Wurzelortskurve (WOK)

Definition

Die Wurzelortskurve ist der geometrische Ort aller Wurzeln (Nullstellen) der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises, d.h. von $1 + k \cdot G_k'(s) = 0$ bei Variation des Parameters $0 \leq k < \infty$.

Konstruktionsprinzip der WOK

1. Bestimmen des Verlaufs der WOK nach der Phasenbeziehung

$$\sum_{i=1}^{m} \arg\{s - s_{0i}\} - \sum_{j=1}^{n} \arg\{s - s_j\} = -\pi \pm 2\,\pi\,l, \quad l = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

2. Parametrierung der WOK nach der Betragsbeziehung

$$k = \left|\frac{1}{G_k'(s)}\right| = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} |s - s_j|}{\prod\limits_{i=1}^{m} |s - s_{0i}|}$$

Regeln zur Konstruktion der WOK

1. Allgemeiner Verlauf:
   - Die WOK ist *kontinuierlich* und *symmetrisch* zur reellen Achse.
   - Die WOK besteht aus n Ästen, die jeweils *in den Polen des offenen Kreises* für $k = 0$ *beginnen.*
   - m Kurvenäste *enden* für $k \to \infty$ *in den Nullstellen des* offenen Kreises.
   - $(n - m)$ Kurvenäste *enden im Unendlichen.*
2. Verlauf der WOK auf der reellen Achse:
   Ein Punkt $(s, 0\,\mathrm{j})$ der reellen Achse ist dann Punkt der WOK, wenn er *links* von einer *ungeraden* Anzahl an Polen *plus* Nullstellen des offenen Kreises liegt.
   Pole und Nullstellen werden entsprechend ihrer Häufigkeit gezählt, konjugiert komplexe Pole und Nullstellen liefern keinen Beitrag.
3. Asymptoten:
   - Die $(n - m)$ ins Unendliche strebenden Äste der WOK haben Asymptoten, die sich im *Wurzelschwerpunkt* $W(\sigma_A, 0\,\mathrm{j})$ auf der reellen Achse schneiden.

$$\sigma_A = \frac{1}{n - m} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\{s_j\} - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Re}\{s_{0i}\} \right)$$

- Die *Neigungswinkel* Φ_A der Asymptoten gegen die reelle Achse betragen

$$\Phi_A = \frac{\pi + 2\,\pi\,l}{n-m}, \quad l = 0,\,1,\,2,\,\ldots,(n-m)-1$$

4. Verzweigungspunkte (Vereinigungspunkt) von (auf) der reellen Achse:
Liegt ein WOK-Ast zwischen zwei Polen (Nullstellen) von $G_k'(s)$, dann existiert mindestens ein Verzweigungspunkt (Vereinigungspunkt) $V(\sigma_V, 0\,\mathrm{j})$ der WOK zwischen beiden Polen (Nullstellen). Er ergibt sich für $s = \sigma_V$ als Lösung der Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s-s_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-s_{0i}}\,.$$

5. Austrittswinkel (Eintrittswinkel) der WOK aus r-fachen Polen (Nullstellen):

   - komplexer r-facher Pol (Nullstelle) mit jeweils $l = 0,\,1,\,\ldots,\,r-1$

$$\begin{aligned}\text{Pol: } \varphi_l &= \frac{1}{r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_{0i} - \sum_{j=1,\neq l}^{n}\varphi_j \pm \pi\cdot(2\,l+1)\right)\\ \text{Nullstelle: } \varphi_{0l} &= \frac{1}{r}\cdot\left(\sum_{i=1,\neq l}^{m}\varphi_{0i} - \sum_{j=1}^{n}\varphi_j \pm \pi\cdot(2\,l+1)\right)\end{aligned}$$

   - reeller r-facher Pol (Nullstelle)

$$\begin{aligned}\text{Pol: } \varphi_l &= \frac{\pi}{r}\left[A_P - A_N \pm (2\,l+1)\right], \quad l = 0,\,1,\,\ldots,\,r-1\\ \text{Nullstelle: } \varphi_{0l} &= \frac{\pi}{r}\left[A_P - A_N \pm (2\,l+1)\right], \quad l = 0,\,1,\,\ldots,\,r-1\end{aligned}$$

mit A_P : Anzahl der Pole rechts der Mehrfachwurzel
A_N : Anzahl der Nullstellen rechts der Mehrfachwurzel

6. Schnittpunkt mit der imaginären Achse:
Der Schnittpunkt der WOK mit der $\mathrm{j}\,\omega$-Achse wird durch Auflösen der Gleichung

$$k_{\mathrm{krit}}\cdot Z(\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{krit}}) + N(\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{krit}}) = 0$$

berechnet. Man erhält so einerseits die kritische Kreisfrequenz ω_{krit} und andererseits die kritische Verstärkung k_{krit}.

7. Skalierung der WOK:
Der Wert des *Parameters* k ergibt sich für jeden Punkt s der WOK aus der Betragsbeziehung

$$k = \frac{\prod_{j=1}^{n}|s-s_j|}{\prod_{i=1}^{m}|s-s_{0i}|}$$