Vorkurs Mathematik für Ingenieur_Innen

Jürgen Pannek

Fachbereich Produktionstechnik – Maschinenbau & Verfahrenstechnik, Universität Bremen

04.10. – 13.10.2017

Inhalt der Vorlesung

Organisatorisches

Arithmetik

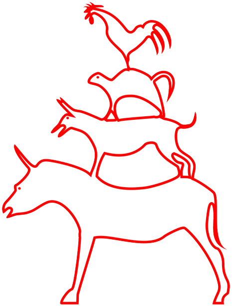
Trigonometrie

Gleichungen

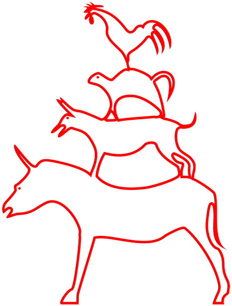
Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung



LogDynamics



Zum Vorkurs

Termin	04.10.2016 – 13.10.2017
Ablauf	Vorlesung 12–14 Uhr, Übung 14–16 Uhr
Zielgruppe	Produktionstechnik Systems Engineering Wirtschaftsingenieurwesen Produktionstechnik Berufliche Bildung
Ziel	Verständnis- und Wissenslücken in mathematischen Grundlagen zum Studienbeginn schließen
www	http://www.dil.biba.uni-bremen.de/vorkurs_mathematik.html

Zeitplan

		MI 04.10.	DO 05.10.	FR 06.10.	DI 10.10.	MI 11.10.	DO 12.10.	FR 13.10.
V		12–14	12–14	12–14	8–10	12–14	10–12	12–14
	alle	GW1 H0070	GW1 H0070	GW1 H0070	GW1 H0070	HS 2010	GW1 H0070	NW1 H1 H0020
Ü		14–16	14–16	14–16	12–14	14–16	12–14	14–16
	Gruppe 1	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200
	Gruppe 2	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210
	Gruppe 3	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330
	Gruppe 4	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390
	Gruppe 5	GW2 B2880	GW2 B2880	MZH 1100	SFG 1020	SFG 1020	SFG 1020	SFG 1020
	Gruppe 6	GW2 B2890	GW2 B2890	MZH 1110	SFG 1030	SFG 1030	SFG 1030	SFG 1030

http://www.dil.biba.uni-bremen.de/vorkurs_mathematik.html

Lageplan

Universität Bremen
Autobahn-Anschluss HB-Horn/Lehe
A27
Richtung: BRHV
Richtung: HH, H, OS
Bremer Forum
KITA Technol. park
DFKI/RH 1
DFKI/RH 5 DLR
Robert-Hooke-Straße
WING
WiWi
BEGO
BioG
Neurobiologie
Cognium
IW3
ZARM
BIBA
Fallturm
TAB
AIB
BIMAQ
oas
HGW
Grazer Str.
Findorff/Walle
Hochschulring
Campingplatz
IFAM
MARUM ODP
SZL
EZ
OEG
BH
LION
BIAS
IWT
LFM
FZB
Internationale Schule
Sportplätze
Sporthalle Horn
KPK
unicom
Spittaler Str.
Studentenwohnheim
MPI
UFT
NMR
NW2
GEO
SuUB
IW
RSG
SpH
SpT
Uni-Bad
J.-Watt-Str.
FVG
ZHG
Celsiusstr.
Akademie
PTB
Mensa
ZB
Boulevard
HS
GW2
SFG
Mensasee
BITZ
Galileo Residenz
Emmy-Noether-Str.
Cartesium
MZH
VWG
Fahrenheitstr.
ZMT
FH I/II
FH III
Stadtwald
Kuhgrabenweg
Atlantic Hotel Universum
SchauBox
Universum® Science Center Bremen
Universitätsallee
Studentenhaus "The Fizz"
ISL
Seekamp
Siemens
Kremser Str.
GW1
GW1 HS
NW1
MST
KITA
GH-L
CeVis
FUCHS Gruppe
Achterstraße
Achter
Horn
Kleingärten
Hotel "Munte am Stadtwald"
Innenstadt
Otto-Hahn-Allee
Karl-Ferdinand-Braun-Straße
Hildegard-von-Bingen-Str.
Barbara-McClintock-Str.
Haltestelle
Straßenbahn
Buslinie
= Gebäude in Planung
© Universität Bremen Stand: 26.02.2015
A
B
C
D
E
1
2
3
4

Organisation und Mitwirkende

Koordination	Dr. Sabine Kuske	Bettina da Rocha
Tutoren	Fabian Falke	Arnold Schreiner
	Chris Ohlrogge	Friederike Baumgart
	Yannik Schädler	Benno Nederkorn
	Marieke Höhne	Christian Holz
	Martin Gestefeld	Nina Buhrdorf
	David Tschudnowskij	Pascal Rink

Zu meiner Person

Jürgen Pannek
Fachgebiet Dynamics in Logistics

BIBA – Bremer Institut für Produktion und Logistik
Universität Bremen, Hochschulring 20, 28359 Bremen

Büro	Gebäude BIBA – Raum 1090
Telefon	+49 (0) 421 218–50190
E-Mail	pan@biba.uni-bremen.de
www	`http://www.dil.biba.uni-bremen.de`

Ablauf

- Identifikation von Schwachstelle bzw. Lücken
- 1. Woche
  - Arithmetik
  - Trigonometrie
  - Gleichungen Teil 1
- 2. Woche
  - Gleichungen Teil 2
  - Funktionen
  - Differentialrechnung
  - Integralrechnung
- Selbstevaluation

Inhalt der Vorlesung

Organisatorisches

Arithmetik

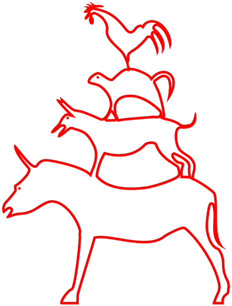
Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung



Bezeichnungen

Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Produktzeichen

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Absolutbetrag

$$|a| = \begin{cases} +a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Grundlegende Rechenregeln

Punktrechnung vor Strichrechnung

$$a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$$
$$a - b : c = a - (b : c)$$

Potenzrechnung vor Punktrechnung

$$a \cdot b^2 = a \cdot \left(b^2\right)$$

Es gilt also $ab^2 \neq (ab)^2$.

Assoziativgesetz

$$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Neutrales Element

$$a+0 = 0+a = a$$
$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Kommutativgesetz

$$a+b = b+a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Grundregeln der Klammerrechnung

Wichtige Regeln der Klammerrechnung

$$+(a+b) = a+b$$
$$-(a+b) = -a-b$$
$$-(a-b) = -a+b$$

Vorzeichenregeln

$$+(a+b) = a+b$$
$$-(a+b) = -a-b$$

Grundregeln der Klammerrechnung

Multiplikation und Division mit Klammern

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$
$$(a - b) : c = a : c - b : c$$
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Es gilt also $(a \cdot b) \cdot c \neq ac \cdot bc$ *und* $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Klammern auflösen

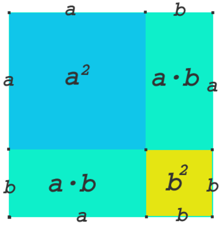
$$a\,(b + c(d + e)) = a\,(b + cd + ce) = ab + acd + ace$$

Binomische Formeln

1. Binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Geometrie

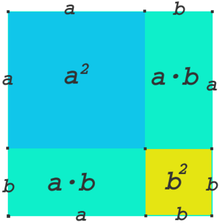


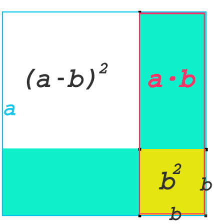
Binomische Formeln

2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Geometrie

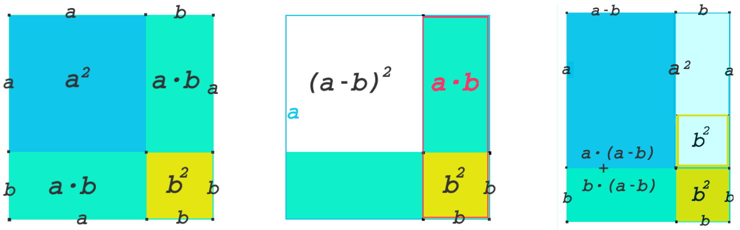




3. Binomische Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Geometrie



Bilder: Mikue – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Binomischer Lehrsatz

Fakultäten

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ k! &= 1 \cdot \ldots \cdot k \quad \text{für jede positive ganze Zahl } k \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Bruch

$$\frac{m}{n} = m : n, \qquad n \neq 0$$

$\frac{m}{n}$ – Bruch (Quotient), m – Zähler (Dividend), n – Nenner (Divisor)

Begriffe

Echte Brüche: $m < n$ Unechte Brüche: $m > n$

Stammbrüche: $m = 1$ Gemischte Brüche (!)

Kehrwert

$$\frac{1}{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m}$$

Erweitern und Kürzen

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{ac}{bc}, \qquad b, c \neq 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \qquad b, c \neq 0$$

Hinweise

- Vorzeichen von Zähler und Nenner stets beachten
- Niemals aus Summen kürzen

Beispiele

$$\frac{a \cdot b + c}{a}, \frac{a}{a \cdot b + c} \quad \rightsquigarrow \quad \text{Kürzen nicht möglich!}$$

$$\text{Aber} \quad \frac{a \cdot b + a \cdot c}{a \cdot d} = \frac{a \cdot (b + c)}{a \cdot d} = \frac{b + c}{d}$$

Gleichnamige Brüche

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \qquad c \neq 0$$

Ungleichnamige Brüche

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{i \cdot a \pm j \cdot b}{k}, \qquad c, d \neq 0$$

k ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV), schlimmstenfalls $k = c \cdot d$, $i = d$, $j = c$. GgT und kgV kann man über die Primfaktorzerlegung der beiden gegebenen Zahlen bestimmen, z.B.:

$$\begin{array}{l} 3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \\ 3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \end{array} \rightsquigarrow \mathrm{ggT}(3528, 3780) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 252$$

Multiplikation und Division

Für $b, c, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{bc}$$

Potenz

Für Zahlen a und n bezeichnen wir

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}, \, n \in \mathbb{N}}$$

als Potenz, a als Basis und n als Exponent.

Hinweis

- Für $x \in \mathbb{N}$ ist a^x nur für $a \in \mathbb{R}$ definiert.
- Für $x \in \mathbb{R}$ ist a^x nur für $a \in \mathbb{R}^+$ definiert.

Rechenregel

$$a^{\frac{p}{q}} = c \Longleftrightarrow a^p = c^q$$

Negative Exponenten

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exponenten 1 und 0

$$a^1 = a \qquad\qquad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Spezielle Potenz, $n \in \mathbb{Z}$

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Regeln der Potenzrechnung
(Seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$.)

Potenzrechnung vor Punktrechnung

$$ba^n = b \cdot (a^n)$$

Es gilt $ba^n \neq (ba)^n$.

Addieren und Subtrahieren

$$p \cdot a^n \pm q \cdot a^n = (p \pm q) \cdot a^n$$

Multiplizieren und Dividieren bei gleicher Basis

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Regeln der Potenzrechnung
(Seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$.)

Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Exponenten

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Es gelten (i.A.) $a^n \cdot b^n \neq (ab)^{2n}$, $\frac{a^n}{b^n} \neq \frac{a}{b}$, $(a+b)^n \neq (a \cdot b)^n$.

Potenzieren einer Potenz

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$$

Wurzel

Für Zahlen $a \geq 0$ und $n \geq 1$ bezeichnen wir

$$\sqrt[n]{a} = x \Longrightarrow x^n = a \quad (x \geq 0)$$

als Wurzel, a als Radikand und n als Wurzelexponent.

Bemerkungen

1. Nach Definition der Wurzel: $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$. Aber die Gleichung $x^2 = a$ hat die Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.
2. Für ungerade n kann die n-te Wurzel auch für negative Zahlen a eindeutig definiert werden, z.B. $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Regeln der Wurzelrechnung
(Seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$.)

Addieren und Subtrahieren

$$p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$$

Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Radikanden

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$$

Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Wurzelexponenten

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Regeln der Wurzelrechnung

Radizieren und Potenzieren einer Wurzel

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}}$$

Rationalmachen des Nenners

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Speziell

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Logarithmus

Für Zahlen $a > 0$ und $b > 0$ bezeichnen wir

$$\log_a(b) = x \iff a^x = b$$

als Logarithmus b zur Basis a, a als Basis und b als Numerus.

Folgerungen

$$\log_a(a) = 1 \qquad \log_a(1) = 0$$

Spezielle Basen

$$\log_{10}(b) = \lg(b) \qquad \log_e(b) = \ln(b) \qquad \log_2(b) = \mathrm{ld}(b)$$

Eulersche Zahl $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284\ldots$

Regeln der Logarithmusrechnung

Rechenregeln

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a\left(u^r\right) = r \cdot \log_a(u)$$

$$\log_a\left(\sqrt[n]{u}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$$

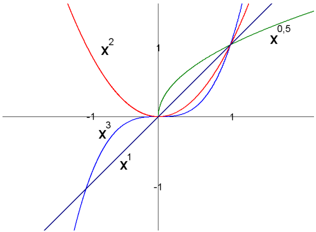
$$\log_a\left(a^r\right) = r$$

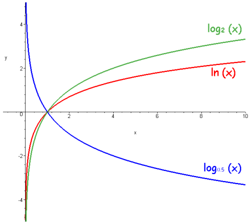
$$\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v)$$

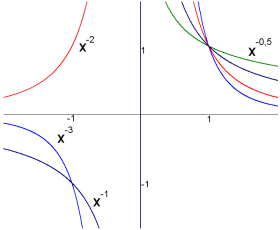
Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen

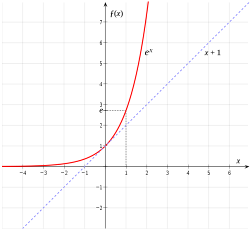
$$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)} \qquad \text{Spezialfall: } \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

Graphische Veranschaulichung









Mittelwerte*

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x}_a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

Harmonisches Mittel

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

Quadratisches Mittel

$$\bar{x}_q = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}$$

Absolutbetrag*

Eigenschaften

$$|-a| = |a|$$

$$|a| \geq 0; \qquad |a| = 0 \iff a = 0$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ für } b \neq 0; \qquad \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|} \text{ für } b \neq 0$$

$$|a^n| = |a|^n \text{ für } n \in \mathbb{N}; \qquad \left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a|^n} \text{ für } n \in \mathbb{N},\ a \neq 0$$

Dreiecksungleichung

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Vektor

- gerichtete und orientierte Strecke
- charakterisiert durch Betrag, Richtung und Orientierung
- Beispiele: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung

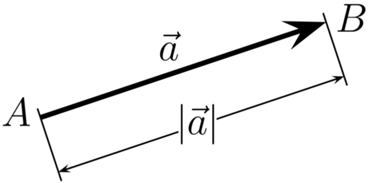


Bild: Markus A. Hennig – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Skalar

- charakterisiert durch einen einzigen reellen Zahlenwert
- Beispiele: Temperatur, Arbeit, Masse, Energie

Bezeichnung

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

Betrag

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$$

Gleichheit

$\vec{a} = \vec{b} \iff$ gleicher Betrag, gleiche Richtung, gleiche Orientierung

Spezielle Vektoren

- *Ortsvektoren* $\overrightarrow{OA}$ können nicht verschoben werden
- *Nullvektor* $\vec{0} \rightsquigarrow$ Betrag 0, unbestimmte Richtung
- *Einheitsvektor* $\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$

Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$

- Vektor $\vec{a}$, Betrag $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
- $\lambda > 0 \rightsquigarrow \lambda\vec{a}$ und $\vec{a}$ haben gleiche Richtung und Orientierung
- $\lambda < 0 \rightsquigarrow \lambda\vec{a}$ und $\vec{a}$ haben gleiche Richtung und entgegengesetzte Orientierung

Addition und Subtraktion zweier Vektoren

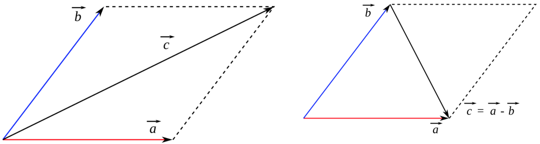


Bild: Jacek FH – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Regeln der Vektorrechnung

Addition und Subtraktion zweier Vektoren

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \qquad\qquad \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Distributivgesetz

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene

Wähle im kartesischen Koordinatensystem der Ebene die beiden Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ mit Richtung und Orientierung wie die positive x-Achse und die positive y-Achse

Eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

Identifizierung via Spaltenvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Betrag (Länge des Vektors)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene

Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

Komponentendarstellung von Vektoren im Raum

Wähle im kartesischen Koordinatensystem des Raums die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ mit Richtung und Orientierung wie die positive x-Achse, die positive y-Achse und die positive z-Achse

Eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad (a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R})$$

Identifizierung via Spaltenvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Betrag (Länge des Vektors)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Komponentendarstellung von Vektoren im Raum

Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

Für die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Skalarprodukt oder inneres Produkt.

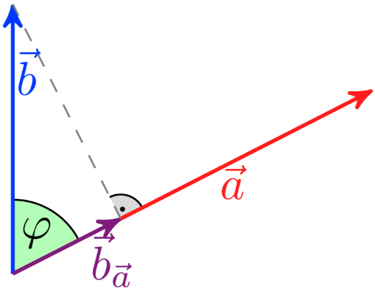
Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein **Skalar**.

Interpretation

- stellt das Produkt des Betrags von $\vec{a}$ und des Betrags der senkrechten Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ dar

Geometrie

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi), \qquad \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$



Rechenregeln

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Beispiel

Für welchen Wert von c sind die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$$

orthogonal?

Lösung

$$c = 2$$

Vektorprodukt

Für die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ im Raum heißt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

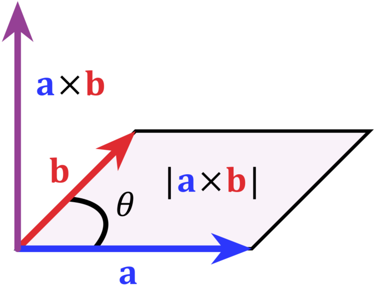
Vektorprodukt oder Kreuzprodukt oder äußeres Produkt.

Geometrie

- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms
- Falls $\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg nach $\vec{b}$ gedreht wird, zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Richtung der Bewegung einer Schraube mit Rechtsgewinde

Merkregel

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$



Acdx – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Vektorprodukt

Rechenregeln

- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, falls $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\theta)$, $\theta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Spatprodukt

Für die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heißt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Spatprodukt.

Geometrie

- Betrag des Spatprodukts ist orientiertes Volumen des aufgespanntes Spats.
- Falls Reihenfolge der Vektoren ein Rechtssystem ist, dann ist Volumen positiv.
- Liegen Vektoren in einer Ebene, dann ist Spatvolumen Null.

Berechnung

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$
- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$
- $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}] = 0$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- $[\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]$

Organisatorisches

Arithmetik

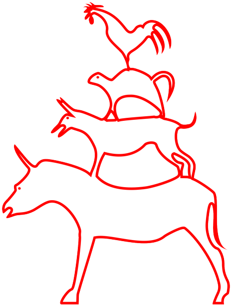
Trigonometrie

Gleichungen

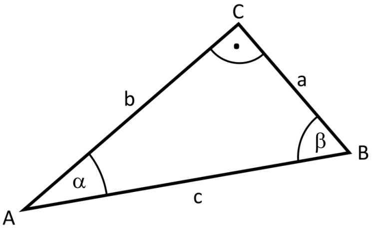
Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung



Definition der trigonometrischen Funktionen



$a =$ Gegenkathete von α
$a =$ Ankathete von β
$b =$ Gegenkathete von β
$b =$ Ankathete von α
$c =$ Hypotenuse

Bei rechtwinkligen Dreiecken mit den Winkeln α, β und $\gamma = 90°$ gilt: $\alpha + \beta = 90°$.

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \qquad \cot(\alpha) = \frac{b}{a}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a} \qquad \cot(\beta) = \frac{a}{b}$$

Spezielle Werte für trigonometrische Funktionen

Bogenmaß b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Gradmaß α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Berechnung via **Satz des Pythagoras** möglich ...

$$a^2 + b^2 = c^2$$

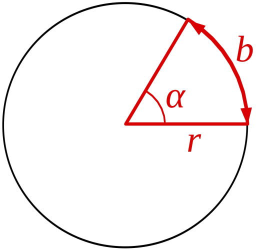
Kenngrößen

Umfang $U = 2\pi \cdot r$

Fläche $A = \pi \cdot r^2$

Kreisausschnitt $A = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$

Kreisbogen $b = \dfrac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$

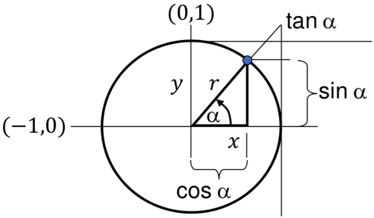


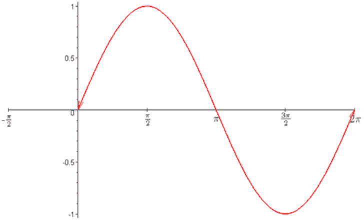
Umrechnung: (2πrad $= 360^\circ$)

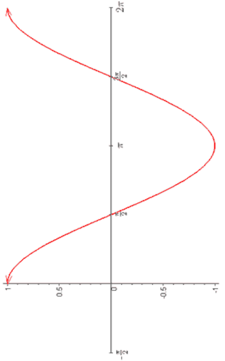
Grad: $\alpha = \dfrac{s}{\pi} \cdot 180^\circ$

Radiant: $s = \dfrac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$

Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel







$$\sin(\alpha) = \frac{y}{r}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{x}{r},$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}, \qquad \cot(\alpha) = \frac{x}{y}$$

$$\rightsquigarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

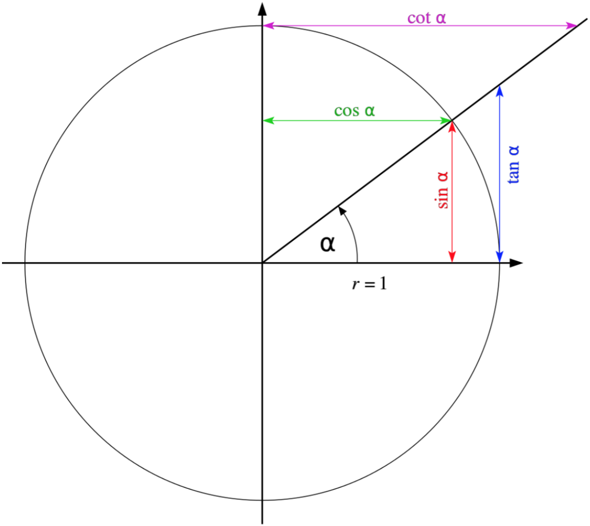
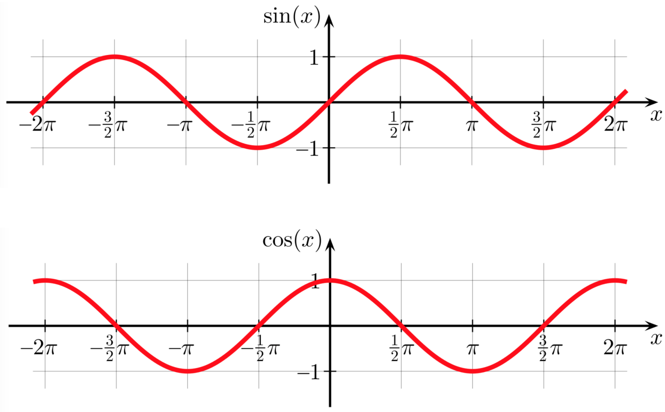
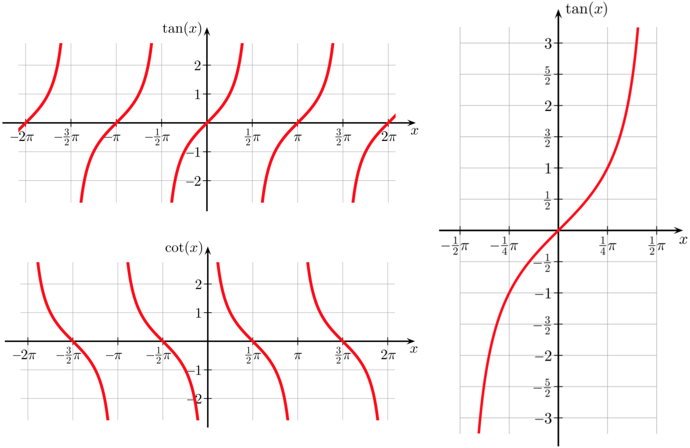


Bild: Lars H. Rohwedder

Graphen der trigonometrischen Funktionen



Graphen der trigonometrischen Funktionen



Bilder: Geek3 – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Einige Beziehungen für trigonometrische Funktionen

Komplementwinkel

$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha), \ \cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha), \ \tan(\alpha) = \cot(90^\circ - \alpha)$$

Umrechnungsformeln

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \qquad \tan(\alpha)\cot(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Negative Winkel

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

Periodizität

$$\sin(n\pi) = 0, \quad \cos(\pi/2 + n\pi) = 0, \quad \sin(x + \pi/2) = \cos(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Additionstheoreme

Summe zweier Winkel

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

Summe zweier Funktionen

$$\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Gegeben: Funktionswert einer trigonometrischen Funktion
Gesucht: zugehöriger Winkel

Arkussinus

$$x = \arcsin(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sin(x) \quad \text{und} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \; y \in [-1, 1]$$

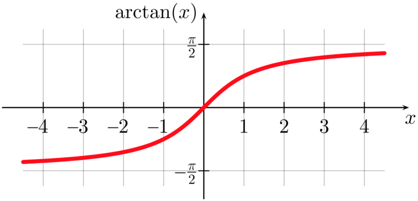
Arkuscosinus

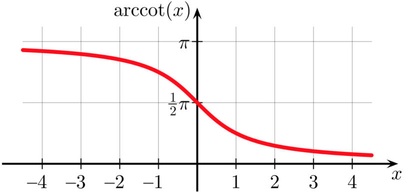
$$x = \arccos(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \cos(x) \quad \text{und} \quad x \in [0, \pi], \; y \in [-1, 1]$$

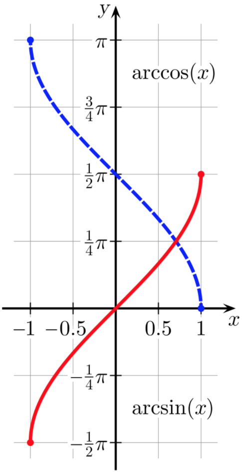
Arkustangens

$$x = \arctan(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \tan(x) \quad \text{und} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \; y \in [-\infty, \infty]$$

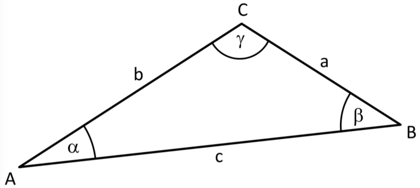
Graphen der Arkusfunktionen







Schiefwinkliges Dreieck*

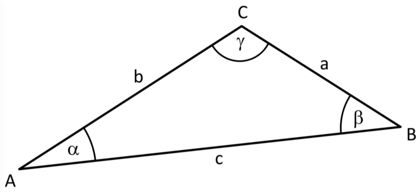


Flächeninhaltsformel

Die Fläche eines ebenen Dreiecks ist gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha) = \frac{1}{2} ca \sin(\beta) = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma)$$

Schiefwinkliges Dreieck*

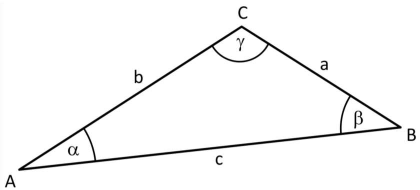


Sinussatz

Im ebenen Dreieck gilt stets

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Schiefwinkliges Dreieck*



Cosinussatz (Verallgemeinerter Satz von Pythagoras)

Im ebenen Dreieck gilt stets

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Inhalt der Vorlesung

Organisatorisches

Arithmetik

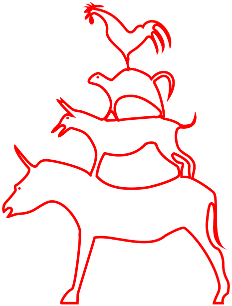
Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung



Arten von Gleichungen

Wir unterscheiden die Gleichungsarten

- Identitätsgleichung, z.B. $a(b+c) = ab + ac$
- Bestimmungsgleichungen, z.B. $x + 2 = 3$
- Funktionsgleichungen, z.B. $y = 2x + 1$

Äquivalente Umformungen

$$x - a = b \iff x = b + a$$

$$x + a = b \iff x = b - a$$

$$\frac{x}{a} = b \iff x = b \cdot a$$

$$ax = b \iff x = \frac{b}{a}$$

Spezialfall: Lineare Gleichung

Eine Gleichung wird als lineare Gleichung bezeichnet, wenn sie in die Form $f(x) = y$ gebracht werden kann und

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt. Die Gleichung

$$ax + b = 0, \qquad a \neq 0$$

heißt lineare Gleichung in allgemeiner Form.

Normalform

$$x + \frac{b}{a} = x + c = 0, \qquad c = \frac{b}{a}$$

Lösung und Lösungsmenge

$$x = -c = -\frac{b}{a}, \qquad \mathbb{L} = \{-c\} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Spezialfall: Quadratische Gleichung

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung lautet

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Normalform

$$x^2 + px + q = 0, \qquad p = \frac{b}{a}, \; q = \frac{c}{a}$$

Lösung: ((p, q) oder Mitternachtsformel)

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ablauf der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Rezept: Addition der Hälfte des Vorfaktors von x

Diskriminante der Normalform

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

- $D > 0 \rightsquigarrow$ zwei reelle Lösungen x_1, x_2
- $D = 0 \rightsquigarrow$ eine reelle Lösung (Doppellösung $x_1 = x_2$)
- $D < 0 \rightsquigarrow$ keine reelle Lösung

Zerlegung in Linearfaktoren $\rightsquigarrow$ Produktform

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Spezialfall: Biquadratische Gleichung

Die allgemeine Form einer biquadratischen Gleichung lautet

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Gleichung (Normalform)

$$x^4 + sx^2 + u = 0$$

Substitution $x^2 = z$

$$z^2 + sz + u = 0$$

Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - u}$$

Lösungen der biquadratischen Gleichung

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Algebraische Gleichungen höheren Grades

Spezialfall: Kubische Gleichungen

Die allgemeine Form einer kubischen Gleichung lautet

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \ \ a \neq 0$$

Spezialfall: Gleichungen vierten Grades

Die allgemeine Form einer Gleichung vierten Grades lautet

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \ \ a \neq 0.$$

Gleichung *n*-ten Grades

Die allgemeine Form einer Gleichung *n*-ten Grades lautet

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \ \ a_n \neq 0.$$

Lösung: Cardanische Formeln (kubisch), Reduktionsmethode

Polynomdivision

Begriffe

- **Polynom** $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$
- **Division** $\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = P_k(x)$, $n \geq m$ verläuft ganz analog dem schriftlichen Dividieren von Dezimalzahlen
- x_0 heißt **Nullstelle** von $P_n(x)$, wenn $P_n(x_0) = 0$
- m heißt **Vielfachheit** der Nullstelle x_0 von $P_n(x)$, wenn $P_n(x) = (x - x_0)^m \cdot P_k(x)$

Beispiel:

$$
\begin{array}{l}
(\;\; x^3 - 6x^2 + 11x - 6\,) : (x-2) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2} \\
\qquad\; -4x^2 + 11x \\
\qquad\;\; \underline{4x^2 - 8x} \\
\qquad\qquad\quad 3x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{-3x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

Beispiele für weitere Bestimmungsgleichungen

Bruchgleichungen

$$\frac{x+2}{2x-1} = \frac{4x-1}{x} \qquad \Longrightarrow x_1 = 1,\; x_2 = \frac{1}{7}$$

Wurzelgleichungen

$$11 - \sqrt{x+3} = 6 \qquad \Longrightarrow x = 22$$

Exponentialgleichungen

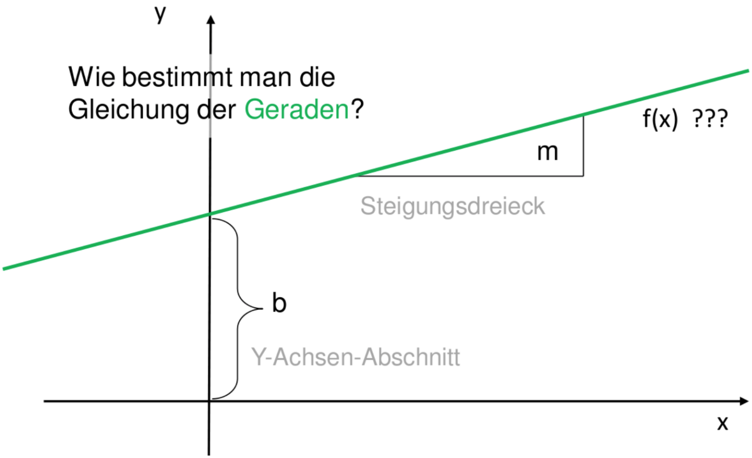
$$e^{2x+3} = e^{x-4} \qquad \Longrightarrow x = -7$$

Logarithmische Gleichungen

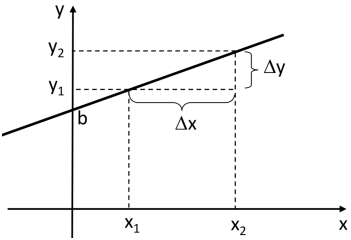
$$\lg(6x+10) - \lg(x-3) = 1 \qquad \Longrightarrow x = 10$$

Trigonometrische Gleichungen

$$\sin^2(x) - 1 = -0,5 \qquad \Longrightarrow x = \pm 45^\circ$$


y
Wie bestimmt man die
Gleichung der Geraden?
f(x) ???
m
Steigungsdreieck
b
Y-Achsen-Abschnitt
x

Geradengleichung



Grundform:

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Zweipunkteform:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Punktsteigungsform:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Achsenabschnittsform:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

Grundgleichung einer Parabel

Grundform:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Berechenbar durch drei Punkte:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$
$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$
$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

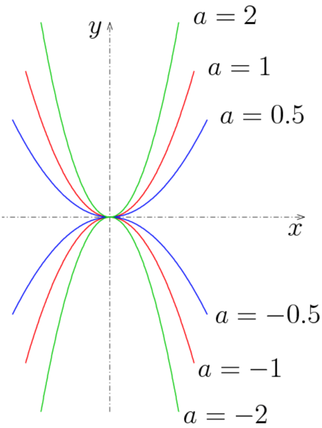


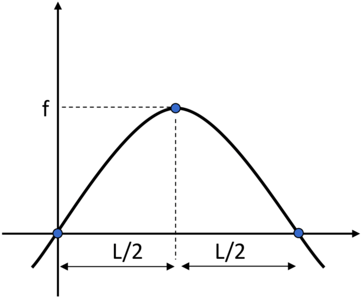
Bild: Ag2gaeh – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Bestimmung einer Parabel

Beispiel

Wie läßt sich eine Parabel durch die Punkte $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (L, 0)$ und $P_3 = \left(\frac{L}{2}, f\right)$ beschreiben?

$\rightsquigarrow$ Gleichungssystem mit drei Unbekannten:



$$0 = a0^2 + b0 + c$$
$$0 = aL^2 + bL + c$$
$$f = a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\left(\frac{L}{2}\right) + c$$

$$\rightsquigarrow \quad y = 4f\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

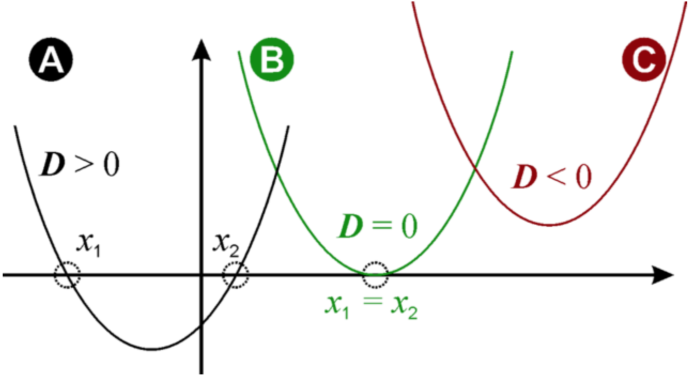


Bild: Ralf Pfeifer – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Zur Erinnerung: Diskriminante der Normalform

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

Kreisgleichung

Wir bezeichnen die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

als Kreisgleichung in allgemeiner Form.

Mittelpunktsform oder **Grundform**

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

Parameterdarstellung

$$x = x_m + r\cos(t), \quad y = y_m + r\sin(t), \quad 0 \leq t < 2\pi$$

Mittelpunktsform der Ellipsengleichung

$$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$

Beispiel

$$\begin{aligned} 7x + 4y &= 23 \\ 2x - 3y &= 19 \end{aligned}$$

Lösungsmöglichkeiten

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren (Substitutionsverfahren)
- Additionsverfahren
- (Determinantenverfahren)
- Eliminationsverfahren nach Gauß

Hinweis: Probe in den Ausgangsgleichungen durchführen!

Beispiel

$$\begin{array}{l} 7x + 4y = 23 \\ 2x - 3y = 19 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{23 - 4y}{7} \\ x = \dfrac{19 + 3y}{2} \end{array} \Longrightarrow \frac{19 + 3y}{2} = \frac{23 - 4y}{7}$$

Vorgehensweise

- Beide Gleichungen nach derselben Variable auflösen
- Terme *gleichsetzen*
- Lineare Gleichung mit einer Variablen lösen
- Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen
- Lineare Gleichung mit der anderen Variablen lösen

Lösung: $x = 5$, $y = -3$

Beispiel

$$\begin{aligned} 7x + 4y &= 23 \\ 2x - 3y &= 19 \end{aligned} \Longrightarrow x = \underbrace{\frac{23 - 4y}{7}}_{\to 2x - 3y = 19} \Longrightarrow 2\frac{23 - 4y}{7} - 3y = 19$$

Vorgehensweise

- Eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen auflösen
- Term in die andere Gleichung *einsetzen*
- Lineare Gleichung mit einer Variablen lösen
- Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen
- Lineare Gleichung mit der anderen Variablen lösen

Lösung: $x = 5$, $y = -3$

Lösungsmöglichkeit 3: Additionsverfahren

Beispiel

$$\begin{aligned} 7x + 4y &= 23 \\ 2x - 3y &= 19 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} 3 \cdot 7x + 3 \cdot 4y &= 3 \cdot 23 \\ &+ \\ 4 \cdot 2x - 4 \cdot 3y &= 4 \cdot 19 \end{aligned} \Longrightarrow 21x + 8x = 69 + 76$$

Vorgehensweise

- Beide Gleichungen mit einem Faktor multiplizieren, so dass bei anschließender *Addition* der Gleichungen eine der Variablen wegfällt
- Lineare Gleichung mit einer Variablen lösen
- Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen
- Lineare Gleichung mit der anderen Variablen lösen

Lösung: $x = 5$, $y = -3$

Allgemeine Form

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Lösung

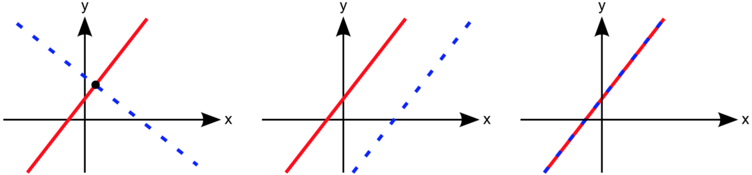
$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Fallunterscheidung

1. $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \rightsquigarrow$ *genau eine* Lösung (homogenes Gleichungssystem, d.h. $c_1 = c_2 = 0 \rightsquigarrow$ nur triviale Lösung)
2. $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, aber (mindestens) $b_2 c_1 - b_1 c_2 \neq 0$ oder $a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0 \rightsquigarrow$ *keine* Lösung
3. Nenner $= 0$ und zudem beide Zähler $= 0 \rightsquigarrow$ *unendliche viele* Lösungen

Graphische Veranschaulichung

1. *Lösung* bildendes Zahlenpaar ist das Koordinatenpaar des eindeutigen Schnittpunktes der beiden Geraden (Koordinatenursprung $\rightsquigarrow$ triviale Lösung)
2. *Keine Lösung*; Graphen der beiden Gleichungen sind parallele Geraden
3. *Unendlich viele Lösungen*; Graphen der beiden Gleichungen sind gleich



Lösungsmöglichkeit 4: Determinantenverfahren

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \quad \leadsto \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{= \text{Matrix } \mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{= \text{Vektor } \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{= \text{Vektor } \mathbf{c}}$$

Determinanten und Unterdeterminanten

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\det_x(A) = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 c_1 - b_1 c_2, \quad \det_y(A) = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

Lösung (Cramersche Regel)

$$x = \frac{\det_x(A)}{\det(A)} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{\det_y(A)}{\det(A)} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

Regel nach Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ +a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{array}$$

$\det_1(A)$, $\det_2(A)$ und $\det_3(A)$ analog (Ersetzen der x–, y– bzw. z–Spalte durch die c-Spalte)

Lösung

$$x = \frac{\det_1(A)}{\det(A)}, \qquad y = \frac{\det_2(A)}{\det(A)}, \qquad z = \frac{\det_3(A)}{\det(A)}$$

Lösungsmöglichkeit 5: Gausssches Eliminationsverfahren

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Algorithmus

1. Vorwärtselimination
2. Rückwärtseinsetzen (Rücksubstitution)

1. Schritt: Stufenform, d.h. pro Zeile wird eine Variable *eliminiert*

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 &= \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 &= \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_{33}x_3 &= \tilde{b}_3 \end{aligned}$$

Gaussches Eliminationsverfahren

Elementare Zeilenumformungen: Transformation des Gleichungssystems in ein neues mit derselben Lösungsmenge

1. Eine Zeile oder das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren
2. Zwei Zeilen vertauschen

2. Schritt: Rückwärtseinsetzen: Ausgehend von der letzten Zeile die Variablen ausrechnen und in die darüberliegende Zeile einsetzen

Allgemeines

- Standardlösungsverfahren für allgemeine lineare Gleichungssysteme
- Teil aller wesentlichen Programmbibliotheken für numerische lineare Algebra (mit kleinen Modifikationen)

Beipiel: Gaussches Eliminationsverfahren

Aufgabe

$$\left|\begin{array}{rrrcr} +7x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & -12 \\ -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & +5 \\ -4x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & +1 \end{array}\right|$$

1. Vorwärtselimination

$$\left|\begin{array}{rrrcr} +7x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & -12 \\ -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & +5 \\ -4x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & +1 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \mid \cdot 1 & \mid \cdot 4 \\ \mid \cdot 7 \; + & \\ \mid \cdot 7 & \; + \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rrrcr} +7x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & -12 \\ & -11x_2 & +23x_3 & = & +23 \\ & 19x_2 & -41x_3 & = & -41 \end{array}\right|$$

Beipiel: Gaussches Eliminationsverfahren

$$\left|\begin{array}{cccc} +7x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & -12 \\ & -11x_2 & +23x_3 & = & +23 \\ & +19x_2 & -41x_3 & = & -41 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 19 \\ \mid \cdot 11 \ + \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} +7x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & -12 \\ & -11x_2 & +23x_3 & = & +23 \\ & & -14x_3 & = & -14 \end{array}\right|$$

2. Rückwärtssubstitution

$$\begin{array}{rcrcl} & & -14x_3 = -14 & \Longrightarrow & x_3 = 1 \\ -11x_2 + 23 = 23 & \Longrightarrow & -11x_2 = 0 & \Longrightarrow & x_2 = 0 \\ +7x_1 + 0 - 5 = -12 & \Longrightarrow & +7x_1 = -7 & \Longrightarrow & x_1 = -1 \end{array}$$

Allgemein

- *Unterbestimmte Gleichungssysteme*, d.h. mehr Unbekannte als Gleichungen $\leadsto$ nie eindeutig lösbar
- *Überbestimmte Gleichungssysteme*, d.h. mehr Gleichungen als Unbekannte $\leadsto$ im Allgemeinen nicht lösbar
- Erweiterung auf reduzierte Stufenform $\leadsto$ *Gauss-Jordan-Algorithmus*

Lineare Ungleichungen mit einer Variablen

$$ax + b < 0, \quad a > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{L} = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$$

$$ax + b \geq 0, \quad a > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{L} = \left[-\frac{b}{a}, -\infty\right)$$

Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

Ungleichung $\quad ax + by + c < 0 \quad (b > 0)$

Lösungsmenge $\quad \mathbb{L} = \left\{(x, y) \middle| x \in \mathbb{R}, y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right\}$

Beispiel

$$x - y < -1 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{L} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y > x + 1\}$$

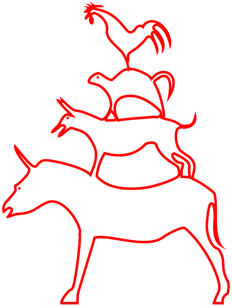


Abbildung oder Funktion

Eine Funktion

$$f : D \to W, \qquad x \mapsto f(x)$$

ordnet jedem Punkt x des Definitionsbereichs $D \subseteq X$ einen Wert y aus dem Wertebereich $W \subseteq Y$ zu. Die Menge $f(D) \subseteq W$ wird als Bildmenge bezeichnet.

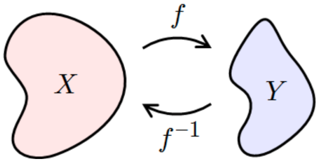


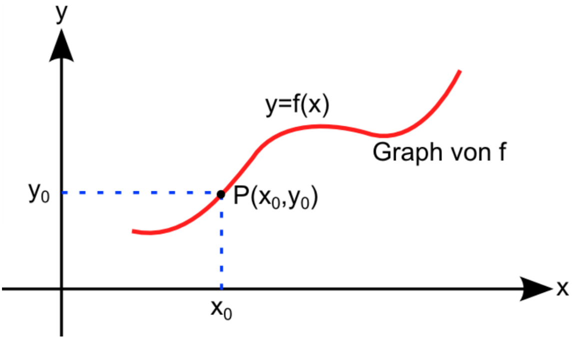
Bild: Jim.belk – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Darstellung der Funktionsgleichung

- Explizit: $y = f(x)$
- Implizit: $F(x, y) = 0$
- Parametrisiert: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

Darstellung von Funktionen

Graph einer Funktion – Bild, das man erhält, wenn man die geordneten Zahlenpaare $(x, y) = (x, f(x))$ mit $x \in D$ in ein Koordinatensystem einträgt



Bestimmung: Kurvendiskussion und Wertetabelle

Eigenschaften von Funktionen

Injektivität

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt injektiv, wenn gilt:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \; \forall x_1, x_2 \in D$$

Surjektivität

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt surjektiv, wenn gilt:

$$f(D) = W$$

Bijektivität

Ist eine Funktion injektiv und surjektiv, so wird sie als bijektiv bezeichnet.
Bijektive Funktionen besitzen Umkehrfunktionen.

Funktionsklassen

Monotone Funktionen

Wir nennen eine Funktion

- *monoton wachsend*, wenn $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,
- *streng monoton wachsend*, wenn $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
- *monoton fallend*, wenn $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$, und
- *streng monoton fallend*, wenn $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Symmetrische Funktionen

Eine Funktion heißt

- *gerade*, d.h. symmetrisch zur y-Achse, wenn $f(x) = f(-x)$, und
- *ungerade*, d.h. symmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn $-f(x) = f(-x)$

Beschränkte Funktionen

Falls Werte $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $a < b$, so dass $a \leq f(x) \leq b$ für alle $x \in D$, dann heißt die Funktion $f : D \to W$ beschränkt.

Umkehrfunktion

Für eine bijektive Funktion $f : D \to W$ bezeichnet

$$f^{-1} : W \to D, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

die Umkehrfunktion, wenn gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Berechnung:

1. Auflösen von $y = f(x)$ nach x: $x = f^{-1}(y)$
2. Vertauschen von x und y: $y = f^{-1}(x)$

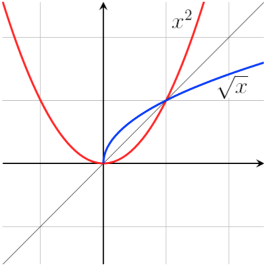
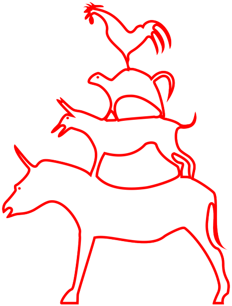


Bild: Jim.belk – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Übersicht über Funktionen

- Rationale Funktionen
  - Gebrochenrationale Funktionen
  - Ganzrationale Funktionen
    - Lineare Funktionen
    - Quadratische Funktionen
    - Potenzfunktionen
- Irrationale Funktionen
  - Wurzelfunktionen
  - Trigonometrische Funktionen
    - Sinusfunktion
    - Cosinusfunktion
    - Tangensfunktion
    - Arkusfunktionen
  - Exponentialfunktionen
  - Logarithmusfunktionen
- Spezielle Funktionen
  - Konstante Funktion
  - Betragsfunktion
  - Impulsfunktion

Inhalt der Vorlesung



Definition

Existiert für eine Funktion $y = f(x)$ mit dem Definitionsbereich D der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x_0 \in D)$$

dann nennt man $f'(x_0)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Die Funktion $f(x)$ heißt dann differenzierbar in x_0.

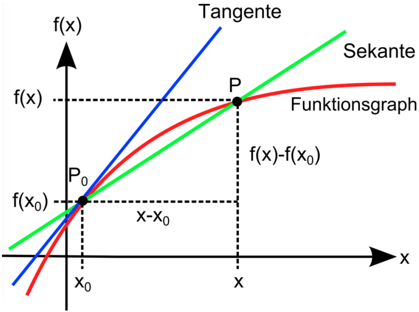
Schreibweisen

$$f'(x_0) \quad \text{oder} \quad \dot{f}(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Geometrische Deutung



- **Differenzenquotient**
  $\rightsquigarrow$ Steigung der Sekante (Tangens des Steigungswinkels)
- **Grenzwert** $f'(x_0)$
  $\rightsquigarrow$ Steigung der Tangente in x_0 an den Graphen von $f(x)$
- **Existenz der Ableitung**
  $\rightsquigarrow$ Kurvenverlauf glatt

Differentiationsregeln

Summenregel

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Faktorregel

$$(cf(x))' = cf'(x), \ c = const.$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \ g(x) \neq 0$$

Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Differentiationsregeln

Ableitung der Umkehrfunktion

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Höhere Ableitungen

$$f''(x) = (f')'(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x), \qquad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x)$$

Sekante durch die Punkte $P_1 = (x_1, f(x_1))$ und $P_2 = (x_2, f(x_2))$

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

Tangente von $f(x)$ in dem Punkt $P = (a, f(a))$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Einige Grunddifferentiale

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\exp(ax)$	$a\exp(ax)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x = \exp(x\ln(a))$	$a^x\ln(a)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$		
$\ln(x^n)$	$\frac{n}{x}$		

Maximum

Ein Punkt $a \in D$ heißt absolutes Maximum, falls gilt:

$$f(x) < f(a) \quad \text{für} \quad x \neq a.$$

Wir bezeichnen $a \in D$ als absolutes Minimum, falls

$$f(x) > f(a) \quad \text{für} \quad x \neq a.$$

Notwendige Bedingung für Extrema

Ist $a \in D$ ein Extremum einer differenzierbaren Funktion f, so gilt

$$f'(a) = 0.$$

Geometrische Bedeutung

$f(x)$ hat eine zur x-Achse parallele Tangente in $P = (a, f(a))$

Hinreichende Bedingung für Extrema

Erfüllt $a \in D$ die notwendige Bedingung $f'(a) = 0$ und

$$f''(a) \neq 0, \quad \text{oder}$$
$$f''(a) = 0, \quad f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \text{ gerade}),$$

dann ist a ein Extremum.

Relatives/absolutes Minimum

$$f''(a) > 0, \qquad f^{(n)}(a) > 0$$

Relatives/absolutes Maximum

$$f''(a) < 0, \qquad f^{(n)}(a) < 0$$

Krümmungsverhalten von Funktionen

$f'(x) > 0$	$f(x)$ nimmt mit wachsendem x zu
$f'(x) < 0$	$f(x)$ nimmt mit wachsendem x ab
$f''(x) > 0$	$f(x)$ ist linksgekrümmt (konvex)
$f''(x) < 0$	$f(x)$ ist rechtsgekrümmt (konkav)

Wendepunkte von Funktionen

Konvex/Konkav

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt konvex bei $a \in N \subseteq D$, falls gilt

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in N,\ t \in [0,1].$$

Die Funktion heißt konkav an der Stelle $a \in N \subseteq D$, falls gilt

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in N,\ t \in [0,1].$$

Wendepunkt

Ist eine Funktion $f : D \to W$ konvex/konkav auf $(a, b]$ und konkav/konvex auf $[b, c)$, dann wird b als Wendepunkt bezeichnet.

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt

Ist $a \in D$ ein Wendepunkt einer zweimal differenzierbaren Funktion f, so gilt

$$f''(a) = 0.$$

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt

Gilt für ein $a \in D$ die notwendige Bedingung und

$$f'''(a) \neq 0 \quad \text{oder}$$

$$f'''(a) = 0, \quad f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \text{ ungerade}),$$

so ist a ein Wendepunkt.

Sattelpunkt

$a \in D$ ist Wendepunkt und zudem gilt $f'(a) = 0$

Beispiel

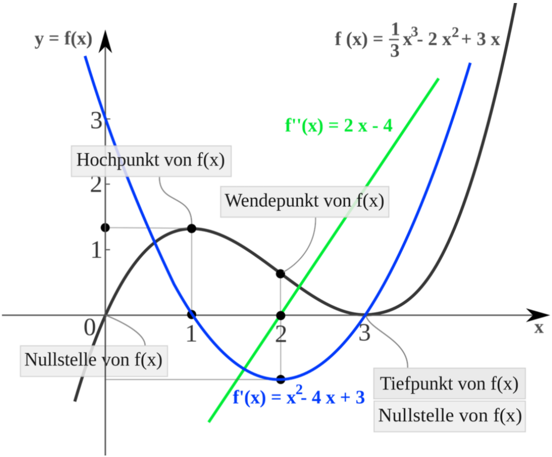


Bild: Honina; Vektorisierung von LoKiLeCh – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

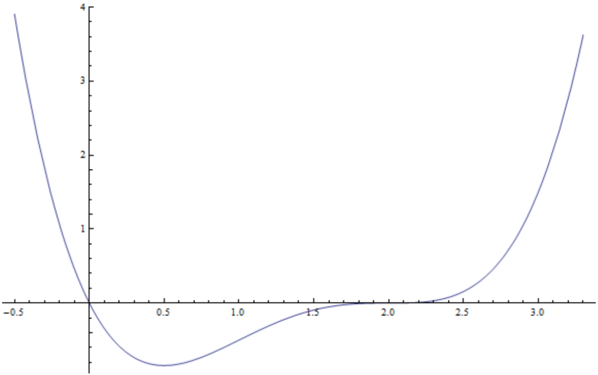
Ablauf

1. Bestimmung von Definitionsbereich
2. Untersuchung auf Symmetrie
3. Bestimmung von Nullstellen
4. Bestimmung von relativen/absoluten Extrema
5. Untersuchung auf Monotonie
6. Untersuchung des Krümmungsverhaltens
7. Bestimmung von Wendepunkten
8. Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs (Unstetigkeitsstellen und Asymptoten)
9. Skizze des Funktionsgraphen

Beispiel

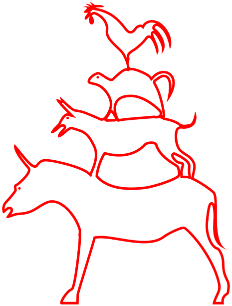
$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3$$

Beispiel



Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3$

Inhalt der Vorlesung



Stammfunktion

Sei $f : D \to W$ gegeben und F auf D differenzierbar. Falls für alle $x \in D$ gilt

$$F'(x) = f(x)$$

dann heißt F Stammfunktion von f.

Eigenschaften

- f heißt **integrierbar**
- $F(x) + c$ eine Stammfunktion
- $\{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\}$ – Menge aller Stammfunktionen

Zusammenhang

Integralrechnung ist Umkehrung der Differentialrechnung

Beispiele

1. Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$
   Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + c$
2. Funktion $f(x) = \sin(x)$
   Stammfunktion $F(x) = -\cos(x) + c$
3. Funktion $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   Stammfunktion $F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$
4. Funktion $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$
   Stamfunktion $F(x) = \ln(x) + c$
5. Funktion $f(x) = \exp(x)$
   Stammfunktion $F(x) = \exp(x) + c$

Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen $\{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\}$ heißt unbestimmtes Integral und wird dargestellt durch

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Bezeichnungen

- $\int$ – Integralzeichen
- $f(x)$ – Integrand
- x – Integrationsvariable
- c – Integrationskonstante

Faktorregel

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad c \in \mathbb{R}$$

Potenzregel

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

Summenregel

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Spezialfall

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

Partielle Integration

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c$$

Substitutionsmethode

Wähle Substitution s.d. $x = \varphi(t)$ nach t differenzierbar

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel

$$\int (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+n}(1+x)^{1+n} + c$$

Spezialfall

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

Einige Grundintegrale (ohne Integrationskonstanten)

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
c	$cx,\ c = const.$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x-b}\right\rvert$
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\frac{1}{(x-a)^2}$	$-\frac{1}{x-a}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$

Beachte:
Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist $F(x) + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Bestimmtes Integral

Ist $f : D \to W$ eine beschränkte Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b] \subseteq D$, dann ist das **bestimmte Integral** von $f(x)$ definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

falls dieser Grenzwert existiert und unabhängig von der Wahl der Zahlen x_i und ξ_i ist.

Bezeichnungen

- $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ist eine Einteilung des Intervalls $I = [a, b]$
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ und $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ bezeichnen Teilintervalle und Werte daraus

- $f(x)$ heißt dann im Intervall $I = [a, b]$ integrierbar

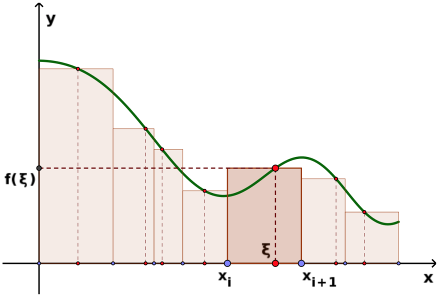


Bild: Helder, Marcos Antonio Nunes de Moura – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

Bestimmtes Integral

- $f(x) \geq 0$
  $\rightsquigarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist gleich dem Flächeninhalt des von der Kurve (Graph der Funktion $y = f(x)$) und der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ berandeten Fläche.
- $f(x) \leq 0$
  $\rightsquigarrow$ negativer Flächeninhalt
- $y = f(x)$ besitzt Nullstellen
  $\rightsquigarrow$ Differenz der Flächeninhalte ober-/unterhalb der x-Achse

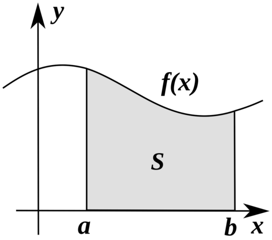


Bild: 4C – Lizenz:
Creative Commons by-sa 3.0 de

Existenz

Jede in einem Intervall $I = [a, b]$ stetige Funktion ist dort auch integrierbar.

Alternativer Zugang

- Streifeneinteilung des Intervalls $[a, b]$
- Obersumme $S_f := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$
- Untersumme $s_f := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$
- $\overline{I}_f := \inf(S_f) \geq \underline{I}_f := \sup(s_f)$
- $\overline{I}_f = \underline{I}_f = I \rightsquigarrow I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Hauptsatz

Ist die Funktion $y = f(x)$ mit $D = [a, b]$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar und besitzt $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Schreibweisen

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zusammenfassen der Integrationsintervalle

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Gleiche untere und obere Grenze

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Beispiele

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right), \qquad \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^\pi = 2$$

Kontakt

BIBA | Universität Bremen
Fachbereich 4 – Produktionstechnik
Fachgebiet 28 – Dynamics in Logistics
Hochschulring 20
28359 Bremen

Name	Jürgen Pannek
Telefon	+49 (0) 421 218–50190
E-Mail	pan@biba.uni-bremen.de
www	http://www.dil.biba.uni-bremen.de