega_0} = \frac{T_2}{V_R V} \quad\Leftrightarrow\quad 4D^2 = \frac{T_2^2}{V^2 V_R^2}\omega_0^2 \tag{18.5}$$

Einsetzen und Auflösung nach V_R liefert:

$$V_R = \frac{T_2}{4D^2 T_1 V} \tag{18.6}$$

Geforderte Dämpfung $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$ legt die Reglerparamter fest:

$$V_R = \frac{T_2}{2T_1 V} = \frac{5}{2} \tag{18.7}$$

$$T_i = T_2 \tag{18.8}$$

b) Bilineare Transformation nach z:

$$\begin{aligned} K_z(z) &= K(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_A}\,\frac{z-1}{z+1}} = V_R\,\frac{T_i\,\frac{2}{T_A}\,\frac{z-1}{z+1}+1}{T_i\,\frac{2}{T_A}\,\frac{z-1}{z+1}} \\ &= V_R\,\frac{\frac{2T_i}{T_A}+1}{\frac{2T_i}{T_A}}\cdot\frac{z+\frac{1-\frac{2T_i}{T_A}}{1+\frac{2T_i}{T_A}}}{z-1} = \frac{\overbrace{V_R\left(\frac{T_A}{2T_i}+1\right)}^{r_1}z+\overbrace{V_R\,\frac{1-\frac{2T_i}{T_A}}{\frac{2T_i}{T_A}}}^{r_0}}{z-1} \\ &= \frac{r_1 z - r_0}{z-1} \end{aligned} \tag{18.9}$$

Mit Zahlenwerten ergibt dies:

$$K_z(z) = \frac{\frac{21}{8}z - \frac{19}{21}}{z-1} = \frac{2,6250z - 2,3750}{z-1} \tag{18.10}$$

c) Simulation bei verschiedenen Abtastfrequenzen

- $T_A = 0,1\,T_1$: Unterschied zwischen kontinuierlichem und vereinfacht diskretisierten Regler verschwindet
- $T_A = 0,5\,T_1$: Abweichung noch akzeptabel, aber Grenze aufgrund des Shannon-Theorems
- $T_A = T$: Scheinbar noch akzeptables Verhalten, nicht aber bei sinusförmiger Anregung mit Periode $T = T_1$

Mindestanforderung: Wähle bei vereinfachter Reglerauslegung $T_A < 0,2T_{\min}$!

d) Übertragung von Nullstellen bei Abtastung mit Halteglied

i) Kontinuierliche Strecke mit Nullstellen:

$$G(s) = \frac{T_0\,s+1}{(T_1\,s+1)(T_2\,s+1)} \tag{18.11}$$

Diese Strecke lässt sich durch PBZ in den z-Bereich transformieren.

$$G(s) = \frac{R_1}{s+\frac{1}{T_1}} + \frac{R_2}{s+\frac{1}{T_2}} \tag{18.12}$$

mit

$$R_1 = \frac{T_1 - T_0}{T_1(T_1 - T2)}, \qquad R_1 = \frac{T_2 - T_0}{T_2(T_2 - T1)} \tag{18.13}$$

Besitzt das System nur einfache Pole, so ergibt sich $\mathcal{Z}$-Transformierte zu:

$$G_H(s)G(s) \qquad \circ\!\!-\!\!\bullet \qquad (G_HG)_z(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{R_\lambda}{-s_\lambda} \cdot \frac{1-z_\lambda}{z-z_\lambda} \tag{18.14}$$

$$(G_HG)_z(z) \qquad = \qquad \frac{\frac{1}{T_1}\overbrace{\frac{T_1-T_0}{T_1-T_2}}^{A}}{\frac{1}{T_1}}\,\frac{1-z_1}{z-z_1} + \frac{\frac{1}{T_2}\overbrace{\frac{T_2-T_0}{T_2-T_1}}^{B}}{\frac{1}{T_2}}\,\frac{1-z_2}{z-z_2} \tag{18.15}$$

mit $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{-T_A}{T_1}}$ und $z_2 = \mathrm{e}^{\frac{-T_A}{T_2}}$.

Durch Vereinfachen erhält man:

$$(G_HG)_z(z) \;=\; \frac{A(1-z_1)(z-z_2) + B(1-z_2)(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)} \tag{18.16}$$

$$=\; \frac{[A(1-z_1) + B(1-z_2)]\,z + Az_2(z_1-1) + Bz_1(z_2-1)}{(z-z_1)(z-z_2)} \tag{18.17}$$

Die Gleichung wird auf die Form gebracht:

$$(G_H G)_z(z) = (A(1-z_1)+B(1-z_2)) \cdot \frac{z + \frac{Az_2(z_1-1)+Bz_1(z_2-1)}{A(1-z_1)+B(1-z_2)}}{(z-z_1)(z-z_2)} \tag{18.18}$$

$$= C\,\frac{z-r_0}{(z-z_1)(z-z_2)}, \tag{18.19}$$

wobei mit $T_0 = 2$, $T_1 = 1$, $T_2 = 5$ und $T_A = 0,5$ gilt:

$$\begin{aligned} C &= 0,169739 \\ z_1 &= \mathrm{e}^{\frac{-T_A}{T_1}} = 0,606530 \\ z_2 &= \mathrm{e}^{\frac{-T_A}{T_2}} = 0,904837 \\ r_0 &= 0,779405 \neq \mathrm{e}^{\frac{-T_A}{T_0}} = 0,778800 \end{aligned}$$

- Pole von $G(s)$ werden immer gemäß $z_\lambda = \mathrm{e}^{\frac{T_A}{T_\lambda}}$ in die z-Ebene abgebildet
- Nullstellen von $G(s)$ werden nicht exakt auf $r_\lambda = \mathrm{e}^{\frac{T_A}{T_\lambda}}$ abgebildet, Zuordnung gilt aber in erster Näherung

ii) Kontinuierliche Strecke ohne Nullstellen

$$G(s) = \frac{1}{(T_1\,s+1)(T_2\,s+1)} \quad \Rightarrow \quad (G_H G)_z(z) = C\,\frac{z-r_0}{(z-z_1)(z-z_2)} \tag{18.20}$$

Dabei gilt $r_0 = -0,818894$. Siehe dazu Übung *Übertragung von Impulsreihen*. Es entsteht also eine abtastungsbedingte Nullstelle in z, obwohl die Strecke in s keine Nullstelle besitzt!

Bei Abtastung kontinuierlicher Strecken mit $n - m = 2, 4, 6, \ldots$ entstehen abtastungsbedingte Nullstellen nahe $z = -1$. Handelt es sich dabei um einen reinen Integrator höherer Ordnung ($a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$), so liegen die Nullstellen exakt bei -1. Die Begründung ergibt sich aus der Berechnungsvorschrift für die exakte $\mathcal{Z}$-Transformation.