Lösung Übung 16

Aufgabe: Übertragung von Impulsreihen durch kontinuierliche Systeme mit Impulsspeicher

a) Berechnung der Impulsübertragungsfunktionen

- PT_1-Element: Die Übertragungsfunktion des PT_1-Elements lautet

$$G_1(s) = \frac{V}{T_1\,s+1} = \frac{\dfrac{V}{T_1}}{s+\dfrac{1}{T_1}} = V\,\frac{s_1}{s+s_1} \quad ; \quad s_1 = \frac{1}{T_1}$$

Die Impulsübertragungsfunktion mit Halteglied lässt sich berechnen zu

$$(G_H\,G_1(s))_z(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{V\,s_1}{s\,(s+s_1)}\right\}\right\}$$

Eine Partialbruchzerlegung mit anschließender $\mathcal{Z}$-Transformation mittels Transformationstabelle ergibt

$$\frac{V\,s_1}{s\,(s+s_1)} = \frac{V}{s} - \frac{V}{s+s_1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{V\,z}{z-1} - \frac{V\,z}{z-z_1} \quad ; \quad z_1 = e^{-T\,s_1}$$

Dieses Ergebnis wird in die obige Impulsübertragungsfunktion eingesetzt und liefert

$$\begin{aligned}(G_H\,G_1(s))_z(z) &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{V\,z}{z-1} - \frac{V\,z}{z-z_1}\right)\\ &= V\,\frac{1-z_1}{z-z_1}\end{aligned}$$

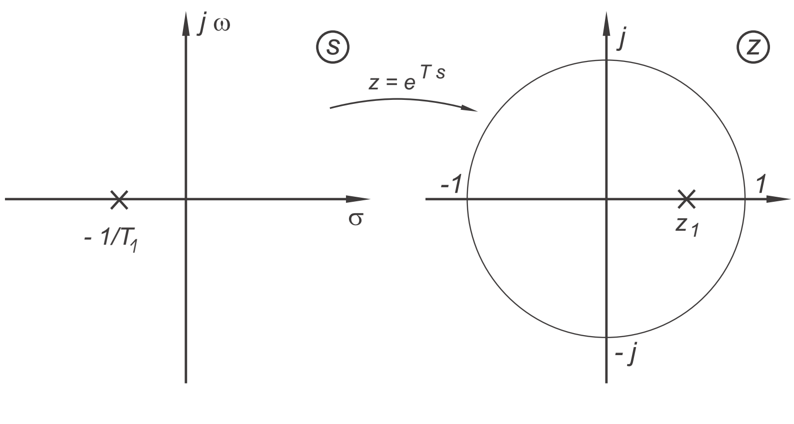

Bild 16.1: Polverteilung in der s- und z-Ebene

- PT_2-Element:

  Mit der Annahme einer Dämpfung von $D > 1$ besitzt das PT_2-Element zwei reelle ungleiche Einzelpole.

  Allgemein gilt für Impulsübertragungsfunktionen mit Halteglied bei Einzelpolen der folgende Zusammenhang:

$$G(s) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{R_\lambda}{s - s_\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \left(G_H\, G(s)\right)_z(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{R_\lambda}{-s_\lambda} \frac{1 - z_\lambda}{z - z_\lambda}$$

  Die Übertragungsfunktion des PT_2-Elements lautet

$$G_2(s) = \frac{V}{(T_2\, s + 1)\ (T_3\, s + 1)} = \frac{V}{T_2\, T_3} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T_2}\right) \left(s + \frac{1}{T_3}\right)}$$

  Eine Partialbruchzerlegung ($-s_2 = 1/T_2$ und $-s_3 = 1/T_3$) liefert

$$G_2(s) = \frac{R_2}{s - s_2} + \frac{R_3}{s - s_3} \quad ; \quad R_2 = V \frac{s_2\, s_3}{s_2 - s_3}, \quad R_3 = -R_2$$

  Mit diesem Ausdruck kann die $\mathcal{Z}$-Transformation nach der obigen Formel erfolgen.

$$(G_H\, G_2(s))_z(z) = \frac{R_2}{-s_2} \frac{1 - z_2}{z - z_2} + \frac{R_3}{-s_3} \frac{1 - z_3}{z - z_3} \quad ; \quad z_2 = e^{T\, s_2}, \quad z_3 = e^{T\, s_3}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \quad V \cdot \frac{s_2\, s_3}{s_2 - s_3} \frac{1}{-s_2} \frac{1 - z_2}{z - z_2} - V \cdot \frac{s_2\, s_3}{s_2 - s_3} \frac{1}{-s_3} \frac{1 - z_3}{z - z_3}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \quad \frac{V}{s_2 - s_3} \left[\frac{-s_3\, (1 - z_2)\ (z - z_3) + s_2\, (1 - z_3)\ (z - z_2)}{(z - z_2)\ (z - z_3)} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad = \quad \frac{V}{s_2 - s_3} \left[\frac{(s_2\, (1 - z_3) - s_3\, (1 - z_2))\, z + s_3\, z_3\, (1 - z_2) - s_2\, z_2\, (1 - z_3)}{(z - z_2)\ (z - z_3)} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad = \quad \underbrace{V\, \frac{(s_2\, (1 - z_3) - s_3\, (1 - z_2))}{s_2 - s_3}}_{r_1} \cdot \frac{z - \overbrace{\frac{s_2\, z_2\, (1 - z_3) - s_3\, z_3\, (1 - z_2)}{(s_2\, (1 - z_3) - s_3\, (1 - z_2))}}^{z_{01}}}{(z - z_2)\ (z - z_3)}$$

$$(G_H\, G_2(s))_z(z) = r_1 \frac{z - z_{01}}{(z - z_2)\ (z - z_3)}$$

  Anmerkung: Es entsteht eine Nullstelle in z.

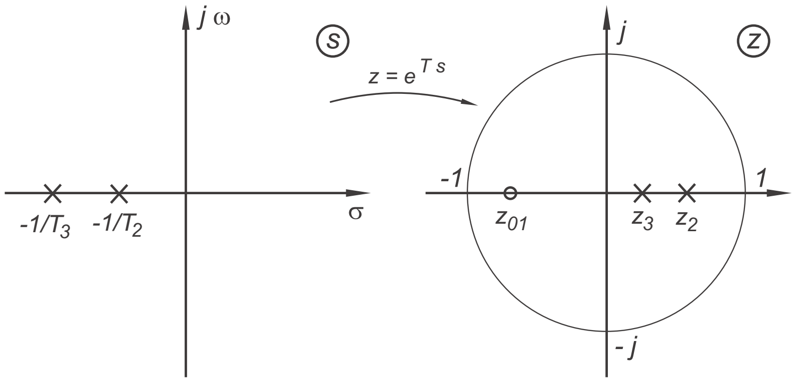

Bild 16.2: Pole und Nullstellen in der s- und z-Ebene

Bei zeitlichen Systemen entstehen Nullstellen, die in keinem unmittelbaren Verhältnis zum abgetasteten System stehen. Die Lage der Pole und Nullstellen ist abhängig von der Abtastzeit T.

b) $\mathcal{Z}$-Transformierte eines abgetasteten Singnals

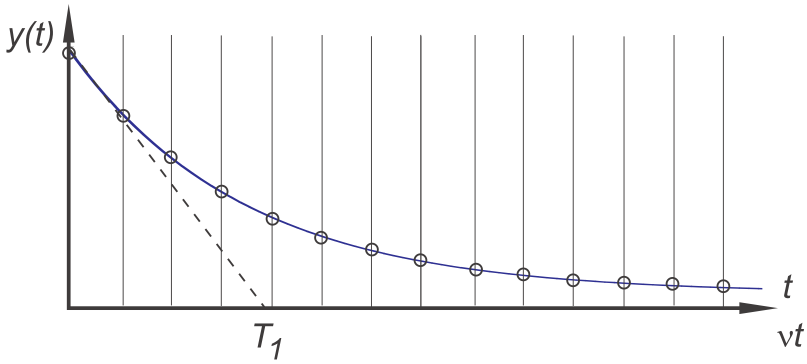

Bild 16.3: Kontinuierliche Funktion und abgetastetes Signal

- Zeitfunktion ($t \geq 0$)

$$y(t) = e^{-\frac{t}{T_1}}$$

- abgetastetes Signal ($t \geq 0$)

$$y^*(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{t}{T_1}}\, \delta(t - \nu\, T)$$

- Laplace-Transformation ($t \geq 0$)

$$Y(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu \frac{T}{T_1}}\, e^{-\nu\, T\, s}$$

- $\mathcal{Z}$-Transformation $(t \geq 0)$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} {z_1}^{\nu}\, z^{-\nu} \qquad ; \quad z_1 = e^{\frac{T}{T_1}}, \quad z = e^{T\,s} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{z}\right)^{\nu} \end{aligned}$$

Diese Summe konvergiert für $|z_1| < |z|$ und es ergibt sich für $Y_z(z)$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \dfrac{z_1}{z}} = \frac{z}{z - z_1}$$

c) $\mathcal{Z}$-Transformierte der Sprungfunktion

Mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil b).

$$y(t) = e^{-\frac{t}{T_1}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(z) = \frac{z}{z - z_1}$$

Lässt man T_1 in diesem Ergebnis gegen unendlich gehen, so nähert sich die diese Funktion der Sprungfunktion $\sigma(t)$ an.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \lim_{T_1 \to \infty} \frac{z}{z - z_1} \quad ; \quad z_1 = e^{-\frac{T}{T_1}} \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

Die $\mathcal{Z}$-Transformierte der Sprungfunktion lautet demnach

$$\mathcal{Z}\{\sigma(t)\} = \frac{z}{z - 1}$$

d) Differenzengleichung

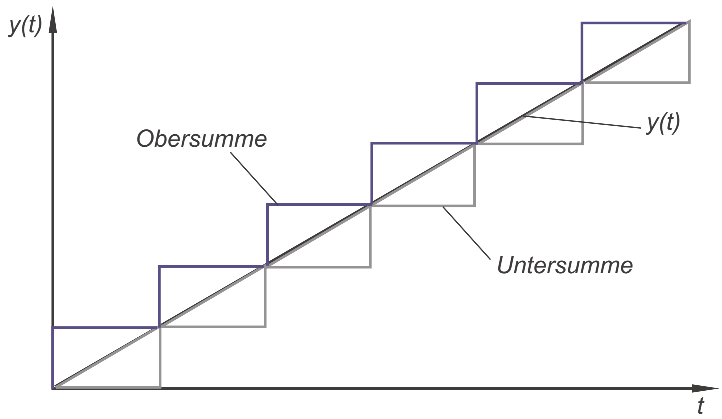

Bild 16.4: Ober- und Untersumme

- Untersumme:

$$y(\nu) = y(\nu-1) + u(\nu-1)T \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y_z(z) = Y_z(z)\,\frac{1}{z} + U_z(z)\,\frac{1}{z}\,T$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_z(z)\left(1-\frac{1}{z}\right) = T\,U_z(z)\,\frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{Y_z(z)}{U_z(z)} = \frac{T\,z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{z-1}$$

- Obersumme:

$$y(\nu) = y(\nu-1) + u(\nu)T \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y_z(z) = Y_z(z)\,\frac{1}{z} + U_z(z)\,T$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_z(z)\left(1-\frac{1}{z}\right) = T\,U_z(z)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{Y_z(z)}{U_z(z)} = \frac{T}{1-z^{-1}} = \frac{T\,z}{z-1}$$

Die Untersumme ist gegenüber der Obersumme um einen Takt verschoben.

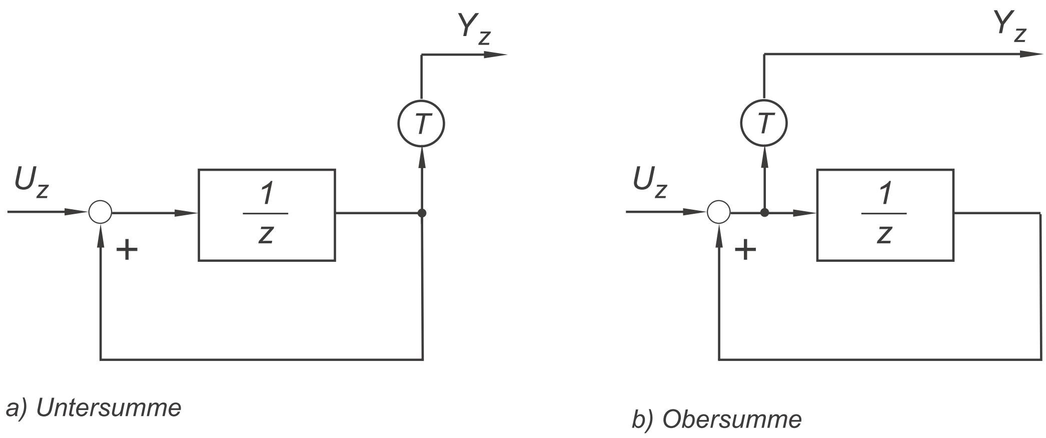

Bild 16.5: Untersumme (a) und Obersumme (b)

e) Sprung- und Impulsantwort

Bei der Sprungantwort gibt die Untersumme den kontinuierlichen Verlauf besser wieder und bei der Impulsantwort gibt die Obersumme den kontinuierlichen Verlauf besser wieder.

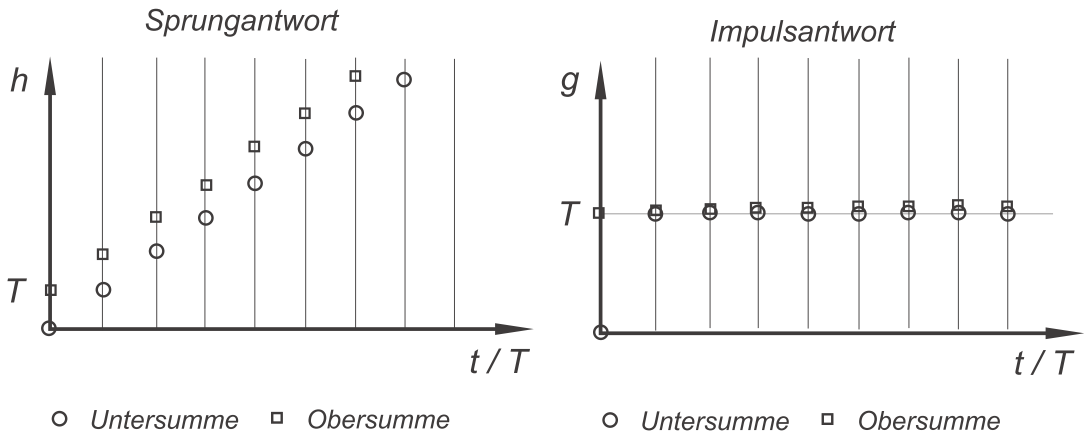

Bild 16.6: Sprung- und Impulsantwort

f) Berechnung der Sprungantwort

Die abgetastete Sprungantwort ist nach Aufgabenteil c)

$$U_z(z) = \frac{z}{z-1}$$

Diese stellt die Anregung zur Berechnung der Sprungantwort dar.

- Untersumme:

$$Y_z(z) = G_z(z) \cdot U_z(z) = \frac{T}{z-1}\,\frac{z}{z-1} = \frac{T\,z}{(z-1)^2}$$

$Y_z(z)$ ist die Sprungantwort bei einem Integrator nach der Untersumme.

$$\frac{T\,z}{(z-1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad t$$

- Obersumme:

$$Y_z(z) = G_z(z) \cdot U_z(z) = \frac{T\,z}{z-1}\,\frac{z}{z-1} = \frac{T\,z^2}{(z-1)^2}$$

$$\frac{T\,z^2}{(z-1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad T + t$$

Die Untersumme stellt eine um einen Takt verschobene Rampe dar.