Lösung Übung 7

Aufgabe: Hurwitz-Stabilitätskriterium

Betrachtet wird eine Übertragungsfunktion in der allgemeinen Form:

$$G(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{7.1}$$

Das System ist stabil, wenn alle Pole (Nullstellen des Nenners) in der linken Halbebene liegen. Die Nullstellen des Nenners müssen also alle einen negativen Realteil besitzen. Unter der Voraussetzung, dass $a_n > 0$ ist werde das folgende Polynom betrachtet:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_n)(s - s_{n-1} \cdots (s - s_1)(s - s_0) \tag{7.2}$$

Das Polynom ist dann und nur dann ein Hurwitz-Polynom, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

i) alle Koeffizienten a_i von $P(s)$ sind ungleich null: $a_i \neq 0$

ii) alle Koeffiziente a_i von $P(s)$ besitzen ein positives Vorzeichen: $a_i > 0$

iii) alle n Hurwitz-Determninanten D_1,...,D_n sind positiv: $D_i > 0$ Mittels des folgenden Schemas:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
D_1 & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
D_2 & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
D_3 & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\
D_4 & a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
D_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \underbrace{a_{n-n}}_{=a_0}
\end{array}$$

folgen die Berechnungsvorschriften:

$$D_1 = |a_{n-1}| \tag{7.3}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} \tag{7.4}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} \tag{7.5}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} \end{vmatrix} \tag{7.6}$$

$$\vdots$$

D_n ist bereits durch die Vorzeichenbedingung festgelegt: $D_n = a_0 \cdot D_{n-1}$

Die Determinanten werden nach der folgenden Regel gebildet:

1) Hauptdiagonale: $a_{n-1} \cdots a_0$

2) nach rechts aufsteigende Indizes in einer Zeile bis a_n, danach 0

3) nach links abfallende Indizes in einer Zeile bis a_0, danach 0

a)

- Übertragungsfunktion des offenen Kreises (Vorwärtsübertragungsfunktion)

$$G_V(s) = \frac{K_0}{s} \cdot \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1} = \frac{K_0}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s} \tag{7.7}$$

- Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

  Die Kreisübertragungsfunktion ist gleich der Vorwärtsübertragungsfunktion, da in der Rückführung kein Übertragungselement enthalten ist.

$$G_g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_V(s)}{1 + G_K(s)} = \frac{\frac{K_0}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s}}{1 + \frac{K_0}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s}} \tag{7.8}$$

$$= \frac{\overbrace{K_0}^{b_0}}{\underbrace{T_1 T_2}_{a_3} s^3 + \underbrace{(T_1 + T_2)}_{a_2} s^2 + \underbrace{1}_{a_1} s + \underbrace{K_0}_{a_0}} \tag{7.9}$$

b) Der Wertebereich von K_0 ist so zu bestimmen, dass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist (alle Pole liegen in der linken Halbebene). Ein lineares System ist *asymptotisch stabil*, wenn sein charakteristischen Polynom ein Hurwitz-Polynom ist.

$$\mathcal{N}\{G_g(s)\} = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K_0 \overset{!}{=} 0 \tag{7.10}$$

Prüfung der Bedingungen

ii) alle $a_i > 0$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= K_0 && \Rightarrow \quad K_0 > 0 \\
a_1 &= 1 && > 0 \quad \checkmark \\
a_2 &= T_1 + T_2 && > 0 \quad \checkmark \quad \forall T_1, T_2 > 0 \quad \text{lt. Voraussetzung} \\
a_3 &= T_1 T_2 && > 0 \quad \checkmark \quad \forall T_1, T_2 > 0 \quad \text{lt. Voraussetzung}
\end{aligned}$$

Bedingung ii) beinhaltet i) und ist somit ebenfalls sicher gestellt.

iii) Hurwitz-Determinanten D_1 bis D_3:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= a_{n-1} = a_{3-2} = a_2 = T_1 + T_2 \quad > 0 \quad \surd \quad \forall T_1, T_2 > 0 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3 \\
&= (T_1 + T_2) \cdot 1 - K_0 T_1 T_2 \overset{!}{>} 0 \\
&= T_1 + T_2 - K_0 T_1 T_2 > 0 \\
&\Leftrightarrow K_0 < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \\
D_3 &= a_0 \cdot D_2
\end{aligned}
$$

Fasst man die gefundenen Bedingungen zusammen, so folgt, dass asymptotische Stabilität genau dann erreicht ist, wenn gilt:

$$
0 < K_0 < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \tag{7.11}
$$

(Es ist allerdings keine Aussage getroffen worden, ob der geschlossene Kreis schwingungsfähig ist oder nicht!)

Bemerkung: Asymptotische Stabilität

- Ein asymptotisch stabiles System läuft aus einem beliebigen Anfangszustand ohne äußeren Einfluss stets in die Nullage.
- Ein stabiles, aber nicht asymptotisch stabiles System läuft aus einem beliebigen Anfangszustand ohne äußeren Einfluss nicht zwangsläufig in die Nullage, ist aber begrenzt, sodass innere Systemgrößen nicht über alle Grenzen wachsen.