Lösung Übung 17

Aufgabe: Bilineare Abbildung

In der vorherigen Übung wurde die Transformationsvorschrift für die Ober- und Untersumme erläutert. Sie ergaben sich zu:

- Untersumme:

$$y(\nu) = y(\nu-1) + u(\nu-1)T \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y_z(z) = Y_z(z)\,\frac{1}{z} + U_z(z)\,\frac{1}{z}\,T \tag{17.1}$$

$$\Leftrightarrow \quad G_{zU}(z) = \frac{Y_z(z)}{U_z(z)} = \frac{T}{z-1} \tag{17.2}$$

- Obersumme:

$$y(\nu) = y(\nu-1) + u(\nu)T \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y_z(z) = Y_z(z)\,\frac{1}{z} + U_z(z)\,T \tag{17.3}$$

$$\Leftrightarrow \quad G_{zO}(z) = \frac{Y_z(z)}{U_z(z)} = \frac{T\,z}{z-1} \tag{17.4}$$

a) Übertragungsfunktion eines Integrators nach der Trapezregel

Die sogenannte *Trapezregel* kann über eine Reihenentwicklung abgeleitet werden, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird (siehe Skript, Formeln (16.18) - (16.20)). Sie lässt sich ebenfalls aus einer Mittelwertbildung von Ober- und Untersumme folgern.

$$G_{zT}(z) = \frac{1}{2}\,T\left(\frac{1}{z-1} + \frac{z}{z-1}\right) = \frac{T}{2}\,\frac{z+1}{z-1} \tag{17.5}$$

Die Übertragungsfunktion G_{zT} besitzt einen Pol bei $z = +1$ und eine Nullstelle bei $z = -1$.

Das gesuchte Blockschaltbild kann mit Hilfe einer Differenzengleichung ermittelt werden. Die Differenzengleichung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
G_{zT}(z) = \frac{Y_z(z)}{U_z(z)} &= \frac{T}{2}\,\frac{z+1}{z-1} = \frac{T}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \\
\Leftrightarrow \quad \left(1 - z^{-1}\right) Y_z(z) &= \frac{T}{2}\left(1 + z^{-1}\right) U_z(z) \\
\Leftrightarrow \quad y(\nu) - y(\nu-1) &= \frac{T}{2}\left[u(\nu) + u(\nu-1)\right] \\
\Leftrightarrow \quad y(\nu) &= y(\nu-1) + \frac{T}{2}\left[u(\nu) + u(\nu-1)\right]
\end{aligned} \tag{17.6}$$

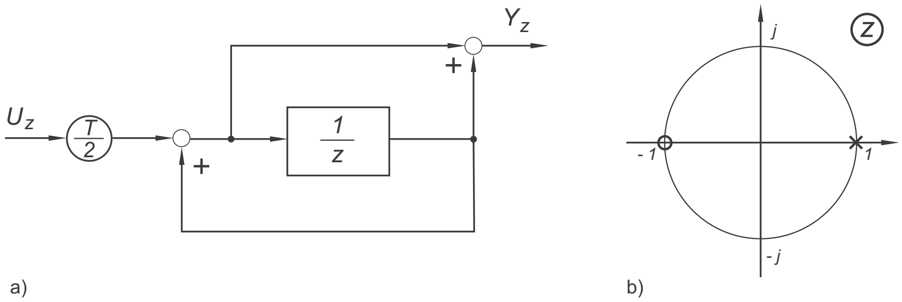

Bild 17.1: a) Blockschaltbild, b) Pol-/Nullstellenverteilung

b) Sprung- und Impulsantwort

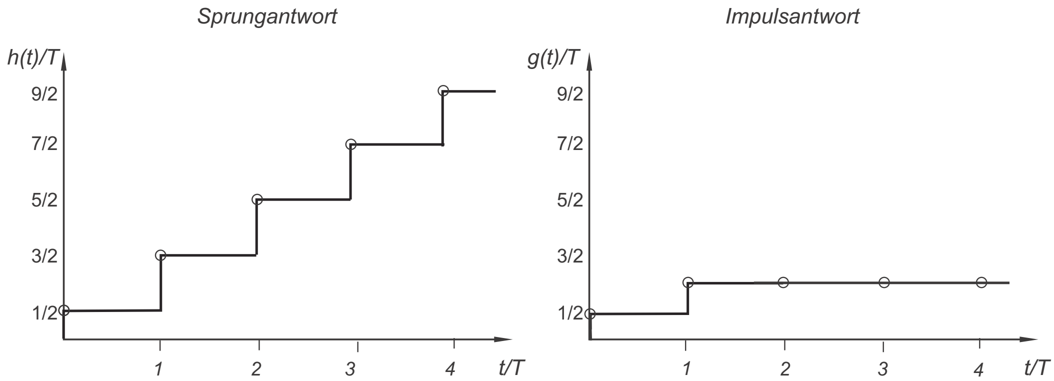

Bild 17.2: Sprung- und Impulsantwort

- Sprungantwort:

ν	$u(\nu)$	$T/2\,u(\nu)$	$T/2\,u(\nu-1)$	$y(\nu-1)$	$y(\nu)$
0	1	$(1/2)T$	0	0	$(1/2)T$
1	1	$(1/2)T$	$(1/2)T$	$(1/2)T$	$(3/2)T$
2	1	$(1/2)T$	$(1/2)T$	$(3/2)T$	$(5/2)T$
3	1	$(1/2)T$	$(1/2)T$	$(5/2)T$	$(7/2)T$

- Impulsantwort:

ν	$u(\nu)$	$T/2\,u(\nu)$	$T/2\,u(\nu-1)$	$y(\nu-1)$	$y(\nu)$
0	1	$(1/2)T$	0	0	$(1/2)T$
1	0	0	$(1/2)T$	$(1/2)T$	T
2	0	0	0	T	T
3	0	0	0	T	T

c) Abbildung des Einheitskreises von der von der z-Ebene in die s-Ebene

$$z = +1 \quad \rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\bigg|_{z=+1} = 0$$

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\bigg|_{z=0} = -\frac{2}{T}$$

$$z = +j \quad \rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\bigg|_{z=+j} = \frac{2}{T} \cdot \frac{j-1}{j+1} = \frac{2\,j}{T}$$

$$z = -j \quad \rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\bigg|_{z=-j} = \frac{2}{T} \cdot \frac{-j-1}{-j+1} = -\frac{2\,j}{T}$$

$$z = -1 \quad \rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\bigg|_{z=-1} = \infty$$

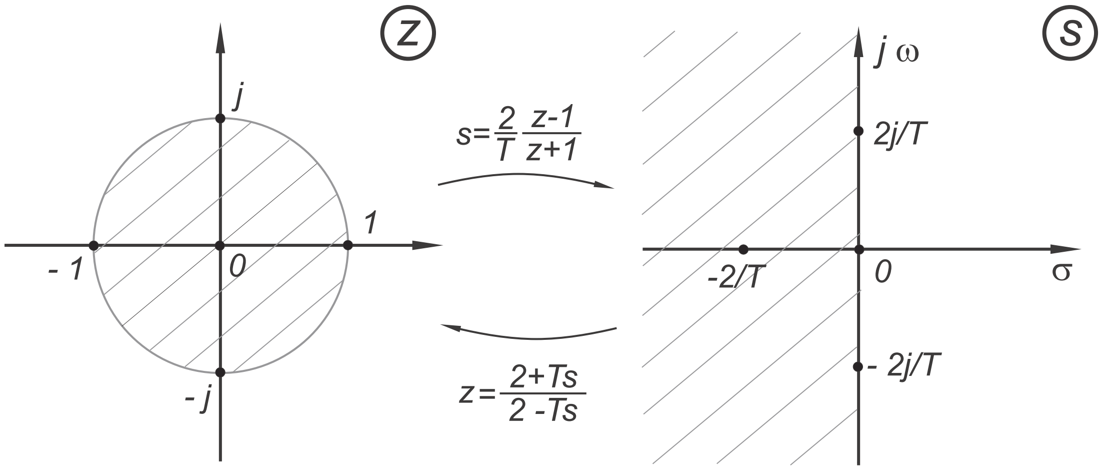

Bild 17.3: Abbildung des Einheitskreises von der z- in die s-Ebene

Das Innere des Einheitskreises in der z-Ebene wird auf die linke s-Halbebene abgebildet. Die bilineare Transformation ist im Gegensatz zur exakten Z-Transformation ($s = \frac{1}{T}(ln\, z + j\, q\, 2\,\pi)$ eindeutig.

d) Kennzeichnung des Bereichs guter Approximation

In diesem Aufgabenteil sind die Werte gesucht, für die

$$s = \frac{2}{T} \frac{e^{T\,s} - 1}{e^{T\,s} + 1} \tag{17.7}$$

hinreichend gut erfüllt ist. Eine exakte Lösung existiert bei $s = 0$. Demnach werden brauchbare Lösungen um $s = 0$ liegen (vgl. Abbildung aus vorheriger Übung).

e) Transformation eines Integrators mit der bilinearen Abbildung nach z

Die Übertragungsfunktion eines Einheitsintegrators lautet

$$G(s) = \frac{1}{s}\,.$$

Wird nun die bilineare Transformation angewendet, so ergibt sich

$$G(z) = \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}\,. \tag{17.8}$$

f) Bestimmung der s-Transformierten von $(G_H G)(z)$ eines PT2-Gliedes.

$$\begin{aligned}
(G_H G)(s) &= (G_H G)(z)\big|_{z=\frac{2+Ts}{2-Ts}} \\
&= r_1 \frac{\frac{2+Ts}{2-Ts} - z_{01}}{\left(\frac{2+Ts}{2-Ts} - z_1\right)\left(\frac{2+Ts}{2-Ts} - z_2\right)} \\
&= r_1 \frac{\left[2 + Ts - z_{01}\,(2 - Ts)\right](2 - Ts)}{\left[2 + Ts - z_1(2 - Ts)\right]\left[2 + Ts - z_2(2 - Ts)\right]} \\
&= r_1 \frac{1 - z_{01}}{(1 - z_1)(1 - z_2)} \frac{\left(\frac{T}{2}\frac{1+z_{01}}{1-z_{01}} s + 1\right)\left(-\frac{T}{2} s + 1\right)}{\left(\frac{T}{2}\frac{1+z_1}{1-z_1} s + 1\right)\left(\frac{T}{2}\frac{1+z_2}{1-z_2} s + 1\right)} \\
(G_H G)(s) &= V^{(s)} \frac{\left(T_{01}^{(s)} s + 1\right)\left(T_{02}^{(s)} s + 1\right)}{\left(T_1^{(s)} s + 1\right)\left(T_2^{(s)} s + 1\right)} \qquad (17.9)
\end{aligned}$$

Durch die Tustin-Transformation von z nach s ist noch eine weitere Nullstelle hinzugekommen. die Anzahl der Pole hingegen ist gleich geblieben. Liegen die Pole innerhalb des zulässigen Bereiches, so entsprechen diese nach der Rücktransformation nach s näherungsweise den ursprünglichen Polen der Übertragungsfunktion $G(s)$.