Operations Research

Jürgen Pannek

Wintersemester 2016/17

Zu meiner Person

Jürgen Pannek
Fachgebiet Dynamics in Logistics
Fachbereich 4 – Produktionstechnik

BIBA – Bremer Institut für Produktion und Logistik
Universität Bremen, Hochschulring 20, 28359 Bremen

Sprechstunde	Freitag 14 – 16 Uhr
Büro	Gebäude BIBA – Raum 1090
Telefon	+49 (0) 421 218–50190
E-Mail	pan@biba.uni-bremen.de
www	http://www.dil.biba.uni-bremen.de

Research Cluster LogDynamics

Ziel

- Untersuchung der Dynamik in logistischen Systemen
- Nutzung von Synergien zwischen vier Disziplinen

Strategie

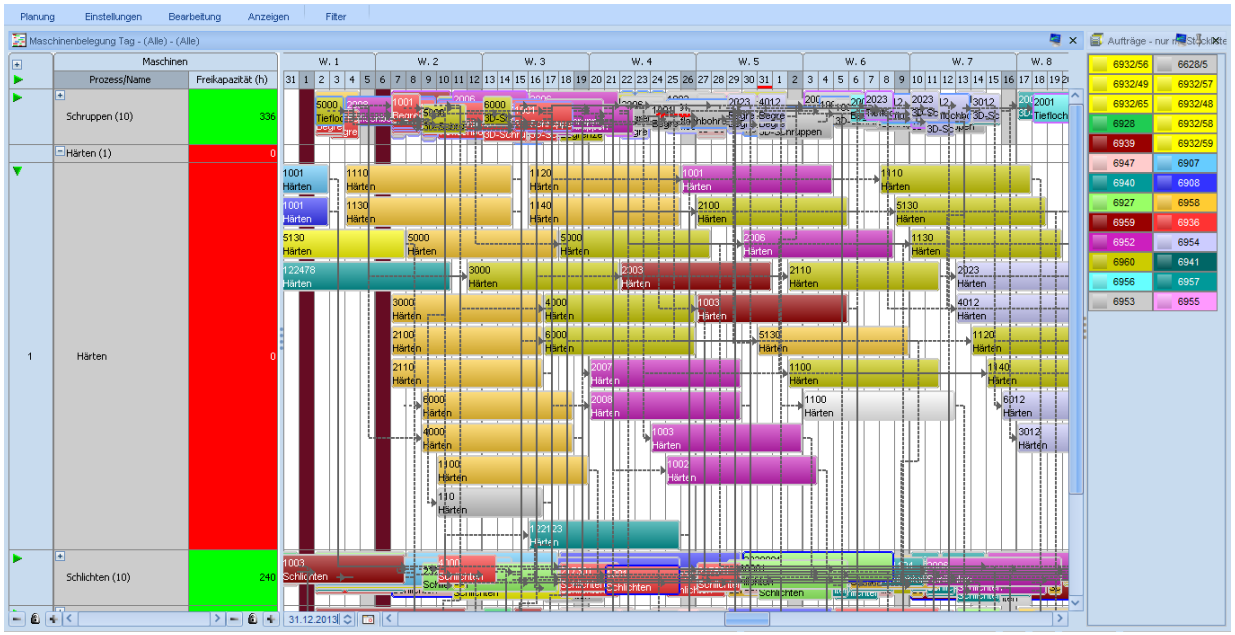
- Nachhaltigkeit der Grundlagenforschung
- Wissenstransfer in Industrie
- Ausbildung auf Promotionsniveau

Termine

Vorlesung	Freitag 12-14 Uhr, GW1-HS H0070
Tutorium	Mittwoch 12-14 Uhr, MZH 1380/1400
Zielgruppe	Betriebswirtschaftslehre Wirtschaftswissenschaft Wirtschaftsingenieurwesen Produktionstechnik
Inhalt	Modelle, Methoden und Algorithmen mit besonderer Bedeutung in Theorie und Praxis
www	http://www.dil.biba.uni-bremen.de/education.html

Fragestellungen der Vorlesung

- Warum ist die Reihenfolge bei der Produktionsplanung so schwierig?



Quelle: www.planungstafel.net

Fragestellungen der Vorlesung

- Wie belädt man ein Containerschiff, um den Aufwand fürs Entladen gering zu halten?

Quelle: www.wikipedia.org

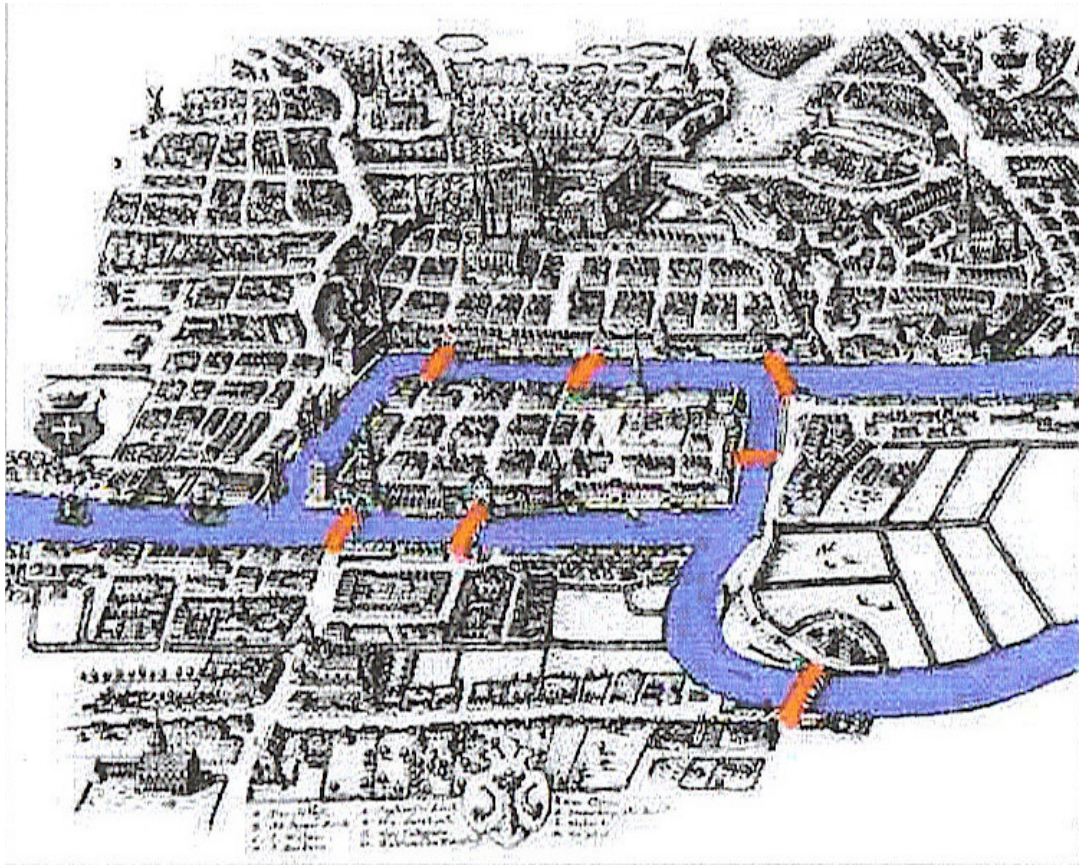
Fragestellungen der Vorlesung

- Wie erstellt man einen sinnvollen Fahrplan (Bahn, Bus, S-Bahn, ...)?

Quelle: www.vbn.de

Fragestellungen der Vorlesung

- Welchen Nutzen hat der Leonhard Euler (1707–1783) für Google Street View?

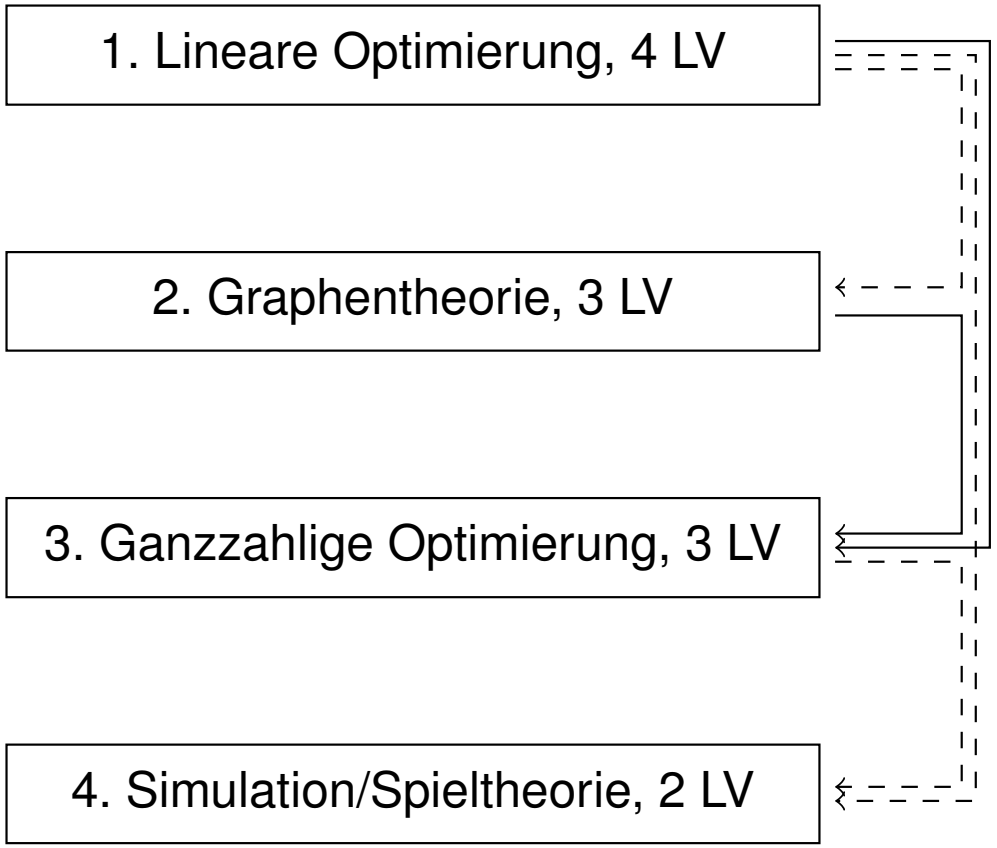


Quelle: www.friderizianer.de

Fragestellungen der Vorlesung

- Wie ernähre ich mich richtig und zugleich kosten-minimal bei Burger King?
- Wie simuliert man Warteschlangen in der Mensa und lässt sich dadurch die Wartezeit verkürzen?
- Drei Personen teilen sich ein Taxi, wie verteilt man die Fahrtkosten *fair*?
- Wie berechnet man die kürzeste Route, um alle Sehenswürdigkeiten Bremens zu besuchen?

Struktur dieser Vorlesung



Vertiefende Lehrveranstaltungen

- Optimierung wirtschaftswissenschaftlicher Prozesse (Pannek)
- Modeling, Analysis, and Control of Dynamics in Logistics (Becker, Freitag, Pannek)
- Komplexe Netzwerke in Produktion und Logistik (Becker)
- Modellbasierte Gruppenentscheidungen (Buer)
- Optimierung in Produktion und Logistik (Buer)
- Projekt Logistik I/II (Buer, Kopfer)
- Ökologische Transportplanung (Kopfer)
- Modellierung von Logistiksystemen (Kopfer)
- Modelle und Verfahren zur Optimierung des Container-Hinterlandtransports (Kopfer)
- ...

Tutorium

Leitung	Tobias Sprodowski
Termin	Mi 12-14 Uhr, MZH 1380/1400
Unterlagen	StudIP

Tobias Sprodowski

Bitte für Tutorien eines der folgenden Programme installieren:

- Microsoft Excel (27,-) mit Solver Add-In *oder*
- Open Office Calc / Libre Office Calc (kostenlos) *oder*
- Google Drive – Tabellenkalkulation (kostenlos)

Vorinstallieren

Software zum ersten Tutorium notwendig

Literatur

- Werners (2013) Grundlagen des Operations Research, 3. Auflage, Springer.
- Domschke, Drexl (2005) Einführung in Operations Research, 6. Auflage, Springer.
- Gerdts (2001) Mathematische Optimierungsverfahren des Operations Research, de Gruyter.
- Nickel, Stein, Waldman (2014) Operations Research, 2. Auflage, Springer.
- Suhl, Mellouli (2013) Optimierungssysteme, 3. Auflage, Springer.
- Neumann, Morlock (2005) Operations Research, 2. Auflage, Hanser Fachbuch.

Leistungsnachweis

Klausur	Dauer 90 Minuten
Termin	24.02.2017
Hilfsmittel	Alles auSSer Telefon- und Internetjoker
Vorleistungen	Keine

Vorbereitung

Bulimie Lernen sinnlos, besser kontinuierlich mitarbeiten

Gründe für den Kurs

Operations Research . . .

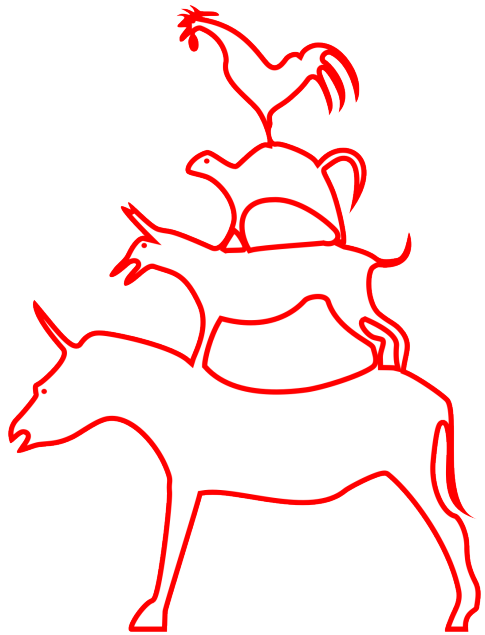
- ist praxisrelevant
- hat viele Anwendungsfelder
- bietet einen Methodenbaukasten
- vertieft eigene Rechenkenntnisse
- trainiert Umgang mit Schnittstellenproblemen

Teil I

Quantitative Entscheidungsunterstützung

Inhalt der Vorlesung

Entscheidungsunterstützung



Beispiel Produktionsprogrammplanung

Mathematische Optimierung

- Mathematisches Modell
- Mathematisches Optimierungsproblem
- Lineares Optimierungsproblem

Schritte zur Erfüllung von (Management-)Aufgaben:

1. **Planung / Entscheidungsvorbereitung**
2. Entscheidung
3. Durchführung
4. Kontrolle

Planen/Entscheiden:

- Ziel(e) identifizieren
- Alle Handlungsalternativen kennen
- Auswahl einer Handlungsalternativen, die das Ziel am besten erfüllt

Ziele des Operations Research (OR)

1. Vorbereitung möglichst optimaler Entscheidungen durch Anwendung mathematischer Methoden
2. Überführung eines realen Entscheidungsproblems durch ein Optimierungs- oder Simulationsmodell
3. Anwendung bzw. Entwicklung eines Algorithmus zur Lösung des Modells

Modell

Zweckorientiertes, vereinfachtes Abbild der Realität welches hinsichtlich der interessierenden Eigenschaften strukturähnlich ist.

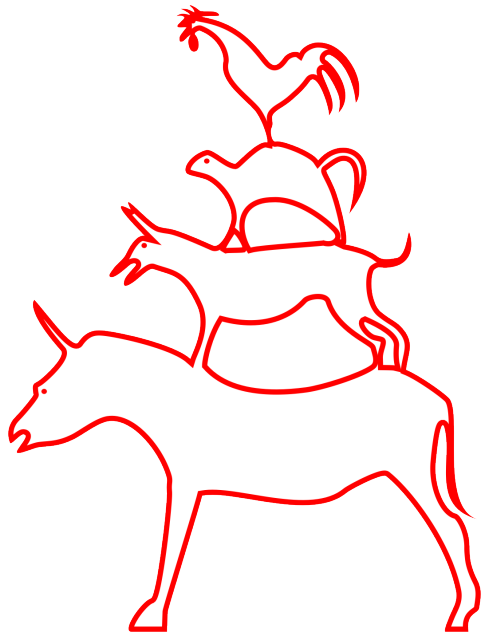
Algorithmus

Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems

Entscheidungsunterstützung

Beispiel Produktionsprogrammplanung

Mathematische Optimierung
- Mathematisches Modell
- Mathematisches Optimierungsproblem
- Lineares Optimierungsproblem



Beispiel Produktionsprogrammplanung 1/3

Parameter:

Möbeltyp	Produktionsdauer (in Stunden)			Gewinn [GE]
	Maschine 1	Maschine 2	Arbeitszeit	
Stuhl	3,5	4	11	35
Bank	6	5	15	45
Tisch	8	6	20	65

Restriktionen:

- Maschine 1 ist für 120 Stunden pro Woche verfügbar.
- Maschine 2 ist für 100 Stunden pro Woche verfügbar.
- Es gibt 7 Tischler, die je 40 Stunden pro Woche arbeiten.
- Tische sollen höchstens die Hälfte aller produzierten Möbel ausmachen.

Beispiel Produktionsprogrammplanung 2/3

Frage

Wie viele Möbelstücke sollen wir (innerhalb einer Woche) produzieren, um unseren Wochengewinn zu maximieren?

Entscheidungen:

- Wie viele Stühle sollen produziert werden? (x_S)
- Wie viele Bänke sollen produziert werden? (x_B)
- Wie viele Tische sollen produziert werden? (x_T)

Gewinn:

$$\underbrace{z}_{\text{Zielfunktionswert}} = f(x) = 35x_S + \overbrace{45}^{\text{Parameter}} x_B + 65 \underbrace{x_T}_{\text{Entscheidungsvariable}}$$

Ziel: Sinnvolle Werte für x_S, x_B, x_T bei Gewinnmaximierung

Beispiel Produktionsprogrammplanung 3/3
Vollständiges lineares Modell

Optimierungsvorschrift

$$\overbrace{\max}\ z = 35x_S + 45x_B + 65x_T$$

$$\underbrace{\text{u.d.N.}}_{\text{Nebenbedingungen}} \quad 3.5x_S + 6x_B + 8x_T \leq 120 \quad \text{(Maschine 1)}$$

$$4x_S + 5x_B + 6x_T \leq 100 \quad \text{(Maschine 2)}$$

$$11x_S + 15x_B + 20x_T \leq 7 \cdot 40 \ \text{(Arbeitszeit)}$$

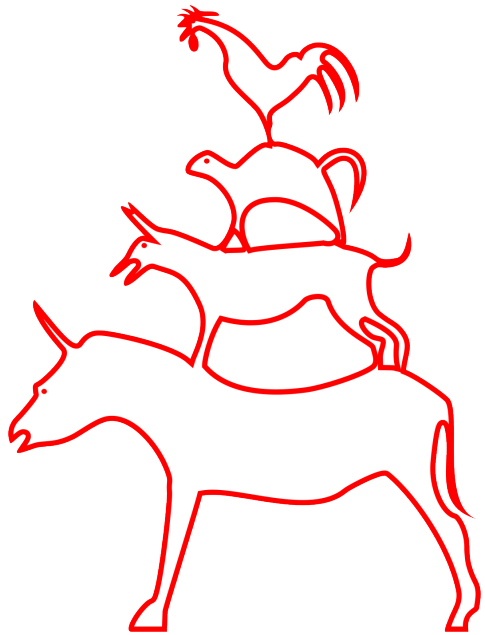
$$x_T \leq x_S + x_B$$

$$x_S \geq 0$$

$$x_B \geq 0$$

$$x_T \geq 0$$

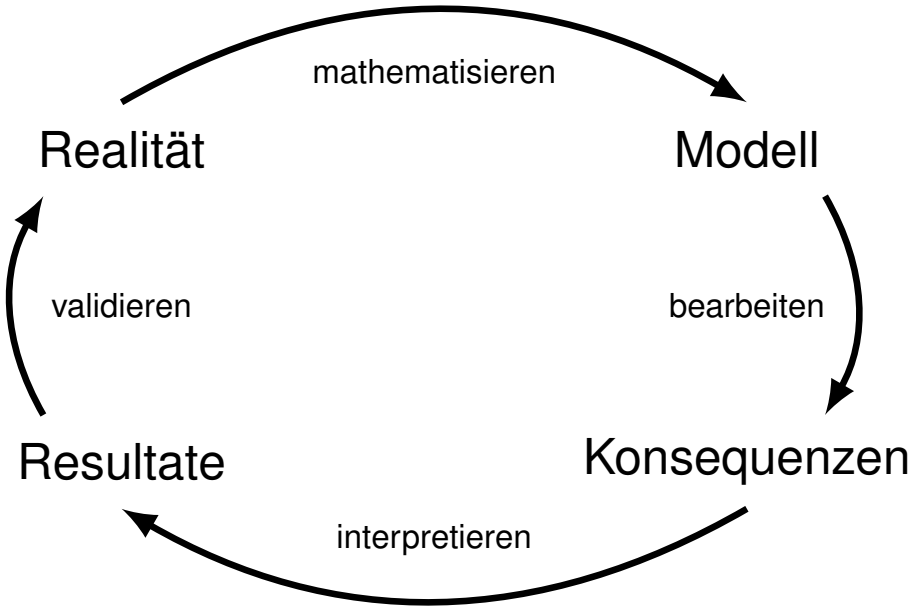
Inhalt der Vorlesung



Mathematisches Modell

Sammlung von Variablen und Beziehungen zwischen Variablen zur Beschreibung wichtiger Eigenschaften eines gegebenen Problems.

Wie konstruiert man ein mathematisches Modell?



Optimierung

Ermittlung derjenigen zulässigen Handlungsalternative, die einem vorgegebenem Ziel am besten von allen Alternativen entspricht.

Mathematisches Optimierungsproblem

$$\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$$

1. $\mathbf{x}$ heiSSt Vektor von Entscheidungsvariablen
   $\hookrightarrow$ repräsentiert ein oder mehrere Alternativen
2. S enthält alle erlaubten $\mathbf{x}$
   $\hookrightarrow$ wird durch Restriktionen eingeschränkt
3. $f(\mathbf{x})$ heiSSt Zielfunktion
   $\hookrightarrow$ erlaubt Suche nach optimalem $\mathbf{x}$

Lösung

Eine Lösung ist eine Zuweisung von Werten zu allen Entscheidungsvariablen.

Möbel-Beispiel: $\bar{\mathbf{x}} = (8, 0, 5)$ oder $\hat{\mathbf{x}} = (3, 6, 27)$

Zulässige Lösung

Eine Lösung heiSSt zulässig, falls sie alle Restriktionen erfüllt.

Möbel-Beispiel: $\bar{\mathbf{x}} = (8, 0, 5)$ ist zulässig, dagegen ist $\hat{\mathbf{x}} = (3, 6, 27)$ unzulässig.

Wert/Zielfunktionswert

Der Wert einer zulässigen Lösung $\mathbf{x}$ ist ihr Zielfunktionswert $z = f(\mathbf{x})$.

Möbel-Beispiel: Für $\bar{\mathbf{x}} = (8, 0, 5)$ ist der Zielfunktionswert

$$z = f(\bar{\mathbf{x}}) = f(8, 0, 5) = 35 \cdot 8 + 45 \cdot 0 + 65 \cdot 5 = 605$$

Optimale Lösung

Eine zulässige Lösung eines Maximierungsproblems heiSSt optimal, wenn ihr Wert mindestens so groSS ist wie der jeder anderen zulässigen Lösung.

Möbel-Beispiel: Die Lösung $\mathbf{x}^\star = (9.03225, 0, 9.03225)$ ist optimal, ihr Zielfunktionswert lautet 903.225.

Lineares Optimierungsproblem

Ein mathematisches Optimierungsproblem

$$\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$$

heiSSt linear, wenn

- die Entscheidungsvariablen beliebig teilbar ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$),
- die Parameter deterministisch, und
- Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ und Nebenbedingungen linear sind.

Spezialfall: Lineare Gleichung

Eine Gleichung wird als lineare Gleichung bezeichnet, wenn gilt

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Warum Fokus auf LPs? es gibt effiziente Lösungsverfahren, hohe Verbreitung bei Unternehmen

Lineares Programm

Als lineares Programm in allgemeiner Form bezeichnen wir

$$
\begin{aligned}
&\max f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
&\text{u.d.N.} \quad a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \leq b_i, \quad \text{für } i = 1, \ldots, m_1 \\
&\qquad\quad a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \geq b_i, \quad \text{für } i = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\
&\qquad\quad a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n = b_i, \quad \text{für } i = m_2 + 1, \ldots, m \\
&\qquad\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \quad \text{für einige oder alle } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Gegeben:

Zielfunktionskoeffizienten: $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Kapazitäten („rechte Seite“): $b_1, b_2, \ldots, b_m$

Koeffizientenmatrix: $A^{m \times n} = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$

Gesucht:

Entscheidungsvariablen: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Zusammenfassung & Ausblick

Fragen zur Wiederholung:

- Was versteht man unter den Begriffen/Konzepten **Operations Research, Modell, Algorithmus, Entscheidungsunterstützung**?
- Welche Strukturen charakterisieren ein **Lineares Programm**?
- Wodurch zeichnet sich eine **optimale Lösung** aus?

Klausurrelevante Literatur

Domschke/Drexl: Kapitel 1.1, 1.2 und 2.1, oder Neumann/Morlock Kapitel 0 und 1.1

Ausblick

- Tutorium: Modellierung einfacher LP
- Wie lassen sich LP grafisch lösen?

Teil II

Lineare Optimierung I – Graphisches Lösungsverfahren und Normalform

Lineares Optimierungsproblem

Ein mathematisches Optimierungsproblem

$$\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$$

heiSSt linear, wenn

- die Entscheidungsvariablen beliebig teilbar ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$),
- die Parameter deterministisch, und
- Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ und Nebenbedingungen linear sind.

Spezialfall: Lineare Gleichung

Eine Gleichung wird als lineare Gleichung bezeichnet, wenn gilt

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

↪ Warum Fokus auf LPs?

Lineares Programm

Als lineares Programm in allgemeiner Form bezeichnen wir

$$\begin{aligned}
\max f(\mathbf{x}) &= c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
\text{u.d.N.} \quad a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n &\leq b_i, \quad \text{für } i = 1, \ldots, m_1 \\
a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n &\geq b_i, \quad \text{für } i = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\
a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n &= b_i, \quad \text{für } i = m_2 + 1, \ldots, m \\
x_j &\geq 0, \quad \text{für einige oder alle } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Gegeben:

Zielfunktionskoeffizienten: $c_1, c_2, \ldots, c_n$

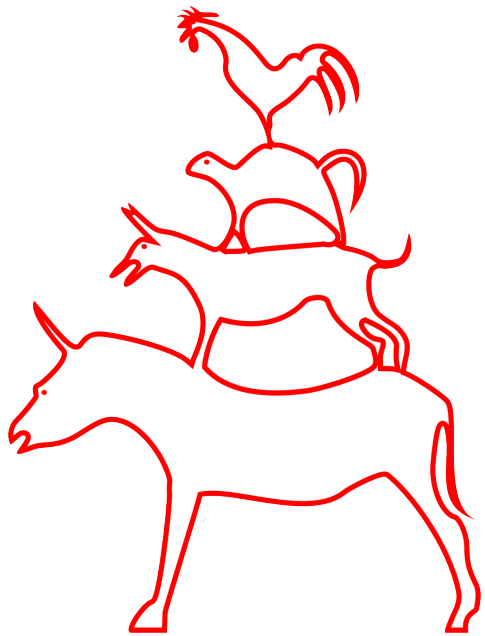
Kapazitäten („rechte Seite“): $b_1, b_2, \ldots, b_m$

Koeffizientenmatrix: $A^{m \times n} = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$

Gesucht:

Entscheidungsvariablen: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Inhalt der Vorlesung



Beispiel: Produktionsprogrammplanung 1/2

Problemstellung:

- Ein Unternehmen produziert zwei Produkte P_1 und P_2.
- Deckungsbeitrag (pro Stück): P_1 liefert 3 GE, P_2 liefert 4 GE.

Restriktionen:

	Ressourcen pro Stück		verfügbare
	Produkt P_1	Produkt P_2	Ressourcen
Maschinestunden (h)	3	2	1200
Rohstoff (ME)	5	10	3000
Arbeitskraft (h)	0	0.5	125

Frage

Welches Produktionsprogramm maximiert den Gesamtgewinn?

vgl. Nickel/Stein/Waldman, Beispiel 1.2

Beispiel: Produktionsprogrammplanung 2/2

1. Modellierung der Problemstellung als LP:

$$
\begin{aligned}
\max z = f(\mathbf{x}) = 3x_1 + \;\; 4x_2 & & & \\
3x_1 + \;\; 2x_2 &\leq 1200 & \text{Maschinen (h)} & \quad \text{(I)} \\
5x_1 + 10x_2 &\leq 3000 & \text{Rohstoffe (ME)} & \quad \text{(II)} \\
0.5x_2 &\leq 125 & \text{Arbeitszeit (h)} & \quad \text{(III)} \\
x_1 &\geq 0 & & \quad \text{(IV)} \\
x_2 &\geq 0 & & \quad \text{(V)}
\end{aligned}
$$

2. Welche Anzahl x_1 von P_1 und x_2 von P_2 soll produziert werden?

Algorithmus

Der Algorithmus (=Verarbeitungsvorschrift) sieht fünf Schritte vor:

1. Bestimme die Menge $\mathbb{M}$ aller zulässigen Lösungen.
2. Zeichne eine Isogewinngerade.
3. Verschiebe diese Isogewinngerade solange parallel in Richtung des Gradienten von $f(\mathbf{x})$ bis durch weiteren Verschub kein weiterer zulässiger Punkt erreicht werden kann.
4. Berechne die Koordinaten von $\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star)$ durch Auflösen des Gleichungssystems der aktiven Restriktionen.
5. Berechne $z^\star = f(x_1^\star, x_2^\star)$, $z^\star$ ist der optimale Zielfunktionswert.

LogDynamics

Graphische Darstellung von Restriktionen

Führe die folgenden Schritte für jede Restriktion des LP durch:

1. Fasse Restriktion als Gleichung einer Geraden auf (d.h. mit $=$).
2. Zeichne diese Gerade (z.B. Zweipunkt Methode).
3. Bestimme den relevanten Halbraum für die Restriktion.

Erklärung

Punkte im relevanten Halbraum erfüllen die ursprüngliche Restriktion.

Test

Wähle Punkt, der nicht auf der Geraden ist. Ist die Ungleichung erfüllt, so ist der Punkt im relevanten Halbraum, andernfalls auSSerhalb.

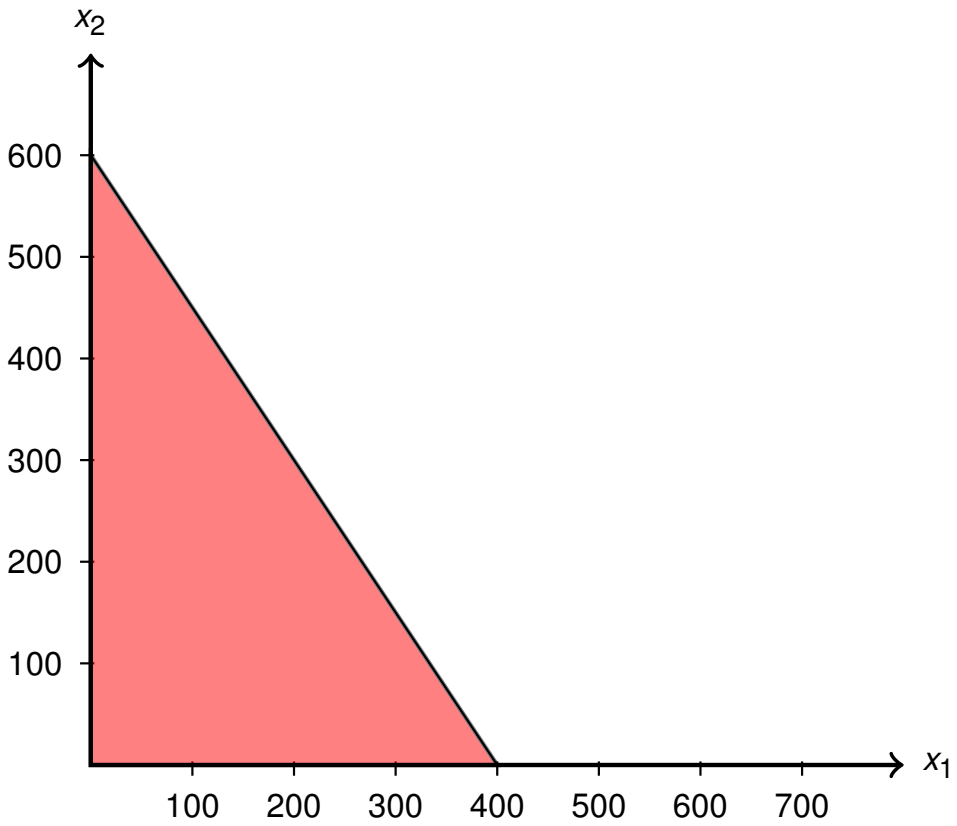
Zeichne Restriktion (I): $3x_1 + 2x_2 \leq 1200$

1. **Fasse (I) als Gleichung auf:** $3x_1 + 2x_2 = 1200$
2. **Zeichne Gerade:** Berechne z.B. zwei Punkte der Geraden:
   - Wähle $x_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_2 = 600 \Rightarrow$ Punkt 1 ist (0,600).
   - Wähle $x_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 400 \Rightarrow$ Punkt 2 ist (400,0).
3. **Bestimme relevanten Halbraum:** Wähle einen beliebigen Punkt, z.B. $(0, 0)$.

   $(0, 0)$ erfüllt (I), d.h. $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 1200$, daher liegt $(0, 0)$ im relevanten Halbraum.

Schritt 1: Beispiel 2/2

Darstellung der Restriktion (I) $3x_1 + 2x_2 \leq 1200$

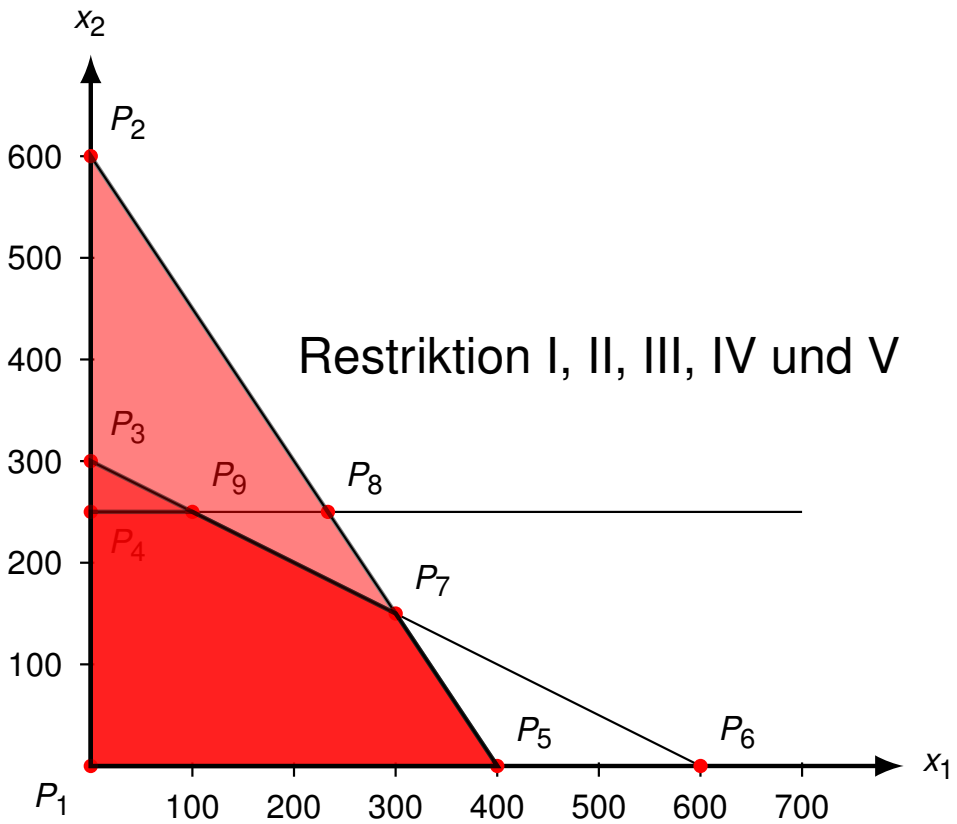


Problem

Es wird bislang nur eine Restriktion berücksichtigt.

Definition (Menge aller zulässigen Lösungen)

Wir bezeichnen die Schnittmenge aller relevanten Halbräume als die Menge $\mathbb{M}$ aller zulässigen Lösungen des LP.



Schritt 2: Zeichne eine Isogewinngerade der Zielfunktion

LogDynamics

Zeichne Isogewinngerade der Zielfunktion

- **Ignoriere die Optimierungsvorschrift** (min / max)
- **Fasse Zielfunktion als Gleichung auf:** $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$
- **Zeichne Isogewinngerade:** Wähle einen beliebigen Wert z_0 für z und setze ein

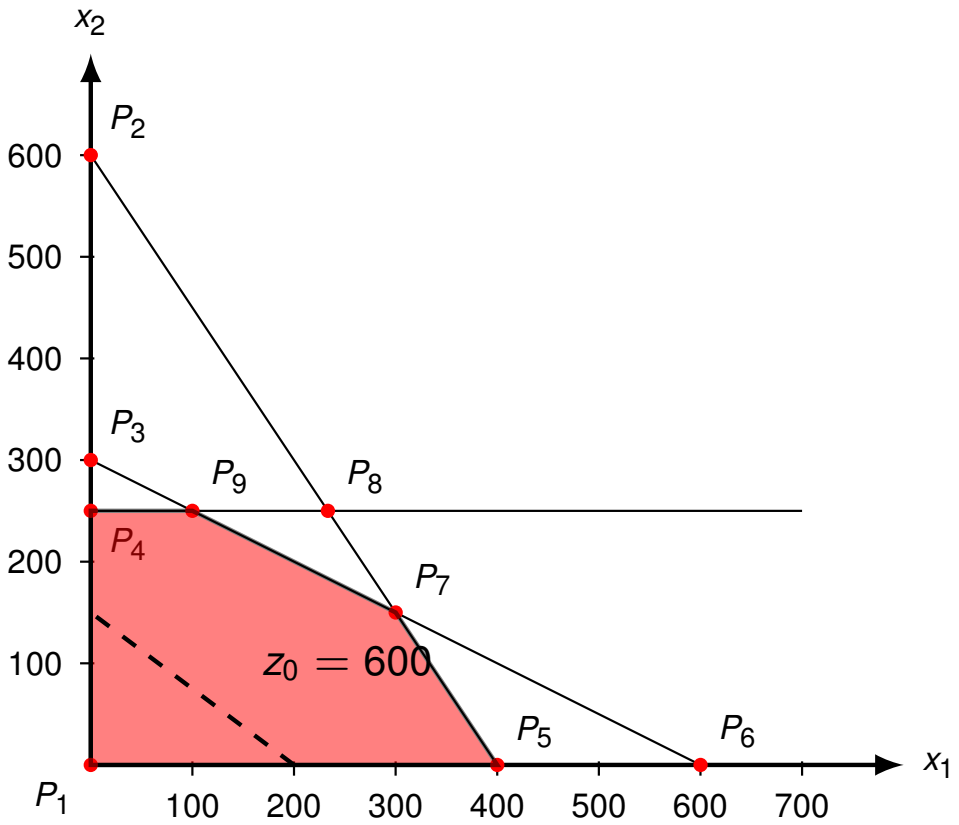
Beachte: Alle Punkte auf einer Isogewinngeraden haben den gleichen Zielfunktionswert.

Beispiel: Isogewinngerade für Zielfunktion $z = 3x_1 + 4x_2$

- **Wähle beliebigen Wert:** $z_0 = 600$.
- **Setze Gleichung:** $3x_1 + 4x_2 = 600$, d.h. alle Punkte haben Zielfunktionswert 600.
- **Bestimme Schnittpunkte:** x_1-Achse $(200, 0)$; x_2-Achse $(0, 150)$.

Schritt 2: Beispiel

Beispiel: Isogewinngerade für Zielfunktion $z = 3x_1 + 4x_2$



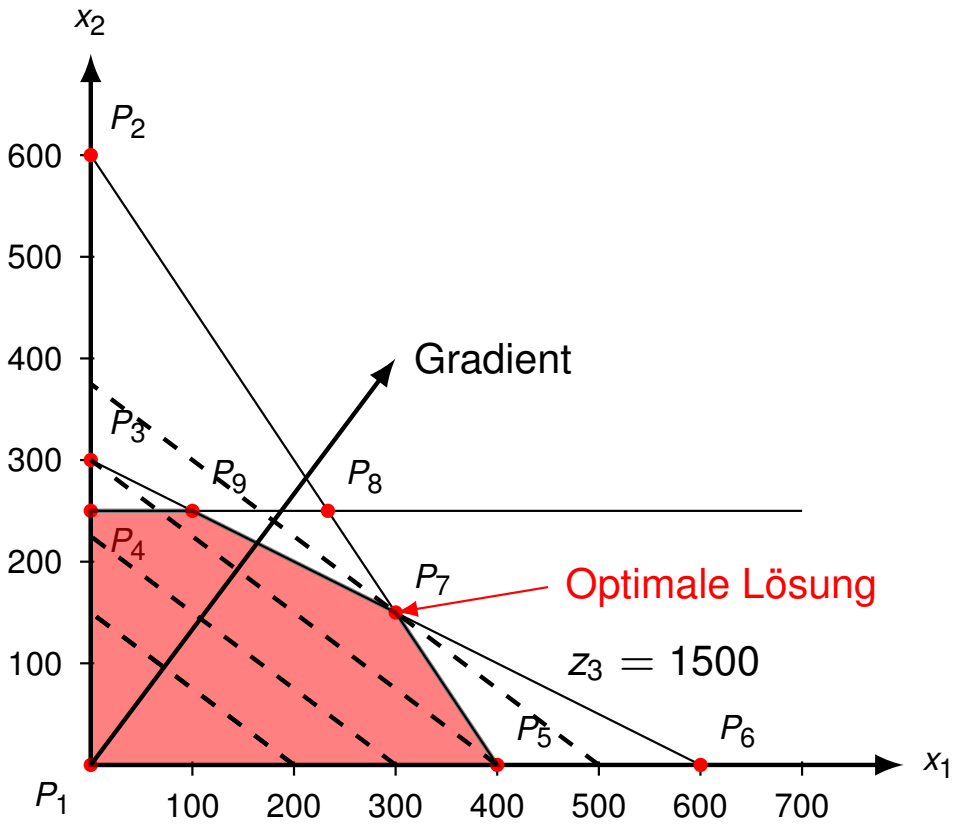
Schritt 3: Verschiebe Isogewinngerade entlang Gradient

Verschiebe Isogewinngerade

- **Bestimme die Steigung** der Zielfunktion (Gradient)
- **Verschiebe** die Isogewinngerade solange
  - in Richtung des Gradienten (Maximierungsproblem), andernfalls
  - in negative Richtung des Gradienten (Minimierungsproblem)
- bis die Isogewinngerade eine Lösung in einer Ecke tangiert und
- bei eine weiteren Verschiebung keine zulässigen Lösungen mehr auf der Isogewinngeraden liegen würden.

Schritt 3: Beispiel

Beispiel: Isogewinngerade für Zielfunktion $z = 3x_1 + 4x_2$



Schritt 4: Ermittle Koordinaten einer optimalen Lösung

Beobachtung: Die gefundene optimale Lösung (Ecke) wird durch den Schnittpunkt (mindestens) zweier Restriktionsgeraden definiert.

Aktive Restriktion

Eine Restriktion ist für eine Lösung **x** aktiv, wenn **x** sie mit Gleichheit erfüllt.

Theorem

Die optimale Lösung $\mathbf{x}^\star$ ist durch das Gleichungssystem der aktiven Restriktionen gegeben.

Beispiel

Die Restriktionen (I) und (II) sind **aktiv**. Es folgt:

$$3x_1^\star + 2x_2^\star = 1200 \quad \text{(I)}$$
$$5x_1^\star + 10x_2^\star = 3000 \quad \text{(II)}$$

Auflösen ergibt $x_1^\star = 300$ und $x_2^\star = 150$.

Schritt 5: Berechne den optimalen Zielfunktionswert

Auswertung: Setze optimale Lösung $\mathbf{x}$ in Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ ein.

Beispiel

$\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star) = (300, 150)$
Einsetzen: $z^\star = f(x_1^\star, x_2^\star) = f(300, 150) = 3 \cdot 300 + 4 \cdot 150 = 1500$

Ergebnis: Optimales Produktionsprogramm

Der maximale Deckungsbeitrag von $z^\star = 1500$ GE wird bei einer Produktion von 300 Stück von Produkt P_1 und 150 Stück von Produkt P_2 erreicht.
Damit ist ein gewinnmaximales Produktionsprogramm gefunden.

Algorithmus

1. Bestimme die Menge $\mathbb{M}$ aller zulässigen Lösungen.
2. Zeichne eine Isogewinngerade.
3. Verschiebe diese Isogewinngerade solange parallel in Richtung des Gradienten von $f(\mathbf{x})$ bis durch weiteren Verschub kein weiterer zulässiger Punkt erreicht werden kann.
4. Berechne die Koordinaten von $\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star)$ durch Auflösen des Gleichungssystems der aktiven Restriktionen.
5. Berechne $z^\star = f(x_1^\star, x_2^\star)$, $z^\star$ ist der optimale Zielfunktionswert.

Mischungsproblem von Futtermittel in der Viehzucht
vgl. [DD, Kapitel 2.2]

LogDynamics

Problemstellung:

- Ein Rind erhält täglich eine Mischung aus zwei Futtersorten S_1 und S_2.
- Die Tagesration soll den Tagesbedarf der Nährstoffe I, II und III decken.

Restriktionen:

	Sorte S_1	Sorte S_2	Mindestbedarf
Nährstoff I	$2\ g/kg$	$1\ g/kg$	$6\ g$
Nährstoff II	$2\ g/kg$	$4\ g/kg$	$12\ g$
Nährstoff III	$0\ g/kg$	$4\ g/kg$	$4\ g$
Preis	$5\ GE/kg$	$7\ GE/kg$	—

Frage

Welches Mischung ist bei Einhaltung der Nährstoffmenge kostenminimal?

Bedeutung des Mischungsproblems: Neben Landwirtschaft auch Farben/Chemie (BASF), Metallurgie; ähnliche Problemformulierung (kein LP) durch amerikanische Wissenschaftler als Ernähung von Soldaten vor WW2. Später Nobelpreis.

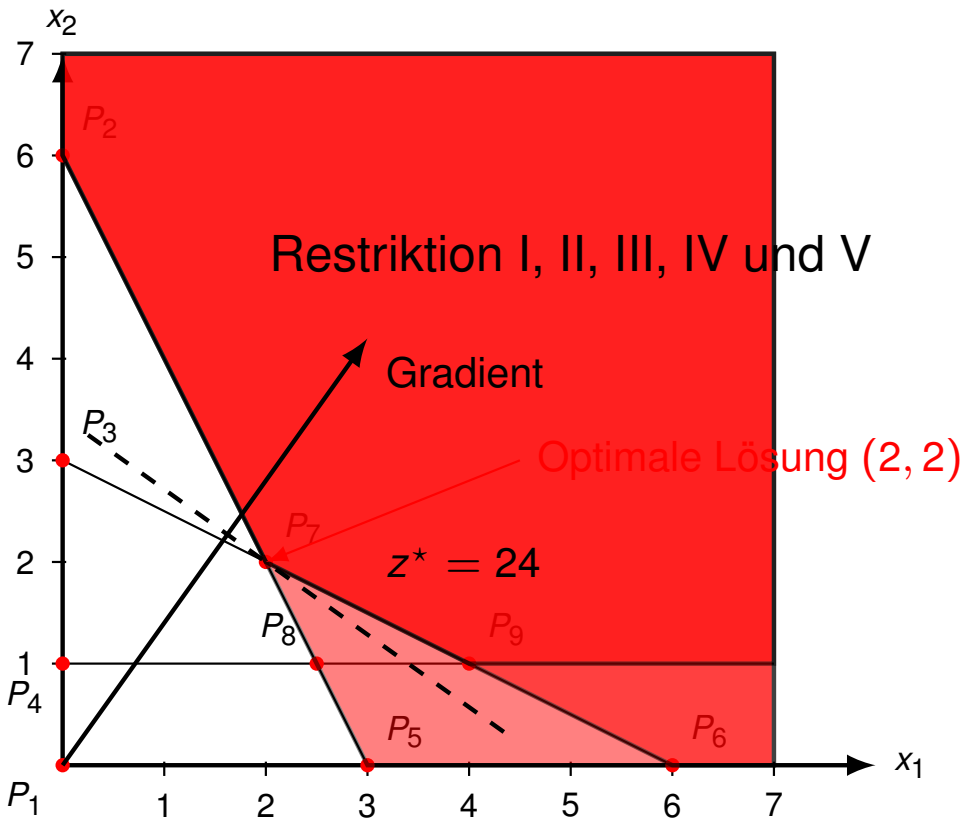
Mischungsproblem von Futtermittel – Lineares Optimierungsmodell

1. Modellierung der Problemstellung als LP:

$$\begin{aligned}
\min f(\mathbf{x}) = & 5x_1 + 7x_2 & & \\
2x_1 + & x_2 \geq 6 & \text{Nährstoff I} & \text{(I)} \\
2x_1 + & 4x_2 \geq 12 & \text{Nährstoff II} & \text{(II)} \\
& 4x_2 \geq 4 & \text{Nährstoff III} & \text{(III)} \\
& x_1 \geq 0 & & \text{(IV)} \\
& x_2 \geq 0 & & \text{(V)}
\end{aligned}$$

2. Welche Anzahl x_1 von S_1 und x_2 von S_2 soll verwendet werden?

Graphische Lösung des Futtermittel-Mischungsproblems

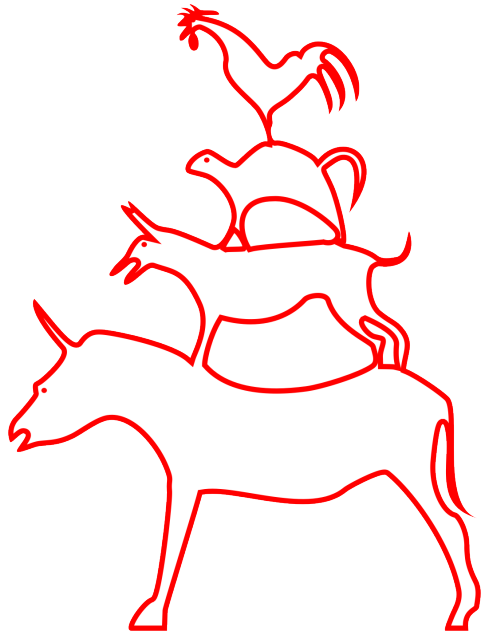


Inhalt der Vorlesung

Graphische Lösung von LP
- Beispiel Produktionsprogrammplanung
- Algorithmus
- Beispiel

Eigenschaften zulässiger Lösungen

Normalform und Basis
- Standardform
- Normalform
- Basis
- Zulässige Basislösung
- Ecke



Konvexität und Linearkombination

Linearkombination

Für Vektoren $x_i \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, bezeichnet

$$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

eine Linearkombination.

Konvexe Linearkombination

Eine Linearkombination heiSSt konvex, wenn gilt

$$\lambda_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, k, \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Bei einer echten konvexen Linearkombination gilt zudem $\lambda_i > 0$.

Folgerung über die Menge zulässiger LP-Lösungen

Theorem

Für jedes LP ist die Menge $\mathbb{M}$ der zulässigen Lösungen konvex.

Ecke/Extrempunkt

Punkte einer konvexen Menge, die sich nicht als echte konvexe Linearkombination darstellen lassen, heiSSen Ecke bzw. Extrempunkt.

Satz – Eckensatz der linearen Optimierung

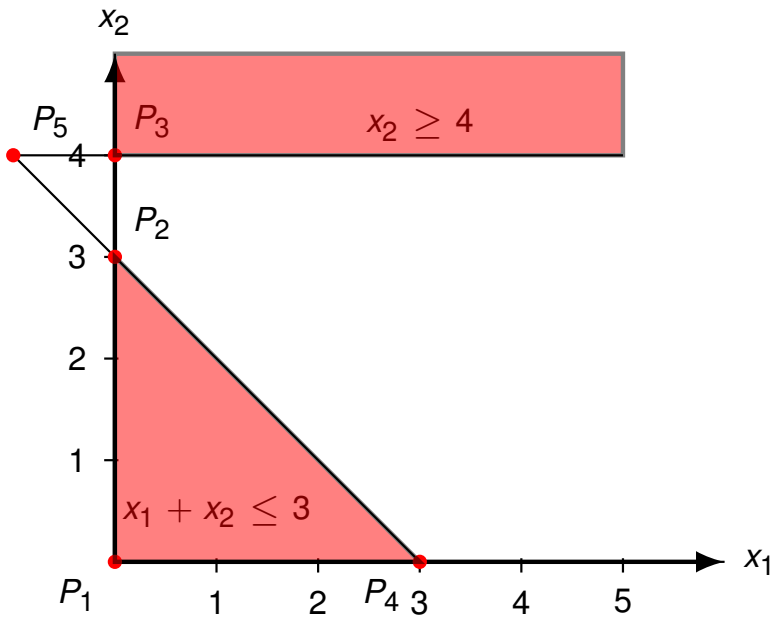
Wenn ein LP eine optimale Lösung besitzt, dann ist auch mindestens eine Ecke von $\mathbb{M}$ eine optimale Lösung.

Sonderfall 1 – Es existiert keine zulässige Lösung

Leere zulässige Menge

Ist die Menge $\mathbb{M}$ der zulässigen Lösungen ist leer, d.h. $\mathbb{M} = \emptyset$, so existiert keine zulässige Lösung.

Hintergrund: Die Restriktionen enthalten Widersprüche.

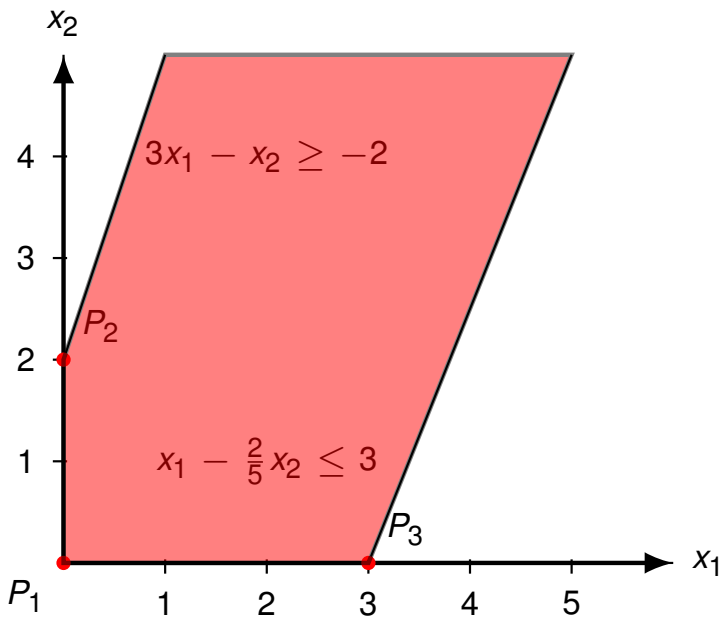


Praxis: Prüfen Modellierungsfehler? Alle Restriktionen wirklich nötig?

Unbeschränkter Lösungsraum

Ist die zulässige Menge nichtleer, d.h. $\mathbb{M} \neq \emptyset$, und unbeschränkt bzgl. der Zielfunktion, d.h. $\sup z = \infty$ oder $\inf z = -\infty$, so existiert keine optimale Lösung.

Hintergrund: Die Restriktionen bilden kein Polyeder.

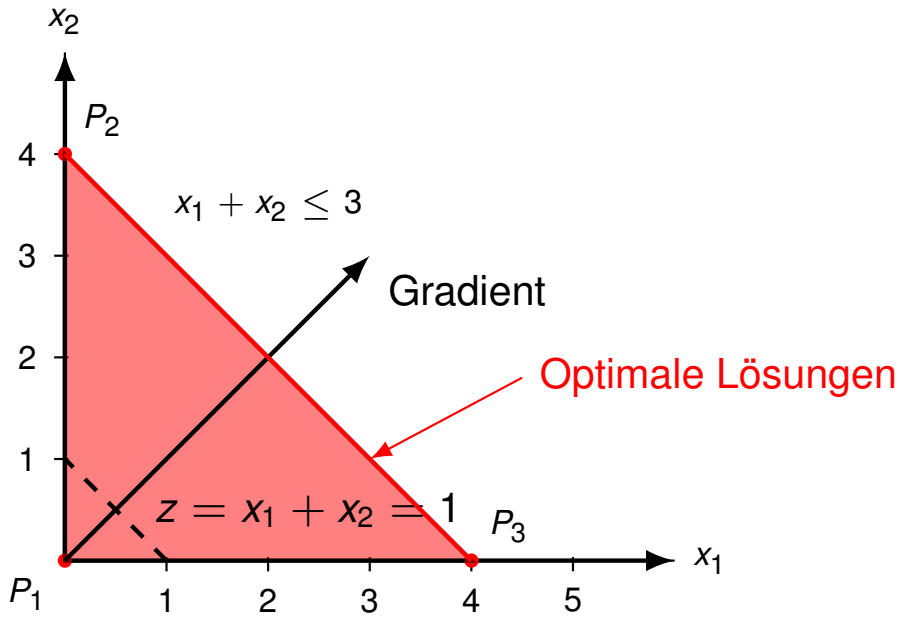


Praxis: Prüfen Modellierungsfehler? Restriktionen vergessen?

Duale Degeneriertheit

Das LP hat mehrere optimale Lösungen.

Hintergrund: Eine Restriktion ist parallel zur Isogewinngeraden.

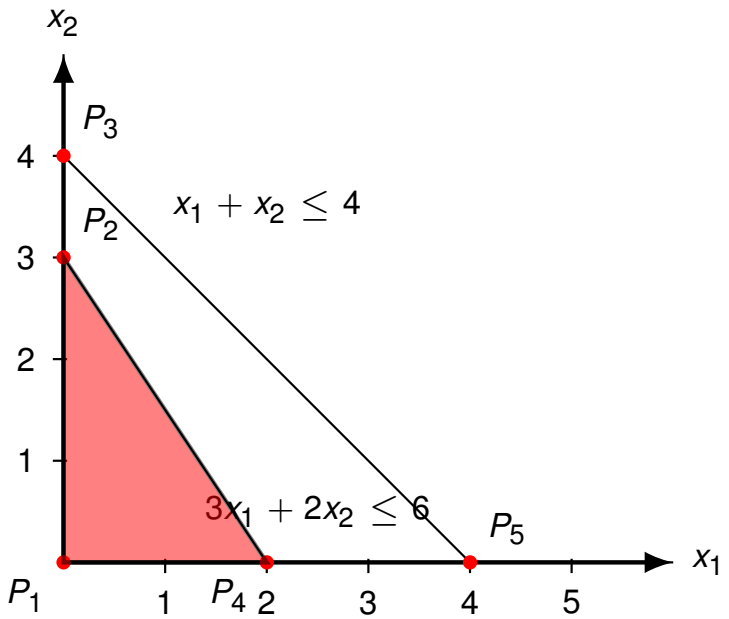


Praxis: kein Handlungsbedarf

Redundanz von Restriktionen

Mindestens eine Restriktion schneidet die zulässige Menge nicht.

Hintergrund: Mindestens eine Restriktion ist überflüssig.

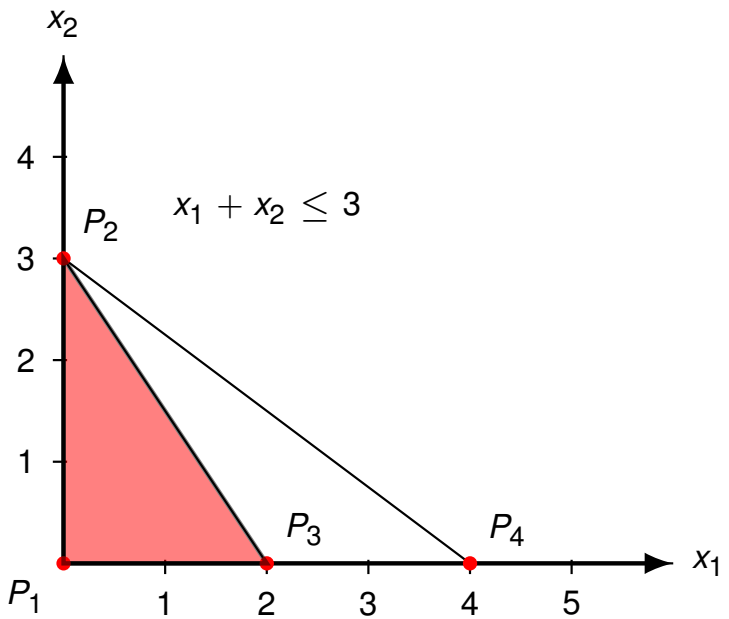


Praxis: Redundante Restriktion entfernen

Primale Degeneriertheit

Im n-dimensionalen Fall wird ein zulässiger Eckpunkt durch mindestens $n + 1$ Hyperebenen definiert.

Hintergrund: Mindestens eine Nebenbedingung ist überflüssig.



Praxis: kein Handlungsbedarf

Folgerungen

Eckensatz der linearen Optimierung

Wenn ein LP eine optimale Lösung besitzt, dann ist auch mindestens eine Ecke von $\mathbb{M}$ eine optimale Lösung.

Konsequenz

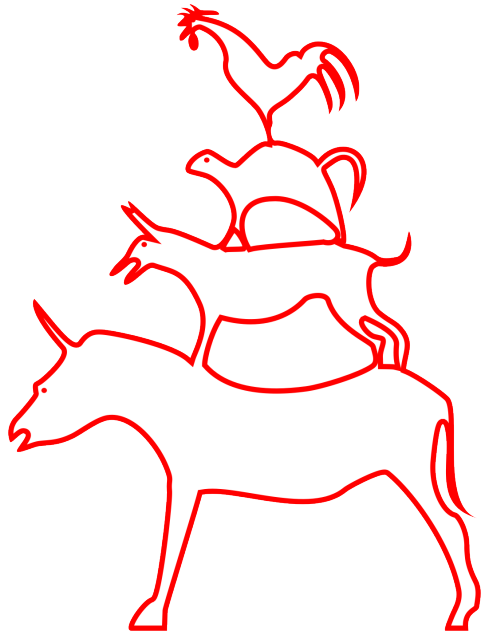
Ein allgemeingültiges ($n > 2$) Lösungsverfahren muss v.a. prüfen, ob die Sonderfälle 1 und 2 vorliegen und kann sich (im Wesentlichen) auf die Berechnung von Ecken beschränken.

Erläuterung

Ist die zulässige Menge weder leer noch unbeschränkt, dann existiert in mindestens einer Ecke (Schnittpunkt zweier Restriktionsgeraden) der konvexen Lösungsmenge eine Lösung.

Es kann sein, dass mehrere Lösungen optimal sind (Sonderfall 3) oder dieselbe Lösung durch mehrere Ecken beschrieben wird (Sonderfall 5).

Inhalt der Vorlesung



Lineares Programm in Standardform

Als lineares Programm in Standardform bezeichnen wir

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{x}) &= c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ \text{u.d.N.} \quad a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n &\leq b_i, \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \\ x_j &\geq 0, \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Eigenschaften:

- Maximierungsproblem
- Nur Ungleichungsrestriktionen (kleiner gleich)
- Alle Entscheidungsvariablen sind vorzeichenbedingt

Regeln zur Transformation in Standardform

- Ungleichungen:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad -a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

- Zielfunktion:

$$\min z = f(\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \max -z = -f(\mathbf{x})$$

- Gleichungen:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \end{cases}$$

- Nichtnegativität:

$$x_j \in \mathbb{R}$$

ist äquivalent zu den zwei neuen Variablen x', x'' mit

$$x_j' \geq 0$$
$$x_j'' \geq 0$$
$$x_j := x_j' - x_j''$$

Theorem

Jedes beliebige LP lässt sich in Normalform transformieren.

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max z = & c_1 x_1 + & \dots + & c_n x_n & & & & & \\
\text{u.d.N.} & a_{11} x_1 + & \dots + & a_{in} x_n + & x_{n+1} & & & = & b_1 \\
& a_{21} x_1 + & \dots + & a_{2n} x_n + & & x_{n+2} & & = & b_2 \\
& \vdots & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\
& a_{m1} x_1 + & \dots + & a_{mn} x_n + & & & x_{n+m} & = & b_m \\
& x_1, & \dots, & x_n, & x_{n+1}, & \dots & x_{n+m} & \geq & 0
\end{array}
$$

Interpretation der Schlupfvariablen

Schlupf

Eine Schlupfvariable x_{n+i} misst den Schlupf der $i$ten-Restriktion

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad x_{n+i} = b_i - a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n$$

also den Umfang der nicht in Anspruch genommenen $i$ten-Ressource.

Beispiel: Maschinenstunden des Produktionsprogramms

$$3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \quad \text{Maschinen (h)} \qquad \text{(I)}$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1200 \quad \text{Maschinen (h)} \qquad \text{(I')}$$

Schlupfvariable misst die nicht verbrauchten Maschinenstunden.

Denomination:

- $x_1, \ldots, x_n$ nennt man Strukturvariablen.
- $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ nennt man Schlupfvariablen.

Basis eines LP-Modells 1/2

Basis

Jede nichtsinguläre $m \times m$-Matrix **B** eines LP in Normalform heiSSt Basis und besteht aus den linear unabhängigen Spalten von **B**.

Basis-/Nichtbasisvariablen

Die m Spalten von **B** definieren die Basisvariablen (BV).
Die restlichen n Variablen heiSSen Nichtbasisvariablen (NBV).

Beispiel – (I'), (II'), (III') des Produktionsprogramms

$$\begin{aligned} x_3 &= 1200 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 3000 - 5x_1 - 10x_2 \\ x_5 &= 125 - 0.5x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \text{ BV: } x_3, x_4, x_5, \text{ NBV: } x_1, x_2$$

Basis eines LP-Modells 2/2

LogDynamics

Basislösung

Setze NBV auf 0. Dann nennen wir die erhaltene eindeutige Lösung für eine Basis **B** Basislösung.

Beispiel (Fortsetzung)

NBV $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \Longrightarrow$ Basislösung $\mathbf{x} = (0, 0, 1200, 3000, 125)$.

Zulässigkeit und Degeneriertheit

Eine Basislösung ist

- zulässig, falls alle BV der Basislösung nichtnegative Werte annehmen, sonst unzulässig;
- degeneriert, falls mindestens eine der BV in der Basislösung den Wert 0 annimmt.

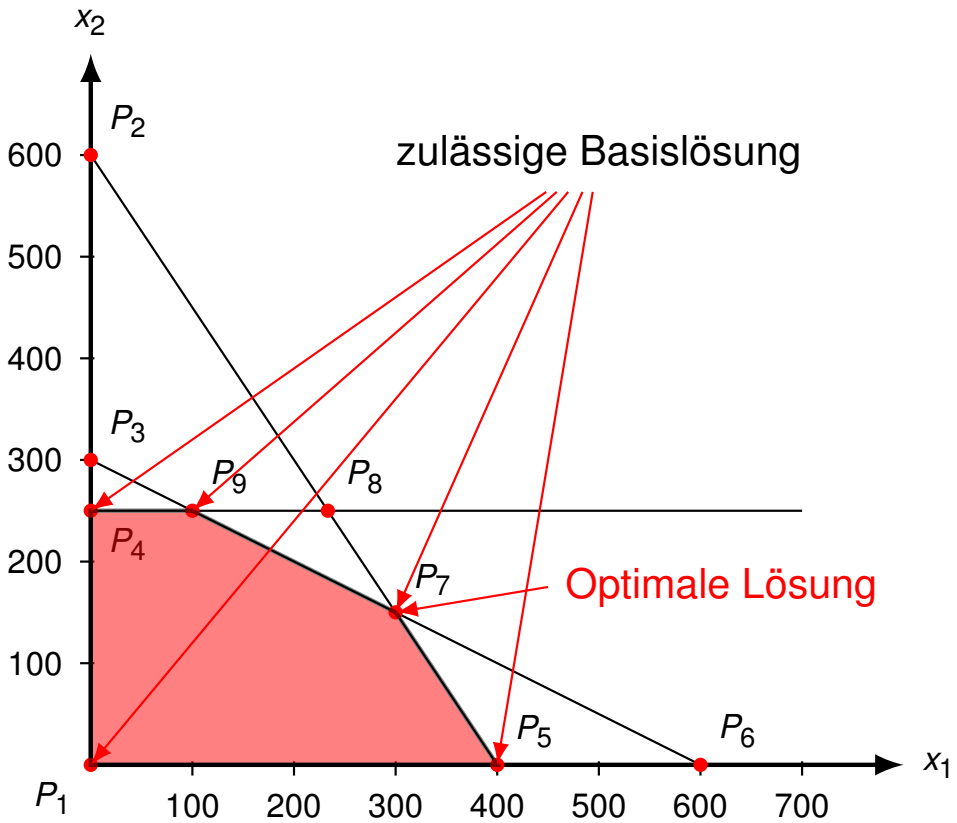
Beispiel (Fortsetzung)

Basislösung $\mathbf{x} = (0, 0, 1200, 3000, 125)$ ist zulässig und nicht-degeneriert.

Für jede Ecke gibt es eine zulässige Basislösung

Theorem

Für ein LP in Normalform sind die Ecken von $\mathbb{M}$ genau die zulässigen Basislösungen.



Zusammenfassung & Ausblick

Fragen zur Wiederholung:

- Wie kann ein LP mit zwei Variablen graphische gelöst werden?
- Wie kann ein beliebiges LP in Normalform transformiert werden?
- Wozu sind Schlupfvariablen zu ergänzen?

Klausurrelevante Literatur

Domschke/Drexl: Kapitel 2.2 und 2.3, oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 1.4 und 1.5, oder Werner Kapitel 2.1 und 2.2.2, oder Suhl/Mellouli Kapitel 2.2 und 2.3

Ausblick

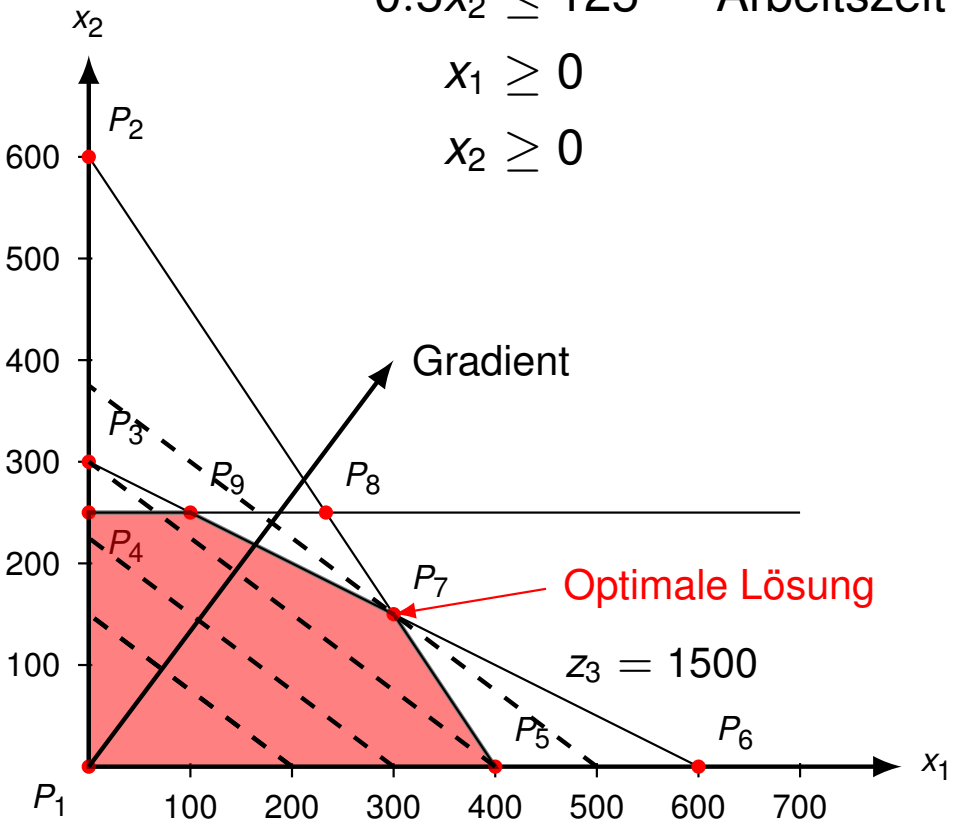
- Tutorium: Graphische Lösung & Transformation
- Simplex-Verfahren: Domschke/Drexl Kapitel 2.4, oder Werner Kapitel 2.2 und 3.1, oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 1.6 und 1.7, oder Suhl/Mellouli Kapitel 2.6

Teil III

Lineare Optimierung II – Primales und Duales Simplex Verfahren

Problemstellung als LP:

$$\begin{aligned}
\max z = f(\mathbf{x}) = 3x_1 + \ \ 4x_2 & & & \\
3x_1 + \ \ 2x_2 &\leq 1200 & \text{Maschinen (h)} & \quad \text{(I)} \\
5x_1 + 10x_2 &\leq 3000 & \text{Rohstoffe (ME)} & \quad \text{(II)} \\
0.5x_2 &\leq 125 & \text{Arbeitszeit (h)} & \quad \text{(III)} \\
x_1 &\geq 0 & & \quad \text{(IV)} \\
x_2 &\geq 0 & & \quad \text{(V)}
\end{aligned}$$



Wiederholung 2/3 – 5 Sonderfälle

Mögliche Sonderfälle:

1. Keine zulässige Lösung, d.h. $\mathbb{M} = \emptyset$
2. Unbeschränkter Lösungsraum (mit Blick auf Zielfunktion)
3. Duale Degeneriertheit – mehrere optimale Lösungen
4. Redundante Restriktionen
5. Primale Degeneriertheit – Ecke durch mehr Restriktionen als nötig definiert

Theorem

Jedes beliebige LP lässt sich durch Transformationsvorschriften in Normalform mit n Strukturvariablen, m Schlupfvariablen sowie m Restriktionen schreiben.

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max z = & c_1 x_1 + & \dots + & c_n x_n & & & & & \\
\text{u.d.N.} & a_{11} x_1 + & \dots + & a_{in} x_n + & x_{n+1} & & & = & b_1 \\
& a_{21} x_1 + & \dots + & a_{2n} x_n + & & x_{n+2} & & = & b_2 \\
& \vdots & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\
& a_{m1} x_1 + & \dots + & a_{mn} x_n + & & & x_{n+m} & = & b_m \\
& x_1, & \dots, & x_n, & x_{n+1}, & \dots & x_{n+m} & \geq & 0
\end{array}
$$

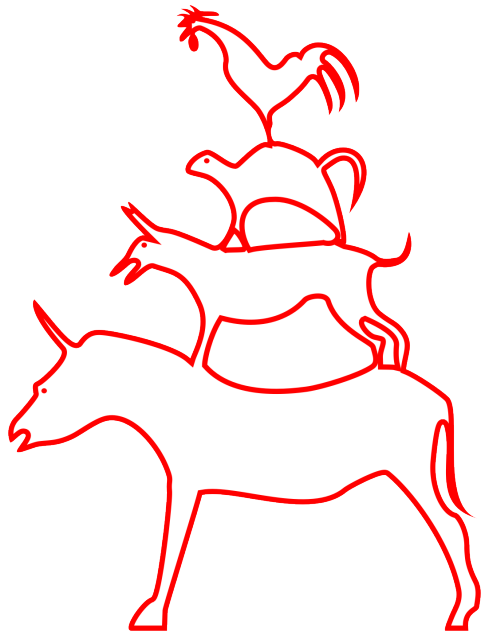
Hintergrundfrage

LP aus der Praxis haben häufig sehr viele Entscheidungsvariablen.

$$\Downarrow$$

Wie können wir LPs mit mehr als zwei Entscheidungsvariablen lösen?

Inhalt der Vorlesung



Über LP wissen wir bereits . . .

Optimale Lösung

Wenn eine optimale Lösung existiert, dann liegt auch in mindestens einer Ecke des Lösungsraums $\mathbb{M}$ eine optimale Lösung.

Basis-/Nichtbasisvariablen

Das Gleichungssystem eines LP in Normalform besteht aus n Strukturvariablen und m Schlupfvariablen, aber lediglich aus m Gleichungen.

Ecken und zulässige Basislösungen

Für ein LP in Normalform sind die Ecken von $\mathbb{M}$ genau die zulässigen Basislösungen.

Basisvariablen und Basislösung

Basis

Jede nichtsinguläre $m \times m$-Matrix **B** eines LP in Normalform heiSSt Basis und besteht aus den linear unabhängigen Spalten von **B**.

Basis-/Nichtbasisvariablen

Die m Spalten von **B** definieren die Basisvariablen (BV).
Die restlichen n Variablen heiSSen Nichtbasisvariablen (NBV).

Basislösung

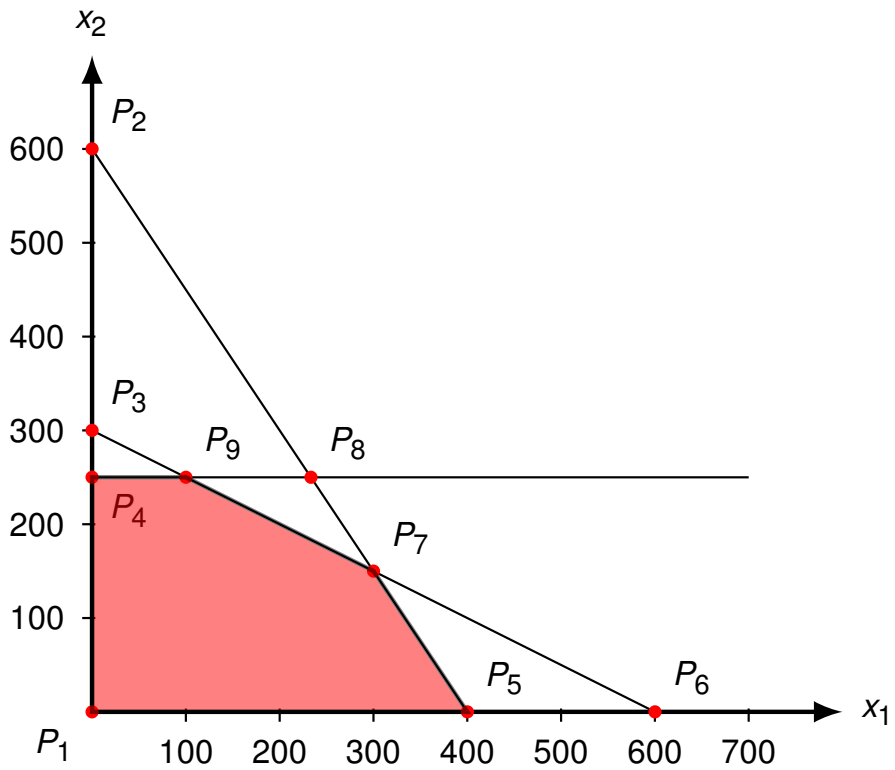
Setze NBV auf 0. Dann nennen wir die erhaltene eindeutige Lösung für eine Basis **B** Basislösung.

Zulässige Basislösung

Eine Basislösung ist zulässig, falls alle BV der Basislösung nichtnegative Werte annehmen, sonst unzulässig.

Wie gelangt man von einer Ecke zur Basislösungen?

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\
s.t. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1200 \\
& 5x_1 + 10x_2 + x_4 = 3000 \\
& 0.5x_2 + x_5 = 125 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$



Frage: Wie lautet die Basislösung zu P_9?

Ablesen: $x_1 = 100, x_2 = 250$ $\Rightarrow$ Nichtbasisvariablen x_4, x_5

Einsetzen: $x_3 = 400, x_4 = x_5 = 0$ Basisvariablen x_1, x_2, x_3

Alle BV sind positiv, d.h. die Basislösung ist zulässig.

Wie kann man eine Basislösung berechnen?

Problem

Ein LP in Normalform hat $n + m$ Variablen und m Restriktionen, n Variablen sind nicht erklärt.

Idee

1. Setze n der $n + m$ Variablen x_i gleich null.
2. Löse (falls möglich) das Gleichungssystem.

Produktionsprogrammplan vorherige Folie

Es gilt $n = 2$, $m = 3$. Setze z.B. x_2 und x_4 auf den Wert 0.

Gleichungssystem auflösen ergibt $x_1 = 600, x_5 = 125, x_3 = -600$.

Die Basislösung ist unzulässig ($x_3 < 0$) und entspricht dem Punkt P_6.

Ein naiver Ansatz zur Berechnung einer optimalen Basislösung 1/2

Naiver Ansatz

1. Setze n der $n+m$ Variablen x_i gleich null.
2. Löse (falls möglich) das Gleichungssystem.
3. Berechne für jede Basislösung $f(\mathbf{x})$.
4. Wähle ein optimales $\mathbf{x}$ aus.

Problem:
Es sind $\binom{n+m}{n}$ mögliche Basislösungen zu berechnen, für die meisten Praxisprobleme ist das viel zu aufwendig.

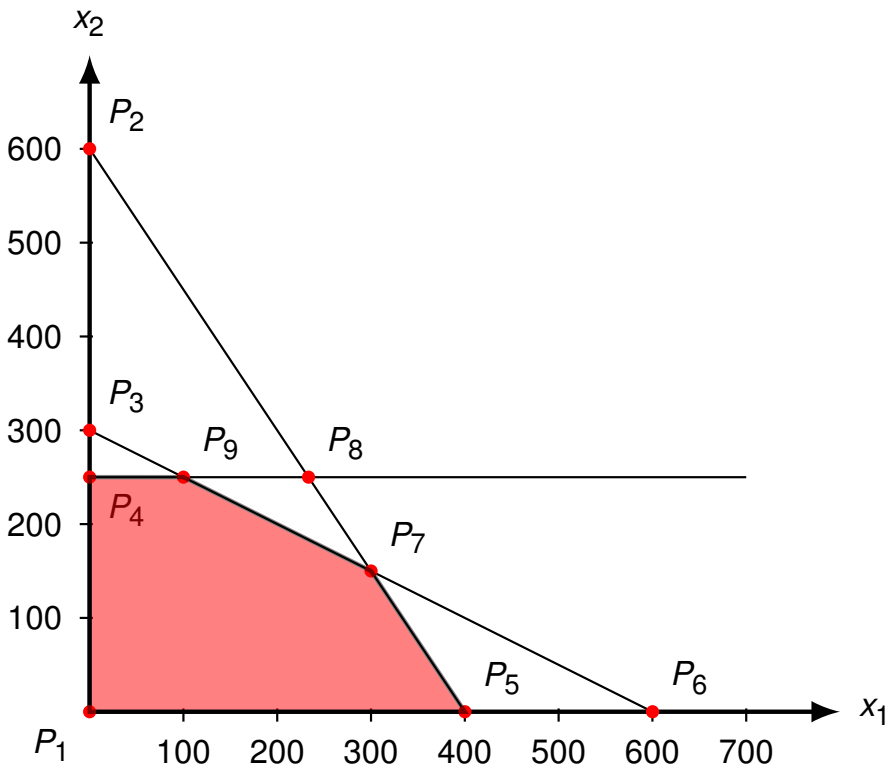
Onlinerechner für Binomialkoeffizienten

Ein naiver Ansatz zur Berechnung einer optimalen Basislösung 2/2

Gegeben $n = 2$, $m = 3$: Dann existieren $\binom{2+3}{2} = 10$ mögliche Basislösungen.

NBV	BV	$z = f(\mathbf{x})$
$x_1 = x_2 = 0$:	$x_3 = 1200, x_4 = 3000, x_5 = 125$	0
$x_1 = x_3 = 0$:	$x_2 = 600, x_4 = -3000, x_5 = -175$	—
$x_1 = x_4 = 0$:	$x_2 = 300, x_3 = 600, x_5 = -25$	—
$x_1 = x_5 = 0$:	$x_2 = 250, x_3 = 700, x_4 = 500$	1000
$x_2 = x_3 = 0$:	$x_1 = 400, x_4 = 1000, x_5 = 125$	1200
$x_2 = x_4 = 0$:	$x_1 = 600, x_3 = -600, x_5 = 125$	—
$x_2 = x_5 = 0$:	nicht lösbar, da a^1, a^3, a^4 lin. abhängig	—
$x_3 = x_4 = 0$:	$x_1 = 300, x_2 = 150, x_5 = 50$	1500
$x_3 = x_5 = 0$:	$x_1 = 233\,1/3, x_2 = 250, x_4 = -666\,2/3$	—
$x_4 = x_5 = 0$:	$x_1 = 100, x_2 = 250, x_3 = 400$	1300

Grafische Veranschaulichung von Basislösungen



Exemplarische Arbeitsweise des Simplex-Verfahrens 1/4

Produktionsprogrammplanung – LP in Normalform:

$$
\begin{aligned}
\max z = 3x_1 + \ & 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & & \\
3x_1 + \ & 2x_2 + x_3 & & = 1200 & \text{(I')} \\
5x_1 + \ & 10x_2 + x_4 & & = 3000 & \text{(II')} \\
& 0.5x_2 + x_5 & & = 125 & \text{(III')} \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq & 0 & \text{(IV')}
\end{aligned}
$$

Startpunkt:
$\mathbf{x}^1 = (0, 0, 1200, 3000, 125)$ ist zulässige Basislösung mit NBV $x_1 = x_2 = 0$ und BV $x_3 = 1200, x_4 = 3000, x_5 = 125$.

- Eine Erhöhung der Produktionsmenge x_2 um 1 führt zu einem Anstieg des Zielfunktionswerts z um 4 GE (*stärkster Anstieg*).
- Basierend auf $\mathbf{x}^1$ kann die NBV x_2 um höchstens 250 Stück erhöht werden, andernfalls wird die Restriktion (III') verletzt. (I') und (II') werden bei $x_2 = 250$ nicht verletzt.
- x_5 wird von 125 auf 0 vermindert, damit (III') eingehalten wird.

- Der Wert von x_2 wird erhöht, der Wert von x_5 wird vermindert, d.h. es erfolgt ein Basistausch, x_5 wird neue NBV, x_2 wird neue BV.
- Durch diesen Tausch gelangt man zu einer neuen Basislösung bzw. zu einer neuen Ecke.
- Durchführung des Basistausches:
  1. (III') $\frac{1}{2}x_2 + x_5 = 125$ wird nach $x_2 = 250 - 2x_5$ umgeformt
  2. Ergebnis wird ins Gleichungssystem z, (I)-(III) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 \quad & \quad & & -8x_5 + 1000 & \\ 3x_1 \quad & +x_3 & & -4x_5 = 700 & (\text{I}''') \\ 5x_1 \quad & & +x_4 & -20x_5 = 500 & (\text{II}''') \\ x_2 \quad & & & +2x_5 = 250 & (\text{III}''') \end{aligned}$$

Neue Basislösung: $\mathbf{x}^2 = (0, 250, 700, 500, 0)$ mit $z = 1000$.

Exemplarische Arbeitsweise des Simplex-Verfahrens 3/4

- Eine Erhöhung der Produktionsmenge x_1 um 1 führt zu einem Anstieg des Zielfunktionswerts z um 3 GE (*stärkster Anstieg*).
- Basierend auf $\mathbf{x}^2$ kann die NBV x_1 um höchstens 100 Stück erhöht werden, andernfalls wird die Restriktion (II") verletzt. (I") würde erst bei $x_2 \geq 233,33$ verletzt werden.
- x_4 wird von 500 auf 0 vermindert, damit (II") eingehalten wird.
- Durchführung des Basistausches:
  1. (II") $5x_1 + x_4 - 20x_5 = 500$ wird nach $x_1 = 100 - \frac{1}{5}x_4 + 4x_5$ umgeformt
  2. Ergebnis wird ins Gleichungssystem z, (I")-(III") eingesetzt:

$$
\begin{array}{rrrrr}
\max z = & & -3/5x_4 + 4x_5 + 1300 & & \\
 & x_3 & -3/5x_4 + 8x_5 = 400 & & (\text{I}") \\
x_1 & & +1/5x_4 - 4x_5 = 100 & & (\text{II}") \\
 & x_2 & +2x_5 = 250 & & (\text{III}")
\end{array}
$$

Neue Basislösung: $\mathbf{x}^3 = (100, 250, 400, 0, 0)$ mit $z = 1300$.

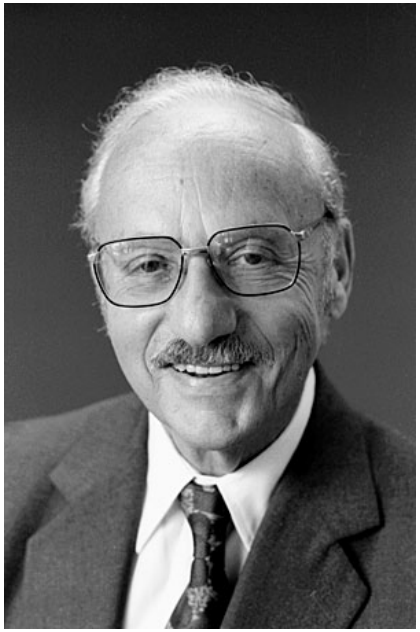
Exemplarische Arbeitsweise des Simplex-Verfahrens 4/4

- x_5 kann um 50 erhöht werden (*stärkster Anstieg*), wenn x_3 vermindert wird.
- Durchführung des Basistausches:
  1. (I") $x_3 - 3/5x_4 + 8x_5 = 400$ wird nach $x_5 = 50 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{40}x_4$ umgeformt
  2. Ergebnis wird ins Gleichungssystem z, (I"')-(III"') eingesetzt:

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & & -1/2x_3 + 3/10x_4 & +1500 & \\
 & & 1/8x_3 - 3/40x_4 + x_5 & = 50 & \text{(I")} \\
 & x_1 & +1/2x_3 - 1/10x_4 & = 300 & \text{(II")} \\
 & & x_2 - 1/4x_3 + 3/20x_4 & = 150 & \text{(III")}
\end{array}
$$

Neue Basislösung: $\mathbf{x}^4 = (300, 150, 0, 0, 50)$ mit $z = 1500$.

George Dantzig – Der 'Erfinder' des Simplex-Algorithmus

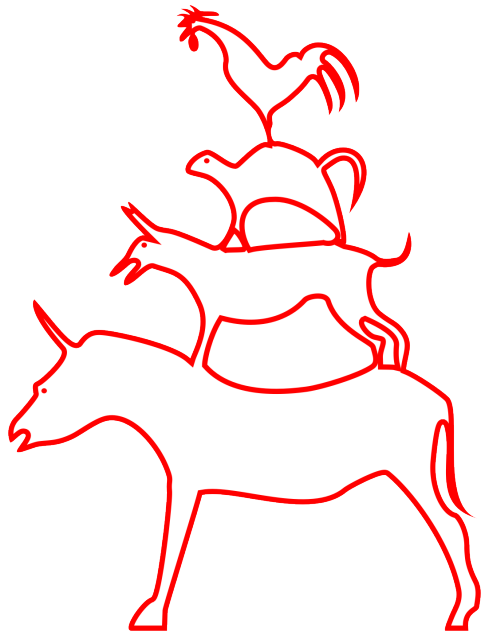


George Dantzig[1]
1914 – 2005

Der Simplex-Algorithmus zählt zu den zehn einflussreichsten mathematischen Verfahren des 20. Jahrhunderts.

[1] amerikanische Mathematiker/Informatiker/Physiker

Inhalt der Vorlesung



Darstellung eines LP mit Hilfe eines Simplex-Tableaus 1/2

Gegeben: LP in Normalform mit Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5:

$$\begin{aligned}
\max z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1200 & \quad (\text{I'}) \\
5x_1 + 10x_2 + x_4 = 3000 & \quad (\text{II'}) \\
0.5x_2 + x_5 = 125 & \quad (\text{III'}) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \quad (\text{IV'})
\end{aligned}$$

	Strukturvariablen		Schlupfvariablen			
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
x_3	3	2	1	0	0	1200
x_4	5	10	0	1	0	3000
x_5	0	0.5	0	0	1	125
z	-3	-4	0	0	0	0

Zielfunktion umformen: $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow z - 3x_1 - 4x_2 = 0$
Basisvariablen bei Position der 1er in Einheitsvektoren

Darstellung eines LP mit Hilfe eines Simplex-Tableaus 2/2

	Strukturvariablen				Schlupfvariablen				
BV	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
z	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	$\dots$	0	0

Generierung des Tableaus

- BV-Spalte: Variablen, die im aktuellen Tableau die Basisvariablen bilden, definiert über Einheitsvektoren
- Zelle rechts unten: Zielfunktionswert der aktuellen Basislösung
- z-Zeile: Umformung der Zielfunktion zu $z - c_1 x_1 - \dots - c_n x_n = \mathbf{0}$.
- **Achtung:** Es gilt $x_i \geq 0$; wird nicht in Tableau vermerkt.

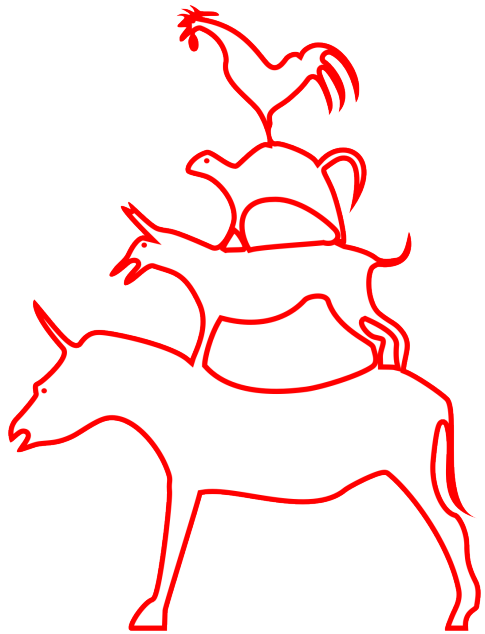
Interpretation eines Simplex-Tableaus

Beantworten Sie unten stehenden Fragen für das gegebene Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RS
x_3	0	2	1	0	0	-20	4	35
x_1	1	7	0	0	0	1	12	240
x_4	0	-2	0	1	0	6	78	20
x_5	0	4	0	0	1	2	5	90
z	5	-3	3	0	0	-6	0	56

- Welchen Wert hat die Zielfunktion?
- Ist x_1 eine Basisvariable?
- Ist x_2 eine Basisvariable?
- Welchen Wert haben die Variablen x_2 und x_4?
- Wie heiSSen die Schlupfvariablen?
- Wie lautet die Zielfunktion?
- Wie verändert sich der z-Wert, wenn der Wert von x_2 um eins erhöht wird?
- Wie verändert sich der z-Wert, wenn der Wert von x_1 um eins erhöht wird?
- Bei Erhöhung welchen Variablenwertes ändert sich der z-Wert am stärksten?

Inhalt der Vorlesung



Algorithmus 1: Primaler Simplex-Algorithmus

Input : *zulässige* Basislösung für ein LP in Normalform

1 Stelle Anfangstableau auf
2 **while** *Abbruchbedingung (I oder II) nicht erfüllt* **do**
3 | Schritt 1: Wähle Pivotspalte t.
4 | Schritt 2: Wähle Pivotzeile s.
5 | Schritt 3: Vollziehe Basistausch, d.h. erzeuge einen Einheitsvektor in der Spalte t, sodass $a'_{st} = 1$.
6 **end**

Output: optimaler Zielfunktionswert z^* sowie *eine* optimale Lösung x^*
oder Meldung über auf $\mathbb{M}$ unbeschränkter Zielfunktion

Schritt 1: Wähle die Pivotspalte

LogDynamics

Primale Abbruchbedingung I

Falls in z-Zeile **kein negativer Eintrag** existiert, dann ist die optimale Lösung gefunden und das Verfahren endet!

Primale Auswahlregel für die Pivotspalte t

Betrachte **z-Zeile** und wähle die Spalte t in welcher der kleinste negative Koeffizient steht.

(Falls es mehrere Spalten mit kleinstem negativen Koeffizienten gibt, wähle davon eine beliebige Spalte.)

- Die Spalte t heiSSt Pivotspalte.
- Die Variable x_t ist NBV und soll in die Basis aufgenommen werden.

Schritt 2: Wähle die Pivotzeile

Primale Abbruchbedingung II

Sind in der Pivotspalte t alle Koeffizienten **null oder negativ** ($a_{it} \leq 0, i = 1, \ldots, m$), dann endet das Verfahren. Der Lösungsraum ist in diesem Fall unbeschränkt (Sonderfall 2).

Primale Auswahlregel für die Pivotzeile s

Betrachte alle positiven Koeffizienten a_{it} der Pivotspalte t:
Wähle nun die **Zeile** s mit

$$\frac{b_s}{a_{st}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{it}} \middle| i = 1, \ldots, m \text{ und } a_{it} > 0 \right\}$$

- Die Zeile s heiSSt Pivotzeile. x_s soll die Basis verlassen.
- Das gemeinsame Element a_{st} der Pivotzeile s und Pivotspalte t heiSSt Pivotelement.

Schritt 3: Vollziehe Basistausch

- Schritt 1 besagt, dass x_t neue BV werden soll.
  Schritt 2 besagt, dass dafür x_s die Basis verlassen soll und NBV wird.
- Dies nennt man Basistausch.
- Zur Umsetzung des Basistausch ist in der Pivotspalte t ein Einheitsvektor mit $a_{st} = 1$ zu erzeugen.
- Dazu verwendet man das GauSS-Jordan-Eliminationsverfahren (alternativ: *Dreiecksregel*).
  1. Dividiere alle Werte der Pivotzeile durch a_{st}.
     Nun steht an der Position des Pivotelements eine 1.
  2. Addiere das a_{it}-fache der neuen Pivotzeile zur Zeile i ($\forall i, i \neq s$).

Beispiel – Simplex-Tableau initialisieren

Gegebenes LP, liegt bereits in Normalform vor

$$
\begin{aligned}
\max z = 3x_1 + \ 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & & \\
3x_1 + \ 2x_2 + x_3 & & = 1200 & \text{(I')} \\
5x_1 + 10x_2 + x_4 & & = 3000 & \text{(II')} \\
0.5x_2 + x_5 & & = \ 125 & \text{(III')} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq \ 0 & & \text{(IV')}
\end{aligned}
$$

Initiales Tableau aufstellen (Algorithmus 1, Zeile 1):

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
x_3	3	2	1	0	0	1200
x_4	5	10	0	1	0	3000
x_5	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	125
z	-3	-4	0	0	0	0

Beispiel – 1. Iteration primaler Simplex

Tableau vor 1. Iteration:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	$\frac{b_i}{a_{it}}$
x_3	3	2	1	0	0	1200	$\frac{1200}{2} = 600$
x_4	5	10	0	1	0	3000	$\frac{3000}{10} = 300$
x_5	0	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	0	0	1	125	$\frac{125}{1/2} = 250$
z	-3	-4-4	0	0	0	0	

Tableau nach 1. Iteration:

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	
(I')	x_3	3	0	1	0	-4	700	(I) - 2 · (III')
(II')	x_4	5	0	0	1	-20	500	(II) - 10 · (III')
(III')	x_2	0	1	0	0	2	250	2 · (III)
(IV')	z	-3	0	0	0	8	1000	(IV) + 4 · (III')

Beispiel – 2. Iteration primaler Simplex

Tableau vor 2. Iteration:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	$\frac{b_i}{a_{it}}$
x_3	3	0	1	0	-4	700	$\frac{700}{3} = 233\frac{1}{3}$
x_4	55	0	0	1	-20	500	$\frac{500}{5} = 100$
x_2	0	1	0	0	2	250	$\frac{250}{0} = \infty$
z	-3-3	0	0	0	8	1000	

Tableau nach 2. Iteration:

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	
(I")	x_3	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	8	400	(I') - 3 · (II")
(II")	x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	-4	100	(II') · $\frac{1}{5}$
(III")	x_2	0	1	0	0	2	250	(III') - 0 · (II")
(IV")	z	0	0	0	$\frac{3}{5}$	-4	1300	(IV') + 3 · (II")

Beispiel – 3. Iteration primaler Simplex

Tableau vor 3. Iteration:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	$\frac{b_i}{a_{it}}$
x_3	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	88	400	$\frac{400}{8} = 50$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	-4	100	—
x_2	0	1	0	0	2	250	$\frac{250}{2} = 125$
z	0	0	0	$\frac{3}{5}$	-4-4	1300	

Tableau nach 3. Iteration:

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	
(I''')	x_5	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{40}$	1	50	(I'') $\cdot \frac{1}{8}$
(II''')	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	300	(II'') + 4 $\cdot$ (I''')
(III''')	x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	0	150	(III'') - 2 $\cdot$ (I''')
(IV''')	z	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	0	1500	(IV'') + 4 $\cdot$ (I''')

Beispiel – 4. Iteration primaler Simplex

Tableau vor 4. Iteration:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
x_5	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{40}$	1	50
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	300
x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	0	150
z	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	0	1500

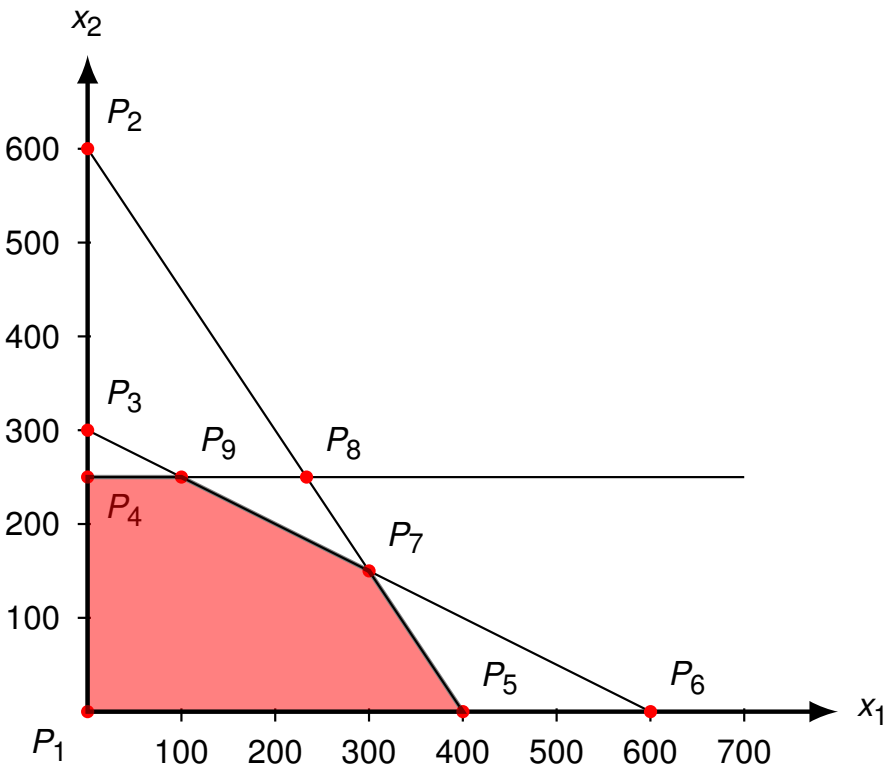
Alle $c_i \geq 0 \Longrightarrow$ Primale Abbruchbedingung I erfüllt
$\Longrightarrow$ Der Zielfunktionswert lässt sich nicht mehr steigern.

Optimale Lösung aus 4. Tableau ablesen

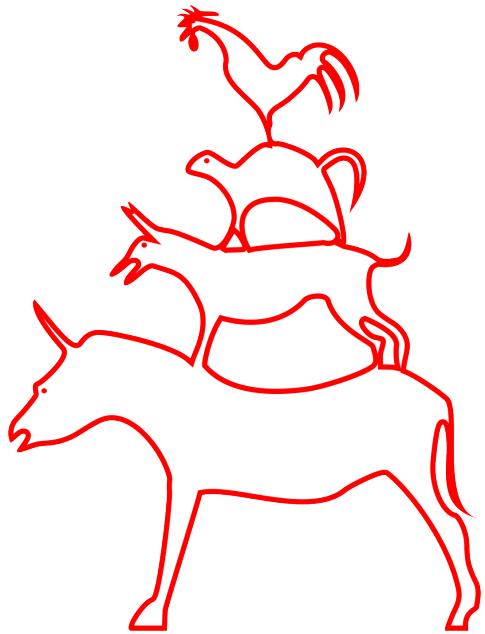
- $\mathbf{x}^\star = (300, 150, 0, 0, 50)$ mit einem maximalen Gewinn von 1500 GE
- Produktion: 300 P_1, 150 P_2
- Rest: 50 Arbeitsstunden

Grafische Veranschaulichung des Lösungsfortschritts

Tableau 1 – BV: $x_3 = 1200, x_4 = 3000, x_5 = 125 \rightarrow P_1, z = 0$
Tableau 2 – BV: $x_2 = 250, x_3 = 700, x_4 = 500 \rightarrow P_4, z = 1000$
Tableau 3 – BV: $x_1 = 100, x_2 = 250, x_3 = 400 \rightarrow P_9, z = 1300$
Tableau 4 – BV: $x_1^* = 300, x_2^* = 150, x_5^* = 50 \rightarrow P_7, z^* = 1500$



Inhalt der Vorlesung



Welchen Zweck hat das duale Simplex-Verfahren?

LogDynamics

Primales Simplex-Verfahren erfordert *zulässige* Basislösung

$\Downarrow$

Berechnung mit dem dualen Simplex-Verfahren

Algorithmus 2: Dualer Simplex-Algorithmus

Input : unzulässige Basislösung für ein LP in Normalform

1 Stelle Anfangstableau auf
2 **while** *Duale Abbruchbedingung (I oder II) nicht erfüllt* **do**
3 | Schritt 1: Wähle Pivotzeile s.
4 | Schritt 2: Wähle Pivotspalte t.
5 | Schritt 3: Vollziehe Basistausch, d.h. erzeuge Einheitsvektor in Spalte t, sodass $a'_{st} = 1$.
6 **end**

Output: zulässige Basislösung ***oder*** Meldung über unlösbares Problem wg. $\mathbb{M} = \emptyset$

Beachte: Primaler Simplex bestimmt erst Pivotspalte, dann Pivotzeile.

Schritt 1: Auswahl einer Pivotzeile

Duale Abbruchbedingung I

Falls alle b'_i der RS positiv sind ($b'_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$), so liegt bereits eine zulässige Basislösung vor. Das Verfahren endet.

Duale Auswahlregel Pivotzeile

Wähle Zeile s mit kleinstem negativen $b'_i < 0, i = 1, \ldots, m$.

(Falls es mehrere Zeilen mit kleinstem negativen Koeffizienten gibt, wähle davon eine beliebige Zeile.)

- Die Zeile s heiSSt Pivotzeile. x_s soll die Basis verlassen.

LogDynamics

Duale Abbruchbedingung II

Sind alle Koeffizienten der Pivotzeile positiv ($a'_{sj} \geq 0, \forall j$), so besitzt das Problem keine zulässige Basislösung (Sonderfall 1, $\mathbb{M} = \emptyset$).
Abbruch des gesamten Simplex-Verfahrens!

Duale Auswahlregel Pivotspalte

Betrachte in der der Pivotzeile s alle Spalten mit negativen Koeffizienten a_{sj} $(j = 1, \ldots, j)$:
Wähle eine Spalte t mit

$$\frac{c'_t}{a'_{st}} = \max\left\{ \frac{c'_j}{a'_{sj}} \middle| \forall j \text{ und } a'_{st} < 0 \right\}.$$

- Die Spalte t heiSSt Pivotspalte.

Dualer Simplex Schritt 3: Vollziehe Basistausch

LogDynamics

Identisch mit Vorgehen des primalen Simplex-Verfahrens.

Beispiel dualer Simplex 1/4 - Ein Mischungsproblem

Gegebenes LP:

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + x_2 & \\ x_1 + x_2 &\geq 8 && \text{(I)} \\ 3x_1 + x_2 &\geq 12 && \text{(II)} \\ x_1 + x_2 &\leq 10 && \text{(III)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Transformation in Normalform:

- Multiplikation von (I) und (II) mit (-1)
- Hinzunahme von drei Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5

Beispiel dualer Simplex 2/4 – Tableau initialisieren

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 2x_1 + x_2 & & & & & \\
& - x_1 - x_2 + x_3 & & & = -8 & & \text{(I)} \\
& -3x_1 - x_2 & + x_4 & & = -12 & & \text{(II)} \\
& x_1 + x_2 & & + x_5 & = 10 & & \text{(III)} \\
& & & & x_j \geq 0, j = 1 \ldots 5 & &
\end{aligned}
$$

Initiales Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
x_3	-1	-1	1			-8
x_4	-3	-1		1		-12
x_5	1	1			1	10
z	-2	-1	0	0	0	0

Die Basislösung $\mathbf{x} = (0, 0, -8, -12, 10)$ verletzt die Nichtnegativitätsrestriktion, sie ist unzulässig.
Primaler Simplex nicht anwendbar, daher *dualer Simplex*.

Beispiel dualer Simplex 3/4

Tableau vor 1. Iteration:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
x_3	-1	-1	1	0	0	-8
x_4 x_4	-3	-1 -1	0	1	0	-12
x_5	1	1	0	0	1	10
z	-2	-1	0	0	0	0
$\frac{c_j}{a_{sj}}$	$\frac{-2}{-3}$	$\frac{-1}{-1}$ $\frac{-1}{-1}$	—	—	—	

Tableau nach 1. Iteration:

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	
(I')	x_3	2	0	1	-1	0	4	(I) + (II')
(II')	x_2	3	1	0	-1	0	12	(II) $\cdot(-1)$
(III')	x_5	-2	0	0	1	1	-2	(III) − (II)
(IV')	z	1	0	0	-1	0	12	(IV) + (II')

Beispiel dualer Simplex 4/4

Tableau vor 2. Iteration:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
x_3	2	0	1	-1	0	4
x_2	3	1	0	-1	0	12
x_5 x_5	-2 -2	0	0	1	1	-2
z	1	0	0	-1	0	12
$\frac{c_j}{a_{sj}}$	$\frac{1}{-2}$ $\frac{1}{-2}$	—	—	—	—	

Tableau nach 2. Iteration:

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	
(I")	x_3	0	0	1	0	1	2	(I') − 2 (III')
(II")	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	9	(II') − 3 (III")
(III")	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	(III') $\cdot(-\frac{1}{2})$
(IV")	z	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	11	(IV') − (II")

Basislösung $(1, 9, 2, 0, 0)$ ist *zulässig* (nicht zwingend optimal) / die RS enthält keine negativen Einträge, der *duale Simplex bricht ab*.

Tableau 3 ist nun mit dem primalen Simplex zu lösen!

Wann verwendet man primalen/ wann dualen Simplex?

Schema:

- Überführe LP in Normalform und stelle Simplex-Tableau auf.
- Aus Tableau ist Basislösung ablesbar.
- Falls *Basislösung unzulässig*, verwende dualen Simplex.
- Dualer Simplex berechnet zulässige Basislösung.
- Falls Basislösung zulässig, verwende primalen Simplex.

Frage: Woran erkennt man im Tableau eine **zulässige Basislösung**?

- Alle b_i der RS des Tableaus sind positiv.
- Negative b_i-Werte bedeuten eine unzulässige Basislösung.

Zusammenfassung & Ausblick

LogDynamics

Fragen zur Wiederholung:

- Wie kann ein LP mit *zulässiger* Basislösung mit dem primalen Simplex–Verfahren gelöst werden?
- Wie kann mit dem primalen Simplex–Verfahren für ein LP mit *unzulässiger* Basislösung eine *zulässige* Basislösung berechnet werden?

Klausurrelevante Literatur

Domschke/Drexl: Kapitel 2.2 und 2.3, oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 1.4 und 1.5, oder Werner Kapitel 2.1 und 2.2.2, oder Suhl/Mellouli Kapitel 2.2 und 2.3

Ausblick

- Tutorium: Primaler/Dualer Simplex
- Mehrkriterielle Optimierung: Domschke/Drexl Kapitel 2.7, oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 2.3, oder Suhl/Mellouli Kapitel 4.8

Teil IV

Lineare Optimierung III – Mehrzieloptimierung

Wiederholung 1/3 – Basislösung

Basis

Jede nichtsinguläre $m \times m$-Matrix **B** eines LP in Normalform heiSSt Basis und besteht aus den linear unabhängigen Spalten von **B**.

Basis-/Nichtbasisvariablen

Die m Spalten von **B** definieren die Basisvariablen (BV).
Die restlichen n Variablen heiSSen Nichtbasisvariablen (NBV).

Basislösung

Setze NBV auf 0. Dann nennen wir die erhaltene eindeutige Lösung für eine Basis **B** Basislösung.

Zulässige Basislösung

Eine Basislösung ist zulässig, falls alle BV der Basislösung nichtnegative Werte annehmen, sonst unzulässig.

Wiederholung 2/3 – Simplex Tableau aufstellen

Gegeben: LP in Normalform mit Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5:

$$\begin{aligned}
\max z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1200 & \quad \text{(I')} \\
5x_1 + 10x_2 + x_4 = 3000 & \quad \text{(II')} \\
0.5x_2 + x_5 = 125 & \quad \text{(III')} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \quad \text{(IV')}
\end{aligned}$$

	Strukturvariablen		Schlupfvariablen			
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
x_3	3	2	1	0	0	1200
x_4	5	10	0	1	0	3000
x_5	0	0.5	0	0	1	125
z	-3	-4	0	0	0	0

Zielfunktion umformen: $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow z - 3x_1 - 4x_2 = 0$
Basisvariablen: Position der Einheitsvektoren
Achtung: Es gilt $x_i \geq 0$; wird nicht in Tableau vermerkt.

Wiederholung 3/3 – Simplex-Algorithmus

Prinzip: Erzeuge neue Basislösung durch Basistausch

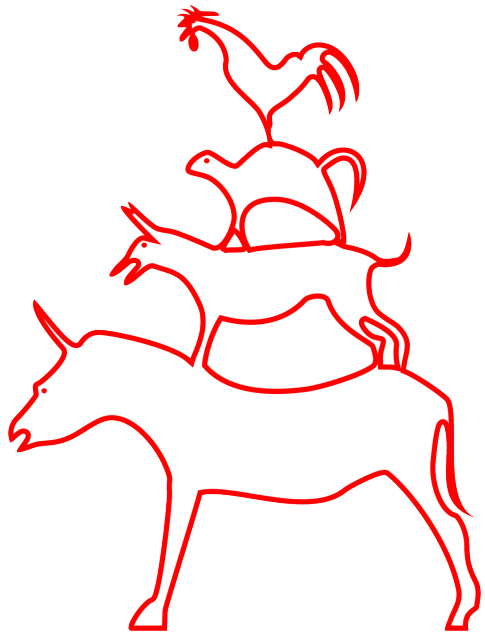
- Pivotspalte: NBV, die in Basis aufzunehmen ist
- Pivotzeile: BV, die Basis verlässt
- Tableau-Update: Mittels GauSS-Jordan in Pivotspalte *Einheitsvektor* konstruieren, das Pivotelement erhält den Wert 1

Primaler Simplex:
Voraussetzung: Zulässige Basislösung bekannt
Ablauf: Wähle zuerst Pivotspalte, dann Pivotzeile
Ergebnis: optimale Basislösung (sofern eine existiert)

Dualer Simplex:
Voraussetzung: LP in Normalform
Ablauf: Wähle zuerst Pivotzeile, dann Pivotspalte
Ergebnis: zulässige Basislösung (sofern eine existiert)

LogDynamics

Mehrkriterielle Entscheidungsprobleme



1. Beispiel: Für welchen Job soll ich mich bewerben?

Problemstellung: Bewerbung für ersten Job nach dem Studium

Mögliche Kriterien:

- Gehalt
- Geographische Lage
- Aufstiegsperspektiven
- Gestaltungsmöglichkeiten
- Inhaltliche Zufriedenheit
- Persönliche Freiheit
- Verantwortung
- ...

2. Beispiel: Zusammenstellung Wertpapier-Portfolio

Problemstellung:
Eine Anlagesumme soll auf verschiedene Anlagemöglichkeiten aufgeteilt werden

Anlagemöglichkeiten: z.B. Aktien, Anleihen, Optionen, Fonds . . .

Die **Rendite** einer Anlagemöglichkeit ist unbekannt, da zufällig.

hohe Rendite $\rightarrow$ höheres Risiko;
niedrigere Rendite $\rightarrow$ geringeres Risiko;

Ein Portfolio-Optimierungsproblem:

max	Rendite
min	Risiko
u.d.N.	Wert der ausgewählter Anlagen = Anlagesumme

3. Beispiel: Autokauf

Problemstellung: Welches Auto soll man sich kaufen?

Mögliche Kriterien:

- Preis
- Design
- Verbrauch
- Leistung
- Sonderausstattung
- ...

4. Beispiel: Fachliche Ausrichtung eines Krankenhauses

Problemstellung:
Resourcesnutzung eines Krankenhauses soll optimiert werden

Resourcen: Ärzte verschiedener Fachrichtungen und Qualifikation, Pflegepersonal, Medizinisches Gerät, Krankenzimmer, Operationssäle

Beschränkungen:

- Neben zwingenden Notfällen auch viele *geplante* Behandlungen
- Geplante Behandlung erlaubt *fachliche Spezialisierung*

Zielfunktion:

- min Kosten
- max Erlöse
- min Aufenthaltsdauer Patienten im Krankenhaus
- max Anzahl behandelter Patienten
- ...

Zwei Typen mehrkriterieller Entscheidungsprobleme

Bei Entscheidungen sind in der Realität häufig **mehrerer Zielkriterien** relevant:

1. Aus einer gegebenen Menge von Alternativen ist die **beste** Alternative auszuwählen. Für jede Alternative ist bekannt, inwieweit die Zielkriterien erfüllt werden.
   $\rightarrow$ *Multi-Attribute Decision Making (MADM)*

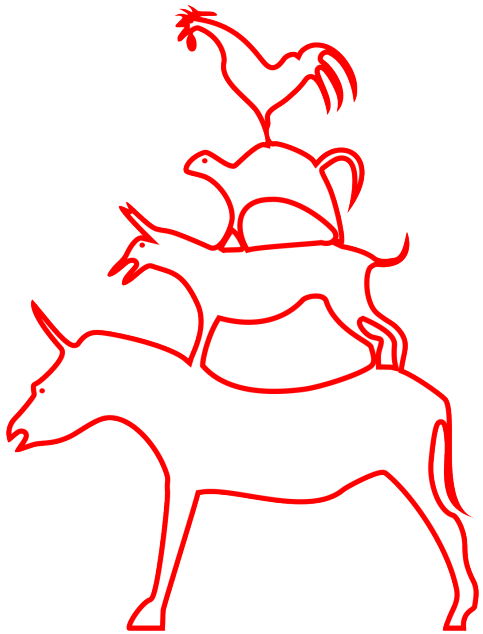
2. Restriktionen schränken Werte von Entscheidungsvariablen ein. Die Werte der Zielkriterien hängen von den gewählten Werten der Entscheidungsvariablen ab.
   $\rightarrow$ Multiobjective (Linear) Optimization (MLP)

Wir betrachten nur MLP-Probleme; diese sind strukturell schwieriger.

Inhalt der Vorlesung

Mehrkriterielle Entscheidungsprobleme

Vektoroptimierung
- Graphische Veranschaulichung
- Zielbeziehungen
- Pareto-optimale Lösungen



Präferenzbasierte Lösungsansätze
- Skalarisierung der Zielfunktion
- Lexikographische Zielgewichtung
- Zieldominanz
- Goal Programming

Ein Vektoroptimierungsproblem

Statt eines (skalaren) Ziels ist ein Vektor von Zielen zu optimieren.

$$
\begin{array}{lcrcrcrl}
\max z_1 = f_1(\mathbf{x}) & = & +3x_1 & + & x_2 & & & \\
\max z_2 = f_2(\mathbf{x}) & = & -2x_1 & + & x_2 & & & \\
\text{u.d.N.} & & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & \\
 & & & + & x_2 & \leq & 4 & \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \\
 & & x_1 & & & \leq & 5 & \\
 & & & & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2
\end{array}
$$

z_i sei der Wert der Zielfunktion $f_i(\mathbf{x})$ mit $i = 1, 2$.

Mehrkriterielles lineares Optimierungsproblem (MLP)

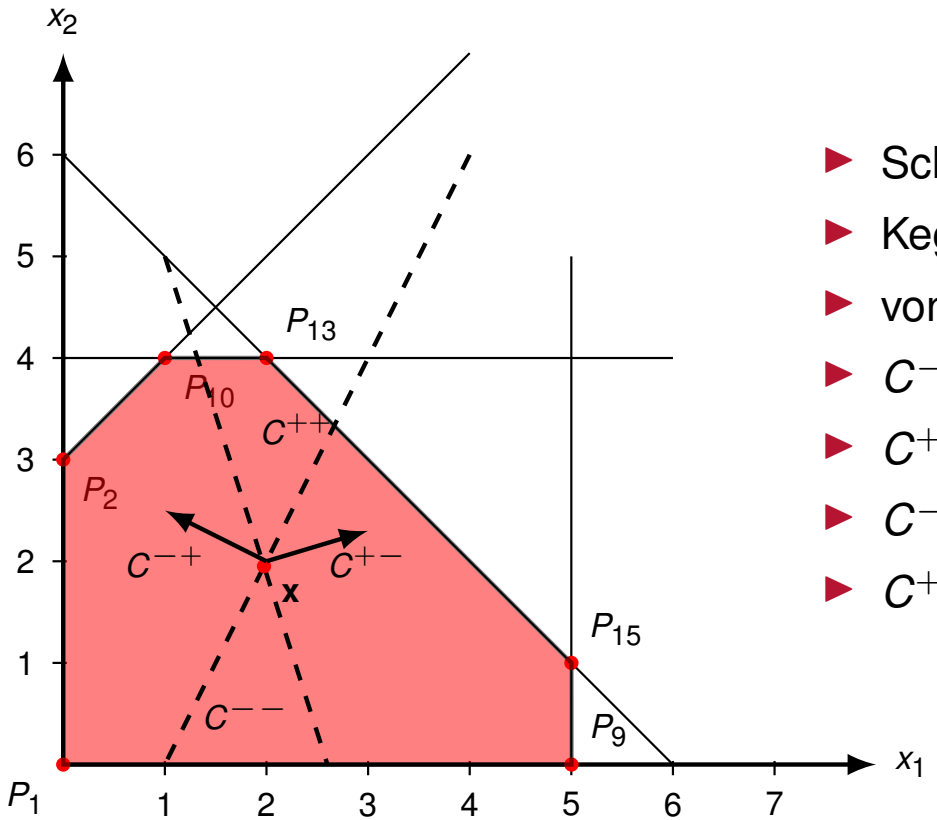
Wir nennen das Problem

$$\max f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \text{ u.d.N. } A\mathbf{x} \leq b, \ \mathbf{x} \geq 0$$

ein mehrkriterielles lineares Optimierungsproblem, also ein LP mit vektorwertiger Zielfunktion.

Ein Vektoroptimierungsproblem – Grafische Darstellung

Isogewinngeraden und Gradienten für f_1 und f_2



- Schnittpunkt Iso-Geraden **x**
- Kegel C^{--}, C^{-+}, C^{+-}, C^{++}
- von **x** in Richtung ...
- C^{--}: z_1 **und** z_2 schlechter
- C^{++}: z_1 **und** z_2 *besser*
- C^{-+}: z_1 schlechter, z_2 *besser*
- C^{+-}: z_1 *besser*, z_2 schlechter

Beziehungen zwischen Zielen 1/3 – Zielerreichungsgrad

Die Menge zulässiger Lösungen eines MLP sei $\mathbb{M}$.

Sei z_i der Wert der Zielfunktion $f_i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{M}$.

Sei z_i^{opt} der optimale Wert des Ziels i, d.h. $z_i^{opt} = f_i(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* \in \mathbb{M}$.

Zielerreichungsgrad

Der Zielerreichungsgrad Z_i des Ziels i ist gegeben durch

$$Z_i = \frac{z_i}{z_i^{opt}}$$

Beispiel Krankenhaus

Optimale Nutzung des OP (unter Restriktionen): **327 Tage**

Erreichte Nutzung des OP: **312 Tage**

Zielerreichungsgrad: $\frac{312}{327} = \mathbf{95.4\%}$

Beziehungen zwischen Zielen 2/3

Zwei Ziele sind

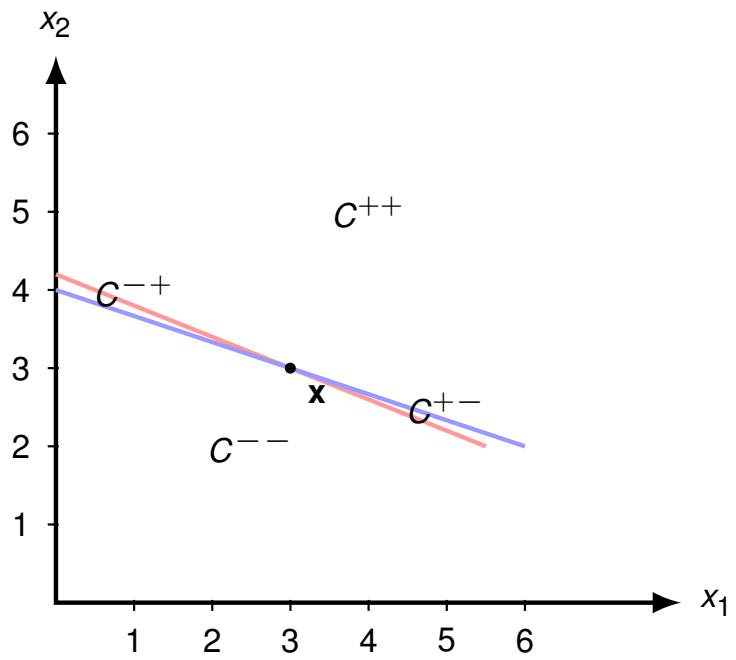
. . . **komplementär**, wenn ein höherer Zielerreichungsgrad des einen Ziels zu einem höheren Zielerreichungsgrad des anderen Ziels führt.

. . . zueinander **neutral**, wenn sie sich in ihrem jeweiligen Zielerreichungsgrad **gegenseitig nicht beeinflussen**.

. . . **konkurrierend**, wenn ein höherer Zielerreichungsgrad des einen Ziels zu einem geringeren Zielerreichungsgrad des anderen Ziels führt.

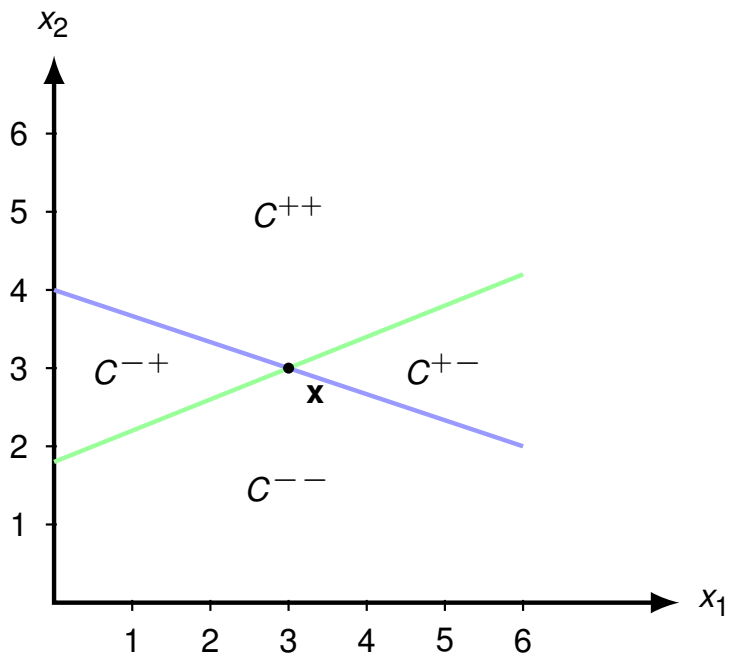
Beziehungen zwischen Zielen 3/3 – Stärke Zielkonflikt

$$\begin{aligned} \max z_1 &= 2x_1 + 5x_2 \\ \max z_2 &= 2x_1 + 6x_2 \end{aligned}$$



C^{++} Kegel weit
geringer Zielkonflikt

$$\begin{aligned} \max z_1 &= -2x_1 + 5x_2 \\ \max z_2 &= 2x_1 + 6x_2 \end{aligned}$$



C^{++} Kegel schmal
starker Zielkonflikt

Pareto-optimale Lösungen

LogDynamics

Pareto-optimale Lösung

Ein Bewegung in Richtung des verbessernden Kegels ist nicht möglich, ohne die Zulässigkeit einzubüSSen.

Pareto Front

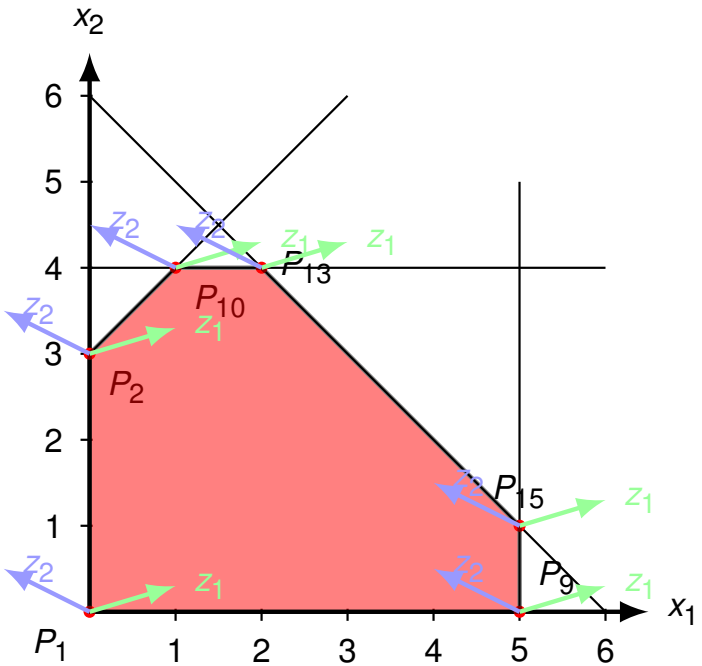
Die Menge aller Pareto-optimalen Zielfunktionsvektoren heiSSt Pareto-Front.

Ziel des Vektoroptimierungs-Problems

Ziel eines Vektoroptimierungs-Problems ist die Berechnung der Pareto-Front.

Pareto-optimale Lösungen – Beispiel

$\max z_1 = f_1(\mathbf{x})$	$=$	$+3x_1$	$+$	x_2		
$\max z_2 = f_2(\mathbf{x})$	$=$	$-2x_1$	$+$	x_2		
u.d.N.		$-x_1$	$+$	x_2	$\leq$	3
			$+$	x_2	$\leq$	4
		x_1	$+$	x_2	$\leq$	6
		x_1			$\leq$	5
		x_1		x_2	$\geq$	0



P_1, P_9:
Bessere und zulässige Lösungen existieren

P_2, P_{10}, P_{13}, P_{15}:
Bessere Lösungen sind *stets unzulässig*

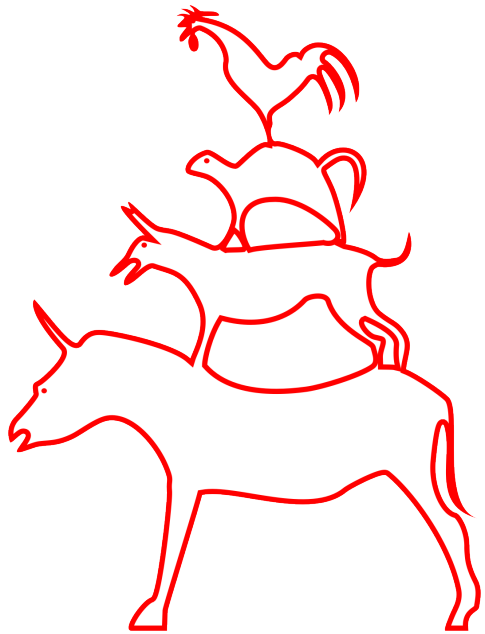
Pareto Front: Gebildet durch Punkte der Grenze P_2, P_{10}, P_{13}, P_{15}

Inhalt der Vorlesung

Mehrkriterielle Entscheidungsprobleme

Vektoroptimierung
- Graphische Veranschaulichung
- Zielbeziehungen
- Pareto-optimale Lösungen

Präferenzbasierte Lösungsansätze
- Skalarisierung der Zielfunktion
- Lexikographische Zielgewichtung
- Zieldominanz
- Goal Programming



Idee präferenzbasierter Lösungsansätze

Präferenz

Vorliebe und Abneigung für Zielkriterien werden Präferenzen genannt.

Mittels Präferenzen des Entscheidungsträgers wird das Mehrziel– in ein Einziel–Optimierungsproblem überführt.

$$\textbf{vektorwertige} \text{ Zielfunktion} \Longrightarrow \textbf{skalarwertige} \text{ Zielfunktion}$$

Vorteile:

- Änderungen nur auf Modellebene
- Simplex-Verfahren anwendbar

Nachteile:

- Präferenzen müssen bekannt sein
- Präferenzen sind stets subjektiv
- Nur subjektiv optimale Lösung, keine Pareto-Front, keine Trade-Offs zwischen Lösungen

Beispiel Fallmix-Optimierung in einem Krankenhaus 1/2

Diagnosis-Related-Group (DRG)

Krankenkasse zahlt DRG-abhängigen Festpreis pro Patient

Wirtschaftliches Ergebnis hängt von Behandlungskosten ab

Bezeichne Anzahl Patienten in DRG i, $i = 1, 2, 3$ mit x_i.

Lineare Restriktionen:

$$
\begin{aligned}
10x_1 + \quad 4x_2 + \quad 4x_3 &\leq 3000 && \text{Pflegetage} \\
5x_1 + \quad 4x_2 + \quad 6x_3 &\leq 1800 && \text{OP-Stunden} \\
3.000x_1 + 2.000x_2 + 2.500x_3 &\leq 904.000 && \text{Budget} \\
x_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Beispiel Fallmix-Optimierung in einem Krankenhaus 2/2

Zielfunktionen:

$z_1 = f_1(\mathbf{x})$: Max. Deckungsbeitrag

$z_2 = f_2(\mathbf{x})$: Max. Anzahl behandelter Patienten

$z_3 = f_3(\mathbf{x})$: Max. Anzahl behandelter Patienten in DRG-Fallgruppe 1

$z_4 = f_4(\mathbf{x})$: Max. die Auslastung der Operationssäle

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max f_1(\mathbf{x}) = & 1.200x_1 & + & 800x_2 & + & 1100x_3 \\
\max f_2(\mathbf{x}) = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\
\max f_3(\mathbf{x}) = & x_1 & & & & \\
\max f_4(\mathbf{x}) = & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3
\end{array}
$$

u.d.N. Einhaltung der linearen Restriktionen, d.h.
Pflegetage, OP-Stunden, Budget, Nichtnegativität.

Skalarisierung

Für jede der p Zielfunktionen $f_i(\mathbf{x})$ wird ein (subjektiver) Gewichtungsfaktor $\lambda_i \geq 0$ bestimmt.

$$\text{Ersetze } f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \text{ durch } f^{gew}(\mathbf{x}) = \lambda_1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_p \cdot f_p(\mathbf{x})$$

$\Longrightarrow$ $f^{gew}(\mathbf{x})$ ist *skalarwertig*, die Restriktionen unverändert

Vorteil: leicht verständlich

Nachteil: Normierung der Ziele schwierig (etwa bei Kosten und Kundenzufriedenheit)

Zielgewichte festlegen:
$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 0.5; \lambda_4 = 2$

$\Longrightarrow$ Ziel 2 ist viermal so wichtig wie Ziel 1 und achtmal so wichtig wie Ziel 3.

Neues Einziel-Optimierungsmodell:

$$\begin{array}{ll} \max & f^{gew} = 1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + 4 \cdot f_2(\mathbf{x}) + 0.5 \cdot f_3(\mathbf{x}) + 2 \cdot f_4(\mathbf{x}) \\ \text{u.d.N.} & \text{Einhaltung der Restriktionen} \end{array}$$

Zur Erinnerung:

f_1 Deckungsbeitrag, f_2 Anz. Patienten, f_3 Anz. Patienten DRG 1, f_4 Auslastung OP

Beispiele für lexikographische Ordnungen

Beispiel Medallienspiegel

Goldmedaillen unendlich wichtiger als Silbermedaillen

Aktueller Medaillenspiegel

Pl.	Land	Abk.	G.	S.	B.
1.	Vereinigte Staaten	USA	46	29	29
2.	Volksrepublik China	CHN	38	27	23
3.	Vereinigtes Königreich	GBR	29	17	19
4.	Russland	RUS	24	26	32
5.	Südkorea	KOR	13	8	7
6.	Deutschland	GER	11	19	14
7.	Frankreich	FRA	11	11	12
8.	Italien	ITA	8	9	11
9.	Ungarn	HUN	8	4	5
10.	Australien	AUS	7	16	12
11.	Japan	JPN	7	14	17
12.	Kasachstan	KAZ	7	1	5

Beispiele Lexikon

Erster Buchstabe unendlich wichtiger als folgende

Lexikographischer Zielgewichtung

Ziele werden nach Wichtigkeit geordnet und sukzessive als Nebenbedingungen eingefügt.

1. Schritt: Ziele werden nach Wichtigkeit geordnet

2. Schritt: Löse LP

3. Schritt: Existiert nur eine optimale Lösung, beende Verfahren.

4. Schritt: Füge neue Restriktion $f_i(\mathbf{x}) \geq \bar{z}_i$ ein, ersetze Ziel durch das nächstwichtigste und gehe zu Schritt 2.

Vorteil: leicht verständlich

Nachteil: Verschiedene Ergebnisse je Ordnung

Lexikographische Zielgewichtung – Krankenhaus Beispiel

Start:
Rangfolge der Ziele festlegen, z.B. f_3, f_1, f_2, f_4

1. Iteration:

$$\overline{z_3} = f_3(\mathbf{x}) = \max f_3(\mathbf{x}) \text{ u.d.N. Einhaltung Restriktionen}$$

2. Iteration:

$$\overline{z}_1 = \max f_1(\mathbf{x}) \text{ u.d.N. Restriktionen } \textbf{und } f_3(\mathbf{x}) \geq \overline{z_3}$$

3. Iteration:

$$\overline{z}_2 = \max f_2(\mathbf{x}) \text{ u.d.N. Restriktionen } \textbf{und } f_1(\mathbf{x}) \geq \overline{z}_1;\ f_3(\mathbf{x}) \geq \overline{z}_3$$

usw. bis das zu lösende LP keine oder nur eine zulässige Lösung hat.

Zur Erinnerung:

f_1 Deckungsbeitrag, f_2 Anz. Patienten, f_3 Anz. Patienten DRG 1, f_4 Auslastung OP

Zieldominanz

Bestimme aus den p Zielen ein alleiniges Hauptziel $f_h(\mathbf{x})$.
Übrige Ziele werden zu Nebenzielen, die in Form von Restriktionen ein unteres und/oder oberes Anspruchsniveau erfüllen müssen.

$$
\begin{array}{lll}
\max & \text{Hauptzielfunktion } f_h(\mathbf{x}) & \\
\text{u.d.N.} & \text{allgemeine Restriktionen} & \\
& f_i(\mathbf{x}) \geq \text{unteres Anspruchsniveau} & \exists i \text{ mit } f_i(\mathbf{x}) \neq f_h(\mathbf{x}) \\
& f_i(\mathbf{x}) \leq \text{oberes Anspruchsniveau} & \exists i \text{ mit } f_i(\mathbf{x}) \neq f_h(\mathbf{x})
\end{array}
$$

Vorteil: leicht verständlich

Nachteil: Zu ehrgeizige Anspruchsniveaus können die Menge der zulässigen Lösungen zu stark einschränken (keine zulässige Lösung).

Zieldominanz – Krankenhaus Beispiel

Schritt 1: Lege Hauptziel fest, z.B. $f_2(\mathbf{x})$

Schritt 2: Definiere obere/untere Anspruchsniveaus, z.B.

Deckungsbeitrag mindestens $\underline{z}_1 = 300.000$ GE

Anzahl behandelter Patienten DRG 1 zwischen $\underline{z}_3 = 100$ und $\overline{z}_3 = 150$

Mindestauslastung OP $\underline{z}_4 = 80\%$

Neues Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rl}
\max & f_2(\mathbf{x}) \\
\text{u.d.N.} & \text{Einhaltung der Restriktionen} \\
& f_1(\mathbf{x}) \geq 300.000 \\
& f_3(\mathbf{x}) \geq 100 \\
& f_3(\mathbf{x}) \leq 150 \\
& f_4(\mathbf{x}) \geq 0.80
\end{array}
$$

Zur Erinnerung:

f_1 Deckungsbeitrag, f_2 Anz. Patienten, f_3 Anz. Patienten DRG 1, f_4 Auslastung OP

Goal Programming

Goal Programming (GP) kombiniert die Ideen der

- Zielgewichtung und der
- Zieldominanz.

Die Modellierungstechnik unterstützt

- klassischen max/min Zielen, aber auch
- das möglichst präzise Erreichen eines gegebenen Zielwerts sowie
- weiche Restriktionen (im Unterschied zu klassischen, harten) Restriktionen.

Vokabeln:

objective (function)	Zielfunktion
target value	Zielwert, Anspruchsniveau
goal	Zielmarke, Zweck - eher nicht i.S. einer Zielfunktion

1. Schritt: Definiere für jedes Ziel f_i ein Anspruchsniveau (goal) g_i.

2. Schritt: Führe zwei Abweichungsvariablen (deviation) für jedes Ziel f_i ein:

- d_i^- misst Unterschreiten des Anspruchsniveau
- d_i^+ misst Überschreiten des Anspruchsniveaus

Mit d_i^- und d_i^+ wird jedes Ziel als Gleichungs–Restriktion aufgefasst.

Neue Zielfunktion:

$$\min \sum \text{unerwünschten Abweichungen vom Anspruchsniveau}$$

Goal Programming – Krankenhaus 1/2

Definiere Anspruchsniveaus für alle Ziele:

Deckungsbeitrag mindestens $g_1 = 300.000$ GE

Anzahl Patienten $g_2 = 700$

Anzahl Patienten in DRG 1 $g_3 = 125$

Auslastung OP $g_4 = 80\%$

Goal-Programming Problem:

min	unerwünschte Abweichungen von Goals			
u.d.N.	Einhaltung der Restriktionen			
	$f_1(\mathbf{x}) + d_1^- - d_1^+ =$	300.000	Deckungsbeitrag
	$f_2(\mathbf{x}) + d_2^- - d_2^+ =$	700	Behandelte Patienten
	$f_3(\mathbf{x}) + d_3^- - d_3^+ =$	125	Behandelte Patienten in DRG 1
	$f_4(\mathbf{x}) + d_4^- - d_4^+ =$	0.80	Auslastung OP

Goal Programming – Krankenhaus 2/2

min	unerwünschte Abweichungen von Goals			
u.d.N.	Einhaltung der Restriktionen			
	$f_1(\mathbf{x}) + d_1^- - d_1^+ =$	300.000	Deckungsbeitrag
	$f_2(\mathbf{x}) + d_2^- - d_2^+ =$	700	Behandelte Patienten
	$f_3(\mathbf{x}) + d_3^- - d_3^+ =$	125	Behandelte Patienten in DRG 1
	$f_4(\mathbf{x}) + d_4^- - d_4^+ =$	0.80	Auslastung OP

Frage: Wie ist die Zielfunktion zu modellieren?

a) Alle vier Ziele sind zu maximieren:

$$\min\ d_1^- + d_2^- + d_3^- + d_4^-$$

b) Maximiere f_1 und f_3. Die Goals für f_2 und f_4 sind möglichst zu erreichen:

$$\min\ d_1^- + (d_2^- + d_2^+) + d_3^- + (d_4^- + d_4^+)$$

c) Alle Goal-Abweichungen sind zu minimieren:

$$\min\ (d_1^- + d_1^+) + (d_2^- + d_2^+) + (d_3^- + d_3^+) + (d_4^- + d_4^+)$$

Beispiel: Mit *Normierung* und *Gewichtung*

$$\min\ \lambda_1 \cdot d_1^- + \lambda_2 \cdot (d_2^- + d_2^+) + \lambda_3 \cdot d_3^- + \lambda_4 \cdot (d_4^- + d_4^+)$$

Goal-Programming für weiche Restriktionen 1/2

Restriktionen

Eine harte Restriktion ist in jedem Fall einzuhalten (klassischer Fall).

Eine weiche Restriktion darf verletzt werden. Die Verletzung soll so gering wie möglich sein.

In der Realität sind viele Restriktionen weich, z.B.

- Anzahl Mitarbeiter – Überstunden, Werkverträge, Zeitarbeit
- Budget – Kunst des Rechnungswesen

Modellierung weicher Restriktionen:

Eine harte Restriktion ist mit Hilfe von Abweichungsvariablen $d^- \geq 0$ und $d^+ \geq 0$ wie folgt umzuformen:

Situation	Formulierung Goal-Restriktion	Beitrag zur Zielfunktion
LS $\leq$ RS	LS $+d^- - d^+ =$ RS	min d^+
LS $=$ RS	$d^-, d^+ \geq 0$	min $d^- + d^+$
LS $\geq$ RS		min d^-

LS: linke Seite des Restriktionssystems; **RS**: rechte konstante/Goal Seite.

Goal-Programming für weiche Restriktionen 2/2

Unterschreiten des Anspruchsniveaus $\longrightarrow d_i^-$
Überschreiten des Anspruchsniveaus $\longrightarrow d_i^+$

Beispiel Budget-Restriktion

100 Euro können für Lebensmittel (x_L) oder für Unterhaltung (x_U) ausgegeben werden.

$$x_L + x_U \leq 100 \quad \text{harte Restriktion}$$
$$x_L + x_U + d^- - d^+ = 100 \quad \text{weiche / Goal Programming Restriktion}$$

Unterschreiten des Budgets: $x_L = 60, x_U = 30 \rightarrow d^- = 10, d^+ = 0$

Überschreiten des Budgets: $x_L = 70, x_U = 50 \rightarrow d^+ = 20, d^- = 0$

Budget-Überschreitungen sollen so gering wie möglich ausfallen, daher Änderung Zielfunktion.

GröSSere Werte für d^+ sind schlechter. In geeigneter Weise berücksichtigen, z.B. $\min d^+$.

Zusammenfassung & Ausblick

Fragen zur Wiederholung:

- Was bedeutet der Begriff Vektoroptimierung?
- Wie sind die Begriffe Zielbeziehung, Pareto-Front, lexikographische Zielgewichtung, Skalarisierung, Zieldominanz und Goal-Programming einzuordnen und anzuwenden?

Klausurrelevante Literatur

Domschke/Drexl: Kapitel 2.7, oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 2.3

Ausblick

- Tutorium: Vektoroptimierung, Zieldominanz, Pareto Front
- Einführung Graphentheorie: Domschke/Drexl Kapitel 3.1 und 3.2, oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 3.1 und 3.2, oder Werners Kapitel 5

Teil V

Graphentheorie I – Kürzeste Wege in Graphen

Modelle für einige ausgewählte Problemtypen:

- Mischungsprobleme
- Produktionsprogrammplanung

Regeln zur Modelltransformation:

- Standardform
- Normalform

Mehrere Zielkriterien:

- Zielgewichtung (skalarwertig, lexikographisch)
- Zieldominanz
- Goal-Programming

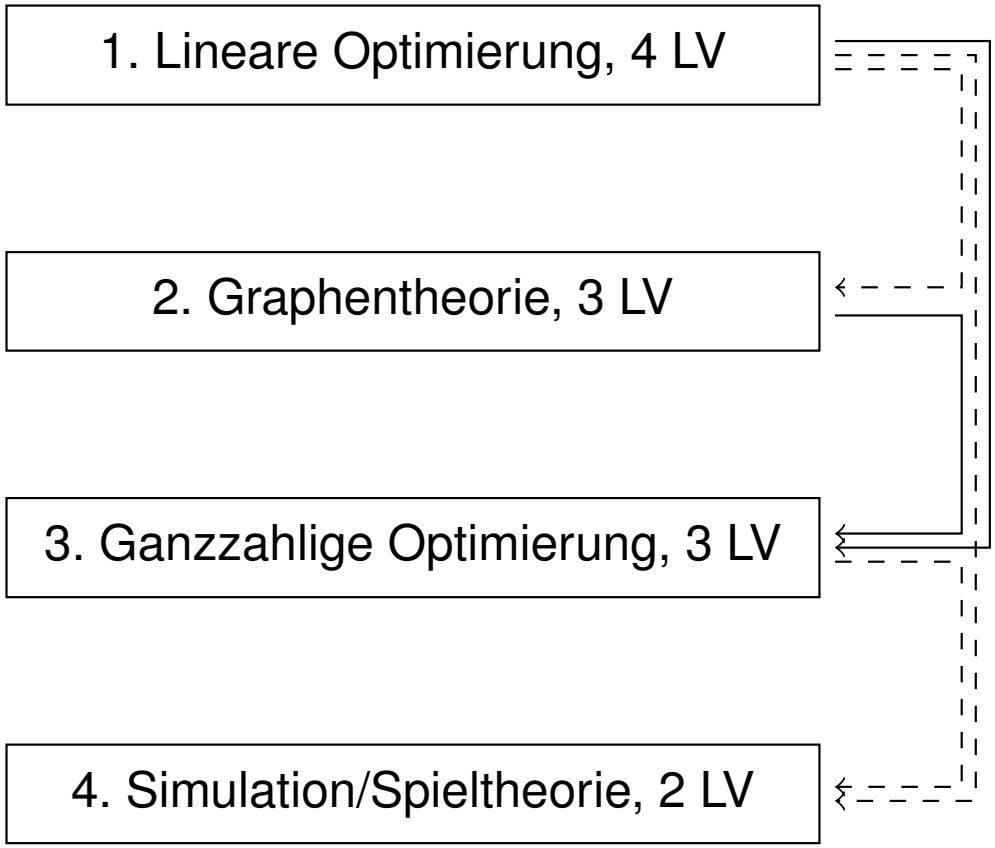
Grafisches Lösungsverfahren für LP:

- Einziel LP
- Mehrziel LP

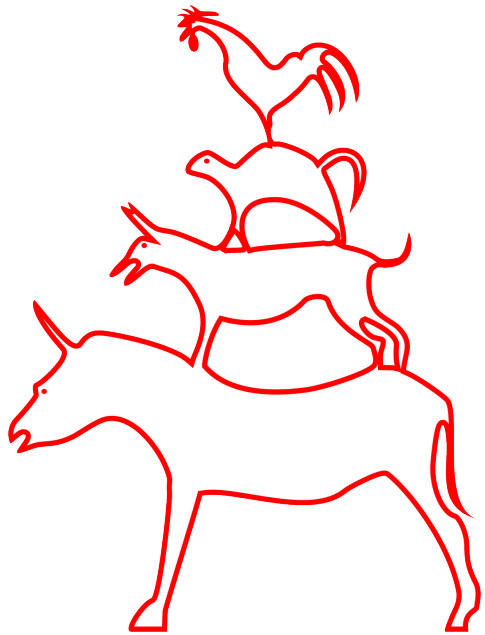
Simplex-Algorithmus für beliebige LP

- Transformation
- Primaler Simplex
- Dualer Simplex

Struktur dieser Vorlesung



Beispiele für Netzwerkmodelle basierend auf Graphen



Modelle physischer Strukturen – Autobahnnetz

Telefonnetz, Internet, Strom-/Gasnetz, Wasserversorgungsystem

Quelle: FireSoulIHC

Modelle physischer Strukturen

Netz von Haltestellen, Bus und StraSSenbahn Bremen

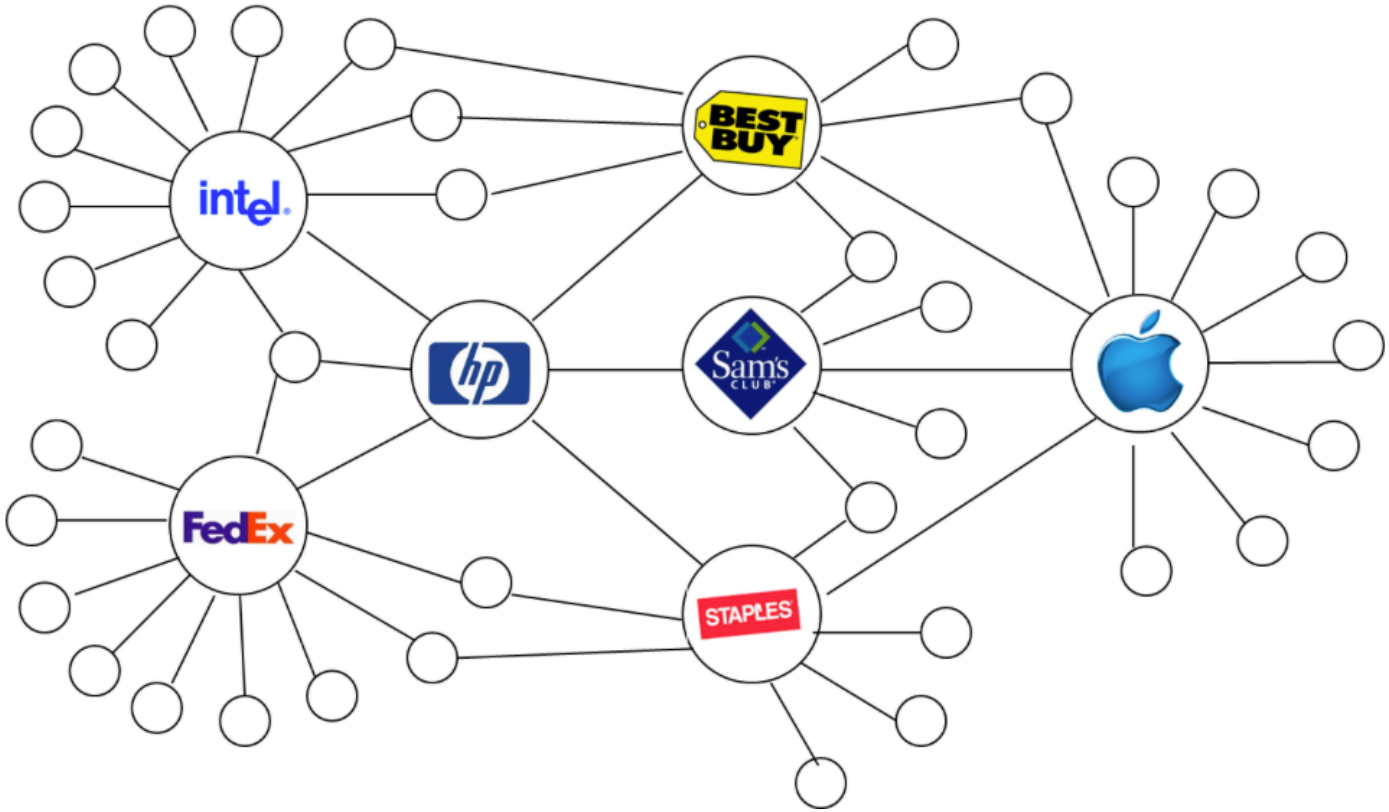
Bestandteile:

Knoten: Haltestellen

Kanten: Verbindungsstrecken

Quelle: bsag.de

Modelle logischer Strukturen
Beschaffungs- und Liefernetzwerk



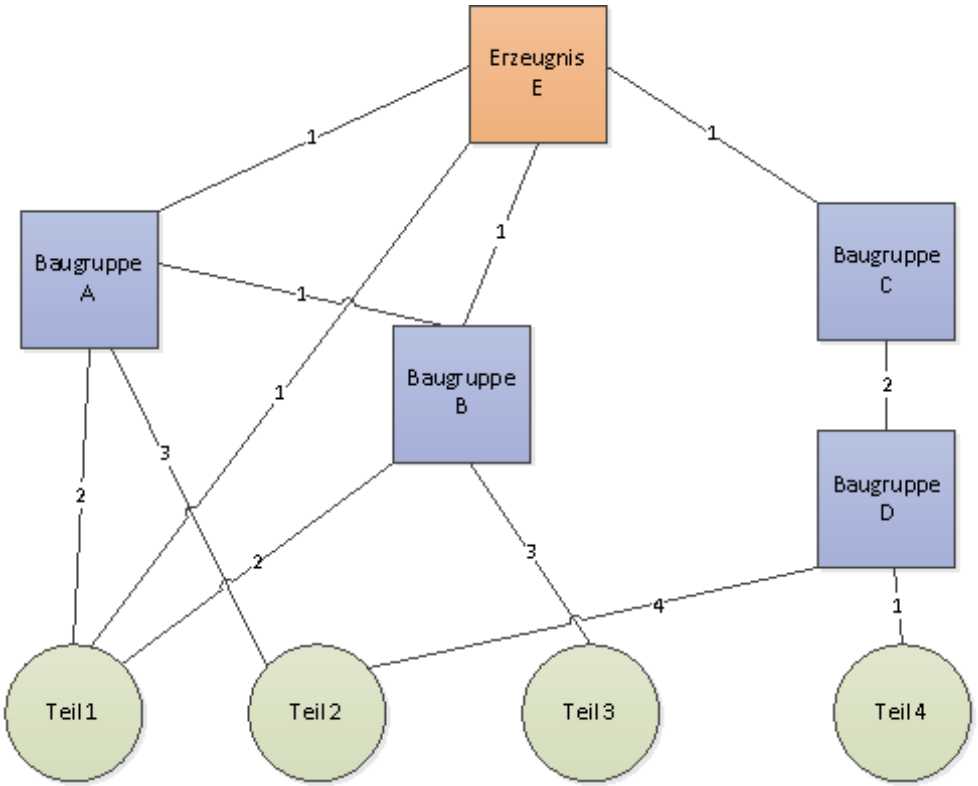
Bestandteile:

Knoten: Lieferanten

Kanten: Beziehungen/Verträge

Quelle: gxsblogs.com

Modelle hierarchischer Strukturen
Gozintograph – goes into graph

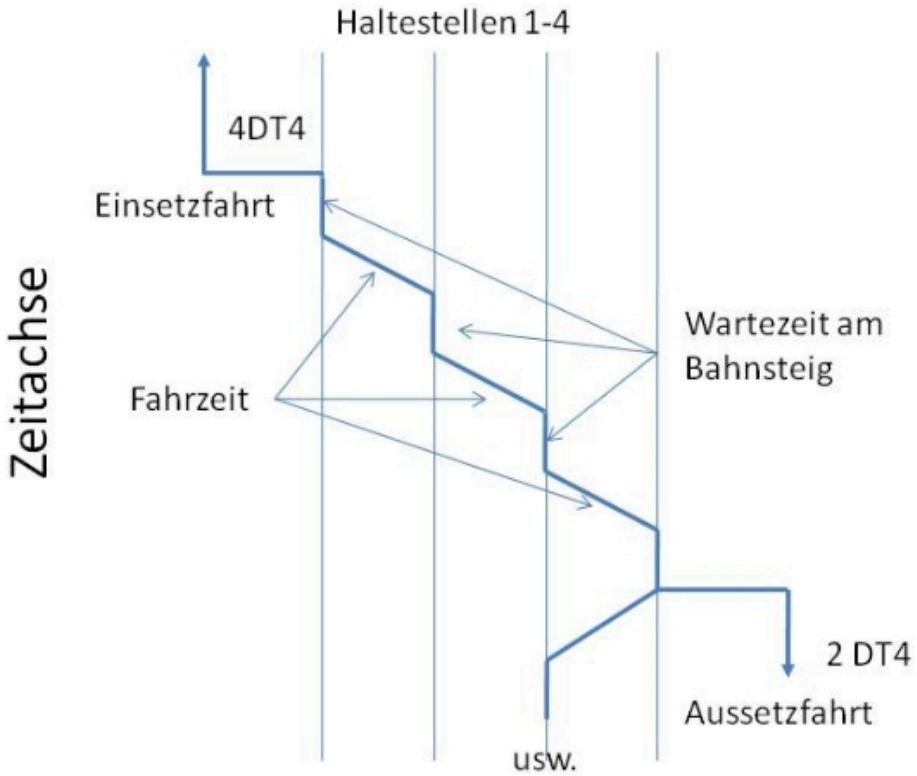


Bestandteile:

Knoten: Erzeugnisse, Baugruppen, und Einzelteile

Kanten: Konstruktionszugehörigkeiten

Quelle: derfernstudent.de



Bestandteile:

Knoten: Ankunfts- oder Abfahrtsereignis

Kanten: Verbindungsweg/-zeit

Quelle: SkipHH

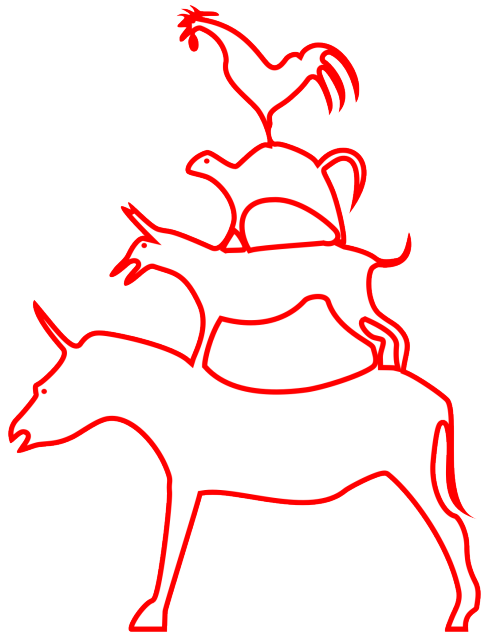
Inhalt der Vorlesung

Beispiele für Netzwerkmodelle basierend auf Graphen

Modellierung mittels Graphen
- Grundlegende Strukturen
- Repräsentation von Graphen mit Matrizen

Berechnung kürzester Wege in Graphen
- Problem
- Funktionsprinzip
- Lösung mittels Dijkstra-Algorithmus
- Lösung mittels Simplex-Algorithmus

Anwendungsmöglichkeiten kürzester Wege



Definition Graph

Graphen repräsentieren Beziehungen zwischen Objekten.

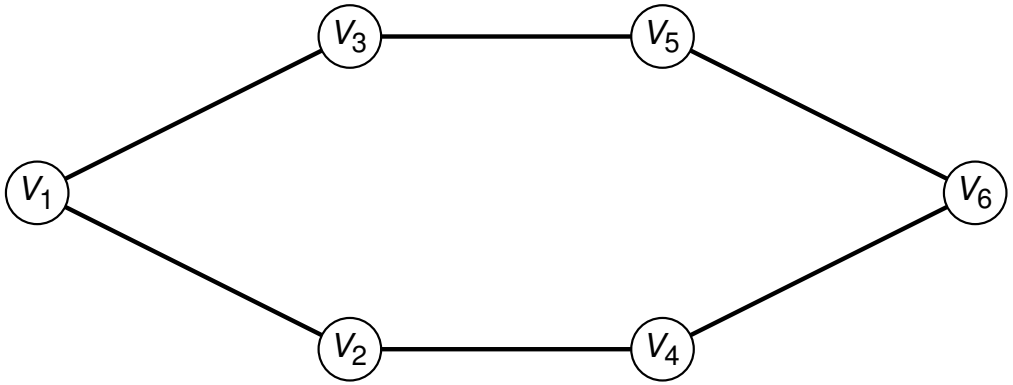
Definition Graph

- Ein Graph G ist ein Paar von zwei Mengen $G = (V, E)$.
- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine nichtleere Menge deren Elemente man als Knoten bezeichnet.
- $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ist eine Menge deren Elemente man als Kanten bezeichnet.
- Jeder Kante sind zwei Knoten zugeordnet (Inzidenzabbildung $\omega : E \to V \times V$).

Grundbegriffe → z.B. Domschke/Drexl, Kapitel 3.1

Ein ungerichteter Graph

Beispiel ungerichteter Graph:



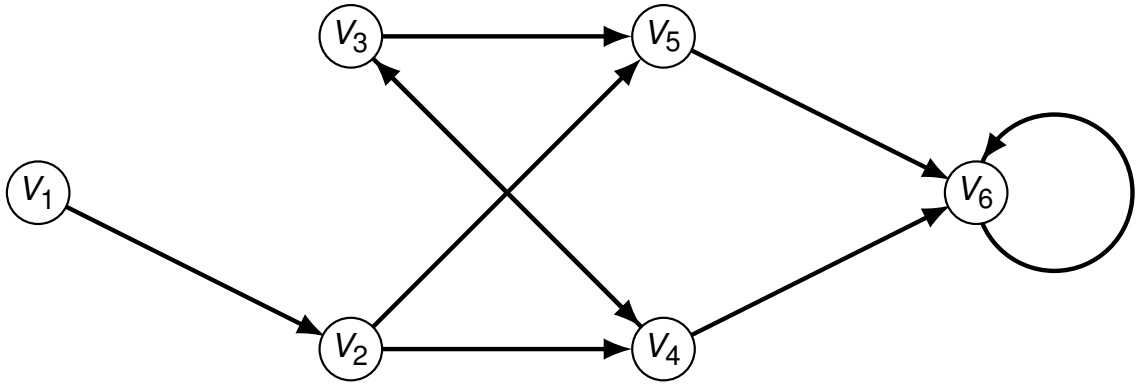
Knotenmenge $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Kantenmenge $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

Inzidenzabbildung ω: $e_1 \to \{1, 2\}$, $e_2 \to \{1, 3\}$,
$e_3 \to \{2, 4\}$, $e_4 \to \{3, 5\}$,
$e_5 \to \{4, 6\}$, $e_6 \to \{5, 6\}$

Ein gerichteter Graph

Beispiel gerichteter Graph:



Knotenmenge $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Kantenmenge $E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

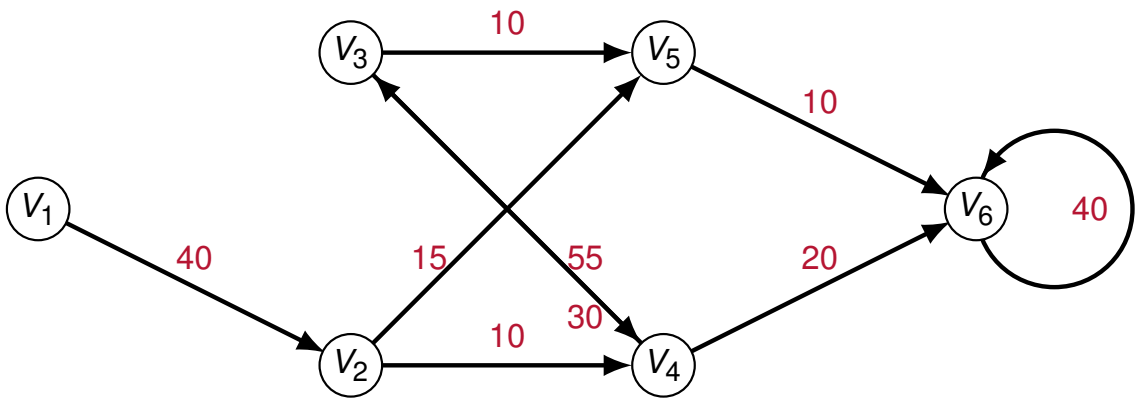
Inzidenzabbildung

$$\begin{aligned}\omega\colon\ & e_1 \to (1,2),\ e_2 \to (2,4),\\ & e_3 \to (2,5),\ e_4 \to (3,4),\\ & e_5 \to (3,5),\ e_6 \to (4,3),\\ & e_7 \to (4,6),\ e_8 \to (5,6)\\ & e_9 \to (6,6)\end{aligned}$$

Definition Bewerteter Graph

Ein bewerteter Graph ist ein Graph mit einer Bewertungsfunktion $c : V \to \mathbb{R}$, die jedem Knoten bzw. jeder Kante eine reele Zahl zuweist.

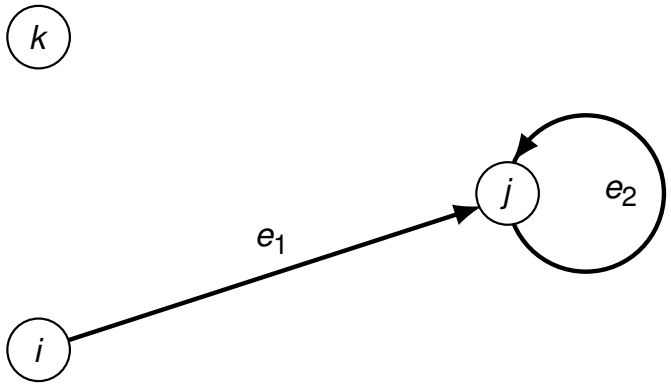
Beispiel bewerteter Graph:



Notation:
Kosten der Kante (i, j) bezeichnet man mit c_{ij}.

LogDynamics

Beispiel bewerteter Graph:



Bezeichnungen:

- Kante e_1 ist mit Knoten i und j inzident
- Knoten i heiSSt Nachbar von j, j heiSSt Nachbar von i
- Knoten i und j sind benachbart oder adjazent
- Zahl der mit i inzidenten Kanten heiSSt Grad $g(i)$
- $N(i)$ heiSSt Menge aller Nachbarn von Knoten i
- Knoten k ist isoliert
- Kante e_2 heiSSt Schlinge

Vorgänger- und Nachfolger in Graphen

LogDynamics

Vorgänger

In einem gerichteten Graph heiSSt der Ursprung einer Kante Vorgänger und der Abschluss der Kante Nachfolger. Es bezeichne $P(i)$ und $S(i)$ die Menge der Vorgänger und Nachfolger von Knoten i.

Parallel

Zwei ungerichtete Kanten sind parallel, wenn sie dasselbe Knotenpaar verbinden.

Schlichter Graph

Ein Graph, der weder Schlingen noch parallele Kanten bzw. Pfeile besitzt, wird als schlicht bezeichnet.

Digraph

Ein schlichter gerichteter Graph mit endlicher Knotenmenge heiSSt Digraph.

Wege und Kreise

Weg

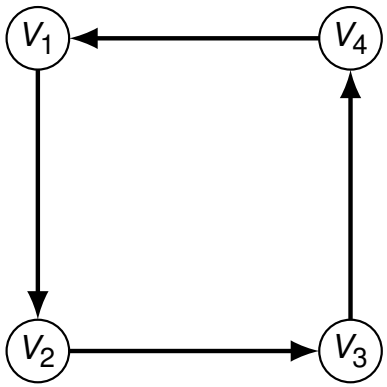
Ein Weg bezeichnet eine Folge von Knoten, in der zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind.

Ein Weg in einem gerichteten Graphen erfordert, dass aufeinanderfolgende Knoten durch gerichtete Kanten verbunden sind.

Kreis

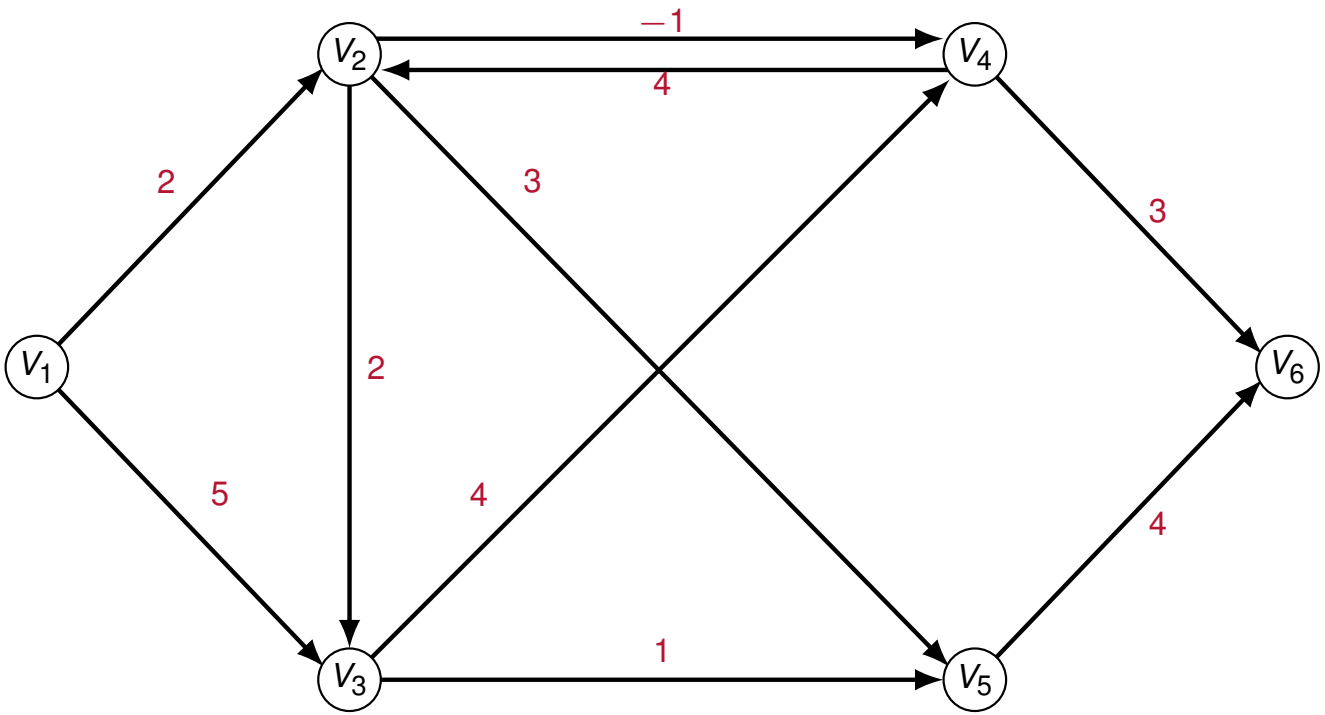
Wenn erster und letzter Knoten eines Wegs übereinstimmen, nennen wir den Weg einen Kreis.

Einen Graph ohne Kreis nennt man kreisfrei.



Aufgabe (Wege in einem Graph)

Gegeben sei der folgende bewertete Graph:



1. Geben Sie drei verschiedene Wege von Knoten V_1 zu Knoten V_6 an.
2. Geben Sie einen Kreis beginnend mit Knoten V_4 an.
3. Welches ist der kostengünstigste Weg von Knoten V_1 zu Knoten V_6?
4. Welches ist der kostengünstigste Weg von Knoten V_1 zu Knoten V_6, falls sich die Kosten c_{42} auf -5 ändern?

Adjazenzmatrix (un)gerichteter Graph

Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter, endlicher Graph ohne parallele Kanten. Die zugehörige Adjazenzmatrix $A = (a_{ij})$ ist definiert mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Merke: Adjazenzmatrizen ungerichteter Graphen sind symmetrisch.

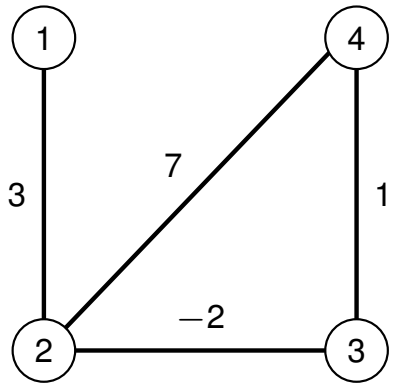
Adjazenzmatrix mit Kantengewichten

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, endlicher Graph ohne parallele Kanten mit Kantengewichten. Die zugehörige Adjazenzmatrix $A = (a_{ij})$ ist definiert mit

$$a_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{falls } \{i,j\} \in E \text{ (ungerichtet) bzw. } (i,j) \in E \text{ (gerichtet)} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Darstellung eines Graph als Matrix 2/3 – Beispiel 1

Der bewertete Graph G als Adjazenzmatrix A:

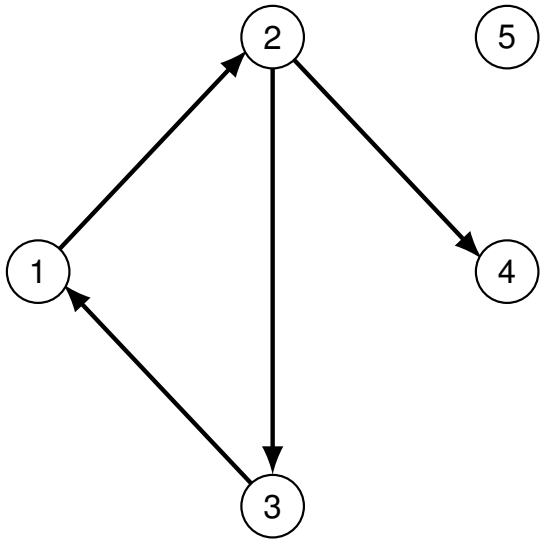


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G und A sind strukturgleich, d.h. Eigenschaften von G sind in A enthalten (und umgekehrt).

Darstellung eines Graph als Matrix 3/3 – Beispiel 2

Ein gerichteter Graph G als Adjazenzmatrix A:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nachfolger, Vorgänger, Eingangs- und Ausgangsgrad von k

$$\text{Anz. Nachfolger: } |S(k)| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (= g^{+}(k))$$

$$\text{Anz. Vorgänger: } |P(k)| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} (= g^{-}(k))$$

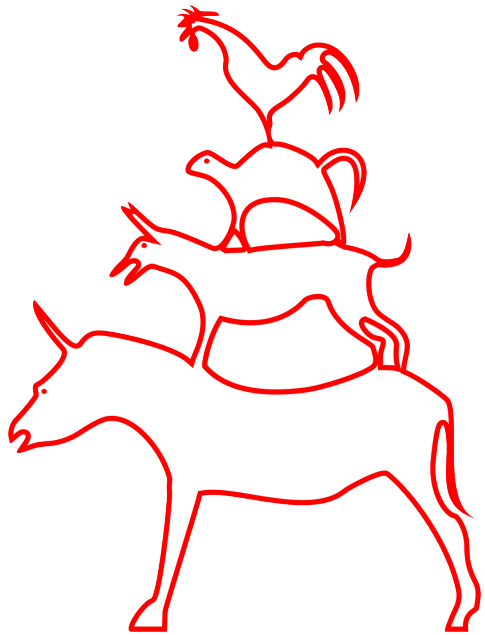
Inhalt der Vorlesung

Beispiele für Netzwerkmodelle basierend auf Graphen

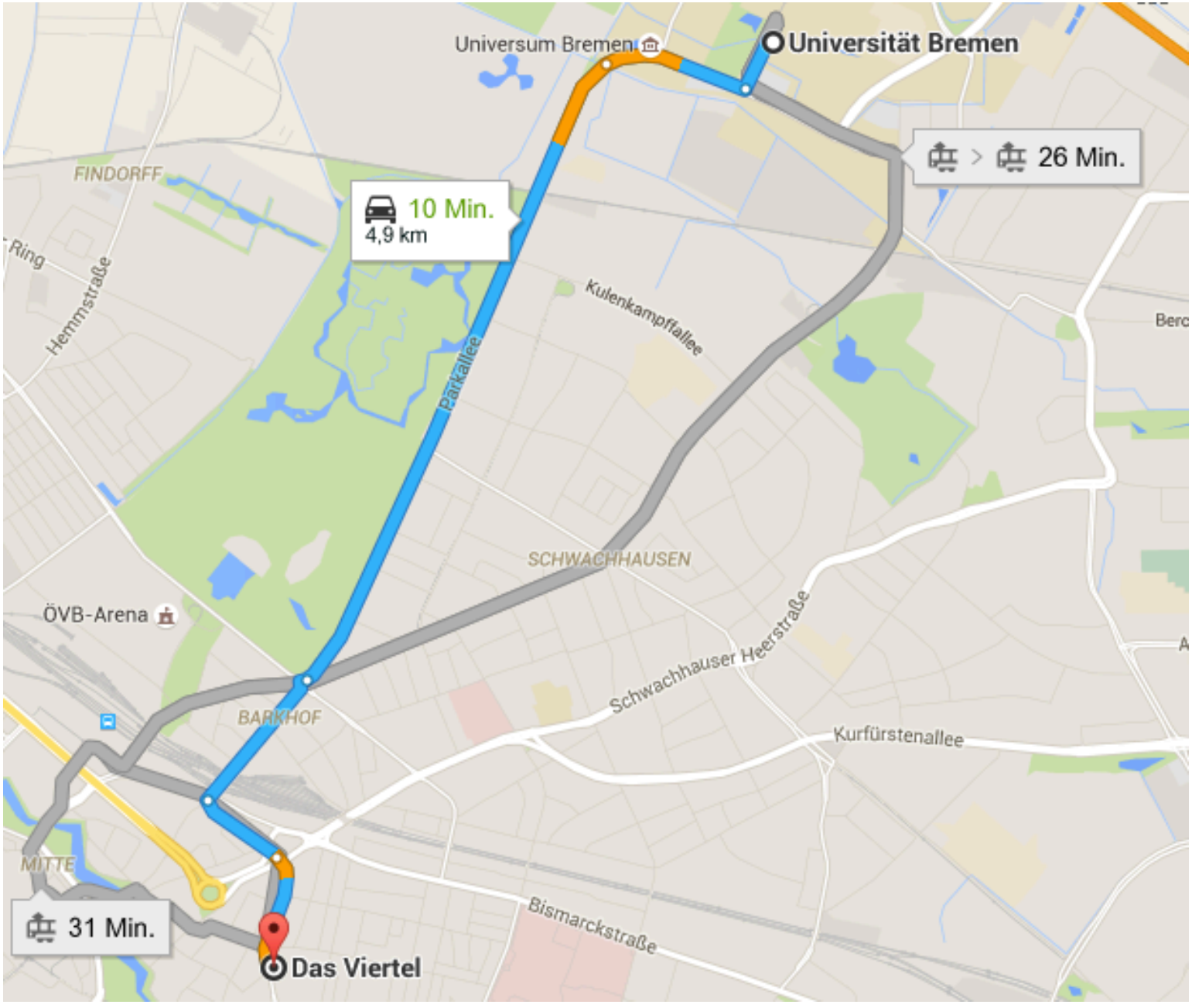
Modellierung mittels Graphen
- Grundlegende Strukturen
- Repräsentation von Graphen mit Matrizen

Berechnung kürzester Wege in Graphen
- Problem
- Funktionsprinzip
- Lösung mittels Dijkstra-Algorithmus
- Lösung mittels Simplex-Algorithmus

Anwendungsmöglichkeiten kürzester Wege



Wie funktioniert ein Navigationsdienst?



Varianten des kürzesten Wege Problems

LogDynamics

Problemstellung

Gesucht ist in einem Graphen *ein kürzester Weg* . . .

1. von einem Startknoten s zu einem **Endknoten** t
   (single-pair shortest path problem)
2. einem **Startknoten** s zu allen **anderen Knoten** eines Graphen
   (single-source shortest path problem)
3. von allen Knoten eines Graphen zu einem **Endknoten** t
   (single-destination shortest path problem)
4. jeweils zwischen allen Knotenpaaren
   (all-pairs shortest path problem).

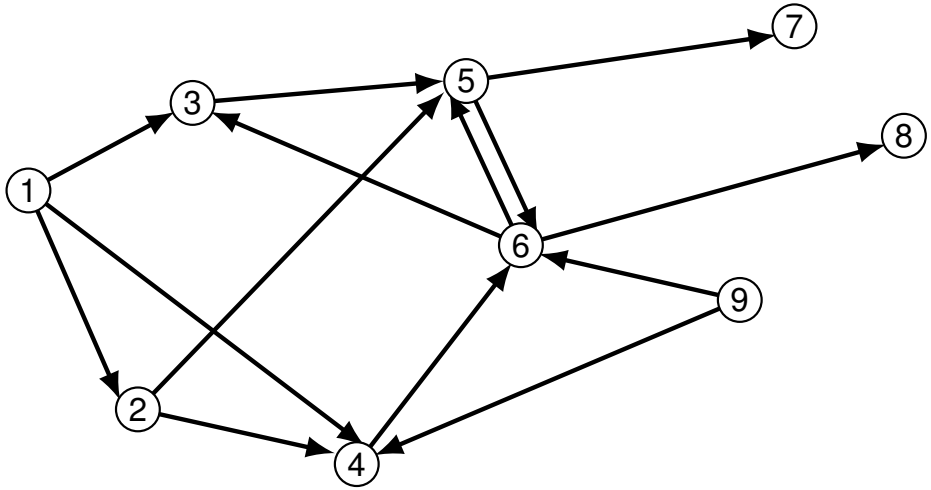
Der Dijkstra-Algorithmus löst das single-source shortest path problem.

Idee der Funktionsweise des Dijkstra-Algorithmus

LogDynamics

Minimalität

Ein minimaler Weg besteht aus minimalen Teilwegen.



Annahme: minimaler 1-5-Weg ist $1, 2, 4, 6, 5$
Folgerung: minimaler 1-6-Weg ist $1, 2, 4, 6$

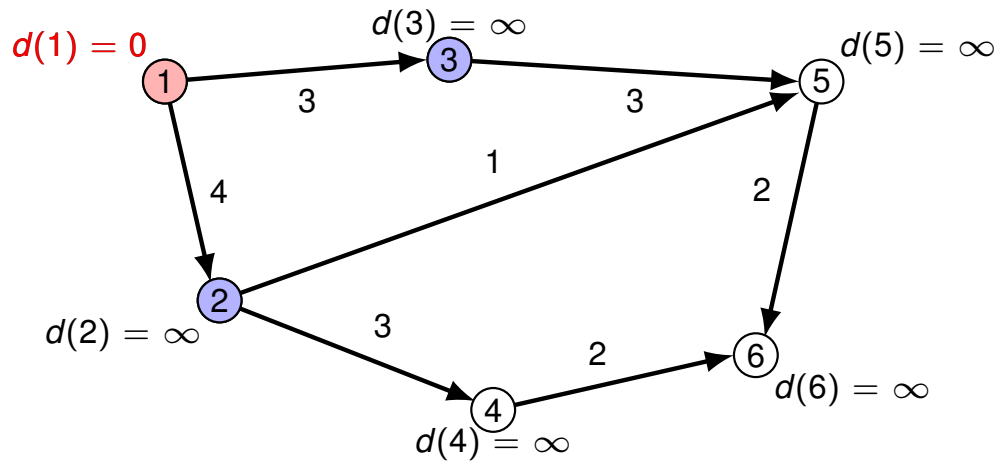
Dreiecksungleichung

Falls d_{uv} die kürzeste Distanz zwischen Knoten u und v ist, dann gilt für einen beliebigen Knoten x

$$d_{uv} \leq d_{ux} + d_{xv}.$$

Informeller Ablauf des Dijkstra-Algorithmus

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit nichtnegativen Kantengewichten und einem Startknoten, z.B. $1 \in V$.



Anmerkung Handout-Version: die relevanten Details sind nur im animierten Foliensatz erkennbar.

Notation für den Pseudocodes des Dijkstra-Algorithmus

- Graph $G = (V, E, c)$ mit nichtnegativen Kantengewichten
- Ein Startknoten $s \in V$
- Die Anzahl der Knoten im Graph sei $n = |V|$
- $S(i) = \{j|(i,j) \in E\}$ ist die Menge der Nachfolger von Knoten i
- d ist ein n-Vektor von Distanzen. Die Distanz $d(i)$ ist die bislang bekannte kürzeste Distanz von Startknoten s zu Knoten i.
- R ist ein n-Vektor für Knoten. Der Knoten $R(i)$ ist der direkter Vorgänger von Knoten i auf dem kürzesten Weg von s zu i.
- $\mathcal{M}$ ist eine Menge von Knoten. Für jeden Knoten i in $\mathcal{M}$ ist bereits ein Weg (nicht zwingend der kürzeste) von s nach i bekannt. ($\mathcal{M}$ enthält die blauen Knoten).

Pseudocode des Dijkstra-Algorithmus

Algorithmus 3: Dijkstra-Algorithmus

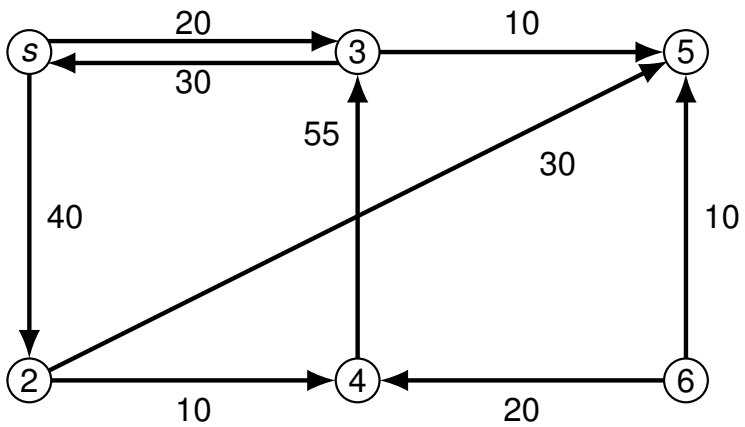
Input : Digraph $G = (V, E, c)$ mit $|V| = n$ und $c_{ij} \geq 0$ für alle $(i, j) \in E$, Startknoten $s \in V$

```
1  begin
2      M := {a}, d(a) := 0, d(i) := ∞ für alle i ≠ a
3      while M ≠ ∅ do
4          Bestimme h = arg min_{i∈M} d(i)
5          M := M \ {h}
6          foreach j ∈ S(h) do
7              if d(j) > d(h) + c_hj then
8                  d(j) := d(h) + c_hj,   R(j) := h,   M := M ∪ {j}
9              end
10         end
11     end
12 end
```

Output: $d(i)$ ist die kürzeste Weglänge von s nach i, $R(i)$ ist der direkte Vorgänger von i auf einem kürzestem Weg von s nach i.

Beispiel Dijkstra-Algorithmus 1/8
Pseudocode: Zeile Input

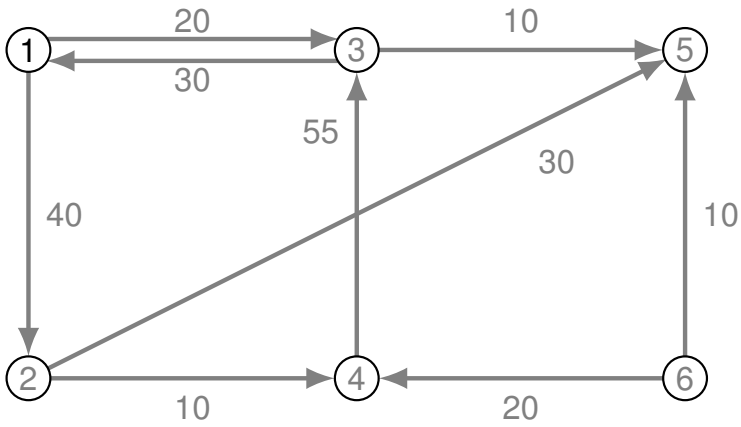
Input: gerichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit $c_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in E$
Der Startknoten sei s.



Gesucht: Kürzeste Wege von Knoten s zu allen Knoten in $V \setminus \{s\}$.

Beispiel Dijkstra-Algorithmus 2/8
Pseudocode: Zeile 2 (Initialisierung)

Startknoten $s = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} = \{1\}$, $d(1) = 0$
Für alle $i \in V \setminus \{1\}$, setze $d(i) = +\infty$.



i	1	2	3	4	5	6
$d(i)$	0	∞	∞	∞	∞	∞

$\mathcal{M} = \{1\}$

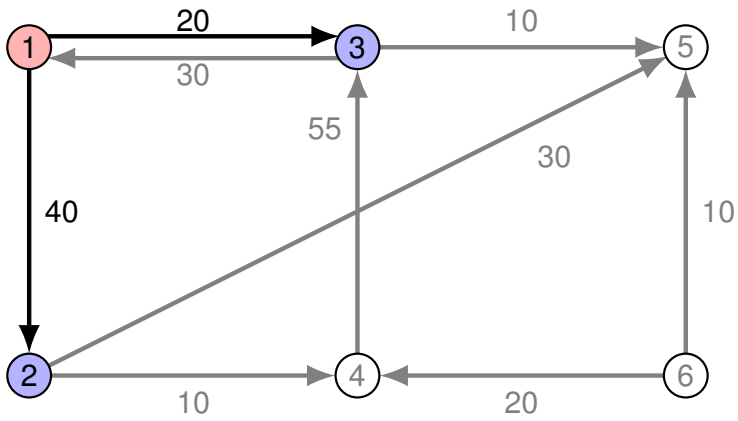
Beispiel Dijkstra-Algorithmus 3/8

Pseudocode: Zeilen 3 bis 11 (1. Iteration, markierter Knoten $h = 1$)

Zeile 4: Welcher Knoten h aus $\mathcal{M} = \{1\}$ soll rot markiert werden? $h = 1$

Zeile 5: Entferne $h = 1$ aus $\mathcal{M}$, h wird markiert, $\mathcal{M} = \emptyset$

Zeilen 6–10: Betrachte alle direkten Nachfolger von $h = 1$ (hier Knoten 2, 3)



i	1	2	3	4	5	6
$d(i)$	0	40	20	∞	∞	∞
$R(i)$		1	1			

$\mathcal{M} = \{2, 3\}$

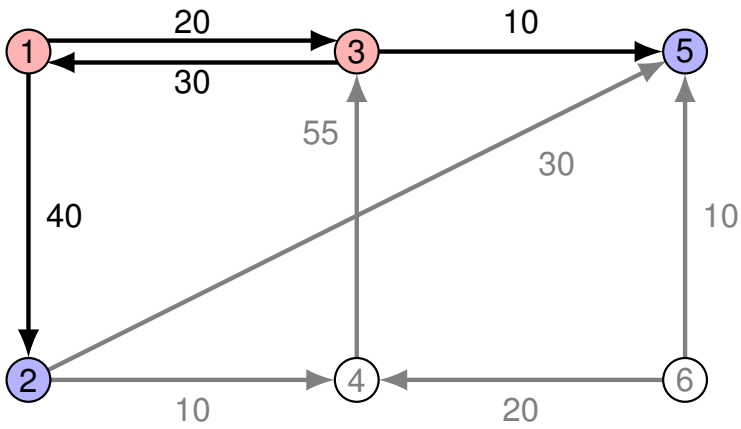
Von Zeile 11 zurück zu Zeile 3: Beginne neue Iteration, falls $\mathcal{M}$ nichtleer

Beispiel Dijkstra-Algorithmus 4/8

Pseudocode: Zeilen 3 bis 11 (2. Iteration, markierter Knoten $h = 3$)

Zeile 4: Wähle zu markierenden Knoten h aus $\mathcal{M} = \{2, 3\}$

Allgemein: $h = \text{argmin}_{i \in \mathcal{M}} \; d(i)$
Im Beispiel: $3 = \text{argmin}_{i \in \{2,3\}} \{d(2), d(3)\}$

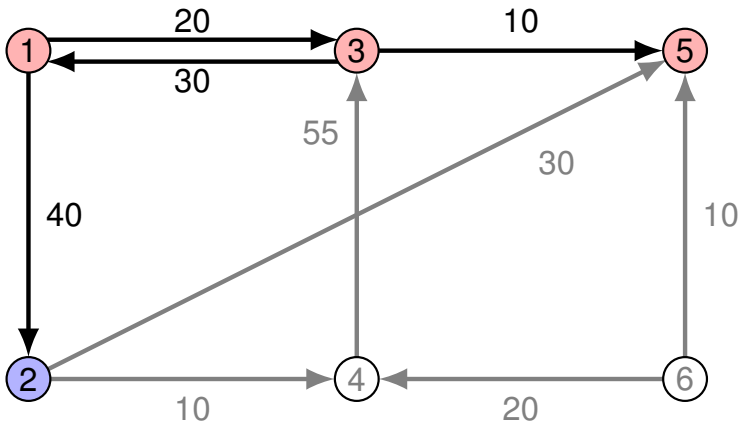


i	1	2	3	4	5	6
$d(i)$	0	40	20	∞	30	∞
$R(i)$		1	1		3	

$\mathcal{M} = \{2, 5\}$

Beispiel Dijkstra-Algorithmus 5/8

Pseudocode: Zeilen 3 bis 11 (3. Iteration, markierter Knoten $h = 5$)

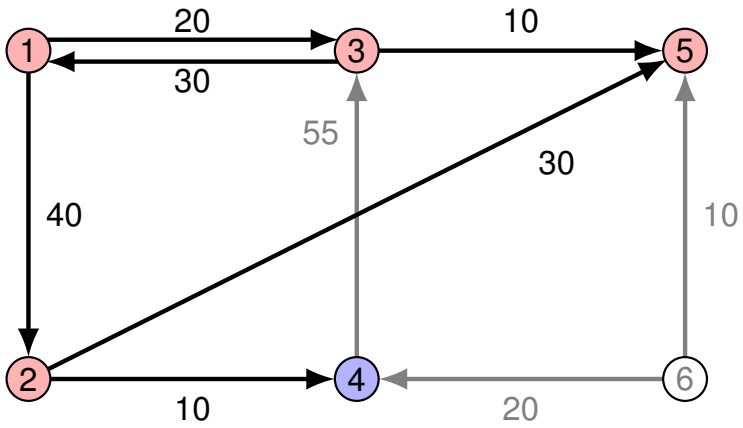


i	1	2	3	4	5	6
$d(i)$	0	40	20	∞	30	∞
$R(i)$		1	1		3	

$\mathcal{M} = \{2\}$

Beispiel Dijkstra-Algorithmus 6/8

Pseudocode: Zeilen 3 bis 11 (4. Iteration, markierter Knoten $h = 2$)

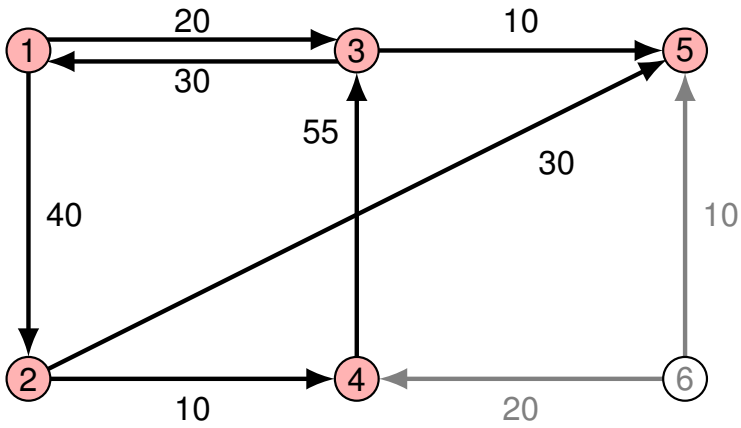


i	1	2	3	4	5	6
$d(i)$	0	40	20	50	30	∞
$R(i)$		1	1	2	3	

$\mathcal{M} = \{4\}$

Beispiel Dijkstra-Algorithmus 7/8

Pseudocode: Zeilen 3 bis 11 (5. Iteration, markierter Knoten $h = 4$)



i	1	2	3	4	5	6
$d(i)$	0	40	20	50	30	∞
$R(i)$		1	1	2	3	

$\mathcal{M} = \{\}$

Zeile 7: Von Knoten 4 aus gibt es keinen neuen kürzesten Weg zu Knoten 6. $\mathcal{M}$ bleibt daher unverändert.
$\mathcal{M} = \emptyset \rightarrow$ Abbruchbedingung in **Zeile 3** erfüllt, keine weitere Iteration.

Die Vektoren d und R enhalten nun folgende Werte:

i	1	2	3	4	5	6
$d(i)$	0	40	20	50	30	∞
$R(i)$		1	1	2	3	

$\mathcal{M} = \emptyset$

Ablesen der kürzesten Weglängen von $s = 1$:

$d(5) = 30 \rightarrow$ kürzeste Distanz von s nach 5 ist 30, etc.

Beachte: $d(6) = \infty \rightarrow$ es existiert kein Weg von $s = 1$ zu Knoten 6.

Ablesen des kürzesten Weges von $s = 1$ nach 5:

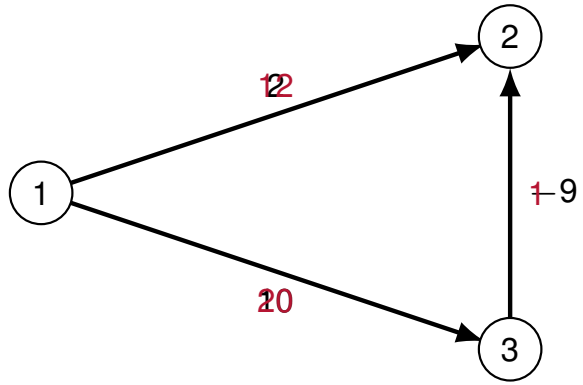
1. $R(5) = 3$ (Knoten 3 wird unmittelbar vor Knoten 5 besucht)
2. Vorgänger von 3? $R(3) = 1$ (Kn. 1 wird unmittelbar vor Kn. 3 besucht)
3. Vorgänger von 1? $R(1)$ ohne Wert, da Startknoten.

Der kürzester Weg von 1 nach 5 lautet: 1, 3, 5

Verhalten bei negativen Kantengewichten

Startknoten: $s = 1$

Addiere 10 zu allen Kantengewichten



Kürzester Weg von 1 nach 2: Weg 1, 3, 2 mit Distanz +1
Dijkstra findet: Weg 1,2 mit Distanz +2

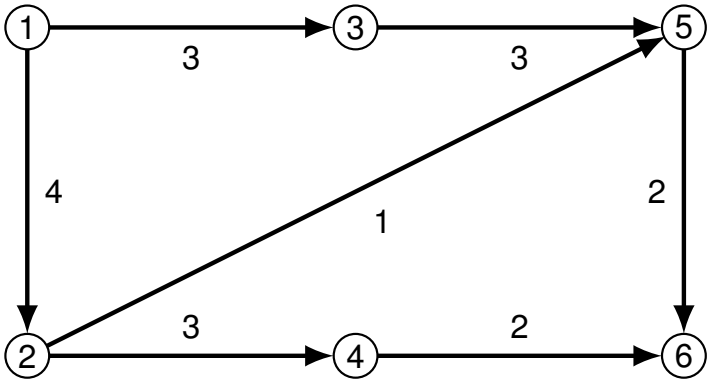
Vorsicht: Kantengewichte erhöhen keine Lösung

↪ Unterschiedlich Kantenzahl kürzester Wege

Abhilfe: Bellman-Ford-Algorithmus

Formulierung als lineares Optimierungsmodell

Idee: $d(i)$ mit Entscheidungsvariable x_i abbilden
$\hookrightarrow$ x_i bezeichnet kürzeste Entfernung Startknotens zu Knoten i



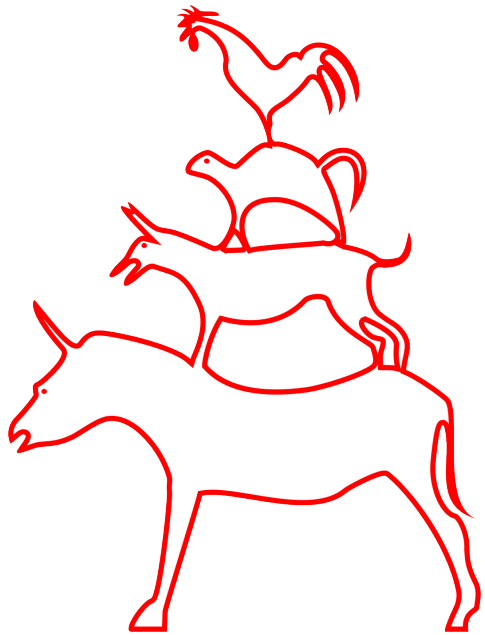
Zielfunktion: $\max x_6 - x_1$
pro Kante (i,j) eine Restriktion

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &\leq 4 && \text{Pfeil (1,2)}\\
-x_1 + x_3 &\leq 3 && \text{Pfeil (1,3)}\\
-x_2 + x_4 &\leq 3 && \text{Pfeil (2,4)}\\
-x_2 + x_5 &\leq 1 && \text{Pfeil (2,5)}\\
-x_3 + x_5 &\leq 3 && \text{Pfeil (3,5)}\\
-x_4 + x_6 &\leq 2 && \text{Pfeil (4,6)}\\
-x_5 + x_6 &\leq 2 && \text{Pfeil (5,6)}\\
x_i &\geq 0 && \text{für alle } i \in V
\end{aligned}
$$

Allgemeines Modell für Digraph

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_t \\
\text{u.d.N.} \quad & x_j - x_i \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \\
& x_s = 0
\end{aligned}
$$

Inhalt der Vorlesung



Anwendungsmöglichkeiten kürzester Wege

Reiseplanung im Tür-zu-Tür-Service

Minimiere z.B. Umsteigevorgänge, Reisedauer

Würzburg Hbf Bremen Hbf	Do, 19.11.15 Do, 19.11.15	ab an	20:30 23:57	3:27	0	ICE	67,00 EUR → Zur Buchung	106,00 EUR → Zur Buchung	→ Rückfahrt hinzufügen

Bahnhof/Haltestelle	Datum	Zeit		Gleis	Produkte	
Würzburg Hbf	Do, 19.11.15	ab	20:30	7	ICE 732	Intercity-Express Richtung: Oldenburg(Oldb)
Bremen Hbf	Do, 19.11.15	an	23:57	3		Bordrestaurant

Zwischenhalte einblenden | Verspätungs-Alarm | Merken | In Kalender eintragen | Druckansicht

fährt nicht täglich, 17. Nov bis 12. Dez 2015 Mo - Sa

Am Bahnhof | Karte anzeigen | Aktuelle Alternativen

Würzburg Hbf Bremen Hbf	Do, 19.11.15 Fr, 20.11.15	ab an	21:31 01:47	4:16	2	ICE, RE	57,00 EUR → Zur Buchung	106,00 EUR → Zur Buchung	→ Rückfahrt hinzufügen

Bahnhof/Haltestelle	Datum	Zeit		Gleis	Produkte	
Würzburg Hbf	Do, 19.11.15	ab	21:31	6	ICE 580	Intercity-Express Richtung: Kassel-Wilhelmshöhe
Fulda	Do, 19.11.15	an	22:02	6		Bordrestaurant
Umsteigezeit 9 Min.						→ Umsteigezeit anpassen
Fulda	Do, 19.11.15	ab	22:11	6	ICE 272	Intercity-Express Richtung: Hamburg-Altona
Hannover Hbf	Fr, 20.11.15	an	00:02	8		Bordrestaurant
Umsteigezeit 19 Min.						→ Umsteigezeit anpassen
Hannover Hbf	Fr, 20.11.15	ab	00:21	11	RE 4400	Regional-Express Richtung: Bremen Hbf
Bremen Hbf	Fr, 20.11.15	an	01:47	6		Fahrradmitnahme begrenzt möglich , Fahrzeuggebundene Einstiegshilfe vorhanden

Zwischenhalte einblenden | Verspätungs-Alarm | Merken | In Kalender eintragen | Druckansicht

fährt nicht täglich, 17. Nov bis 11. Dez 2015 Mo - Fr

Am Bahnhof | Karte anzeigen | Aktuelle Alternativen

Künstliche Intelligenz (Wegfindung)

Fragen zur Wiederholung:

- Was bedeutet die Begriffe Digraph, Weg, Adjazenzmatrix?
- Wie funktioniert das Dijkstra-Verfahren?

Klausurrelevante Literatur

Domschke/Drexl Kapitel 3.1 und 3.2, oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 3.1 und 3.2, oder Werners Kapitel 5

Ausblick

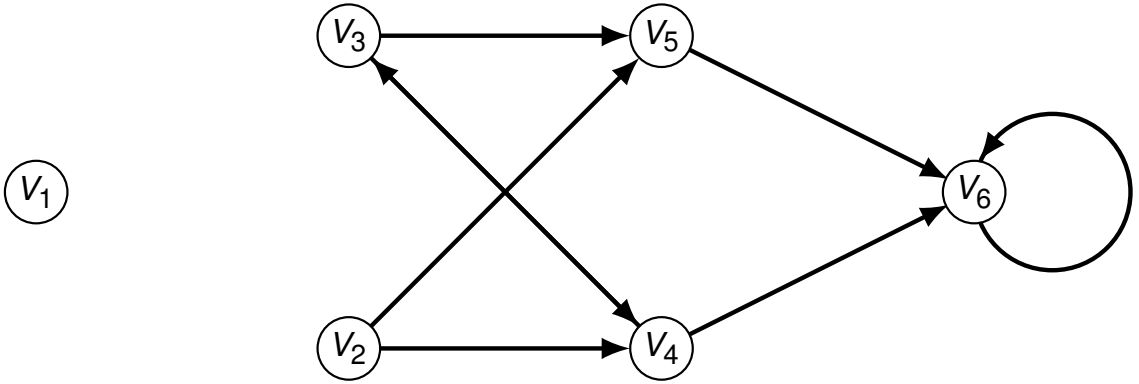
- Tutorium: Dijkstra, Graphentheoretische Begriffe
- Vorlesung: MaximalfluSS-Problem, Problem des kostenminimalen FluSSes sowie Lösungsverfahren, Suhl/Mellouli Kapitel 6.8

Teil VI

Graphentheorie II – Netzflussprobleme

Ein gerichteter Graph

Beispiel gerichteter Graph:



Knotenmenge $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Kantenmenge $E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

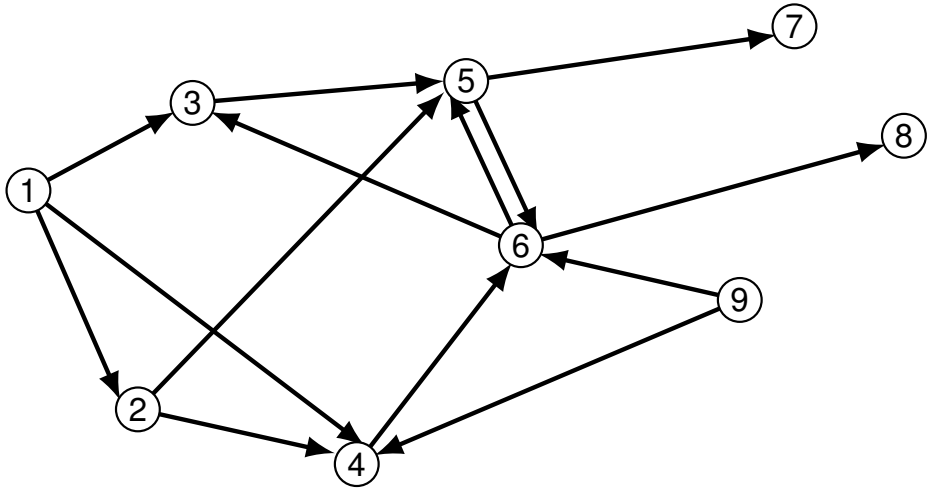
Inzidenzabbildung ω: $e_1 \to (2,4)$, $e_2 \to (2,5)$,
$e_3 \to (3,4)$, $e_4 \to (3,5)$,
$e_5 \to (4,3)$, $e_6 \to (4,6)$,
$e_7 \to (5,6)$, $e_8 \to (5,6)$

Nachbarn $N(1) = \emptyset$, $N(2) = \{4,5\}$,
$N(3) = \{4,5\}$, $N(4) = \{2,3,5\}$,
$N(5) = \{2,3,6\}$, $N(6) = \{4,5,6\}$

Idee der Funktionsweise des Dijkstra-Algorithmus

Minimalität

Ein minimaler Weg besteht aus minimalen Teilwegen.



Annahme: minimaler 1-5-Weg ist $1, 2, 4, 6, 5$
Folgerung: minimaler 1-6-Weg ist $1, 2, 4, 6$

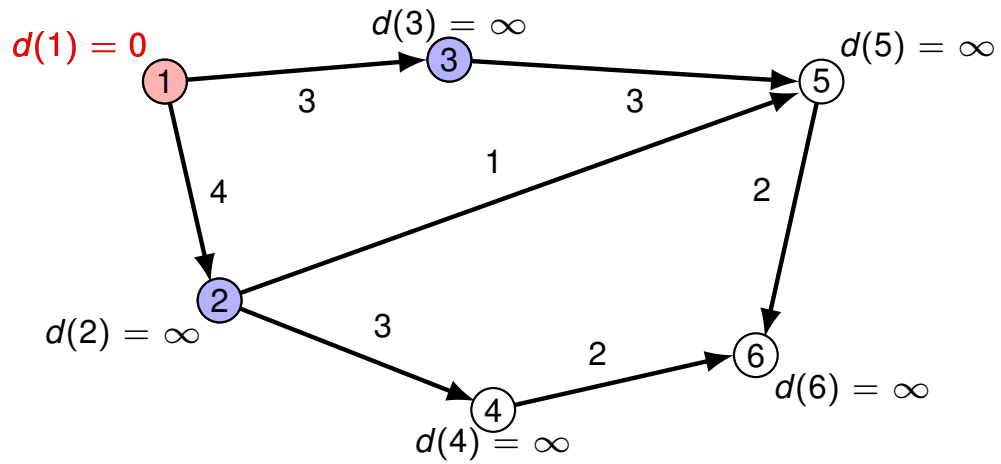
Dreiecksungleichung

Falls d_{uv} die kürzeste Distanz zwischen Knoten u und v ist, dann gilt für einen beliebigen Knoten x

$$d_{uv} \leq d_{ux} + d_{xv}.$$

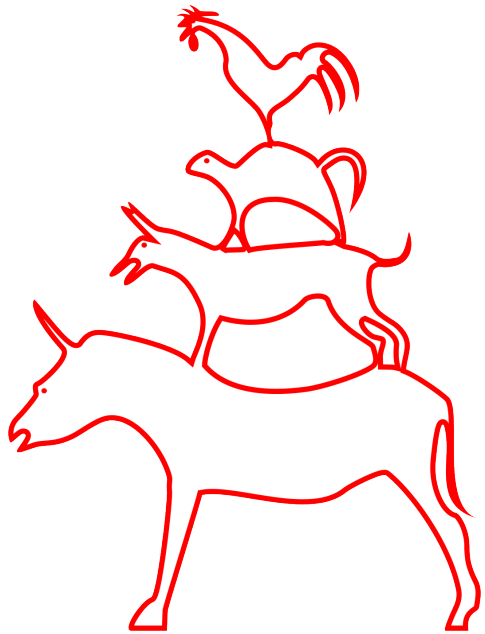
Informeller Ablauf des Dijkstra-Algorithmus

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit nichtnegativen Kantengewichten und einem Startknoten, z.B. $1 \in V$.



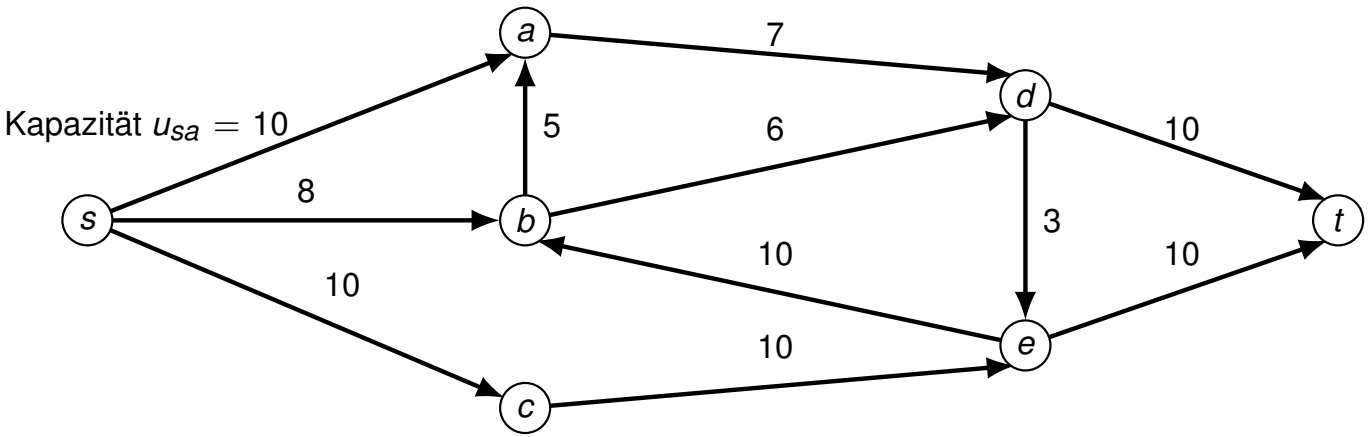
Anmerkung Handout-Version: die relevanten Details sind nur im animierten Foliensatz erkennbar.

Flüsse in Netzen



Ein Flussnetz

- Ein Digraph $G = (V, E)$
- Zwei besondere Knoten s (Quelle) und t (Senke)
- Quelle: ein Knoten ohne Vorgänger aber mit mind. einem Nachfolger
- Senke: ein Knoten ohne Nachfolger aber mit mind. einem Vorgänger
- Jede Kante $e \in E$ hat eine Kapazität $u(e)$ (bzw. $u_{ij} \geq 0, (i, j) \in E$)



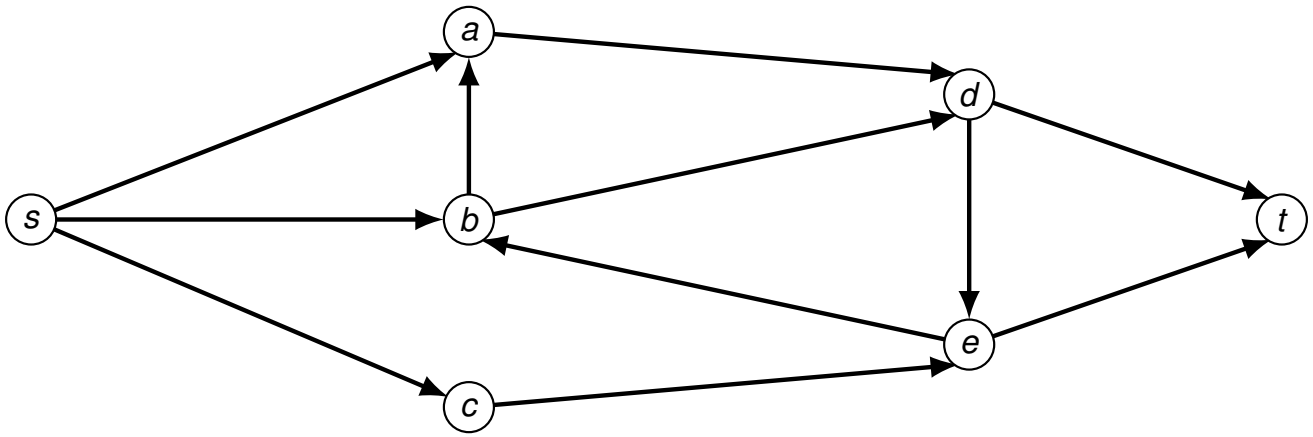
Was ist ein Fluss in einem Flussnetz? 1/2

s-t-Fluss

Ein s-t-Fluss (engl. flow) ist eine Funktion, die jeder Kante $e = (i, j) \in E$ einen **Flusswert** $x_{ij} \geq 0$ zuweist und folgendes erfüllt:

- Kapazitätskonform: Der Flusswert einer Kante ist höchstens so groSS wie die Kapazität der Kante, d.h. $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \ \forall (i, j) \in E$
- Flusserhaltung: In jeden Knoten mit Ausnahme von Quelle s und Senke t muss genau so viel hineinflieSSen wie herausflieSSt, d.h.

$$v \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{e \text{ nach } v} x_e = \sum_{e \text{ verlässt } v} x_e$$



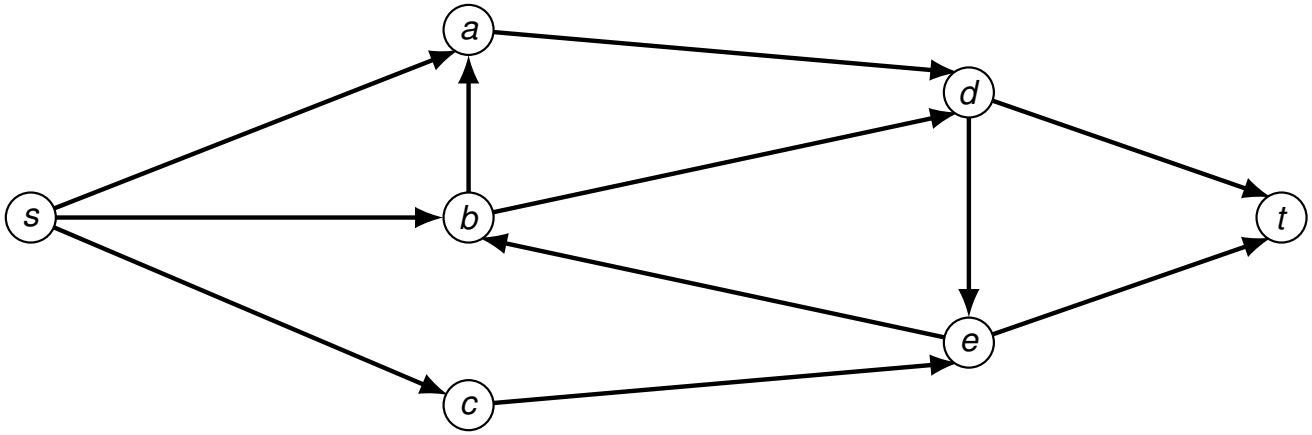
Was ist ein Fluss in einem Flussnetz? 2/2

Wert eines Flussses

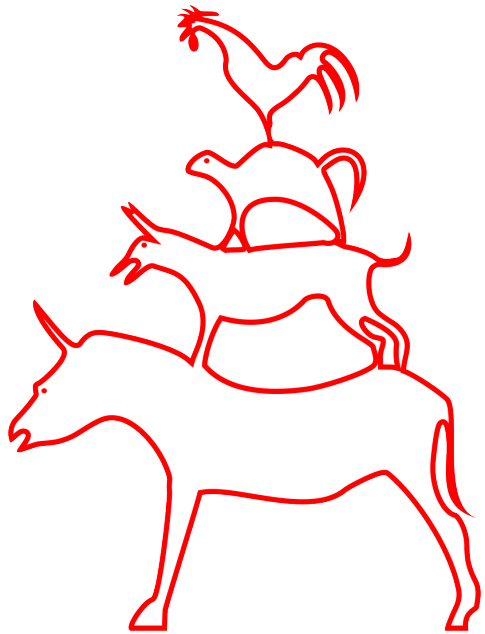
Der Wert **z** eines Flusses **x** ist

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in V} x_{si}.$$

Der Wert entspricht dem (Netto-)Fluss, der aus der Quelle *s* abflieSSt.



Inhalt der Vorlesung



Maximalflussproblem

Wie viele Flusseinheiten können maximal von einem Startknoten zu einem Zielknoten transportiert werden?

Anwendung bei Kapazitätsuntersuchung in Netzen, z.B:

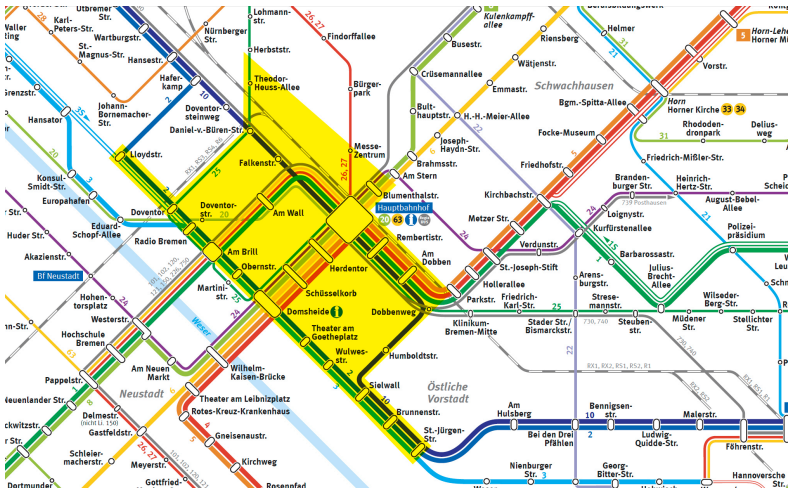
- Petroleum Produkte in einem Netz aus Pipelines
- Nachrichten/Datenpakete in einem Telekommunikationsnetz
- Autos in StraSSennetz

Weitere Anwendungen:

- Projektauswahl
- Bildverarbeitung
- Einsatzplanung von Flugzeugen (Airline Scheduling)
- ...

Frage

Welche Auswirkung hat eine zusätzliche Baustelle auf den Verkehrsfluss / auf die Kapazität eines ÖPNV Netzes?



Netz des ÖPNV = gerichteter Graph

Knoten = Haltestelle, **Kante** = StraSSe/Schiene

Gewicht einer Kante = Kapazität des Verkehrsflusses pro Periode

Formulierung des Max-Flow-Problems 1/3

LogDynamics

Gegeben

- Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$ und Senke $t \in V, s \neq t$
- Jede Kante $(i, j) \in E$ besitzt eine maximal zulässige Kapazität u_{ij}

Gesucht

Maximaler Fluss $\mathbf{x}$ in G von s nach t, so dass

- für alle Knoten mit Ausnahme von s und t die Flusserhaltungsbedingung gilt, und
- die Kapazitätsbeschränkung jeder Kante eingehalten wird.

Fluss und Kapazitätsbeschränkung

Für jede Kante $(i, j) \in A$ ist der Fluss x_{ij} mit $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ festzulegen.

Formulierung des Max-Flow-Problems 2/3

LogDynamics

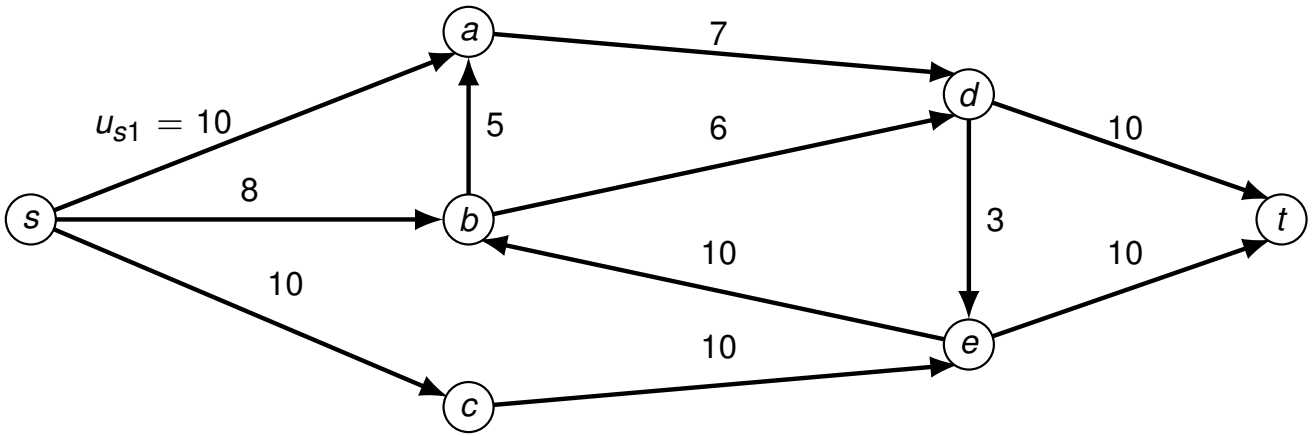
Flusserhaltungsbedingung für einen Knoten *i*

Die Summe des in einen Knoten *i* einflieSSenden Flusses (*inflow*(*i*)) ist gleich der Summe des aus Knoten *i* ausflieSSenden Flusses (*outflow*(*i*)), d.h.

$$inflow(i) - outflow(i) = 0.$$

Maximaler Fluss

Der Wert **z** eines Flusses **x** ist das, was an der Senke *t* ankommt, ohne von dort wieder weggeleitet zu werden. Der maximale Fluss ist der Fluss mit maximalem Wert.



Gesucht

Maximaler Fluss **x** von s nach t, der die oberen Flussschranken u_{ij} erfüllt

Entscheidungsvariablen

x_{ij} Flusseinheiten auf der gerichteten Kante (i, j)

Lineares Optimierungsproblem

$$\max \mathbf{x}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{für } i = s \\ 0 & \text{für } i \in V \setminus \{s, t\} \\ -\mathbf{x} & \text{für } i = t \end{cases}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i, j) \in E$$

Technische Voraussetzung: ein symmetrisches Flussnetz (Graph)

Symmetrischer Graph

Ein Graph heiSSt symmetrisch, wenn gilt

$$(i,j) \in E \Leftrightarrow (j,i) \in E,$$

d.h. zwischen zwei Knoten gibt es entweder keine Kante oder aber zwei entgegengesetzte Kanten.

In asymmetrischen Graphen ergänze fehlende Kanten:

Falls $(i,j) \in E$ und $(j,i) \notin E$, dann füge (j,i) mit $u_{ji} = 0$ in E ein.

Bei Handrechnung kann auf diese Schritte i.d.R. verzichtet werden.

Lösungsverfahren von Ford–Fulkerson 2/2

Algorithmus 4: Ford–Fulkerson Algorithmus

Input : Symmetrischer Graph $G = (V, E, c)$ mit Initialfluss $\mathbf{x}^0$

```
1 begin
2     while ∃P do
3         Identifiziere flussvergrößSernden Weg P von s nach t
4         Definiere Hilfsnetz mit Restflusskapazitäten (Residualnetz)
5         VergrößSere Fluss x um minimale Restflusskapazität entlang P
6     end
7 end
```

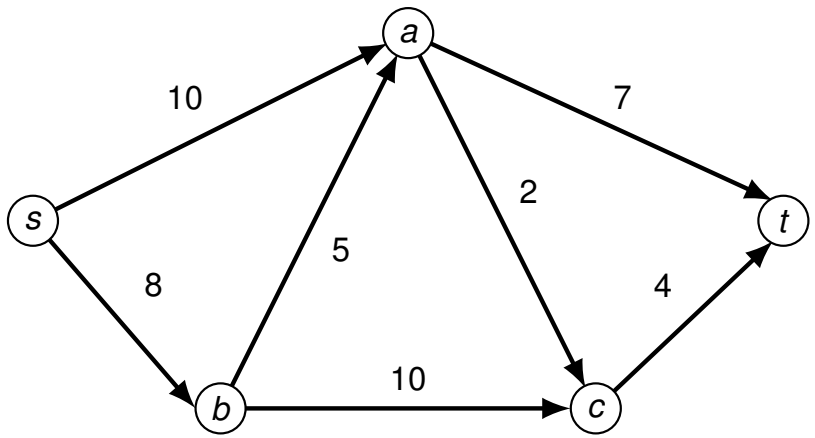
Output: Maximaler Fluss $\mathbf{x}$ von s nach t

Notation: x_{ij} = Fluss von Knoten i zu Knoten j
x_{ij}^0 = Fluss auf (i, j) im Initialzustand
x_{ij}^1 = Fluss in erster Iteration
x_{ij}^k = Fluss in k-ter Iteration.

Was ist ein flussvergrößernder Weg?

Flussvergrößernder Weg

Ein Weg von s nach t heißt flussvergrößernd, wenn die Kapazitäten jeder verwendeten Kante positiv (> 0) sind.



Der Weg $P = ((s, a), (a, c), (c, t))$ ist flussvergrößernd.

Um wie viel wird durch P der Fluss vergrößert?

Es gilt das Flaschenhals-Prinzip! Auf dem Weg P kann der Fluss um höchstens $\delta = \min\{10, 2, 4\} = 2$ Einheiten erhöht werden.

Wie ist das Residualnetz zu konstruieren?

Residualnetz

Ein Residualnetz $G(x)$ für Fluss **x** zeigt die noch unverbrauchten Flusskapazitäten des ursprünglichen Flussnetzes G an.

Gegeben: Weg P, über den ein zusätzlicher Fluss in Höhe von δ von s nach t im Graph $G = (V, E)$ geschickt wird.

Konstruktion Residualnetz

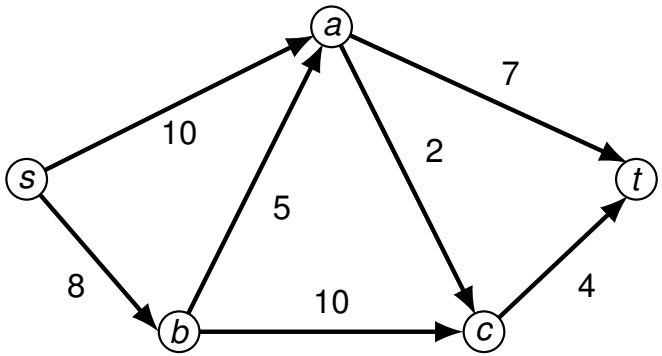
Für jede Kante $(i, j) \in P$:

- Der zusätzliche Fluss beansprucht auf Kante (i, j) die Kapaziät δ, die Restkapazität ist $r_{ij} = u_{ij} - \delta$
- Kapazitätsverringerung auf (i, j) induziert KapazitätsvergröSSerung für (j, i) (Gegenrichtung / Rückwärtskante): $r_{ji} = u_{ji} + \delta$

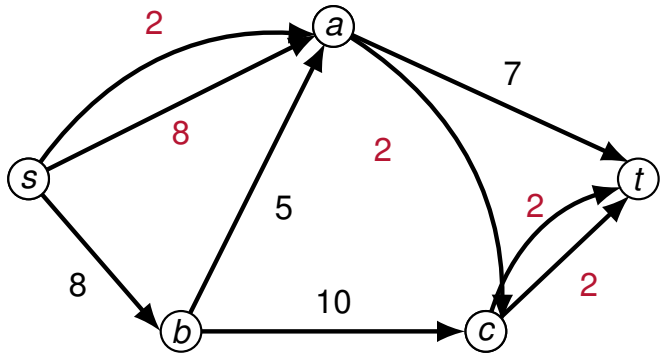
Hinweis zur Notation:
u_{ij} = obere Flussschranke von (i, j) im ursprünglichen Flussnetz G
r_{ij} = verbleibende Kapazität im Residualnetz $G(x)$

Gegeben: Flussnetz G mit Nullfluss $\mathbf{x}^0$ sowie flussvergrößernder Weg $P = ((s,a),(a,c),(c,t))$

Flussnetz $G(\mathbf{x}^0)$:



Residualnetz $G(\mathbf{x})$:



Fluss $\mathbf{x}^0$ wird um $\delta = \min_{(i,j)\in P}\{10,2,4\} = 2$ erhöht.

Restkapazität

Pfeile mit Restkapazität Null werden i.A. nicht gezeichnet.

Zweck Rückwärtskanten

Rückwärtskanten (j,i) erlauben Reduktion auf Kante (i,j).
$\rightarrow$ Entscheidungen reversibel

Algorithmus 5: Augmenting-Path-Algorithmus

Input : Symmetrischer Graph $G = (V, E, c)$ mit Initialfluss $\mathbf{x}^0$

1 **foreach** $(i, j) \in E$ **do**
2 $r_{ij} := (u_{ij} - x^0_{ij}) + (x^0_{ji} - l_{ji})$
3 **while** $G(x)$ *hat gerichteten Weg von s nach t mit Kanten* $(i, j)|r_{ij} > 0$ **do**
4 Identifiziere flussvergrößernden Weg P
5 Sei $\delta := \min_{(i,j)\in P} r_{ij}$
6 **foreach** $(i, j) \in P$ **do**
7 $r_{ij} := r_{ij} - \delta$
8 $r_{ji} := r_{ji} + \delta$
9 **foreach** $(i, j) \in E$ **do**
10 **if** $u_{ij} - r_{ij} > l_{ij}$ **then**
11 $x_{ij} := u_{ij} - r_{ij}$
12 **else**
13 $x_{ij} := l_{ij}$

Output: Maximaler Fluss $\mathbf{x}$ auf G von s nach t der Größe
$\mathbf{z} = \mathit{outflow}(s) - \mathit{inflow}(s)$

Inhalt der Vorlesung

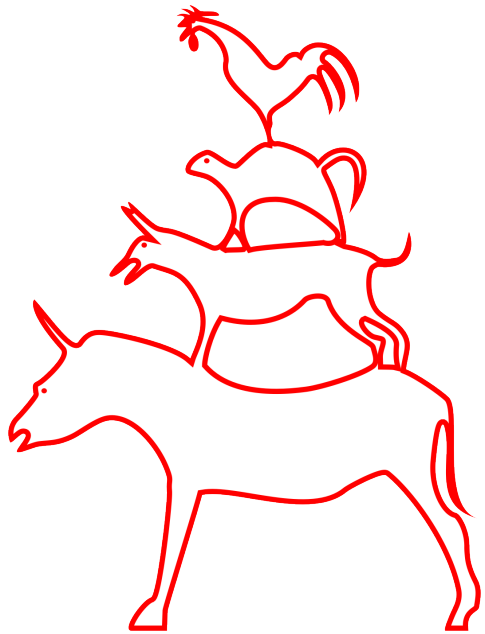
Flüsse in Netzen

Max-Flow-Problem

- Problemstellung
- Verfahren

Min-Cost-Flow-Problem

- Problemstellung
- Verfahren

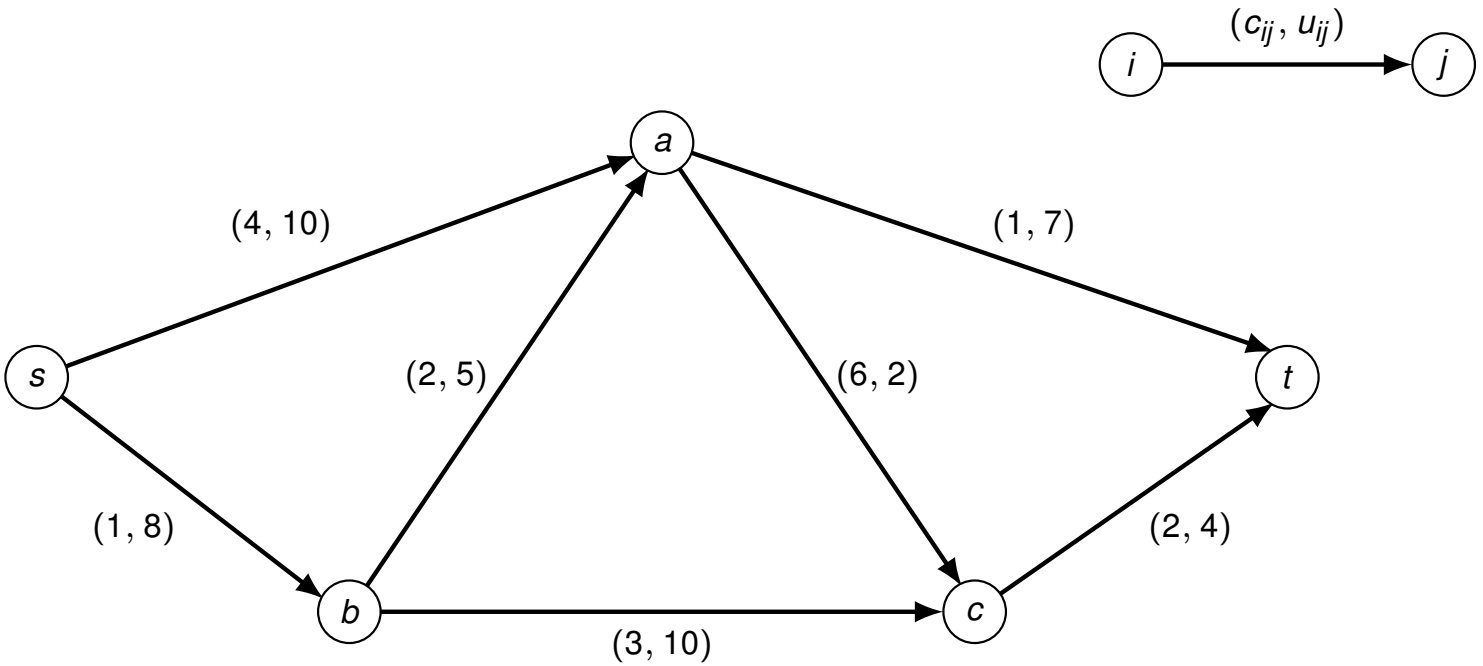


Min-Cost-Flow-Problem (Minimalkostenflussproblem)

LogDynamics

Unterschied zum Max-Flow-Problem:

- **Gegeben:** Obere Flussschranken u_{ij} und Kosten $c_{ij} \geq 0$ für jede Kante (i, j)
- **Gegeben:** Transportmenge b_t (Bedarf Knoten t)
- **Gesucht:** Kostenminimaler Fluss (von s nach t) der Stärke b_t



Restkapazität

Pfeile mit Restkapazität Null werden i.A. nicht gezeichnet.

Das Successive-Shortest-Path Lösungsverfahren (SSP)

SSP funktioniert ähnlich wie das Augmenting-Path-Verfahren für das Max-Flow-Problem.

Algorithmus 6: Ford & Fulkerson-Algorithmus

Input : Symmetrischer Graph $G = (V, E, c)$ mit Initialfluss $\mathbf{x}^0$, gesuchte Flussstärke b_t

1 **begin**
2 **while** $\exists P$ *und* $\mathbf{x} < b_t$ **do**
3 Identifiziere kostenminimalen flussvergrößernden Weg P von s nach t
4 Definiere Residualnetz mit Restflusskapazitäten
5 Vergrößere Fluss $\mathbf{x}$ um minimale Restflusskapazität in P
6 **end**
7 **end**

Output: Maximaler Fluss $\mathbf{x}$ von s nach t

Wie ist das Residualnetz zu konstruieren?

LogDynamics

Gegeben: Weg P, über den ein zusätzlicher Fluss in Höhe von δ von s nach t im Graph $G = (V, E)$ geschickt wird.

Konstruktion Residualnetz

Für jede Kante $(i, j) \in P$:

- Verringerung der Kapazität auf Kante (i, j) um δ: $r_{ij} = u_{ij} - \delta$
- Kapazitätsverringerung auf (i, j) induziert KapazitätsvergröSSerung für Rückwärtskante (j, i): $r_{ji} = u_{ji} + \delta$
- NEU: Die Kosten c_{ji} auf der Rückwärtskante (j, i) entsprechen den negativen Kosten von (i, j), d.h.: $c_{ji} = (-1) \cdot c_{ij}$

Zweck Residualnetz

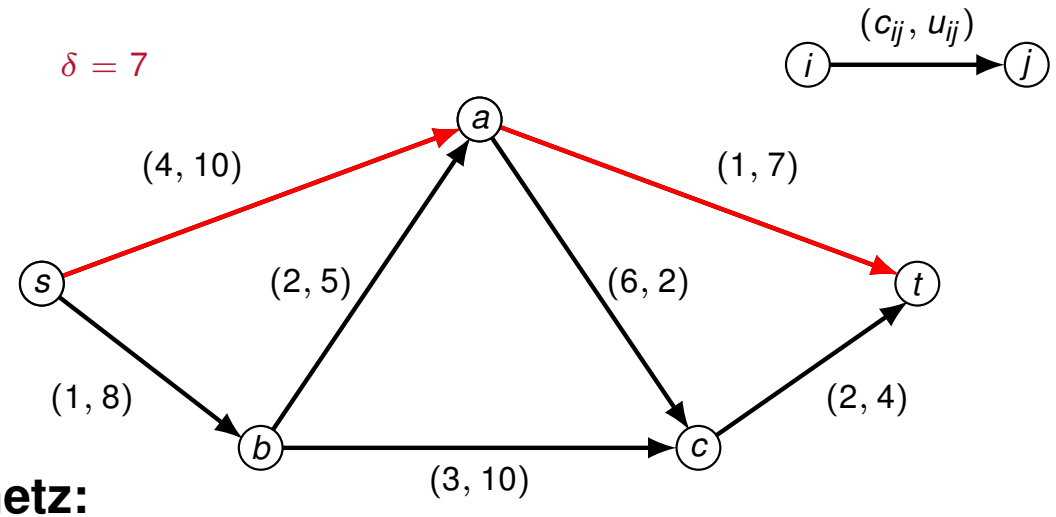
Entscheidungen können bei Bedarf rückgängig gemacht werden.

Hinweis zur Notation:
u_{ij} = obere Flussschranke
r_{ij} = verbleibende Kapazität im Residualnetz $G(x)$
c_{ij} Kosten für den Transport einer Flusseinheit auf (i, j)

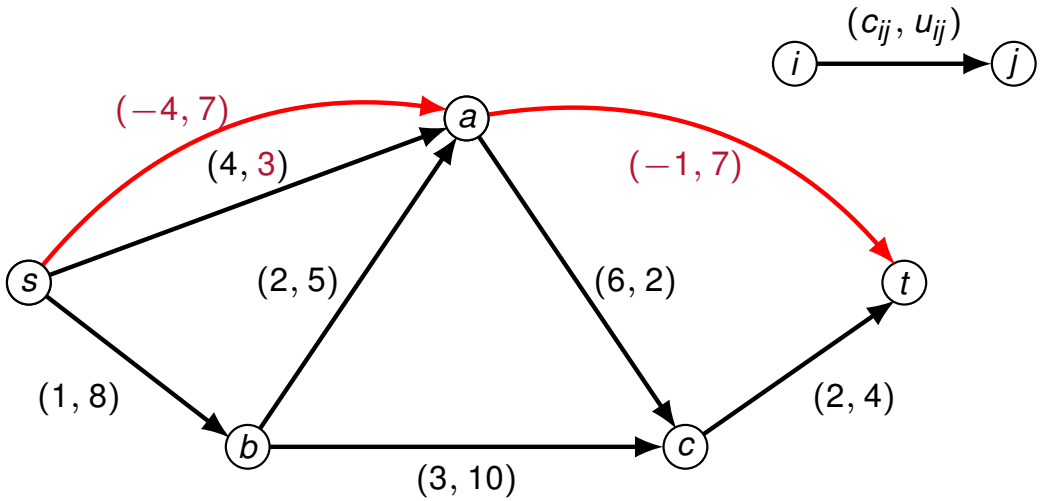
Wie ist das Residualnetz zu konstruieren?
Beispiel

Gegeben: FlussvergröSSernder Weg $P = ((s, a), (a, t))$ mit $\delta = 7$ im Flussnetz G

(**Achtung**: P ist nicht der kostengünstigste Weg!)



Residualnetz:



Algorithmus 7: Successive-Shortest-Path-Algorithmus (SSP)

Input : Symmetrischer Graph $G = (V, E, c)$ mit Initialfluss , $\mathbf{x}^0$

foreach $(i, j) \in E$ **do**
    $r_{ij} := u_{ij} - x^0_{ij}$
    $r_{ji} := x^0_{ij} - l_{ij}$
    $c_{ji} := -c_{ij}$
    $\mathbf{x} := \mathbf{x}^0$

while $G(x)$ *hat gerichteten Weg von s nach t mit Kanten* $(i, j)|r_{ij} > 0 \wedge \mathbf{x} < b_t$ **do**
    Identifiziere **kürzesten** flussvergrößernden Weg P
    Sei $\delta := \min_{(i,j)\in P} r_{ij}$
    if $\mathbf{x} + \delta > b_t$ **then**
        $\delta := b_t - \mathbf{x}$
        $\mathbf{x} := b_t$
    else
        $\mathbf{x} := \mathbf{x} + \delta$
    foreach $(i, j) \in P$ **do**
        $r_{ij} := r_{ij} - \delta$
        $r_{ji} := r_{ji} + \delta$

foreach $(i, j) \in E$ **do**
    $x_{ij} := u_{ij} - r_{ij}$

if $\mathbf{x} < b_t$ **then** Es existiert kein Fluss der GrößSe b_t; x ist maximal

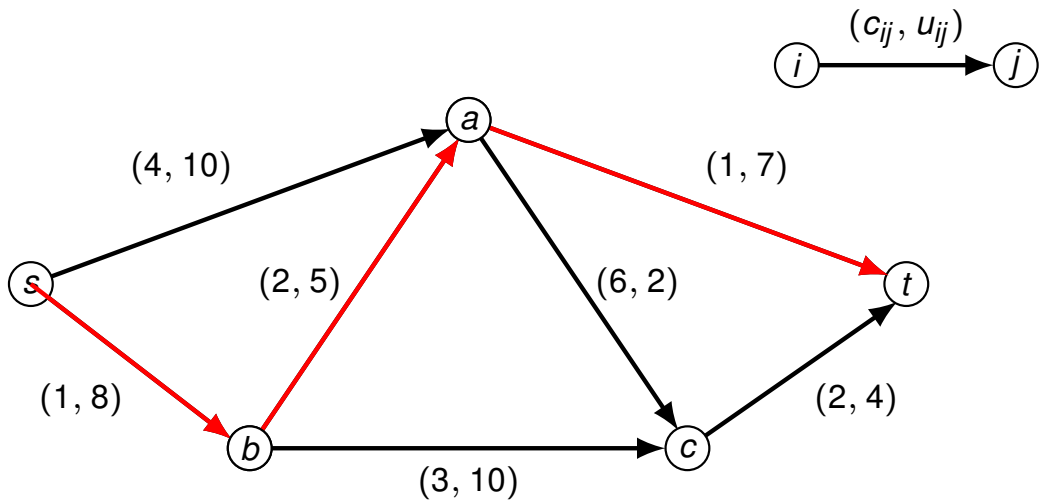
Output: Kostenminimaler Fluss (oder maximaler Fluss) x auf G von s nach t der GrößSe $\mathbf{x} = b_t$

Successive-Shortest-Path-Algorithmus, Zeile 6 bis 8

```
6 while G(x) hat gerichteten Weg von s nach t mit Kanten (i, j)|r_ij > 0 ∧ x < b_t do
7     Identifiziere kürzesten flussvergrößernden Weg P
8     Sei δ := min_{(i,j)∈P} r_ij
      ...
...
```

Kürzester flussvergrößernder Weg P über die Pfeile $(s, b), (b, a), (a, t)$

Erhöhung Flussstärke $\delta = \min_{(i,j)\in P} r_{ij} = \min\{8, 5, 7\} = 5$

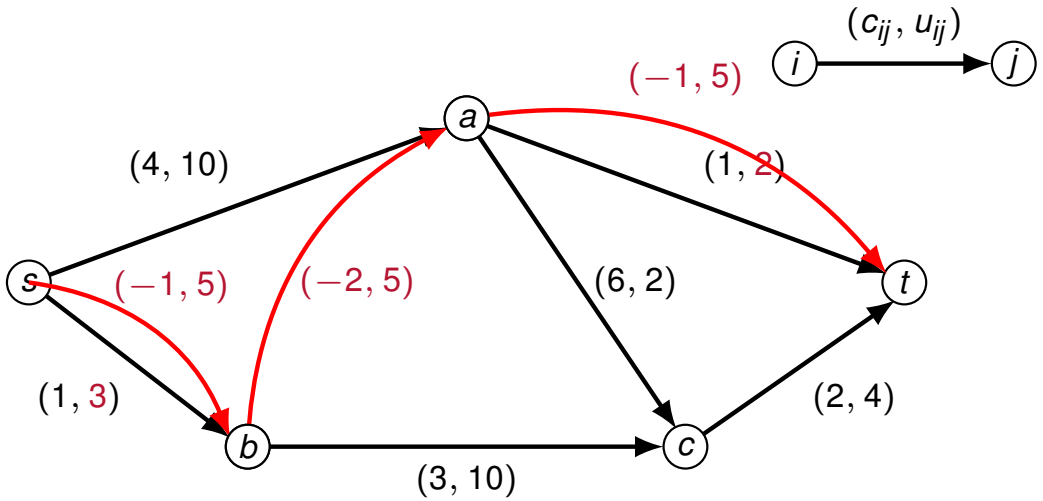


Konstruiere Restflussnetz

Successive-Shortest-Path-Algorithmus, Zeile 14 bis 16

```
...
14 foreach (i, j) ∈ P do
15     r_ij := r_ij − δ
16     r_ji := r_ji + δ
...
```

$P = ((s, b), (b, a), (a, t))$, Restkapazität $\delta = 5$



Unterschiede bei der Lösung von Max-Flow vs. Lösung von Min-Cost-Flow

Fragestellung

Max-Flow: Wie viel Fluss kann durch ein Netz maximal flieSSen?

Min-Cost-Flow: Welches sind die geringsten Kosten für einen festen Fluss mit Wert b_t durch ein Netz?

Unterschiede bei der Lösung von Min-Cost-Flow zu Max-Flow:

1. Jede Kante ist mit Kosten und Kapazität bewertet. Muss im Residualnetz beachtet werden.
2. Statt irgend einen flussvergröSSernden Weg zu suchen, ist nur der jeweils kostengünstigste Weg erlaubt.
3. SSP endet, sobald die geforderte Flussstärke b_t (gegeben!) erreicht ist. Gibt es keinen Fluss mit Stärke b_t, ist das Problem nicht lösbar.

Zusammenfassung & Ausblick

LogDynamics

Fragen zur Wiederholung:

- Was bedeutet die Begriffe Fluss, flussvergrößSernder Weg, Residualnetz?
- Was ist das Max-Flow-Problem?
- Was ist das Min-Cost-Flow-Problem?
- Wie funktionieren Augmenting-Path-Verfahren und Successive-Shortest-Path-Verfahren?

Klausurrelevante Literatur

Suhl/Mellouli Kapitel 6.8

Ausblick

- Tutorium: Max-Flow, Min-Cost-Flow Problem
- Vorlesung: Varianten des Min-Cost-Flow-Problems bzw. Transshipmentproblems, Suhl/Mellouli Kapitel 6.5 — 6.9 und Anwendung ÖPV Suhl/Mellouli Kapitel 7

Teil VII

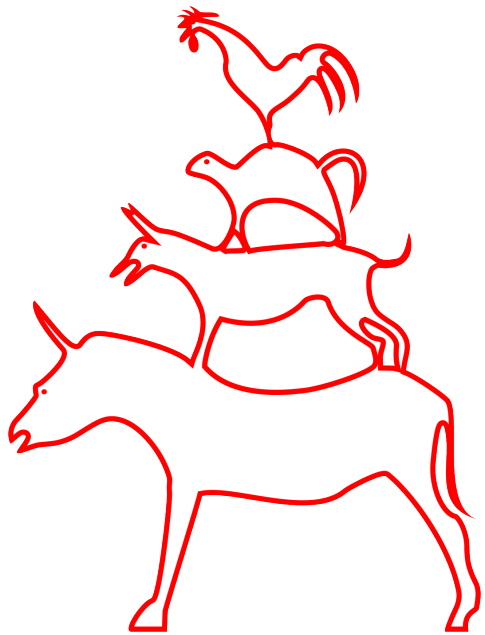
Graphentheorie III – Modellierungstechniken für Netzflussprobleme

Inhalt der Vorlesung

Ausgewählte Flussprobleme
- Das Zuordnungsproblem
- Das Transportproblem
- Das Umladeproblem

Modellierungstechniken für Flussprobleme
- Untere Flussschranken
- Mehrere Quellen und/oder mehrere Senken
- Zirkulationsfluss
- Antisymmetrisches Netz
- Node Splitting

Fallbeispiel: Umlaufplanung im ÖPV



Problem: Schwimmer für die 4x200m Lagenstaffel

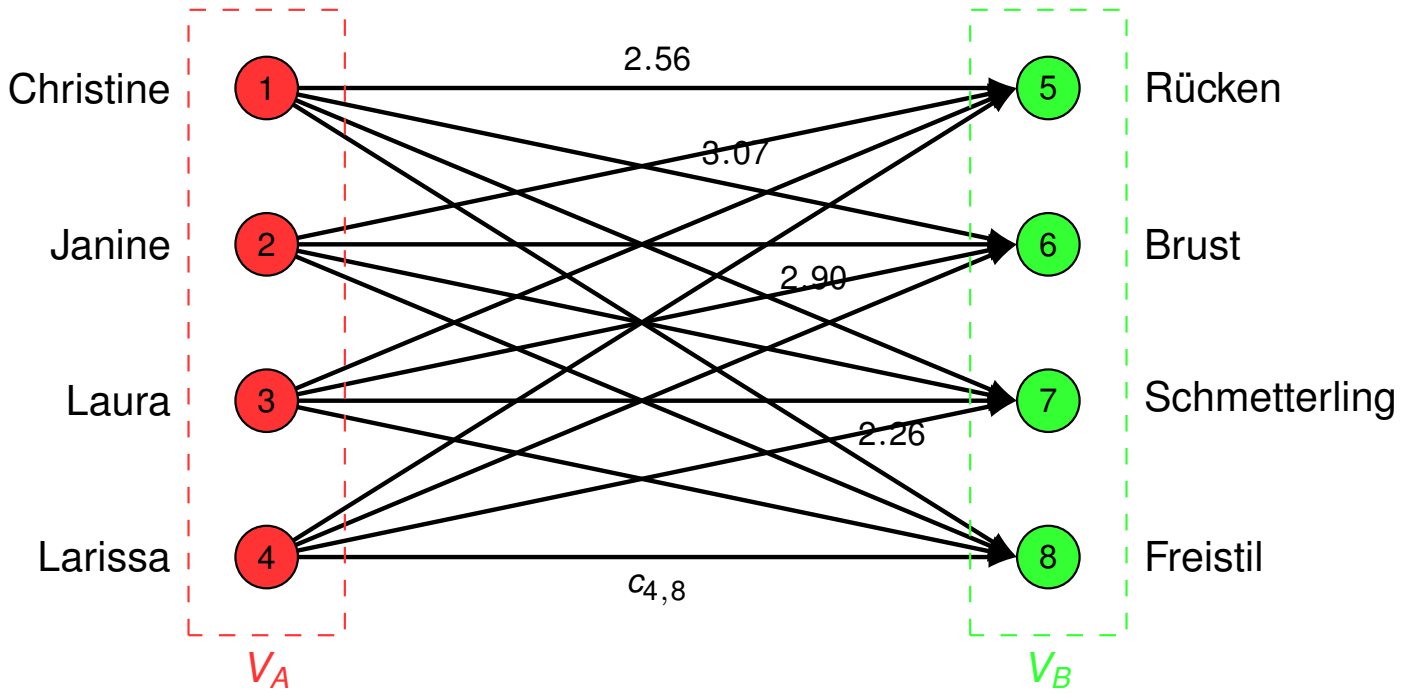
Das Schwimmsportteam der Uni nimmt an den Unimeisterschaften in der Disziplin Lagenstaffel (4x200m) teil.

Der Trainerin sind die folgenden Bestzeiten ihres Teams bekannt:

	Zeit (min)			
	Rücken	Brust	Schmetterling	Freistil
Christine	2.56	3.07	2.90	2.26
Janine	2.63	3.01	3.12	2.35
Larissa	2.71	2.95	2.96	2.29
Laura	2.60	2.86	3.08	2.41

Welche Schwimmerin soll in der Lagenstaffel welche Disziplin schwimmen, damit die Siegchance maximal wird?

Das lineare Zuordnungsproblem
Linear Assignment Problem, LAP



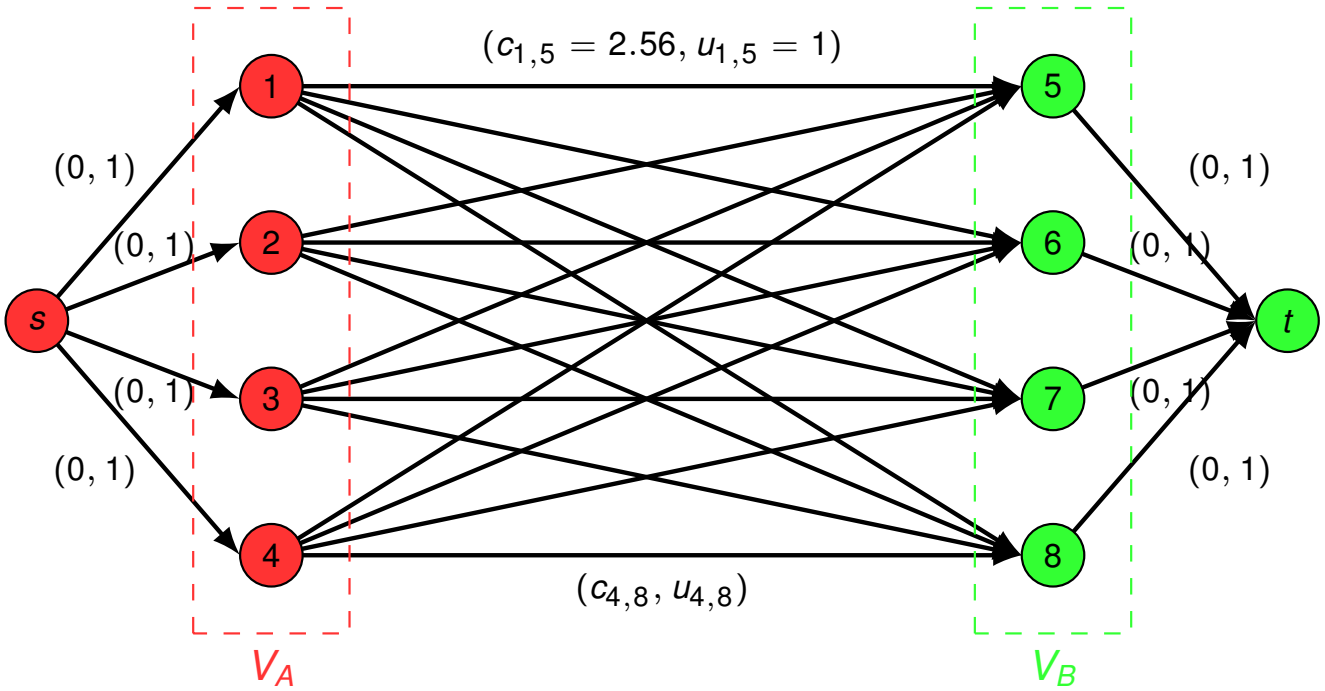
Der gerichtete Graph $G = (V, E, c)$ ist *bipartit*, d.h.

- die Knotenmenge V ist in zwei Teilmengen V_A und V_B partitioniert ($V = V_A \cup V_B$ mit $V_A \cap V_B = \emptyset$);
- Kanten von G beginnen stets mit einem Knoten aus V_A und endet mit einem Knoten aus V_B ($E \subseteq V_A \times V_B$).

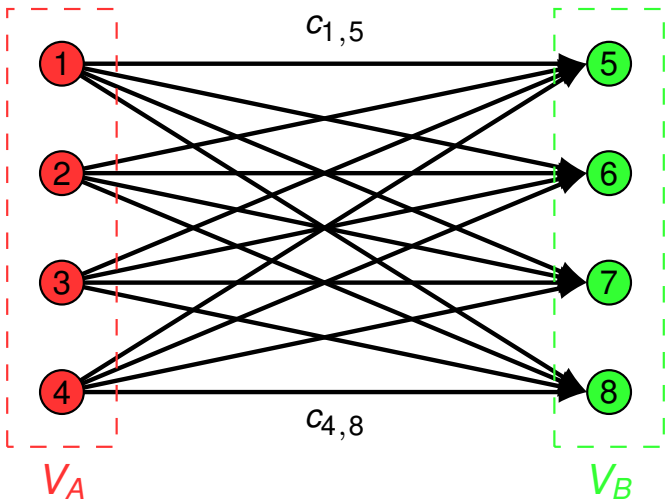
Beim LAP gilt außerdem: $|V_A| = |V_B|$

Rückführung des LAP auf ein Min-Cost-Flow-Modell:

1. Führe **künstliche Quelle und Senke** s und t ein
2. Wähle geeignete Kantengewichte ($c_{si} = c_{it} = 0, i \in V$, $u_{ij} = 1$, $\{i, j\} \in V \cup \{s, t\}$)
3. Berechne einen kostenminimalen Fluss mit $b_t = 4$



Gegeben: bipartitier gerichteter Graph $G = (V, E, c)$.



$$\min \sum_{i \in V_A} \sum_{j \in V_B} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in V_B} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V_A$$

$$\sum_{i \in V_A} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V_B$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in V$$

Gesucht: kostenminimale Zuordnung je eines Elements aus V_A zu genau einem Element aus V_B

i.A. gilt beim Matching: $|V_A| \neq |V_B|$

Weitere Anwendungsmöglichkeiten des LAP

Zuordnung von

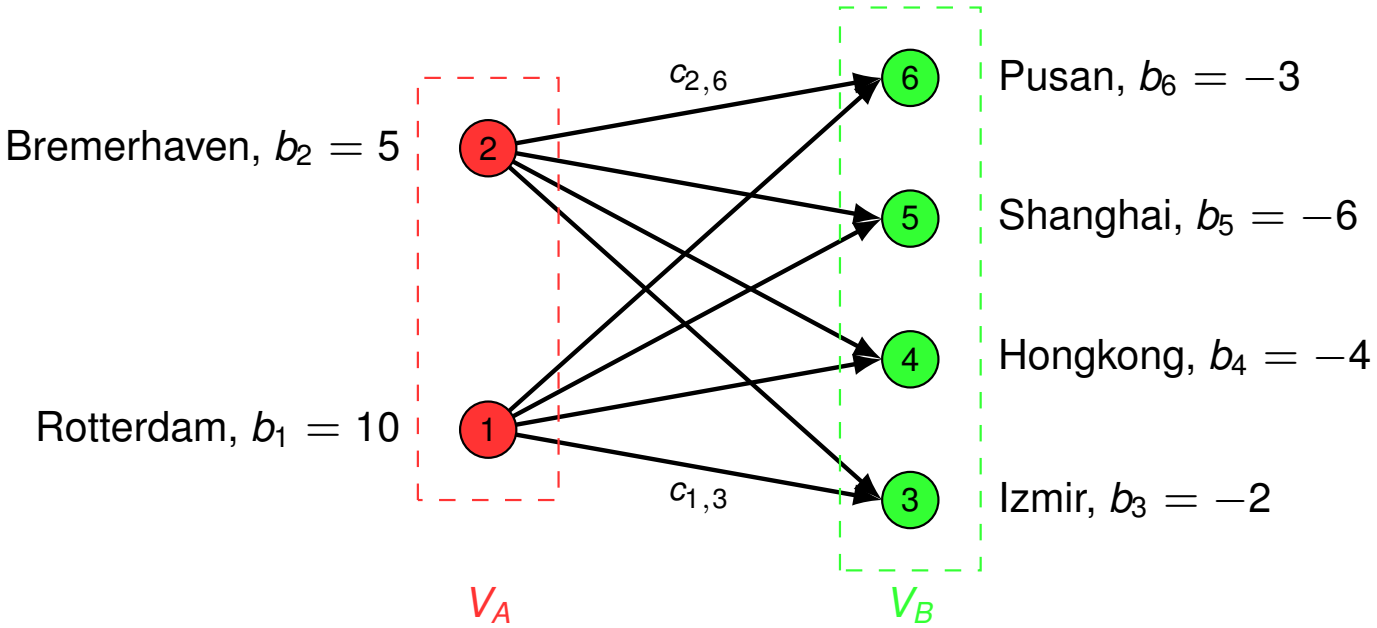
- Studierenden zu Studienprojekte (Kosten: Präferenz für Projekt)
- Projektleitern zu Projekten (Kosten: Eignung für Projekt)
- Key-Account-Kundenbetreuer zu Kunde
- Maschinen zu Produktionsaufträgen (Kosten: Arbeitsstunden)

Problem: Repositionierung leerer Container
Transportproblem TPP

Hintergrund: Reederei müssen regelmäßig ihre leeren Container zwischen Häfen repositionieren.

Angebotsknoten ($b_i > 0, i \in V_A$) $\longleftrightarrow$ Nachfrageknoten ($b_i < 0, i \in V_B$)
Kantengewicht = Transportkosten / Opportunitätskosten

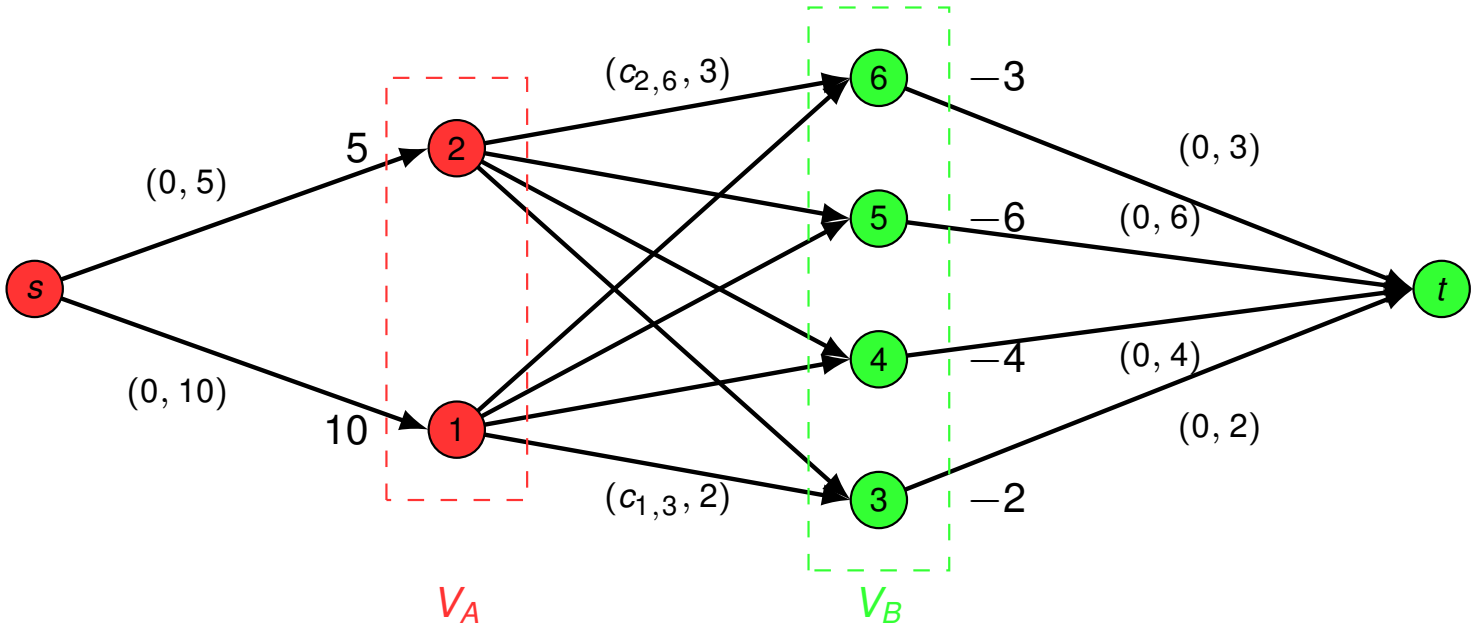
Der Bedarf eines Hafens kann durch **mehrere Häfen** gedeckt werden.



Gesucht: kostengünstigster Transportplan für Nachfrage

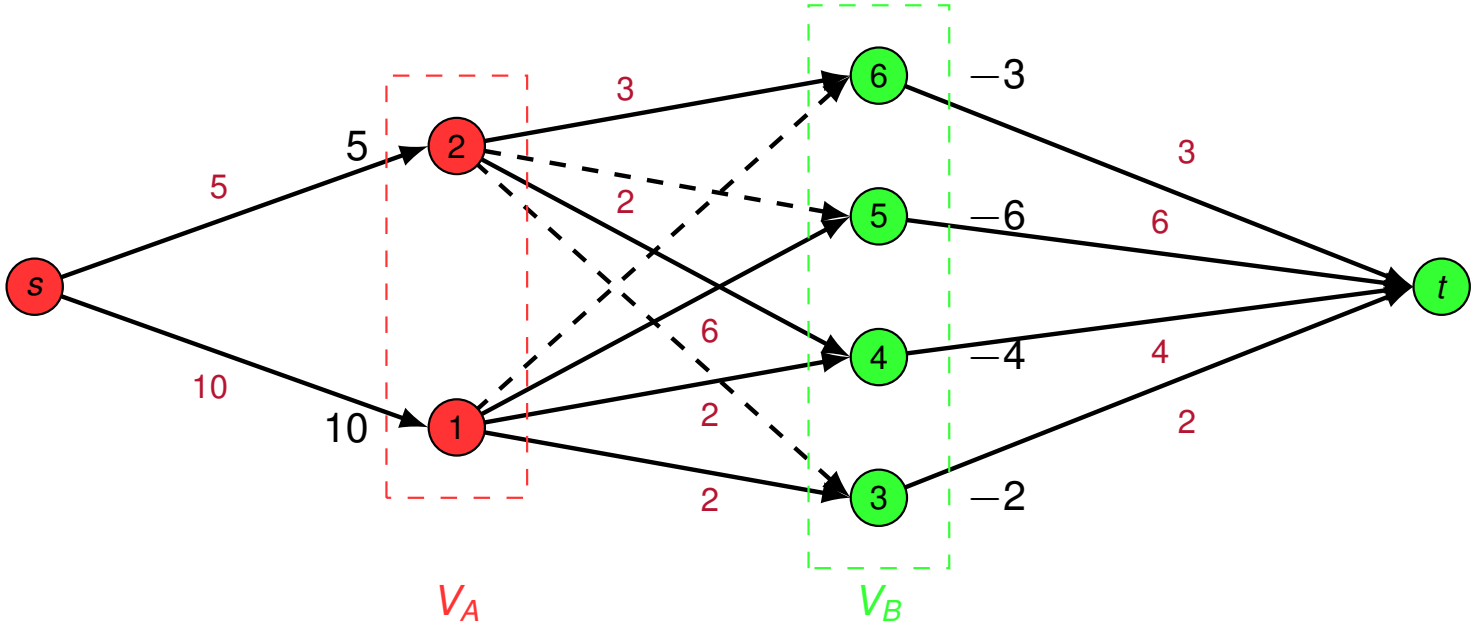
Rückführung des TPP auf ein Min-Cost-Flow Modell:

1. Führe **künstliche Quelle und Senke** s und t ein
2. Wähle geeignete Kantengewichte ($c_{si} = c_{it} = 0, i \in V$, $u_{si} = b_i,\ i \in V_A$ und $u_{it} = |b_i|,\ i \in V_B$) und $u_{ij} = |b_j|, i \in V_A, j \in V_B$
3. Berechne einen kostenminimalen Fluss mit $b_t = \sum_{i \in V_B} |b_i| = 15$



Interpretation einer Flusslösung des Transportproblems

Sei die kostenminimale Min-Cost-Flow Lösung z.B.:

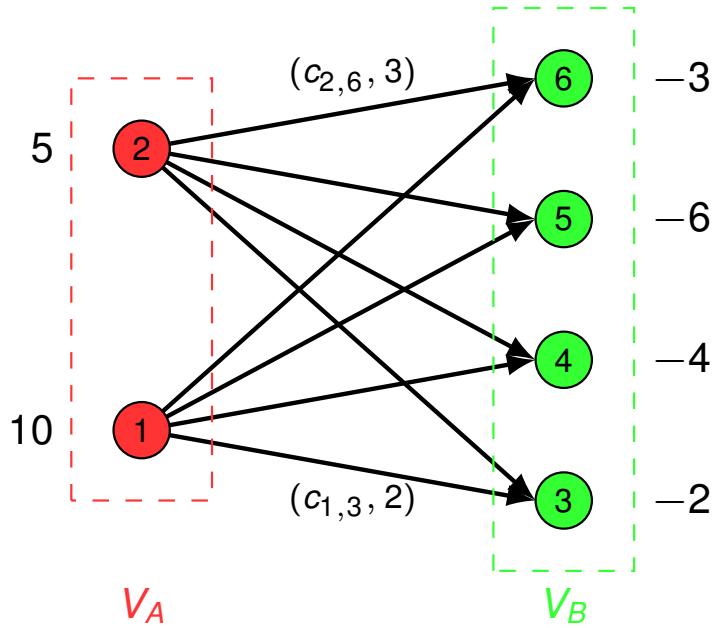


Interpretation Lösung: $x_{15} = 6 \rightarrow$ Transport von 6 leeren Container von Rotterdam (Hafen 1) nach Shanghai (Hafen 5), ...
x_{si} und x_{jt} ohne besondere Bedeutung für reales Problem.

Kosten Transportplan: $2c_{13} + 2c_{14} + 6c_{15} + 3c_{26} + 2c_{24}$

Das Transportproblem als Lineares Programm

Gegeben: bipartitier gerichteter Graph $G = (V, E, c)$.



$$\min \sum_{i \in V_A} \sum_{j \in V_B} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in V_B} x_{ij} = b_i, \qquad \forall i \in V_A$$

$$\sum_{i \in V_A} x_{ij} = |b_j|, \qquad \forall j \in V_B$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \in V$$

Gesucht: kostenminimaler Transportplan für Nachfrage $b_j, j \in V_B$

Das mehrstufige Transportproblem

Erweiterung des TPP:

- nur indirekte Verbindungen zwischen Angebots- und Nachfrageknoten über Umladeknoten
- $V = V_A \cup V_B \cup V_T$
- Bedarf der Umladeknoten ist Null

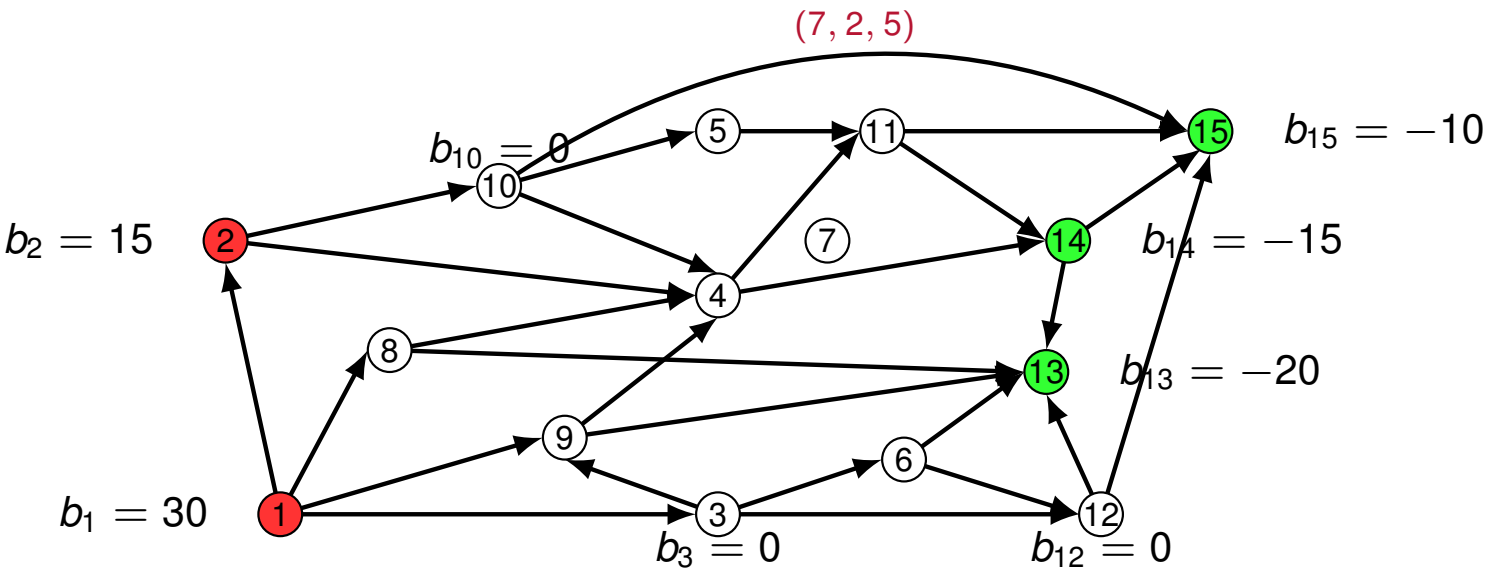
Anwendungen:

- Einstufiges TPP: Transport der Güter von Fabrik zu Kunde
- Zweistufig TPP: Transport der Güter von Fabrik zu Distributionszentrum zu Kunde
- Zwei- und mehrstufige TPP: Intermodale Transporte

NEU: untere Flussschranke (FS) l_{ij}

Kantenbewertung: $(c_{ij}, l_{ij}, u_{ij}) \sim$ **(Kosten, untere FS, obere FS)**.

NEU: Umladeknoten ($b_i = 0$), neben Angebots- bzw. Nachfrageknoten ($b_i > 0$ bzw. $b_i < 0$).



Annahme: Gesamtangebot = Gesamtnachfrage, d.h. $\sum_{i \in V} b_i = 0$

Umladeproblem

Das Umladeproblem ist gegeben durch

$$\min z = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \qquad \text{(Gesamtkosten des Flusses } x\text{)}$$

$$\text{s.t.} \quad \text{outflow}(i) - \text{inflow}(i) = b_i \qquad \forall i \in V \qquad \text{(Flusserhaltung)}$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in E \qquad \text{(Flussschranken)}$$

mit

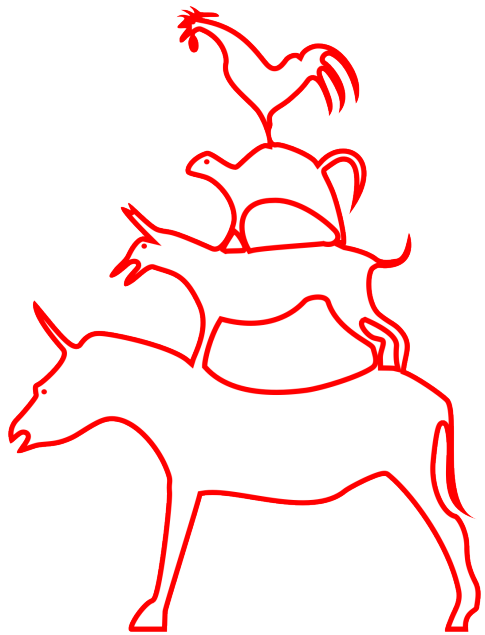
$$\text{outflow(i)} := \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} \qquad \text{inflow(i)} := \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji}$$

Falls $b_i > 0$, dann ist i ein Angebotsknoten und $outflow(i) > inflow(i)$

Falls $b_i < 0$, dann ist i ein Nachfrageknoten und $outflow(i) < inflow(i)$

Falls $b_i = 0$, dann ist i ein Umladeknoten und $outflow(i) = inflow(i)$

Inhalt der Vorlesung



Zweck der folgenden Modellierungstechniken

LogDynamics

Generisches Flussmodell meist einfach aufstellbar

Aber: Lösung des generischen Flussmodells (häufig) schwierig

Daher:

- Umformung generisches Flussmodell in
  - Min-Cost-Flow-Modell
  - Max-Flow-Modell
- Nutzung von Lösungsverfahren wie Successive-Shortest-Path

Notation:

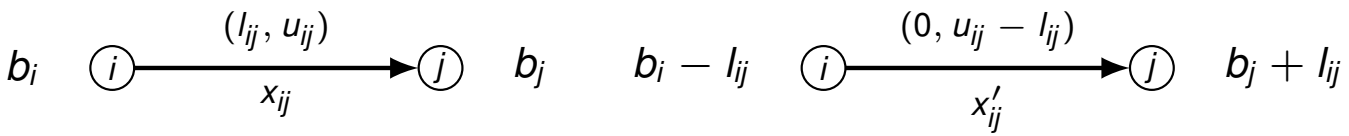
- x_{ij} Fluss (in Flusseinheiten, FE) auf gerichteter Kante (i, j)
- c_{ij} Kosten je FE auf Kante (i, j)
- l_{ij} und u_{ij} sind untere (lower) und obere (upper) Flusschranken auf Kante (i, j) (in FE)
- b_i Angebots- ($b_i > 0$) bzw. Nachfragemenge in FE ($b_i < 0$) von Knoten i

Graphtransformation für Schranken

Der Graph eines Flussmodells lässt sich so transformieren, dass **positive untere Flussschranken** ($l_{ij} > 0$) entfallen, d.h. alle $l_{ij} = 0$.

Idee: Für jede Kante mit $l_{ij} > 0$

- Setze $x'_{ij} := x_{ij} - l_{ij}$
- Wandle $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ um in $0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}$
- Einsetzen in Flusserhaltungsbedingungen: $b'_i = b_i - l_{ij}$ bzw. $b'_j = b_j + l_{ij}$



x'_{ij} misst den über l_{ij} hinausgehenden Fluss.

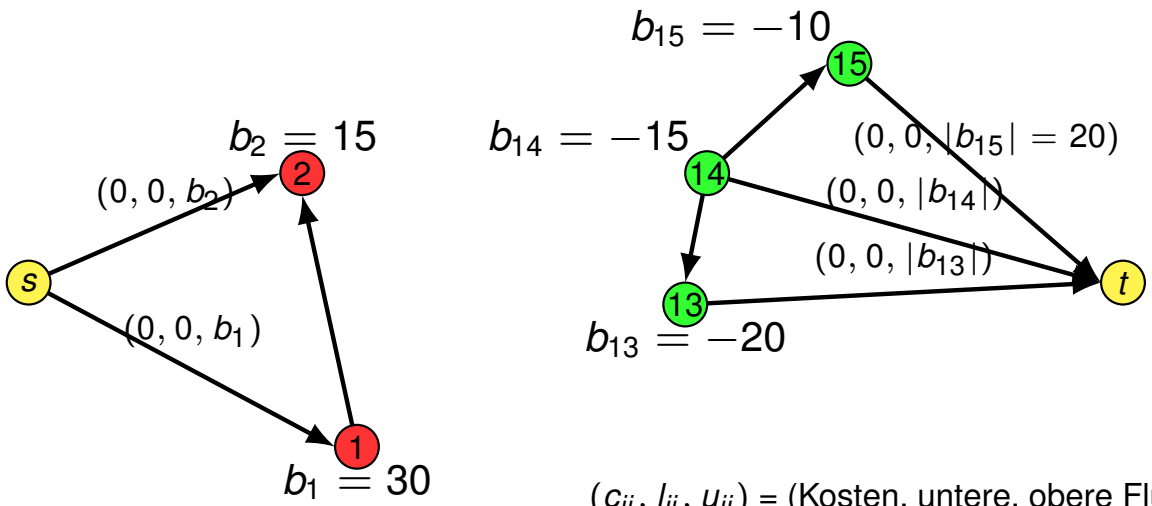
Graphtransformation für Quellen/Senken

Ein Graph mit mehreren Quellen und/oder Senken kann in einen Graphen mit nur einer Quelle s und Senke t transformiert werden.

Idee: Einführung einer Superquelle s und Supersenke t

Kante von s zu Angebotsknoten i mit Gewicht $(0, 0, b_i)$

Kante von Nachfrageknoten i zu Supersenke t mit Gewicht $(0, 0, |b_i|)$

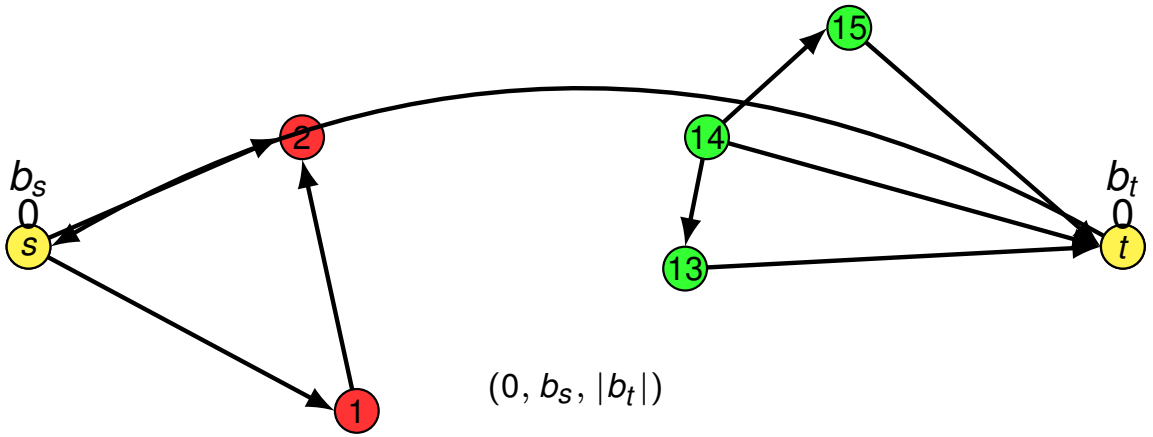


(c_{ij}, l_{ij}, u_{ij}) = (Kosten, untere, obere Flusschranke)

Graphtransformation für Zirkulationsfluss

Sollen alle Quellen und Senken eliminiert werden, entsteht ein Zirkulationsflussproblem; hier gibt es nur noch Umladeknoten.

Eignet sich zur Modellierung periodischer Sachverhalte.
Ergänze neue Kante von **Senke** t zu **Quelle** s



$(0, b_s, |b_t|)$

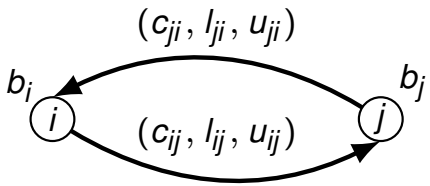
(c_{ij}, l_{ij}, u_{ij}) = (Kosten, untere, obere Flusschranke)

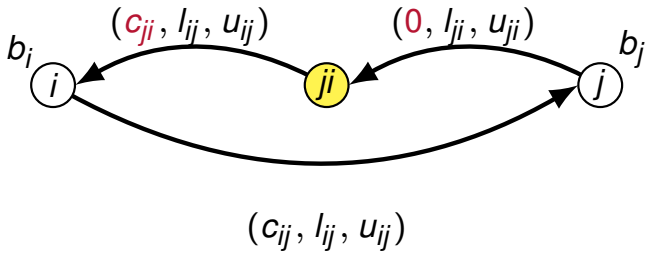
Ein zulässiger Fluss hat immer die auf der (t, s) geforderte Stärke b_s (Stärke Min-Cost-Flow = b_s, Stärke Max-Flow = b_s).

Graphtransformation für Symmetrische Kanten

Symmetrische Flussgraphen (aus $(i,j) \in E$ folgt $(j,i) \in E$) können in **antisymmetrische** Flussgraphen überführt werden (aus $(i,j) \in E$ folgt $(j,i) \notin E$).

Idee: Neuer Knoten ji für jedes Paar $(i,j),(j,i) \in E$.





(c_{ji}, l_{ij}, u_{ij}) = (Kosten, untere, obere Flusschranke)

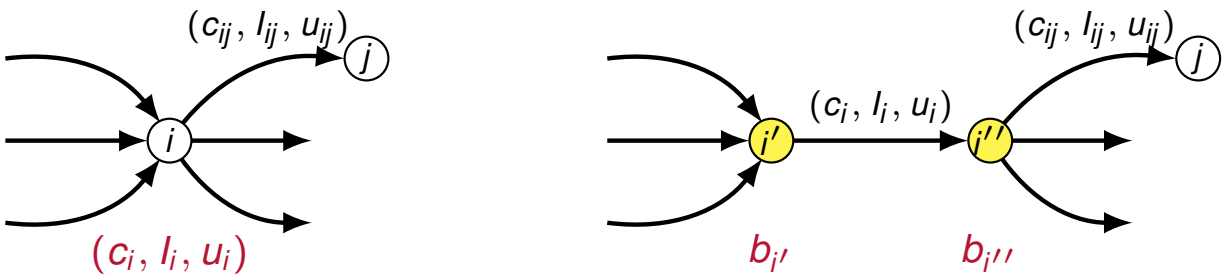
Kante (i,j) unverändert

Aber Kante (j,i) wird durch (j,ji) und (ji,i) ersetzt.
Flusschranken bleiben im Prinzip erhalten, Kosten werden angepasst
Zweck: manchen Algorithmen wird die Arbeit erleichtert

Graphtransformation durch Node–Splitting

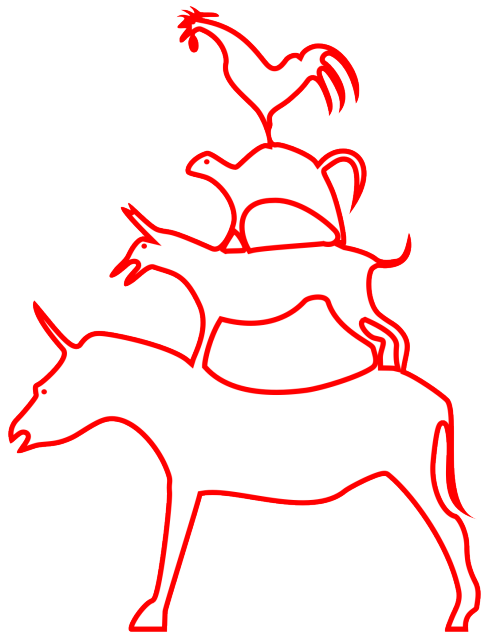
Sollen Kosten oder Kapazitätsrestriktionen beim Durchfließen eines Knoten statt auf Kanten berücksichtigt werden, dann kann man die Technik des Node–Splitting anwenden.

Idee: Knoten i durch zwei Knoten i' und i'' ersetzen und neue Kante (i', i'') einfügen



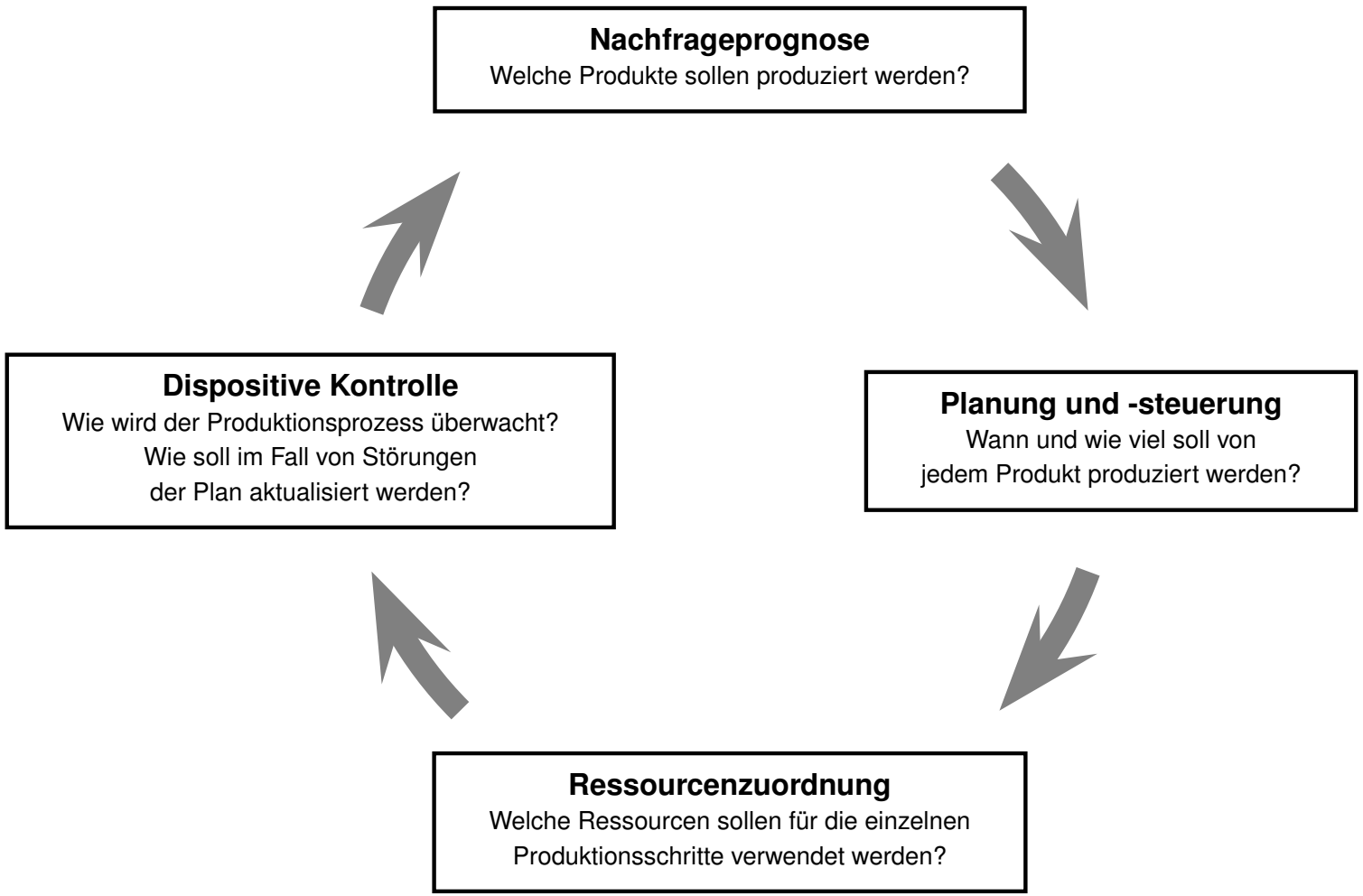
Kosten c_i bzw. Flussschranken l_i, u_i werden auf Kante übertragen

Inhalt der Vorlesung



Fallbeispiel: Umlaufplanung im ÖPV

Produktionsplanung- und steuerung im ÖPV 1/2



Produktionsplanung- und steuerung im ÖPV 2/2

1. Nachfrageprognose

- Passagieraufkommen, Auslastung
- Entwurf Transportnetz: Linien, Kapazitäten, Takt, Saison
- Produkt = Fahrten/Flüge mit gleicher Linie, Startzeit, Wochentag

2. Planung und -steuerung

- Flottenzuordnung
- Umläufe
- Diensteinsatzplanung

3. Ressourcenzuordnung

- konkrete Fahrzeuge/Personen werden Fahrten zugeordnet
- Fahrzeuge: Wartungsanforderungen
- Personal: Urlaub, Flugsimulator

4. Dispositive Kontrolle

- Bewertung Ist-Situation
- Störungen antizipieren
- Reaktion auf Störungen

Ein Fahrplan ist gegeben.

Umlauf

Folge von Fahrten (bzw. Flügen), die **zeitlich und räumlich** durch ein Fahrzeug (bzw. Flugzeug) bedient werden können.

Leerfahrt = Bewegung des Transportmittels ohne Fahrgäste

Leerfahrten sind erlaubt und auch sinnvoll

Umlaufplanung

Ausgehend von einem **gegebenen Fahrplan** sind Umläufe für die Fahrzeuge zu bilden, so dass

- alle Planfahrten bedient werden und
- die Gesamtkosten (**Fixkosten** Fuhrpark, **variable Kosten** für Leerfahrten) minimiert werden.

Netzwerkbasierte Modellierung der Umlaufplanung

Fluss = Fahrzeuge „fließen“ im Netz

Fluss soll **Planfahrten** geeignet „überdecken“

Fahrtverknüpfungen bzw. Anschlüsse für Fahrzeuge, d.h.

- Fahrzeug beendet eine Fahrt, mit welcher Fahrt geht es weiter?
- Analog zu Passagieranschlüssen

Modellierung:

Planfahrt (Ankunftsereignis, Abfahrtereignis) $\sim$ Knoten

Anschlüsse (Fahrtverknüpfungen) $\sim$ Kanten

Fallbeispiel 1/6

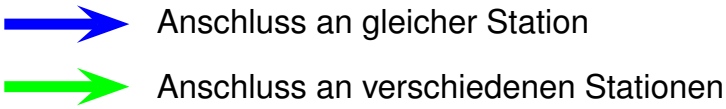
Für den folgenden Fahrplan sollen Umläufe geplant werden.

	Abfahrt		Ankunft	
Fahrt	Ort	Zeit	Ort	Zeit
F1	A	8:00	B	9:30
F2	C	8:15	B	9:15
F3	B	10:00	A	11:30
F4	C	11:45	A	12:45
F5	A	12:00	C	13:00

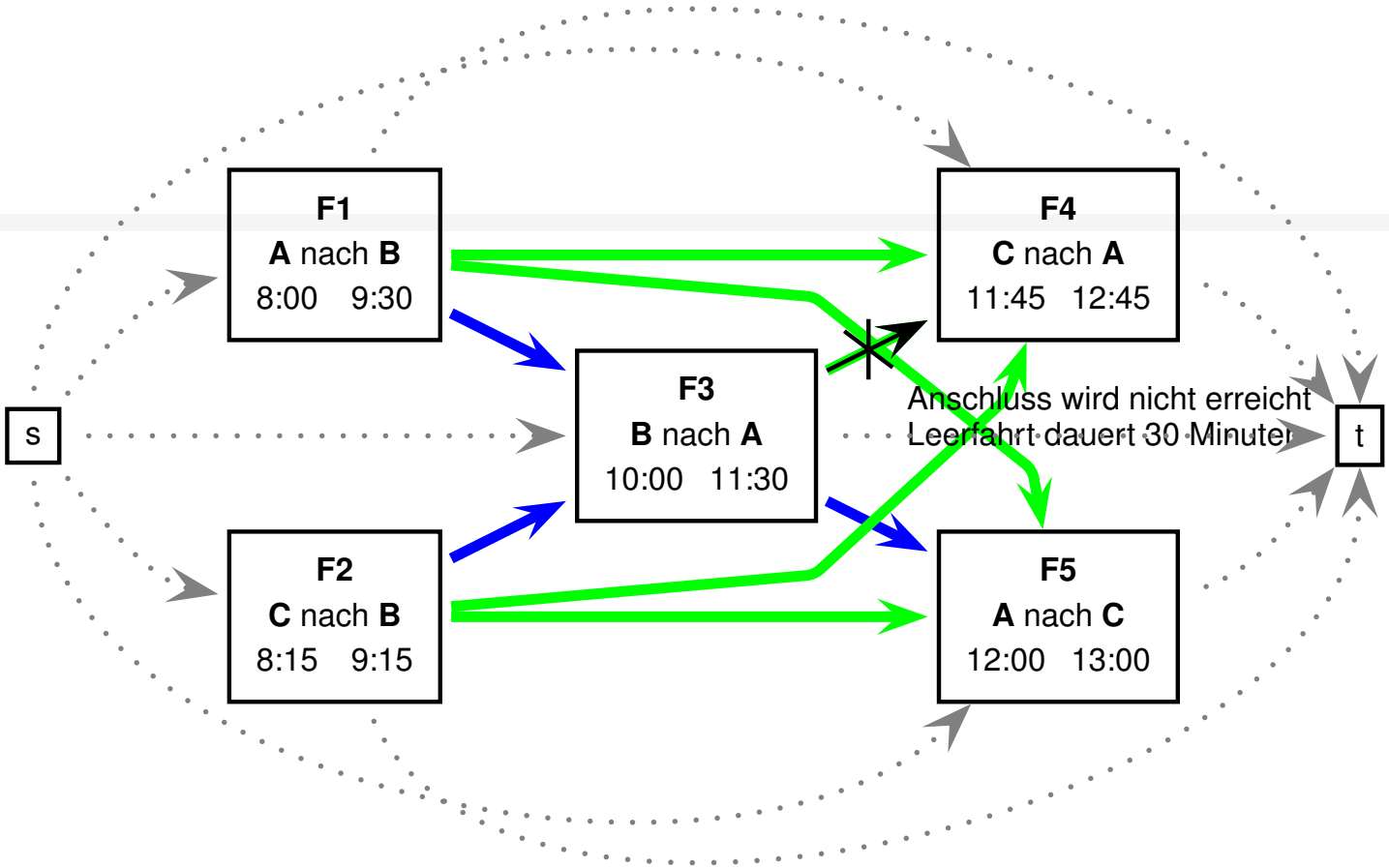
Dauer Leerfahrten (in Minuten) zwischen den Orten:

	A	B	C
A	–	30	30
B		–	20
C			–

Fallbeispiel 2/6



Fahrt	Abfahrt Ort	Abfahrt Zeit	Ankunft Ort	Ankunft Zeit
F1	A	8:00	B	9:30
F2	C	8:15	B	9:15
F3	B	10:00	A	11:30
F4	C	11:45	A	12:45
F5	A	12:00	C	13:00

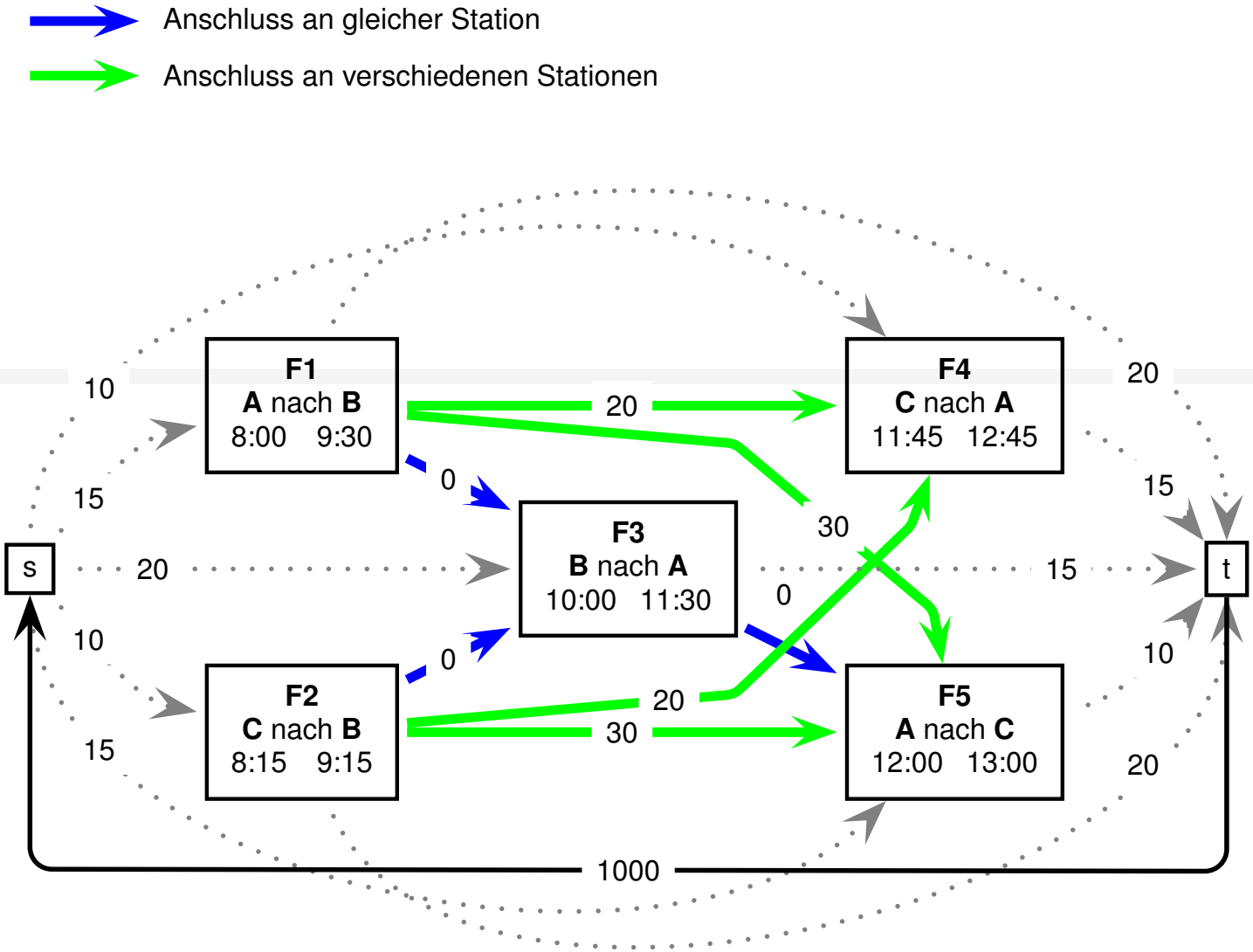


Fallbeispiel 3/6

Erläuterung zur vorherigen Folie:

- Knoten entsprechen (Plan-)Fahrten F1, F2, F3, F4
- Kante (i, j): **Fahrtverknüpfung** möglich, d.h. Fahrt j kann mit dem gleichen Fahrzeug durchgeführt werden wie Fahrt i;
- blau Kante (i, j): Ankunftsort von i identisch mit Abfahrtsort von j, **keine Leerfahrt nötig**, z.B. (F3,F5)
- grüne Kante (i, j): Ankunfts- und Abfahrtsort der Planfahrten i und j verschieden, **Leerfahrt nötig**, z.B. (F1,F4)
- graue Kante: von Fahrzeugdepot (Quelle t) zu Planfahrt bzw. von Planfahrt zu Fahrzeugdepot (Senke s)
- keine Kante, z.B. von $F3$ nach $F4$, weil $F4$ nicht rechtzeitig erreicht wird.

Fallbeispiel 4/6 – Erweiterung um Kosten (variable, fix)



Fallbeispiel 5/6 – Erweiterung um Kosten (variable, fix)

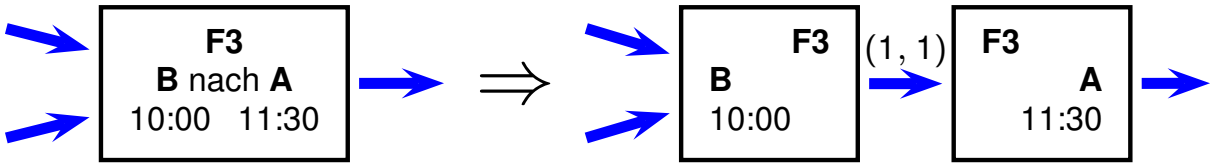
Erläuterung zur vorherigen Folie:

- Kilometerabhängige (variable) Kosten auf Kanten
- Fixkosten für Fahrzeugeinsatz, verschiedene Möglichkeiten:
  a) Depot-Planfahrt auf (s, i) und (i, t) Kanten **oder**
  b) Kante von Senke t nach Quelle s mit Fixkosten pro Fahrzeug als Kantengwicht $c_{ts} \rightarrow$ Zirkulationsfluss;
- Jede Flusseinheit muss durch (t, s) Kante fließen. Warum? Das Netz ohne (t, s) ist in jedem Fall **azyklisch** wegen Abfahrtzeiten
- Flusswert auf (t, s)-Kante = Anzahl benötigter Fahrzeuge

Fallbeispiel 6/6

Noch liegt kein klassisches Min-Cost-Flow Modell vor. Warum?

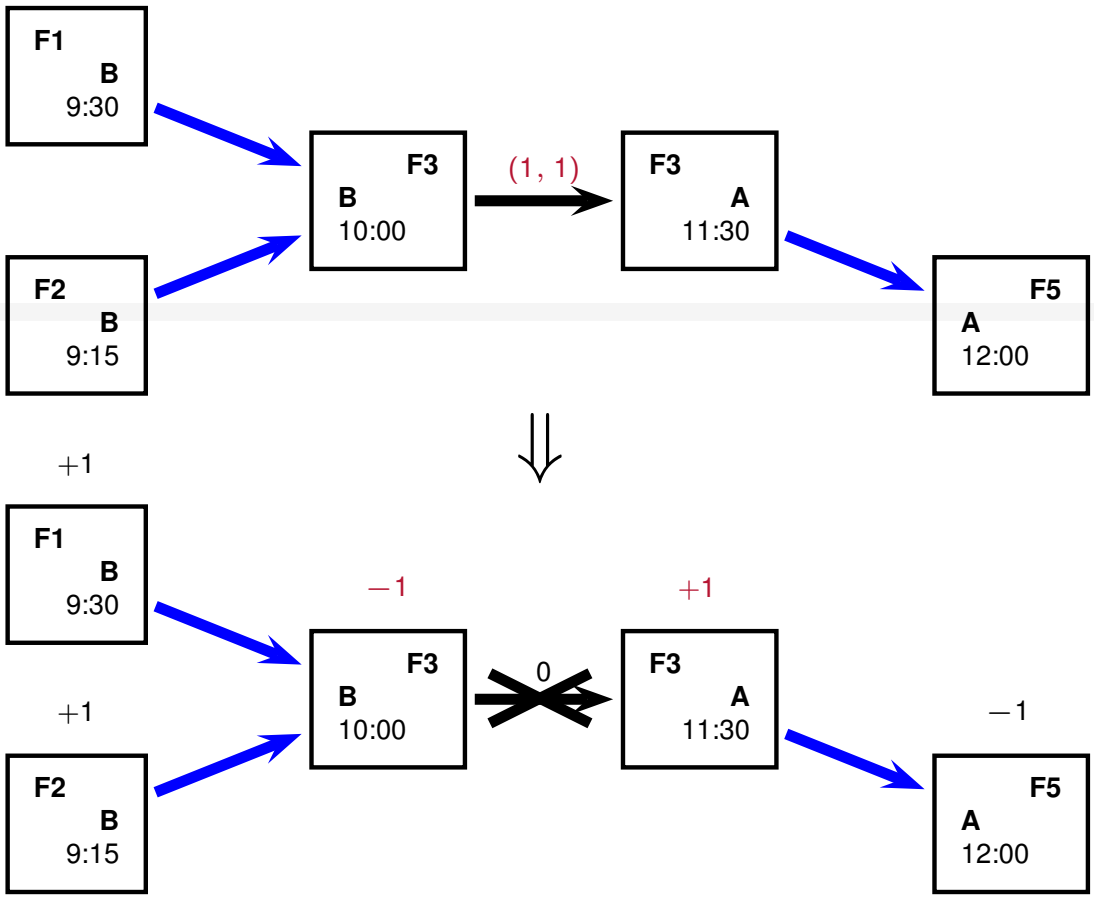
- Fluss muss über jeden Planfahrtknoten fließen, d.h. Flussschranke auf Knoten und nicht wie erforderlich auf Kante
- Anwendung der Modellierungstechnik **Node-Splitting**



genau eine Flusseinheit soll durch F3 fließen, d.h.
mindestens eine und höchstens eine (1,1)

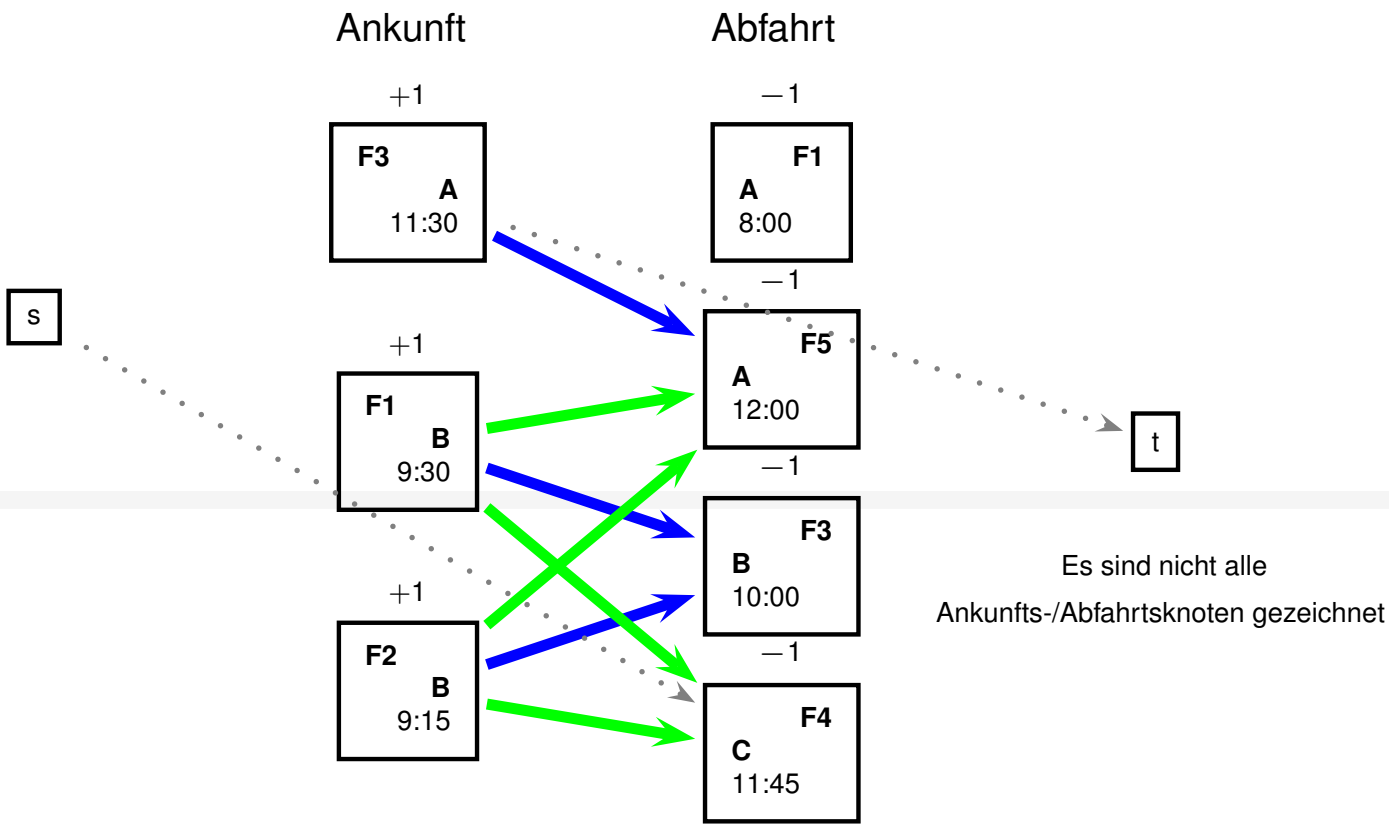
Nun ist Lösung mittels Successive-Shortest-Path-Verfahren möglich

Eliminiere untere Flusschranke auf allen Node-Splitting-Kanten:



Fallbeispiel – Wer noch nicht genug hat...

Vom Min-Cost-Flow-Modell zum Quasi-Assignment-Modell



Jeder Ankunftsknoten ist mit der Senke *t* verbunden.

Die Quelle *s* ist mit jedem Abfahrtsknoten verbunden.

Das Problem entspricht „quasi“ einem Zuordnungsproblem, es heißt daher in der Literatur Quasi-Assignment-Problem.

Zusammenfassung & Ausblick

Fragen zur Wiederholung:

- Was bedeutet die Begriffe Zuordnungs-, Transport-, und Umladeproblem?
- Wie funktionieren untere Flussschranken?
- Wozu dient Node-Splitting?

Klausurrelevante Literatur

Suhl/Mellouli Kapitel 6.5 — 6.9 und Suhl/Mellouli Kapitel 7

Ausblick

- Tutorium: Max-Flow, Min-Cost-Flow Problem
- Vorlesung: Modellierung **ganzzahliger** Optimierungsprobleme
  Domschke/Drexler Kapitel 6.1, 6.2, 6.5 oder
  Nickel/Stein/Waldman Kapitel 5.1, 5.2 oder Suhl/Mellouli Kapitel 4 (ohne 4.6, 4.8)

Teil VIII

Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung I – Modellierung

Wiederholung

LogDynamics

Grundstrukturen von Graphen

- Knoten, Kanten, Pfeile
- Nachbar-/Vorgänger-/Nachfolger-Beziehung
- Digraphen, Wege

Standardprobleme auf Graphen

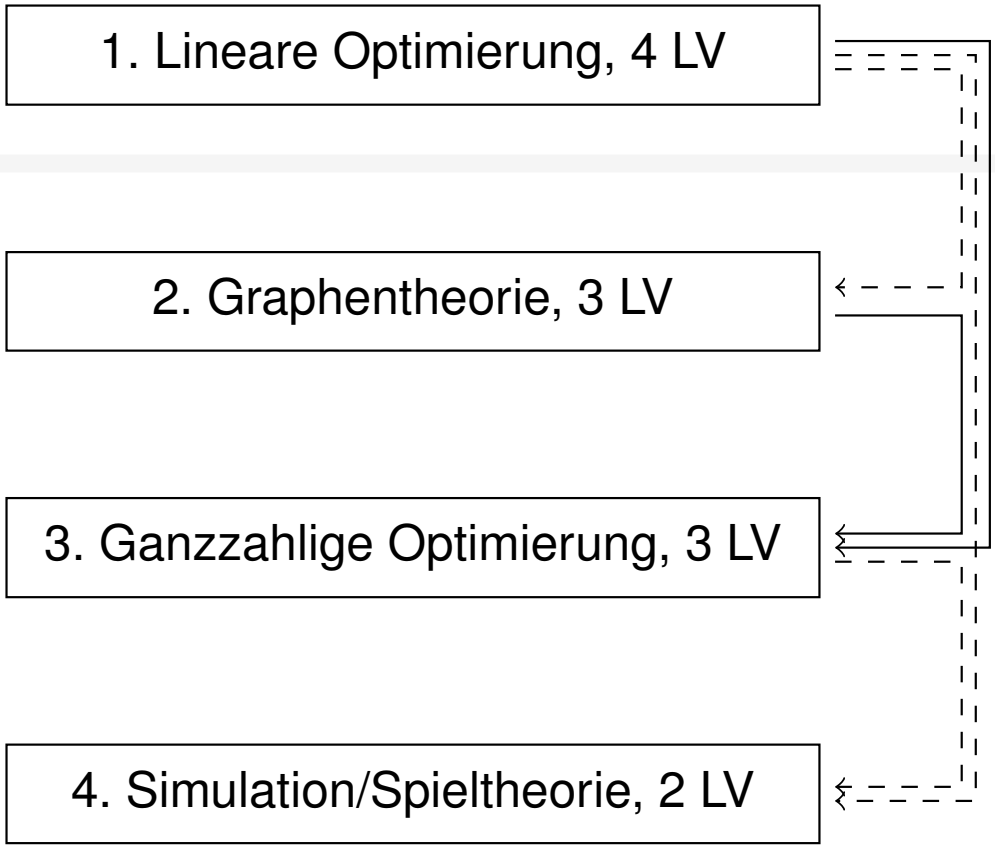
- Lineares Zuordnungsproblem
- Transportpoblem
- Umladeproblem
- Maximalfluss-Problem
- Kostenminimaler-Fluss-Problem (Min-Cost-Flow)

Netzpläne

- Vorgangspfeilnetzpläne
- Vorgangsknotennetzpläne
- Kostenplanung

- Dijkstra-Verfahren zur Lösung des Kürzeste–Wege–Problems
- Augmenting–Path Verfahren von Ford & Fulkerson für das Maximalfluss–Problem
- Successive–Shortest-Path–Algorithmus für das Min–Cost–Flow–Problem

Struktur dieser Vorlesung

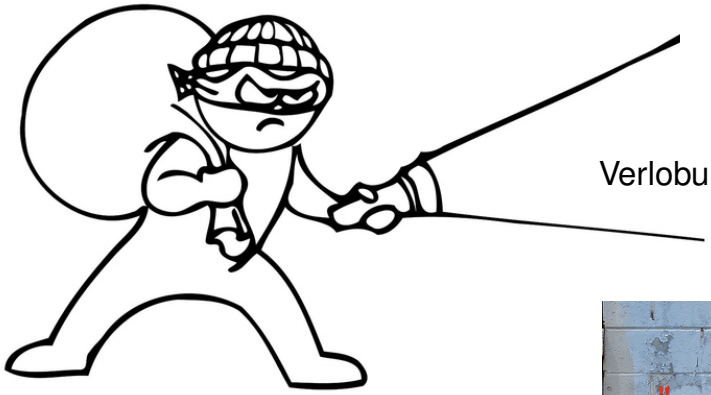


Inhalt der Vorlesung

Ein Dieb auf Beutezug – Das Rucksackproblem 1/2

Goldbarren (1 kg, 160 T€)

Rolex (0.7kg, 100 T€)



Rucksack, max 4 kg

Verlobungsringe (0.05kg, 30 T€)

Bild von Picasso (2.4kg, 700 T€)

Bild von Banksy (3kg, 500 T€)

Ein Dieb auf Beutezug – Das Rucksackproblem 2/2

Stehle die Gegenstände, die den Gesamtwert der Beute maximieren, ohne dass die Kapazität des Rucksacks von 4kg überschritten wird.

$$\begin{aligned} \max \quad & 160x_{\text{Gold}} + 30x_{\text{Ring}} + 500x_{\text{Banksy}} + 1000x_{\text{Picasso}} + 100x_{\text{Rolex}} \\ \text{u.d.N.} \quad & 1x_{\text{Gold}} + 0.05x_{\text{Ring}} + 3x_{\text{Banksy}} + 2.4x_{\text{Picasso}} + 0.7x_{\text{Rolex}} \leq 4 \quad \text{(Kapazität)} \end{aligned}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{für } i \in \{\text{Gold}, \text{Ring}, \text{Banksy}, \text{Picasso}, \text{Rolex}\}$$

Die Entscheidungsvariablen x_i sind im Rucksackproblem binär:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{stehle Gegenstand } i, \\ 0, & \text{stehle Gegenstand } i \textbf{ nicht}. \end{cases}$$

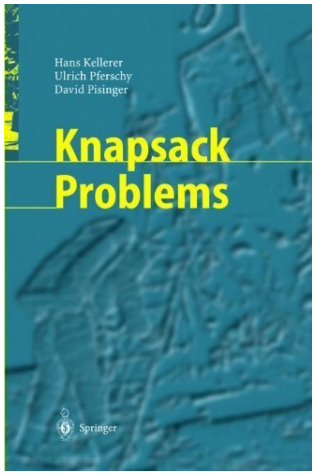
Ein Modell des Rucksackproblems

Das Rucksackproblem - engl. Knapsackproblem

Aus n Objekten mit Gewichten $w_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und Nutzenwerten $u_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ soll eine nutzenmaximale Auswahl getroffen werden, so dass eine maximale Gesamtkapazität C nicht überschritten wird.

Anwendung: Auswahl Einheiten bei begrenzter Kapazität

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq C \\ & x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\} \end{aligned}$$



Bedeutung: In vielen umfangreicheren Problemen als Teilproblem enthalten

Kellerer, Pferschy, Pisinger
546 Seiten

Ganzzahlige Optimierungsmodelle (IP)

Bislang: Lineare Optimierungsmodelle (LP) mit kontinuierlichem Wertebereich aller Entscheidungsvariablen, meist $x \in \mathbb{R}^+$

Erweiterung:

Ganzzahliges Optimierungsproblem

Hat mindestens eine Entscheidungsvariable y einen **diskreten** Wertebereich, z.B. $y \in \mathbb{N}_0$, dann liegt ein ganzzahliges (linearen) Optimierungsmodell (**integer program, IP**) vor.

a) Gemischt-ganzzahlige Optimierungsmodelle besitzen diskrete **und** kontinuierliche Variablen (**mixed integer programs, MIP**)

b) Kombinatorische Optimierungsmodelle besitzen ausschließlich Variablen mit diskreten Wertebereichen, d.h. es gibt nur **endlich** viele zulässige Lösungen.

Wann sind ganzzahlige Entscheidungsvariablen nötig?

LogDynamics

- Betrachtete Größen sind unteilbar

  z.B. Produktion von 3.3 Flugzeugen oder Behandlung von 20.7 Patienten kaum sinnvoll

- Modellierung logischer Abhängigkeiten

  z.B. *wenn . . . , dann . . .* Zusammenhänge

- Linearisierung nicht-linearer Modelle

  z.B. bei sprungfixen Kosten, alternativen Restriktionen, Skaleneffekten

Hintergrund

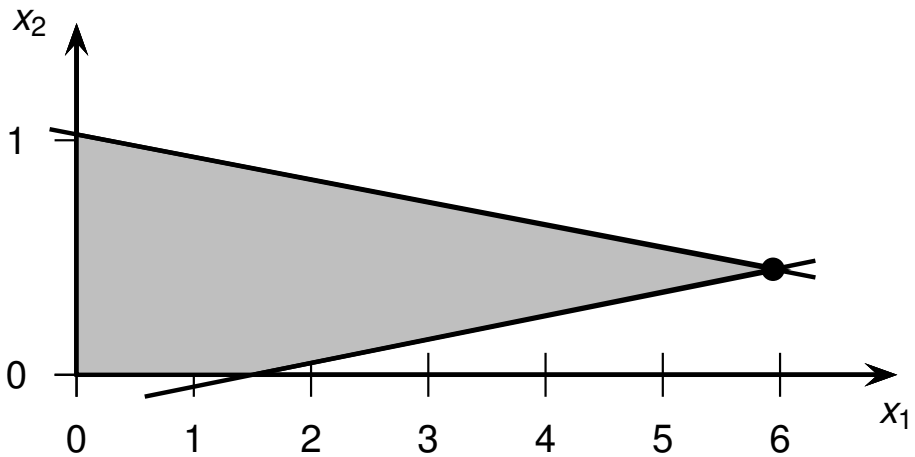
Ganzzahliger Variablen erlauben umfangreichere und realitätsnähere Modellierung

IP erfordern neue Lösungsverfahren

Beispiel ganzzahliges Problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0.011x_1 + x_2 \leq 1.01 \\ & -0.011x_1 + x_2 \leq -0.021 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Wie lautet eine optimale Lösung?



Ganzzahlige Optimierungsmodelle können im Allgemeinen nicht mit dem Simplex-Algorithmus gelöst werden.

Inhalt der Vorlesung

Logische Aussagen

Aussagen sind Sätze, die einen Sachverhalt beschreiben, dem man einen Wahrheitswert (wahr/falsch) zuordnen kann.

„In Bremen schneit es gerade.“ – Aussage kann wahr oder falsch sein.

„Schneit es in Bremen?“ – Frage, keine Aussage. Nicht beurteilbar, ob Satz selbst wahr oder falsch ist .

Mathematisch lassen sich Aussagen mit **binären** Variablen modellieren:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls die Aussage } i \text{ wahr ist,} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

x_i ist Entscheidungsvariable, die nur zwei Werte annehmen kann.

Logische Beziehungen in Optimierungsmodellen 1/3

Im Rucksackproblem des Diebs können etwa Sachverhalte als zusätzliche Restriktionen modelliert werden (alle x_i binär):

1. Stehle höchstens 3 Gegenstände:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \tag{1}$$

2. Stehle den Ring und die Rolex:

$$x_{\text{Ring}} + x_{\text{Rolex}} = 2 \tag{2}$$

3. Stehle den Picasso und/oder die Rolex (mind. einen):

$$x_{\text{Picasso}} + x_{\text{Rolex}} \geq 1 \tag{3}$$

4. Stehle weder das Gold noch den Ring:

$$x_{\text{Gold}} + x_{\text{Ring}} = 0 \tag{4}$$

5. Wenn das Bild von Banksy gestohlen wird, dann stehle auch das Bild von Picasso:

$$x_{\text{Picasso}} \geq x_{\text{Banksy}} \quad \text{bzw.} \quad x_{\text{Picasso}} - x_{\text{Banksy}} \geq 0 \tag{5}$$

Fall 1: Banksy gestohlen ($x_{Banksy} = 1$), dann $x_{\text{Picasso}} - 1 \geq 0$.
Um die Restriktion zu erfüllen, muss $x_{\text{Picasso}} = 1$ gelten.

Fall 2: Banksy **nicht** gestohlen ($x_{Banksy} = 0$), dann $x_{\text{Picasso}} - 0 \geq 0$
Die Restriktion ist sowohl für $x_{\text{Picasso}} = 0$ als auch für $x_{\text{Picasso}} = 1$ erfüllt.

Logische Beziehungen in Optimierungsmodellen 3/3

6. Stehle das Gold dann und nur dann, wenn auch der Ring gestohlen wird:

$$x_{\text{Gold}} = x_{\text{Ring}} \quad \text{bzw.} \quad x_{\text{Gold}} - x_{\text{Ring}} = 0 \tag{6}$$

Fall 1: Gold gestohlen ($x_{Gold} = 1$), dann $1 - x_{\text{Ring}} = 0$.
Um die Restriktion zu erfüllen, muss $x_{\text{Ring}} = 1$ gelten.

Fall 2: $x_{Gold} = 0$, dann $0 - x_{\text{Ring}} = 0$, d.h. $x_{\text{Ring}} = 0$.

7. Die Rolex wird genau dann gestohlen, wenn der Ring nicht gestohlen wird:

$$x_{\text{Rolex}} = 1 - x_{\text{Ring}} \quad \text{bzw.} \quad x_{\text{Rolex}} + x_{\text{Ring}} = 1 \tag{7}$$

Fall 1: $x_{Ring} = 1$, dann $x_{\text{Rolex}} + 1 = 1$, d.h. $x_{\text{Rolex}} = 0$.
Fall 2: $x_{Ring} = 0$, dann $x_{\text{Rolex}} + 0 = 1$, d.h. $x_{\text{Rolex}} = 1$.

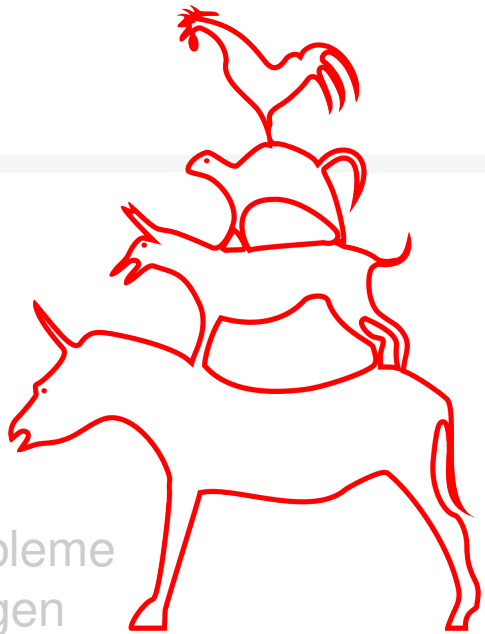
Verknüpfung logischer Aussagen als Restriktionen

Die Entscheidungsvariable x_i wird auch als binäre Indikatorvariable bezeichnet.

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Aussage } A_i \text{ wahr ist} \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

Aussage	Logische Verknüpfung
A_1 und/oder A_2 ist wahr	$x_1 + x_2 \geq 1$
A_1 und A_2 sind wahr	$x_1 + x_2 = 2$
Weder A_1 noch A_2 sind wahr	$x_1 + x_2 = 0$
Wenn A_1 wahr ist, dann ist auch A_2 wahr	$x_1 \leq x_2$
A_1 ist genau dann wahr, wenn A_2 wahr ist	$x_1 = x_2$
A_1 ist genau dann wahr, wenn A_2 nicht wahr ist	$x_1 = 1 - x_2$

Inhalt der Vorlesung



Mengenbeziehung

Erweiterung: Berücksichtige zwei oder mehr binären Variablen
Folgerung: Es können nicht nur logische Beziehungen zwischen mehreren binären Variablen modelliert werden.

Beispiel

Falls eine neue Smartphone-Variante zusätzlich produziert werden soll, dann muss die Fabrik erweitert werden. In der erweiterten Fabrik können maximal 300 Smartphones pro Tag zusätzlich produziert werden.

Zusätzliche Produktionsmenge: $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \leq 300$.

Indikatorvariable für Fabrikerweiterung:

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \text{ d.h. Fabrik ist zu erweitern,} \\ 0 & \text{andernfalls, d.h. } x = 0. \end{cases}$$

$$x - 300y \leq 0$$

Fortsetzung Beispiel

Der Deckungsbeitrag pro Smartphone sei 25 GE, die Kosten für die Fabrikerweiterung betragen 2.000 GE (Abschreibung pro Tag).

Berücksichtigung der Fixkosten in der Zielfunktion:

$$\begin{aligned} \max \quad & 25x - 2.000y && (1)\\ & x - 300y \leq 0 && (2)\\ & x \leq 300 && (3)\\ & x \geq 0 && (4)\\ & y \in \{0,1\} && (5) \end{aligned}$$

Frage: Welche Werte außer 300 kann der Koeffizient von y in (2) annehmen, damit der gewünschte Effekt eintritt?

Mengenbeziehung – Modellierung mittels Big-M 1/3

Um solche Beziehungen unabhängig von konkreten Parameterwerten schreiben zu können verwendet man die Big-M Notation.

$$\begin{aligned} \max \quad & 25x - 2.000y \\ & x - M \cdot y \leq 0 \\ & x \geq 0 \\ & x \leq 300 \\ & y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Big–M

M (sprich „Big M“) ist ein konstanter Koeffizient, der eine bekannte **obere Schranke** für x darstellt, d.h. $x \in [0, M]$.

Eigenschaft

M ist eine **hinreichend** große Zahl.

Mengenbeziehung – Modellierung mittels Big-M 2/3

Allgemein soll modelliert werden:

Grundproblem

Aus $x > 0$ folgt $y = 1$ ($y \in \{0, 1\}, x \in \mathbb{R}^+$).

Weitere Werte von Modellparametern sind nicht bekannt.

Modellierung mit Big-M

Führe einen **hinreichend großen** konstanten Parameter M (Big-M) ein.

$$x \leq M \cdot y$$

Falls $y = 0$ dann muss $x = 0$, falls $y = 1$ darf x zwischen 0 und M liegen.

Der tatsächliche Wert von M hängt von den konkreten Werten der übrigen Modellparameter ab. Solange M hinreichend groß ist, spielt der tatsächliche Wert für das Modell keine Rolle.

Grundproblem

Aus $x > 0$ folgt $y = 1$ ($y \in \{0, 1\}, x \geq 0$).

Alternative, aber ungenügende Modellierungsideen:

a) $x \leq y$

Positiv: nur bei $y = 1$ kann $x > 0$ gelten.
Negativ: x kann keine Werte größer 1 annehmen.

b) $(1 - y) \cdot x = 0$

Positiv: bei $y = 1$ sind für x beliebige Werte möglich.
Negativ: Multiplikation von Entscheidungsvariablen $\rightarrow$ **nichtlineares** Modell.

Mengenbeziehung – Wahl eines Wertes für M

Gegebenes Modell mit Mengenbeziehung „wenn $x > 0$, dann $y = 1$“

$$0 \leq 2x \leq 20 \tag{1}$$
$$x \leq M \cdot y \tag{2}$$
$$y \in \{0, 1\} \tag{3}$$

Wie groß muss M mindestens gewählt werden?

Aus Restriktion (1) folgt, dass zulässige Werte von x in $[0, 10]$ liegen.

Restriktion (2) darf dieses Intervall nicht einschränken. Korrekt sind demnach alle Werte für $M \geq 10$.

Einschränkung des Lösungsraums

Zur Lösung des Modells sollte M so groß wie nötig, aber so klein wie möglich gewählt werden.

Mengenbeziehungen – x zwischen zwei Schranken

Problem

Eine Variable x soll *entweder* den Wert 0 haben *oder* zwischen einer unteren Schranke m und einer oberen Schranke M liegen.

Anwendung Big-M Verfahren, aber für **obere und untere** Schranke.

MIP-Modell

$$y = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [m, M] \\ 0, & \text{falls } y = 0 \end{cases}$$

$$x \leq M \cdot y \qquad y = 0 \text{ erzwingt } x = 0, \text{ sonst } x \leq M$$

$$x \geq m \cdot y \qquad y = 0 \text{ erzwingt } x = 0, \text{ sonst } x \geq m$$

Bei vorherigen Beispielen galt stets $m = 0$.

Beispiel – Aufteilung landwirtschaftlicher Nutzfläche 1/3

Beispiel

In welchem Umfang soll ein landwirtschaftlicher Betrieb seine 100 Hektar Land für

- die Rinderzucht,
- den Getreideanbau und
- den Anbau von Biogemüse

nutzen, so dass er seinen Gewinn maximiert?

Restriktionen und Daten:

- Rinderzucht erfordert einen Stall zu Kosten von 200 GE/Periode.
- Getreideanbau erfodert den Kauf von Maschinen für 100 GE/Periode
- Rinderzucht und Biogemüseanbau können nicht gleichzeitig erfolgen.
- Mangels Personal können höchstens 20 Hektar für den Biogemüseanbau verwendet werden.
- Für jeden Hektar, der für die Viehzucht genutzt wird, fällt ein Deckungsbeitrag von 17 GE an (Getreide 14 GE, Biogemüse 23 GE)

Suhl/Mellouli 2009, S. 101f

Beispiel – Aufteilung landwirtschaftlicher Nutzfläche 2/3

Kontinuierliche Entscheidungsvariablen:

- x_R für Rinderzucht verwendete Hektar
- x_G für Getreideanbau verwendete Hektar
- x_B für Biogemüseanbau verwendete Hektar

Binäre Entscheidungsvariablen:

- $y_R = 1$ Rinderzucht wird betrieben, $y_R = 0$ sonst.
- $y_G = 1$ Getreide wird angebaut, $y_G = 0$ sonst.
- $y_B = 1$ Biogemüse wird angebaut, $y_B = 0$ sonst.

Beispiel – Aufteilung landwirtschaftlicher Nutzfläche 3/3

Zielfunktion

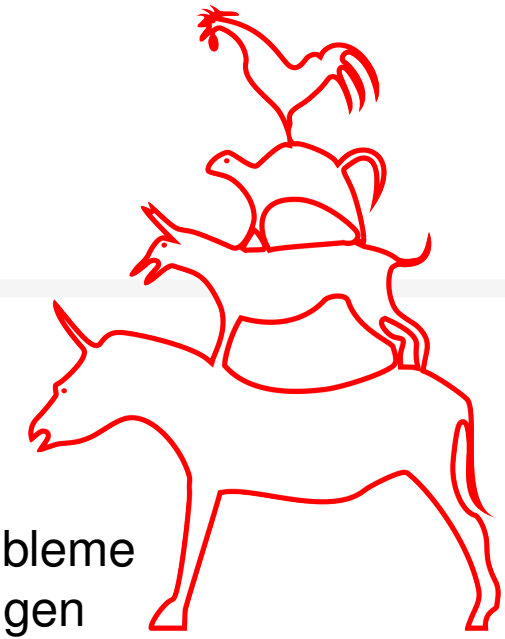
$$\max z = 17x_R + 14x_G + 23x_B - 200y_R - 100y_G$$

Restriktionen

$$\begin{aligned} x_R + x_G + x_B &\leq 100 && \text{Gesamtfläche} \\ x_R &\leq M_R \cdot y_R \\ x_G &\leq M_G \cdot y_G \\ x_B &\leq 20 \cdot y_B \\ y_R + y_B &\leq 1 && \text{Rinder und Biog. nicht gleichzeitig} \\ x_i &\geq 0 && i = R, G, B \end{aligned}$$

Sinnvolle Werte für M_R, M_G und M_B:
$M_R = M_G = 100$ wegen Beschränkung Gesamtfläche

Inhalt der Vorlesung



Klassifikation kombinatorischer Optimierungsprobleme

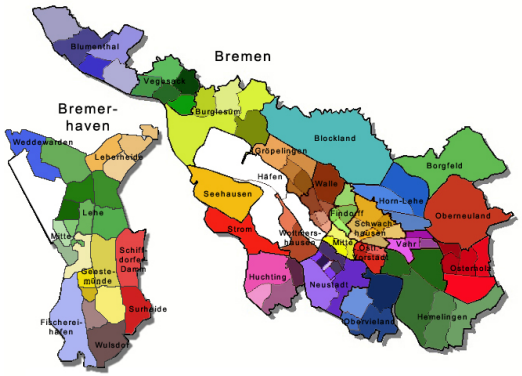
LogDynamics

- **Zuordnungsprobleme**
  lineares und quadratisches Zuordnungsproblem, Stundenplanungsprobleme
- **Reihenfolgeprobleme**
  Traveling Salesman Problem, allg. Tourenplanung, Maschinenbelegungsprobleme
- **Gruppierungsprobleme**
  Zuschnitt- und Packprobleme, Fließbandabstimmung, Losgrößenplanung, Clusteranalyse
- **Auswahlprobleme**
  z.B. Rucksack-, Set-Partitioning- und Set-Covering-Problem

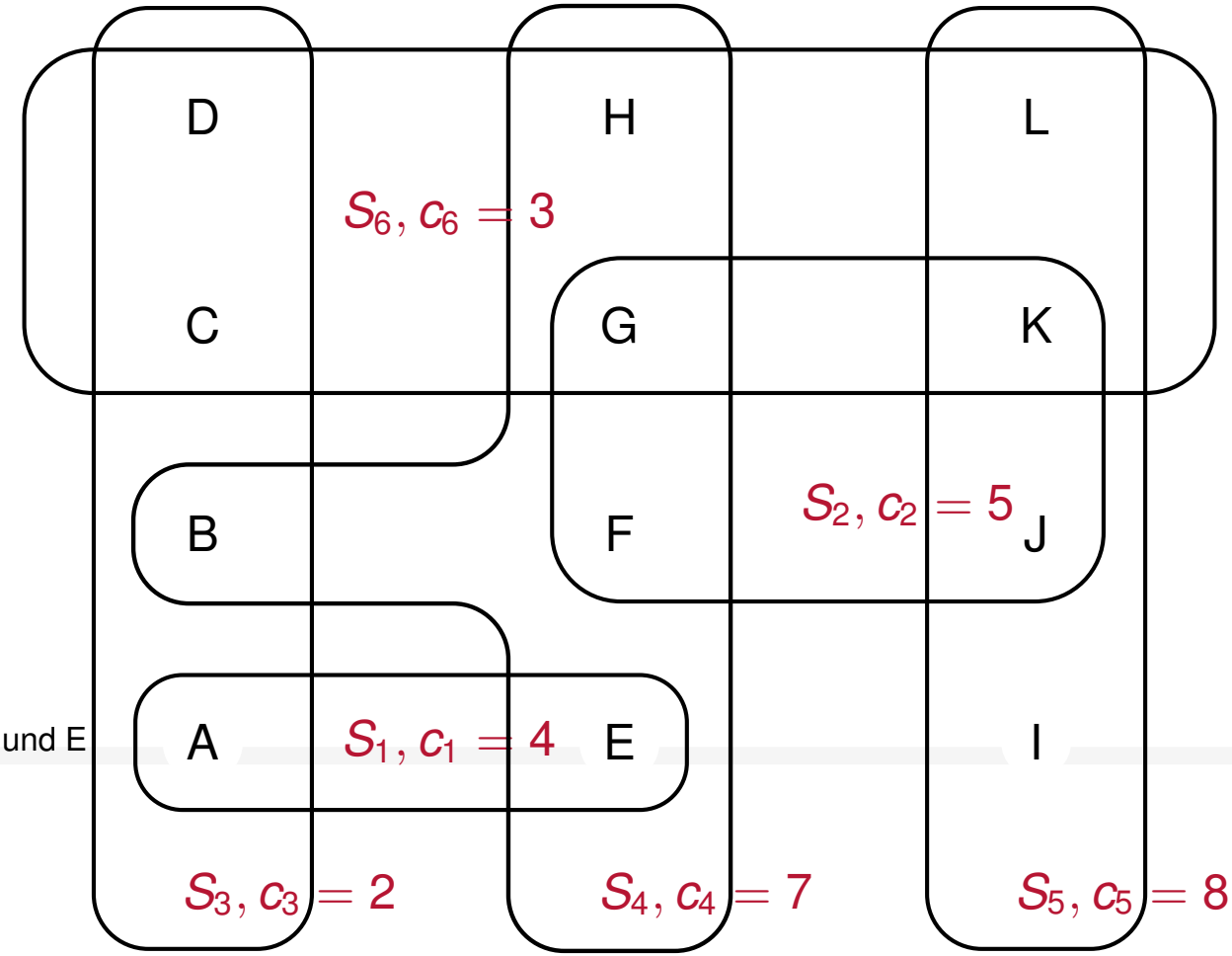
Beispiel

Wo sollen Rettungswagen positioniert werden, sodass sämtliche Ortsteile von Bremen innerhalb von 5 Minuten von mindestens einem Rettungswagen erreicht werden können?

Ortsteil	Stellplatz							
	1	2	3	4	5	6	7	...
Bürgerpark	1					1		
Neustadt							1	
Ostertor							1	
Horn		1		1				
Lehe		1	1					
Lehesterdeich			1					
Schwachhausen	1			1		1		
Ãberseehafen					1		1	
...								



Mengenüberdeckungsproblem – Set-Covering-Problem



S_1 *überdeckt* A und E

Menge $U = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$

Menge $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$, mit z.B. $S_2 = \{G, K, F, J\}$ und $c_2 = 5$

Mengenüberdeckungsproblem (Set-Covering-Problem)

Gegeben sind eine Menge U von m Objekten sowie n mit Kosten c_j bewertete Teilmengen S_j von U. Gesucht ist eine kostenminimale Auswahl von Teilmengen S_j, sodass jedes der m Objekte in mindestens einer der ausgewählten Teilmengen enthalten ist.

Parameter: $a_{ij} = 1$, falls Objekt $i \in U$ in Teilmenge S_j enthalten ist, 0 sonst.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \\ & x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

(Gewichtetes) Mengenüberdeckungsproblem (Set-Covering-Problem)
Minimierung und nur $\geq$-Restriktionen; rechte Seite nur 1; übrige Matrixkoeffizienten nur 0 oder 1

Mengenzerlegungs- und Mengenpackproblem

LogDynamics

Mengenzerlegungsproblem (Set-Partitioning-Problem)

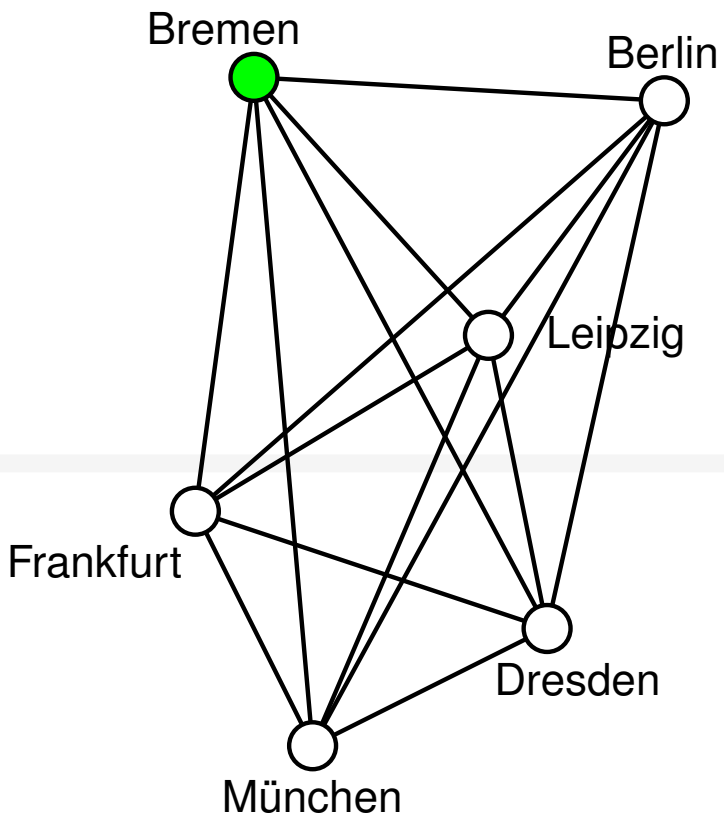
Gegeben sind eine Menge U von m Objekten sowie n mit *Kosten* c_j bewertete Teilmengen S_j von U. Gesucht ist eine kostenminimale Auswahl von Teilmengen S_j, sodass jedes der m Objekte in genau einer der ausgewählten Teilmengen enthalten ist.

Mengenpackproblem (Set-Packing-Problem)

Gegeben sind eine Menge U von m Objekten sowie n mit *Nutzen* u_j bewertete Teilmengen S_j von U. Gesucht ist eine kostenminimale Auswahl von Teilmengen S_j, sodass jedes der m Objekte in höchstens einer der ausgewählten Teilmengen enthalten ist.

Traveling-Salesman-Problem (TSP)

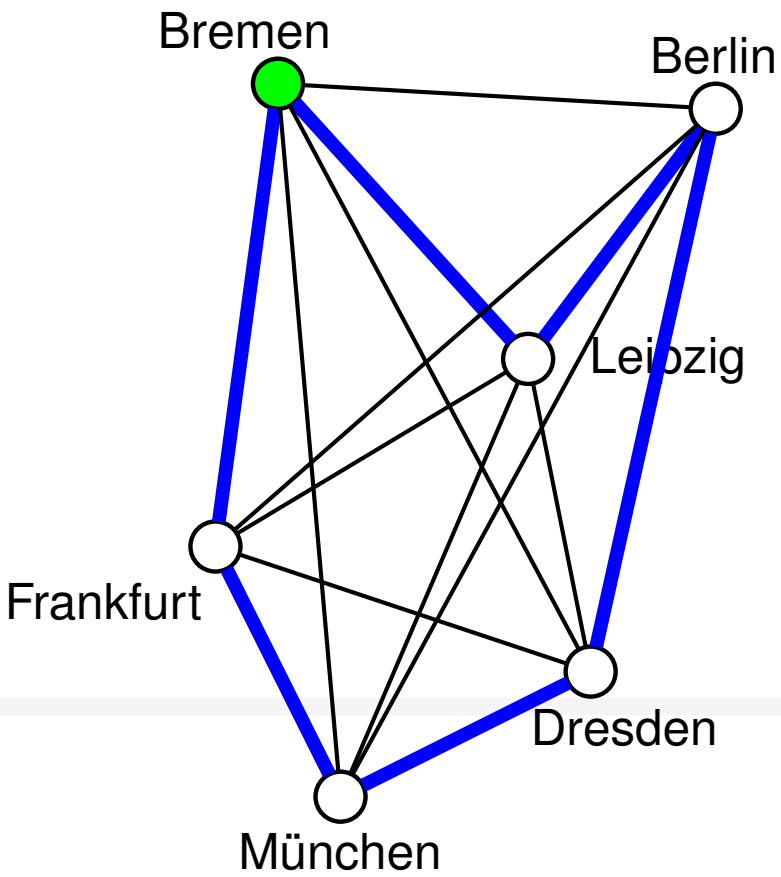
Welches ist die kürzeste Tour, so dass der Handelsreisende jeden Ort genau einmal besucht und schließlich am Startort wieder ankommt?



Gegeben:

- $V = \{1 \dots n\}$ Menge von Knoten, z.B. Kundenorten
- $G = (V, E, c)$ vollständiger Graph
- bewertete Kanten, z.B. c_{ij} Entfernung zwischen dem Knoten i und dem Knoten j
- symmetrisches TSP: $c_{ij} = c_{ji}$
- asymmetrisches TSP: $c_{ij} \neq c_{ji}$

Traveling-Salesman-Problem – Zulässige Tour



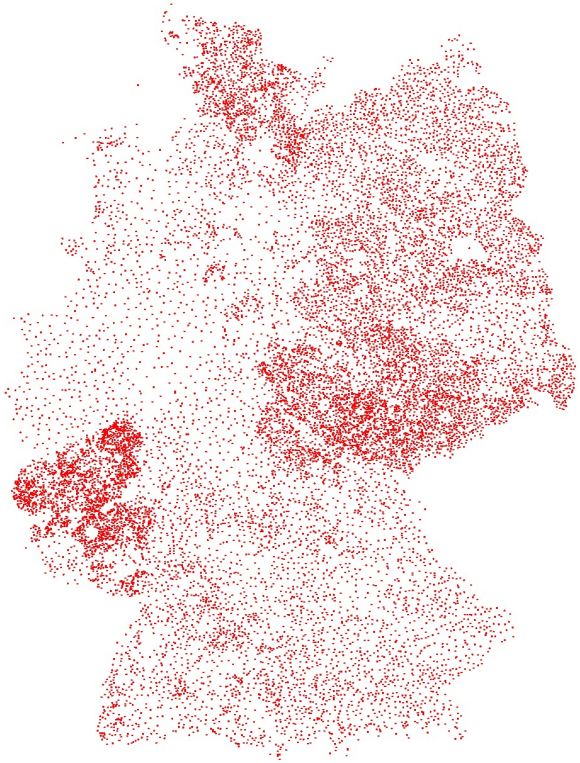
Traveling-Salesman-Problem – Anwendungen

- Lagerhaus – Routing eines Pickers zum Einsammeln der Ware
- Genetik – DNS-Sequenzierung
- Raumfahrt – Treibstoffeinsparung bei der Repositionierung von Satelliten
- Halbleiterindustrie – Design von Schaltkreisen auf Chips
- Telekommunikation – Einsammeln von Münzen aus Münztelefonen
- Telekommunikation – Routing in ringförmigen Glasfasernetzen
- Energie – Design von Stromnetzen, insb. letzte Meile
- Teilprobleme komplexerer Tourenplanungsprobleme

Traveling-Salesman-Problem – Anwendungen

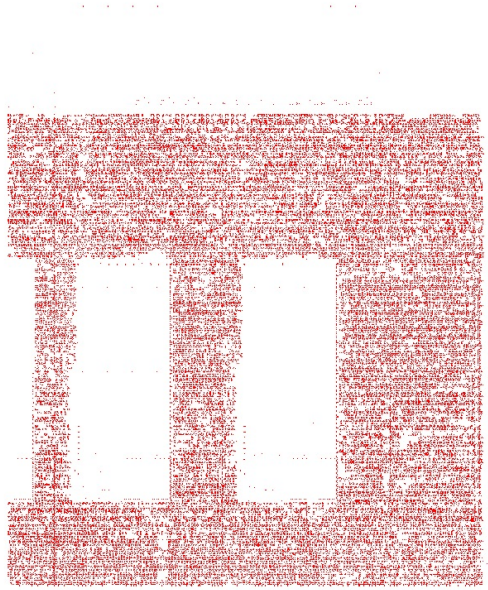
LogDynamics

Deutschlandtour



15.112 Städte, Tourlänge ca. 66.000km,
Optimale Lösung gefunden am 20.4.2001,
110 CPUs, 22 CPU-Jahre Rechenzeit

Integrierte Schaltkreise



85.900 Knoten, Optimale Lösung
gefunden 2006,
136 CPU-Jahre Rechenzeit

Geschichte, Anwendungen, Google-Maps
TSP-Planer, iPhone App für TSP:
http://www.tsp.gatech.edu/apps/

$x_{ij} = 1$, wenn in der Tour Knoten j unmittelbar auf Knoten i folgt, 0 sonst.

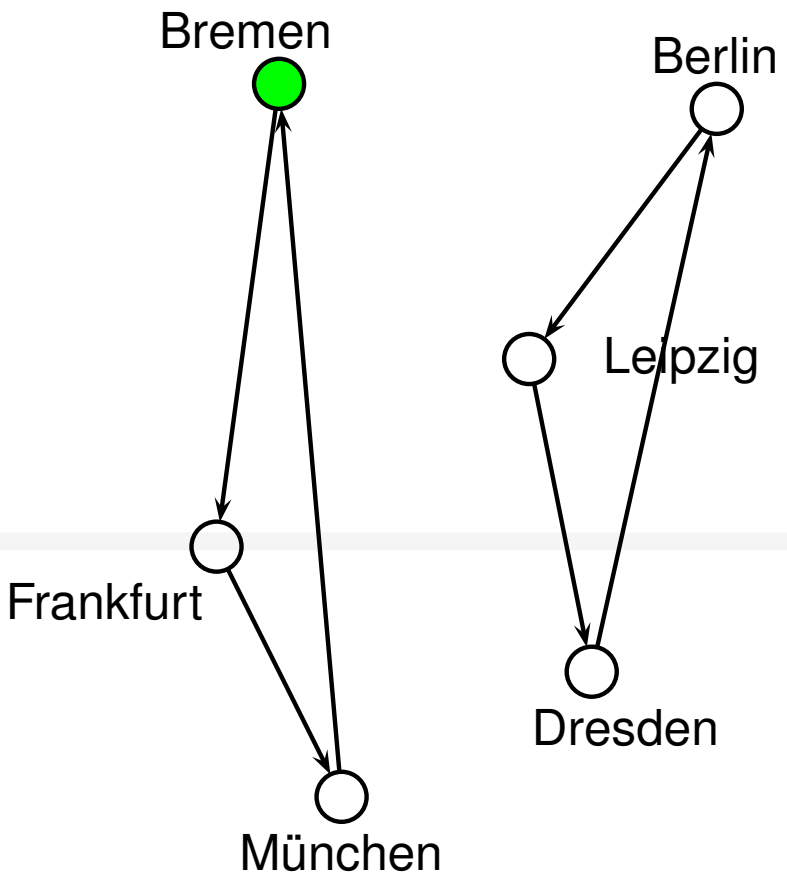
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in V$$

Subtour Eliminierung:

In einer zulässigen Tour dürfen für jede echte Teilmenge S der Menge aller Knoten V höchstens $|S| - 1$ Kanten verwendet werden.

Unerwünschte Subtour



Entscheidungsvariablen: $x_{ij} = 1$, wenn j auf i in der Tour folgt, 0 sonst.

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \text{für } S \subset \{1, \ldots, n\} \text{ und } 2 \leq |S| \leq \frac{n}{2}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{für } i, j = 1, \ldots, n$$

Bei $n = 50$ Knoten mehr als 33 Millionen Restriktionen zur Subtour-Eliminierung.

Zusammenfassung & Ausblick

Fragen zur Wiederholung:

- Was bedeutet die Begriffe logische Abhängigkeiten und Mengenbeziehungen mit Big-M?
- Was bezeichnen die kombinatorischen Optimierungsprobleme Knapsack-, Set-Covering-, Set-Partitioning-, Set-Packing-, Traveling-Salesman-Problem?

Klausurrelevante Literatur

Modellierung **ganzzahliger** Optimierungsprobleme Domschke/Drexler Kapitel 6.1, 6.2, 6.5 oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 5.1, 5.2 oder Suhl/Mellouli Kapitel 4.1–4.4, 4.7

Ausblick

- Tutorium: Modellierung **ganzzahliger** Optimierungsprobleme
- Vorlesung: Lösung von IP/MIP mit **Branch & Bound**, siehe Domschke/Drexler Kapitel 6.4, 6.5 oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 5.4.1 oder Suhl/Mellouli Kapitel 5.3

Teil IX

Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung II – Branch-and-Bound

Inhalt der Vorlesung

LogDynamics

Wiederholung

Vollständige Enumeration

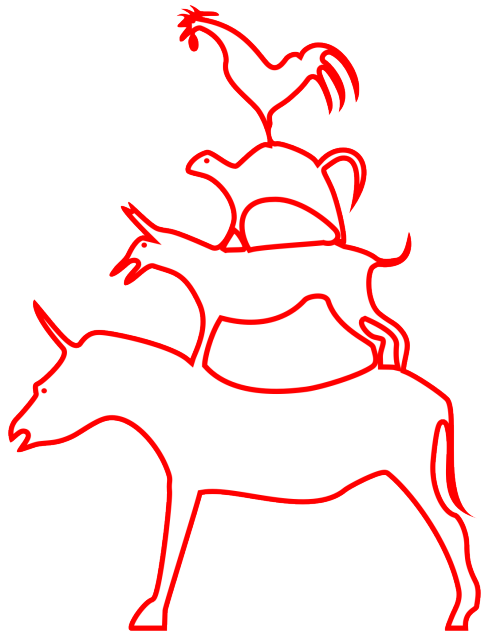
Branching – Verzweigen in Teilprobleme

Bounding – Verwerfen von Teilproblemen
- Lower Bound
- Upper Bound und Relaxierung

Ablauf Branch-and-Bound Verfahren

B&B für ein Zuordnungsproblem

B&B mit LP-Relaxierung für ein Rucksackproblem



Verknüpfung logischer Aussagen als Restriktionen

Die Entscheidungsvariable x_i wird auch als binäre Indikatorvariable bezeichnet.

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Aussage } A_i \text{ wahr ist} \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

Aussage	Logische Verknüpfung
A_1 und/oder A_2 ist wahr	$x_1 + x_2 \geq 1$
A_1 und A_2 sind wahr	$x_1 + x_2 = 2$
Weder A_1 noch A_2 sind wahr	$x_1 + x_2 = 0$
Wenn A_1 wahr ist, dann ist auch A_2 wahr	$x_1 \leq x_2$
A_1 ist genau dann wahr, wenn A_2 wahr ist	$x_1 = x_2$
A_1 ist genau dann wahr, wenn A_2 nicht wahr ist	$x_1 = 1 - x_2$

Mengenbeziehung – Modellierung mittels Big-M

Allgemein soll modelliert werden:

Grundproblem

Aus $x > 0$ folgt $y = 1$ ($y \in \{0, 1\}, x \in \mathbb{R}^+$).

Weitere Werte von Modellparametern sind nicht bekannt.

Modellierung mit Big-M

Führe einen **hinreichend großen** konstanten Parameter M (Big-M) ein.

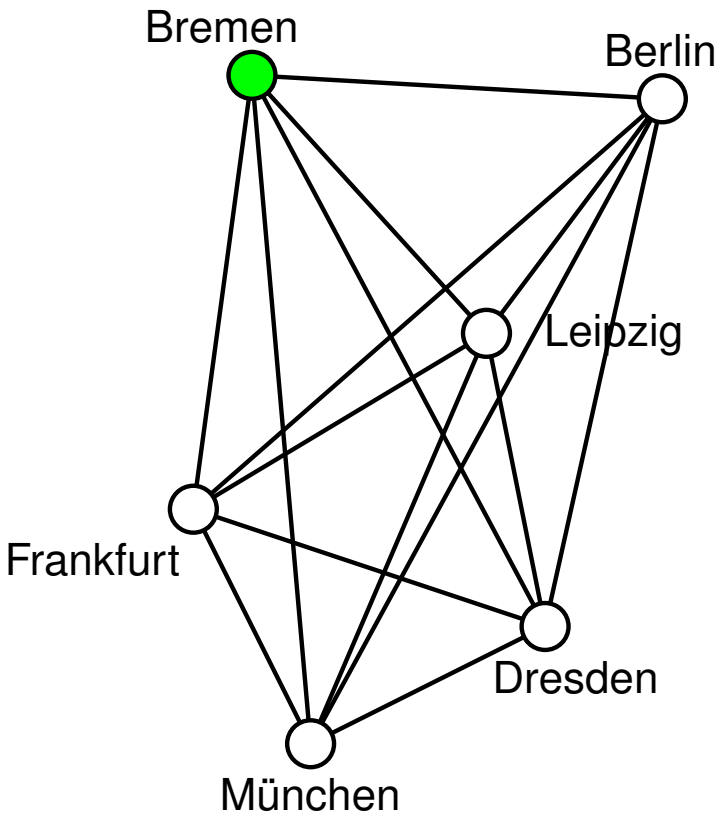
$$x \leq M \cdot y$$

Falls $y = 0$ dann muss $x = 0$, falls $y = 1$ darf x zwischen 0 und M liegen.

Der tatsächliche Wert von M hängt von den konkreten Werten der übrigen Modellparameter ab. Solange M hinreichend groß ist, spielt der tatsächliche Wert für das Modell keine Rolle.

Traveling-Salesman-Problem (TSP)

Welches ist die kürzeste Tour, so dass der Handelsreisende jeden Ort genau einmal besucht und schließlich am Startort wieder ankommt?



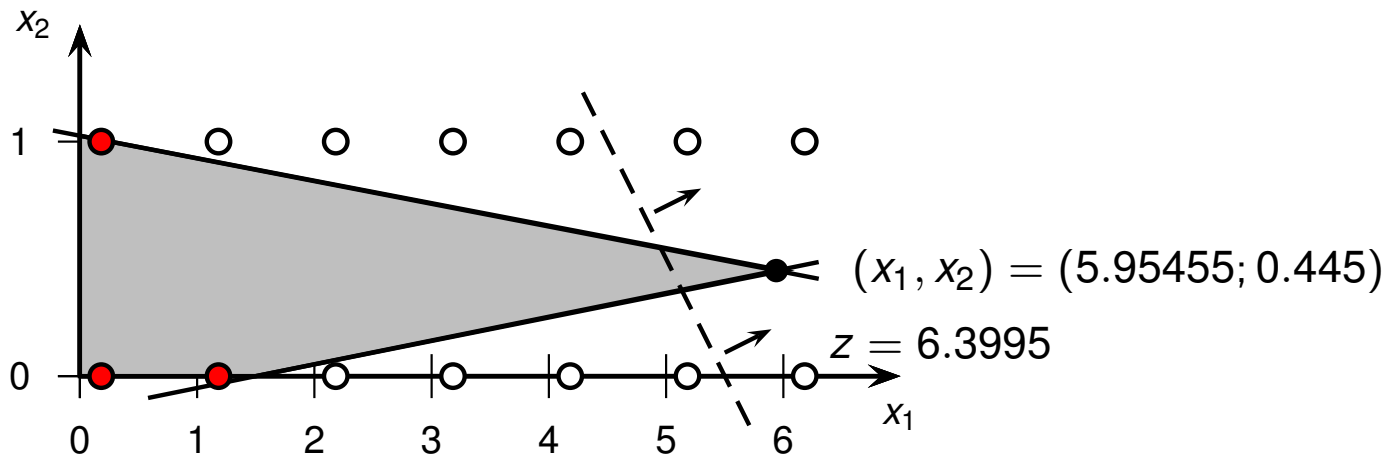
Gegeben:

- $V = \{1 \dots n\}$ Menge von Knoten, z.B. Kundenorten
- $G = (V, E, c)$ vollständiger Graph
- bewertete Kanten, z.B. c_{ij} Entfernung zwischen dem Knoten i und dem Knoten j
- symmetrisches TSP: $c_{ij} = c_{ji}$
- asymmetrisches TSP: $c_{ij} \neq c_{ji}$

Beispiel ganzzahliges Modell:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0.011x_1 + x_2 \leq 1.01 \\ & -0.011x_1 + x_2 \leq -0.021 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

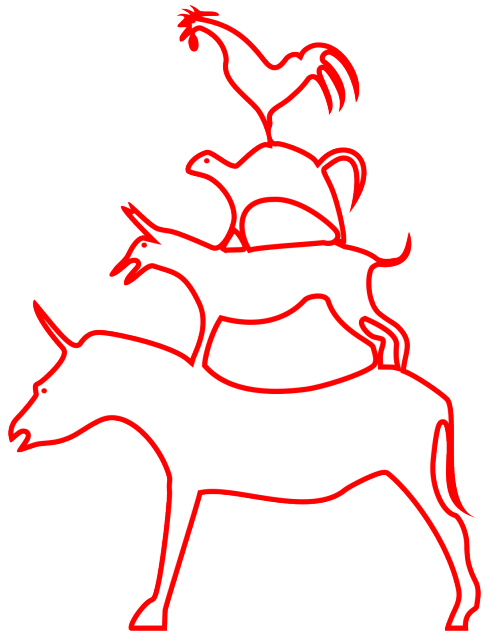
Wie lautet eine optimale Lösung?



Problem

Ganzzahlige Probleme können im Allgemeinen nicht mit dem Simplex-Algorithmus gelöst werden.

Inhalt der Vorlesung



Modell des Rucksackproblems

Rucksackproblem

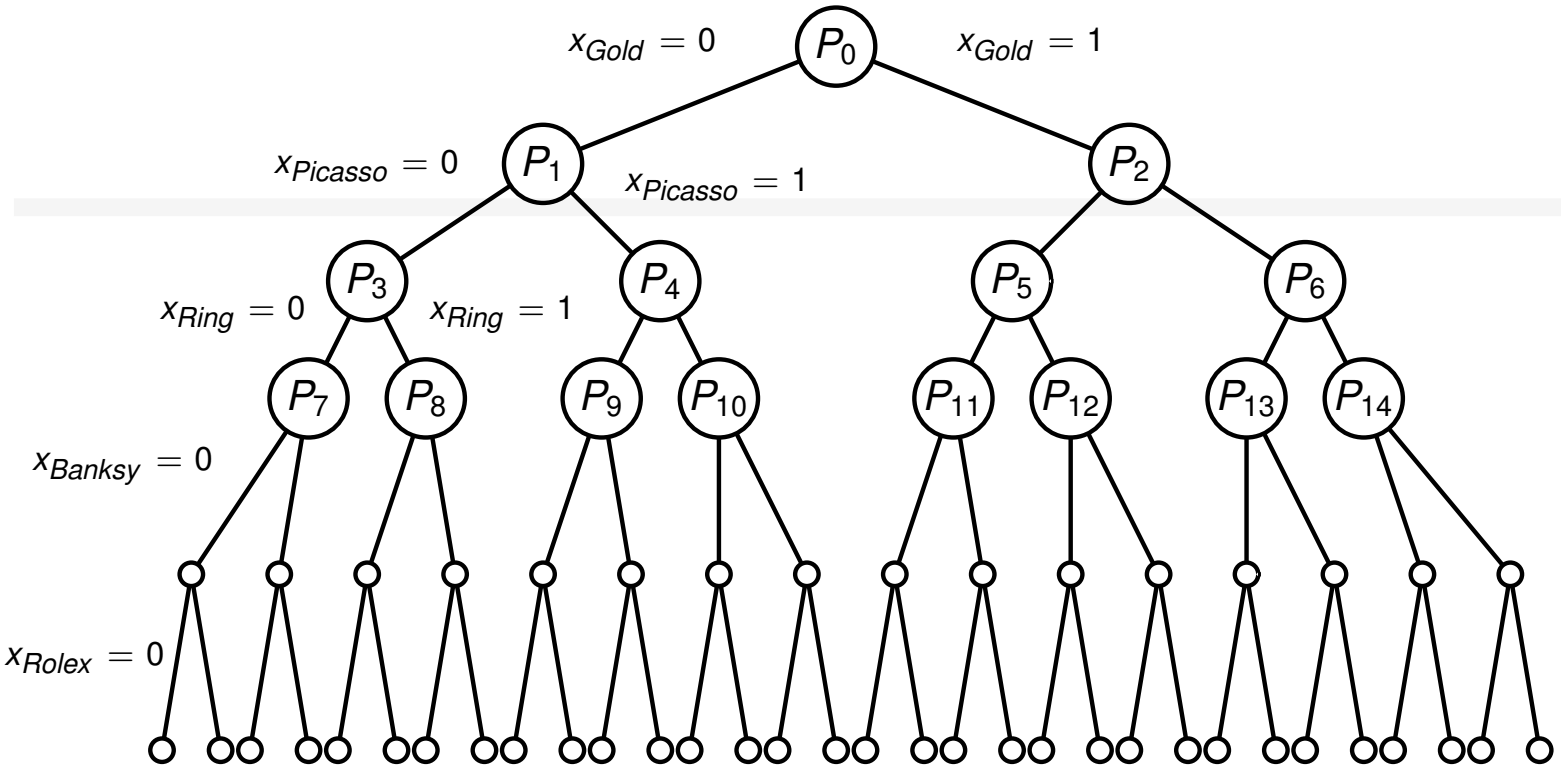
Aus n Objekten mit Gewichten $w_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und Nutzenwerten $u_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ soll eine nutzenmaximale Auswahl getroffen werden, sodass ein maximales Gesamtgewicht C nicht überschritten wird.

Ein Dieb auf Beutezug – Beispiel für Probleminstanz

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_{Gold} + 9x_{Picasso} + 12x_{Ring} + 5x_{Banksy} + 9x_{Rolex} \\ \text{s.t.} \quad & 5x_{Gold} + 6x_{Picasso} + 12x_{Ring} + 10x_{Banksy} + 12x_{Rolex} \leq 25 \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \end{aligned}$$

Vollständige Enumeration für das Rucksackproblem

Für jeden der $n = 5$ Gegenstände gibt es zwei Zustände.



$$\Longrightarrow 2^5 = 32 \text{ Lösungen (Blattknoten)}$$

Vollständige Enumeration nicht sinnvoll

Rucksack-Problem mit n Objekten: 2^n Lösungen

Traveling-Salesman-Problem mit n Städten: $(n-1)!$ Lösungen

n	$\log n$	n^2	2^n	$n!$
10	3.32	100	$1.02 \cdot 10^3$	$3.6 \cdot 10^6$
100	6.64	10.000	$1.27 \cdot 10^{30}$	$9.33 \cdot 10^{157}$
1000	9.97	1.000.000	$1.07 \cdot 10^{300}$	$4.02 \cdot 10^{2567}$

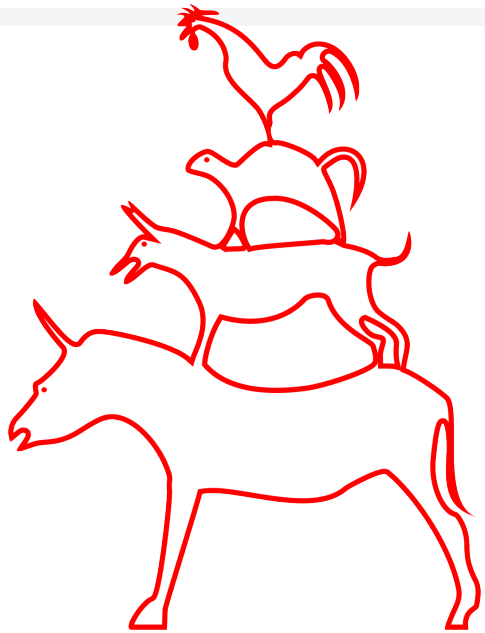
Falls ein PC 10^6 TSP-Lösungen pro Sekunden berechnet, dauert die Lösung mittels vollständige Enumeration bei

23 Knoten 0.82 Milliarden Jahre und bei

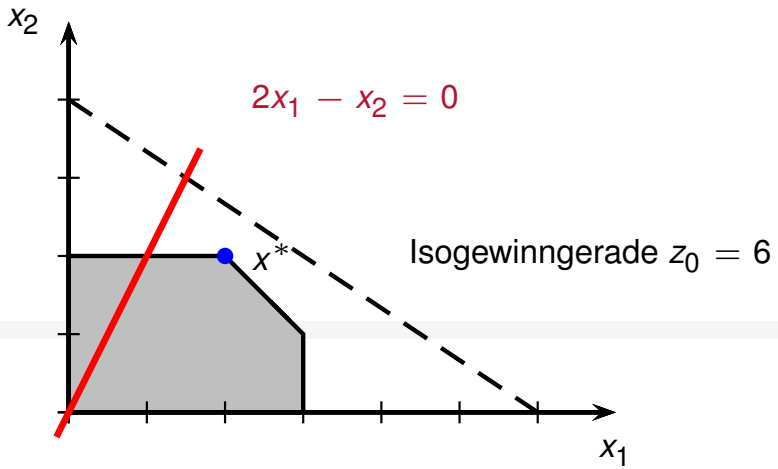
24 Knoten 19.67 Milliarden Jahre.

Alter des Universums: $\approx$13.8 Miliarden Jahre

Inhalt der Vorlesung



Verzweigen von Problemen 1/3



$$
\begin{array}{lllll}
P_0: & \max & x_1 + 1.5x_2 & & \\
& \text{s.t.} & x_1 & \leq 3 & \\
& & x_2 & \leq 2 & \\
& & x_1 + x_2 & \leq 4 & \\
& & x_1, x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Optimale Lösung von P_0: $\mathbf{x}^* = (2, 2)$ mit $z^* = 5$.

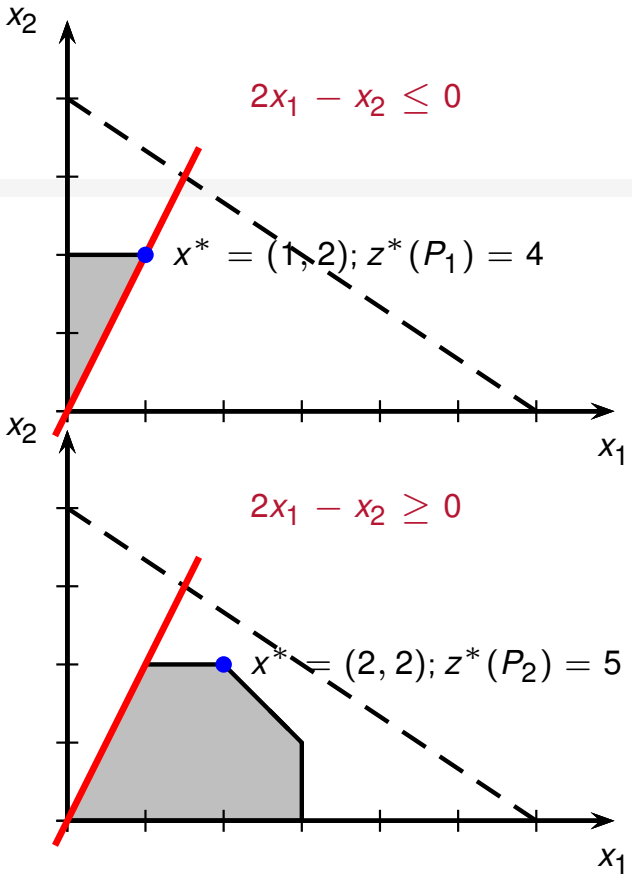
Das Problem P_0 kann durch Hinzunahme einer *zusätzlichen Restriktion*, z.B. $2x_1 - x_2 = 0$, in zwei Teilprobleme P_1, P_2 *verzweigt* (to branch) bzw. zerlegt werden:

P_1 : P_0 zzgl. $2x_1 - x_2 \geq 0$ $\qquad$ P_2 : P_0 zzgl. $2x_1 - x_2 \leq 0$

Verzweigen von Problemen 2/3

Keine zulässige Lösung geht verloren, d.h. $\mathbb{M}(P_0) = \mathbb{M}(P_1) \cup \mathbb{M}(P_2)$.

Der optimale Wert z^* von P_0 ist $z^*(P_0) = \max\{z^*(P_1), z^*(P_2)\}$.



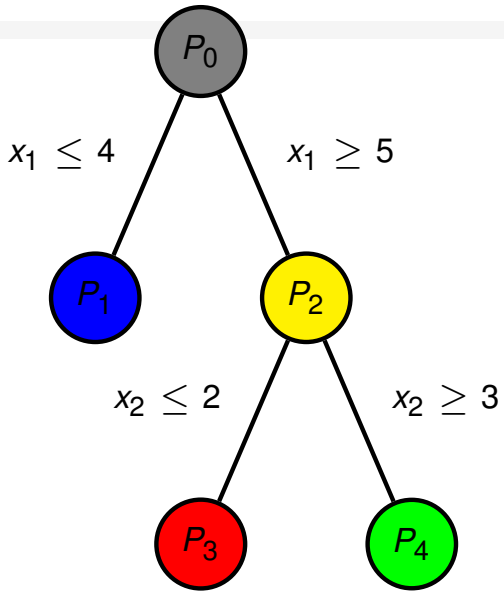
$$
\begin{array}{llrl}
P_1: & \max & x_1 + 1.5x_2 & \\
& \text{s.t.} & x_1 & \leq 3 \\
& & x_2 & \leq 2 \\
& & x_1 + x_2 & \leq 4 \\
& & 2x_1 - x_2 & \leq 0 \\
& & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

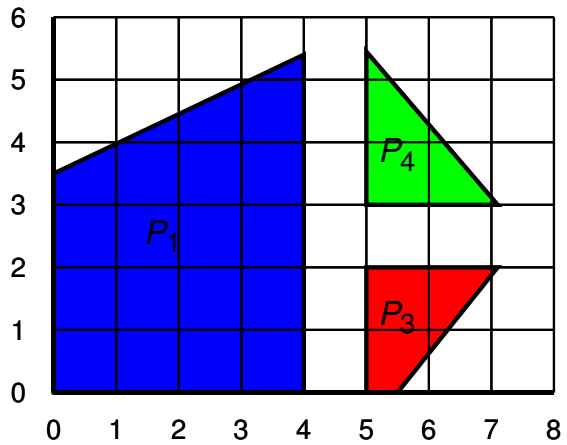
$$
\begin{array}{llrl}
P_2: & \max & x_1 + 1.5x_2 & \\
& \text{s.t.} & x_1 & \leq 3 \\
& & x_2 & \leq 2 \\
& & x_1 + x_2 & \leq 4 \\
& & 2x_1 - x_2 & \geq 0 \\
& & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Branching

Die Menge $\mathbb{M}(P_0)$ der zulässigen Lösungen von P_0 wird durch Hinzunahme weiterer Restriktionen partitioniert.

Verzweigen bei ganzzahligen Variablenwerten, z.B. $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$.





Durch Verzweigung gehen keine Informationen verloren. Anhand welcher Variablen/Werte zu verzweigen ist, hängt vom konkreten Verfahren ab. Zerlegung in mehr als zwei Teilprobleme auch möglich.

Inhalt der Vorlesung

LogDynamics

Bounding

Mittels Bounding wird für jedes Teilproblem geprüft, ob dieses zu verzweigen ist oder nicht.

Dazu berechnet man

- *untere Schranken* (lower bound, LB) für den optimalen Zielfunktionswert von P_0 und
- *obere Schranken* (upper bound, UB) für den optimalen Zielfunktionswert eines Teilproblems P_i und
- entscheidet anhand dieser Schranken, ob ein Teilproblem P_i zu verzweigen ist oder nicht (*Auslotung*).

Sinn des Bounding

Teilprobleme identifizieren, deren zulässiger Bereich keine Optimallösung des Ausgangsproblems P_0 enthält

Untere Schranke eines Maximierungsproblems 1/2

LogDynamics

Untere Schranke (lower bound, LB)

Eine untere Schranke LB eines Maximierungsproblems P_0 ist ein Wert, der stets kleiner-gleich dem maximalen Zielfunktionswert f^* von P_0 ist, d.h. $f^* \geq LB$

Eine LB bezieht sich auf das (globale) Ausgangsproblem P_0.

Wie berechnet man eine LB?

a) Der kleinste (schlechteste) Zielfunktionswert für ein Maximierungsproblem ist stets $-\infty$, d.h. $LB = -\infty$ gilt immer.

b) Der Wert jeder zulässigen Lösung eines Maximierungsproblems P_0 ist eine *untere Schranke*, d.h. $LB = f(x)$, falls x für P_0 zulässig ist.

Untere Schranke eines Maximierungsproblems 2/2

Wie lautet eine *untere Schranken (LB)* für das folgende MIP?

$$\begin{array}{lllll} \max & 5x_1 & +x_2 & & \\ & x_1 & & \leq 5 & \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 7.5 & \\ & x_1 & & \in \mathbb{N}_0 & \\ & & x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

Wie lautet eine obere Schranken (UB) für das folgenden Zuordnungsproblem (Minimierungsproblem!)?

	Rücken	Brust	Schmetterling	Freistil
Christine	2.56	3.07	2.90	2.26
Janine	2.63	3.01	3.12	2.35
Larissa	2.71	2.95	2.96	2.29
Laura	2.60	2.86	3.08	2.41

Obere Schranke eines Maximierungsproblems

LogDynamics

Obere Schranke (upper bound, UB)

Eine obere Schranke $UB(P_i)$ eines Maximierungsproblems P_i ist ein Wert, der stets größer-gleich dem maximalen Zielfunktionswert $f^*(P_i)$ von P_i ist, d.h. $f^*(P_i) \leq UB(P_i)$

UB werden für (lokale) Teilprobleme P_i berechnet.

Wie berechnet man einen UB für ein Teilproblem P_i?

Vereinfache das Teilproblem P_i, z.B. durch Weglassen von Restriktionen, und lösen das so relaxierte Problem P_i^R.

Wie funktioniert die Relaxierung eines Problems?

LogDynamics

Idee Relaxierung

Ersetze ein schwierig zu lösendes Optimierungsproblem P durch ein leichter zu lösendes Optimierungsproblem P^R, dessen optimaler Wert aber mindestens so groß wie der von P ist: $z^*(P) \leq z^*(P^R)$.

Wie relaxiert man ein Optimierungsproblem?

1. Vergrößerung des Lösungsraums, sodass $\mathbb{M}(P) \subseteq \mathbb{M}(P^R)$ oder
2. Ersetzen der Zielfunktion $f(x)$ durch $f^R(x)$, sodass $f^R(x) \geq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{M}(P)$ (Lagrange Relaxierung, **hier nicht weiter betrachtet**)

$\mathbb{M}(P)$ steht für die Menge der zulässigen Lösung von Problem P

LP-Relaxierung

Entscheidungsvariablen mit ganzzahligem Wertebereich werden durch Variablen mit einem kontinuierlichen Wertebereich ersetzt.

Ausgangsproblem P_0:

$$P_0: \quad \max f(x) = 4x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14$$
$$x_2 \leq 3$$
$$2x_1 - 2x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

LP-Relaxierung von P_0:

$$P_0^R: \quad \max f(x) = 4x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14$$
$$x_2 \leq 3$$
$$2x_1 - 2x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Lösung der **LP-Relaxierung** P_0^R mittels Simplex: $x^* = (\frac{20}{7}, 3)$, $f(x^*) = \frac{59}{7} \sim 8.42$.

Folgerung

Der Wert einer optimalen Lösung von P_0 kann nicht größer als 8.42 sein, d.h. $UB(P_0) = 8.42$; wg. Ganzzahligkeit gilt sogar $UB(P_0) = 8$

Kombinatorischen Relaxierung

Ignoriere für ein Problem P_0 ein oder mehrere Restriktionen.

Das relaxierte Problem P_0^R muss einen mindestens gleich guten Zielfunktionswert wie P_0 haben, da das Weglassen von Restriktionen nur zu einer Verbesserung führen kann.

Beispiele:

- *Traveling-Salesman-Problem* – Verzicht auf Restriktionen zur Vermeidung von Subtouren
- *Lineares Zuordnungsproblem* für Schwimmteam (VL07), ordne jeder Schwimmerin genau eine Disziplin zu. **Relaxierung:** ordne eine Disziplin keiner, einer oder mehr als einer Schwimmerin zu.

Muss ein Teilproblem verzweigt werden? 1/3 – Fall a

Ein Teilproblem P_i muss **nicht mehr verzweigt** werden, wenn ...

Fall a: $UB(P_i) \leq LB$

...die obere Schranke $UB(P_i)$ des Teilproblems P_i kleiner ist als die beste untere Schranke LB des Ausgangsproblems P_0.

Wir kennen bereits eine Lösung, die besser als die bestmögliche Lösung von P_i ist. P_i muss nicht verzweigt werden und heißt daher **ausgelotet**.

Notation: P bzw. P_0 – originäres Problem

P_i – durch Verzweigung entstandenes Teilproblem i, P_i^R – Relaxierung von P_i

LB – untere Schranke von P_0, $UB_i = UB(P_i)$ – obere Schranke von Teilproblem P_i

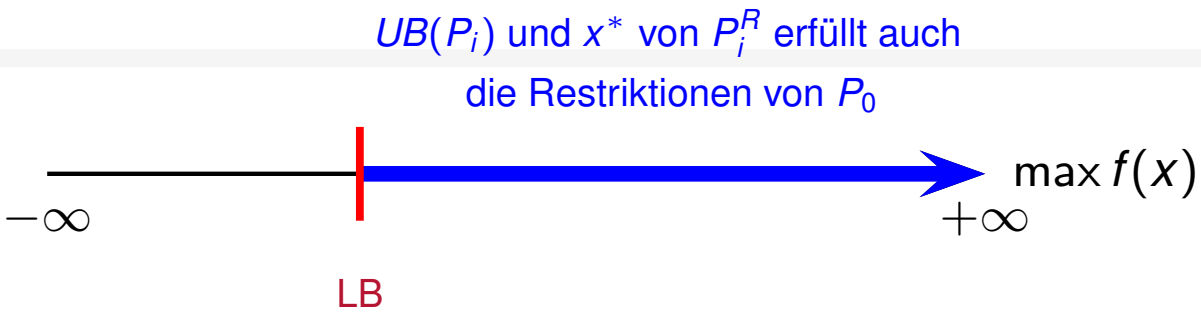
Muss ein Teilproblem verzweigt werden? 2/3 – Fall b

Ein Teilproblem P_i muss **nicht** **mehr verzweigt** werden, wenn ...

Fall b: $UB(P_i) > LB$ und Zulässigkeit für P_0

...die obere Schranke $UB(P_i)$ des Teilproblems P_i größer als der beste bekannte LB ist **und** die Lösung x^* für P_i^R auch für P_i (und damit auch für P_0) zulässig ist.

Wir haben eine bessere Lösung für P_0 gefunden, der LB ist zu aktualisieren, $LB := UB(P_i)$. P_i ist **ausgelotet**.



Notation: P bzw. P_0 – originäres Problem

P_i – durch Verzweigung entstandenes Teilproblem i, P_i^R – Relaxierung von P_i

LB – untere Schranke von P_0, $UB_i = UB(P_i)$ – obere Schranke von Teilproblem P_i

Muss ein Teilproblem verzweigt werden? 3/3 – Fall c

Ein Teilproblem P_i muss **nicht** **mehr verzweigt** werden, wenn . . .

Fall c: $\mathbb{M}(P_i^R) = \emptyset$

. . . das relaxierte Problem P_i^R keine zulässige Lösung hat.

Existiert für das weniger strikte Restriktionssystem von P_i^R keine Lösung, gibt es auch keine für das striktere P_i.

Keine zulässige Lösung für $P_i^R \Rightarrow P_i$ ist nicht lösbar.

Verzweigen

Die Fälle a, b, c schließen einander aus. **Falls keiner der drei Fälle vorliegt**, ist das Teilproblem P_i zu **verzweigen**.

Zusammenfassung Auslotung

Problem P_i heißt ausgelotet und muss nicht verzweigt werden, falls:

a. $UB(P_i) \leq LB(P_0)$ – Ausloten wg. Bound

   Der optimale Wert von P_i ist schlechter als der beste bislang gefundene Wert

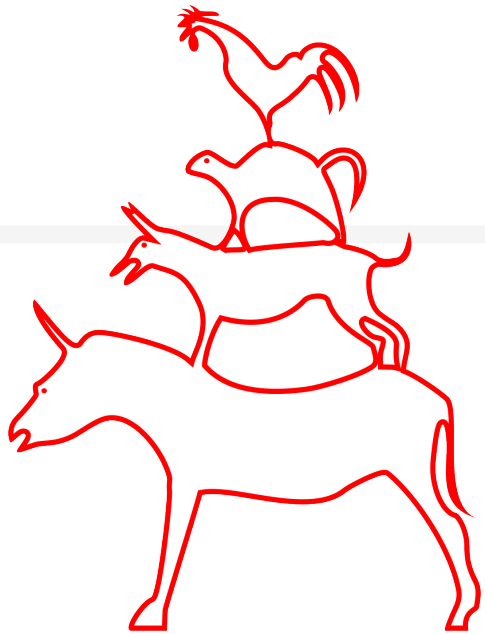
b. $UB(P_i) > LB(P_0)$ und $x^*(P_i^R) \in \mathbb{M}(P_0)$ – Ausloten wg. Optimalität

   Das Teilproblem P_i wurde optimal gelöst, zugleich ist die gefundene Lösung besser als die beste bislang bekannte Lösung.

c. $\mathbb{M}(P_i^R) = \emptyset$ – Ausloten wg. Unzulässigkeit

   Für das relaxierte Problem P_i^R gibt es keine zulässige Lösung, daher gibt es auch für P_i keine.

Inhalt der Vorlesung



Ein Allgemeines Branch & Bound (B&B) Verfahren

LogDynamics

Branch & Bound Verfahren

Input : Ganzzahliges Problem P_0

1 Bestimme LB anhand initialer Lösung (optional)
2 Löse die Relaxierung P_0^R von P_0
3 **if** P_0 *ist ausgelotet* **then**
4 $\quad L := \emptyset$ `// L ist eine Liste mit aktiven Teilproblemen`
5 **else**
6 $\quad L := \{P_0\}$
7 **while** $L \neq \emptyset$ **do**
8 $\quad$ Wähle ein aktives Problem P_k aus L, setze $L := L \setminus \{P_k\}$.
9 $\quad$ Löse die Relaxierung P_k^R von P_k
10 $\quad$ **if** P_k *ist ausgelotet* **then**
11 $\quad\quad L := L \setminus \{P_k\}$
12 $\quad$ **else**
13 $\quad\quad$ Verzweige P_k und füge die entstehenden Teilprobleme zu L hinzu.

Output: Optimale Lösung x^* und optimaler Wert LB von P_0

Einige Komponenten des B&B sind zu spezifizieren

LogDynamics

Welches Teilproblem soll als nächstes verzweigt werden?

- Last-in, first-out (LIFO-Regel): das zuletzt der Liste L hinzugefügte Problem wird verzweigt.
- Maximum-upper-bound (MUB-Regel): das aktive Problem P_i mit dem größten $UB(P_i)$ wird verzweigt.

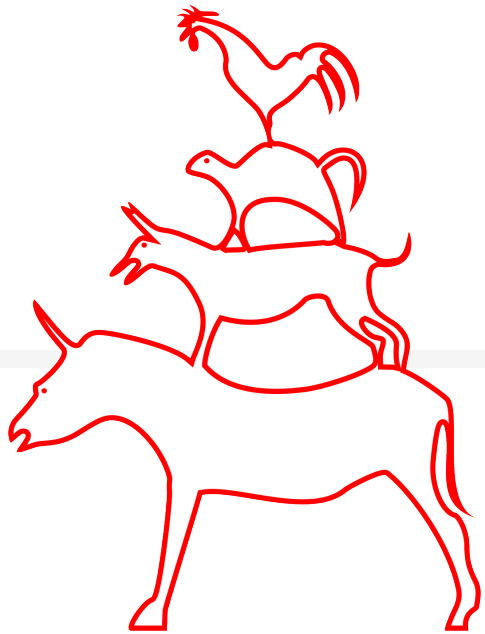
Wie soll ein Problem verzweigt werden? Bei LP-Relaxierung:

- Verzweige beliebige nicht-ganzzahlige Variable x_i^R, mit $x_i \leq \lfloor x_i^R \rfloor$ bzw. $x_i \geq \lceil x_i^R \rceil$
- Verzweige Variable mit kleinsten nicht-ganzzahligen Anteil

Beispiel: Variable mit kleinstem nicht-ganzzahligen Anteil

Ein LP-relaxierte Lösung eines rein ganzzahligen Problems P_0 sei $x^R = (7, 0, \mathbf{0.5}, 4, \mathbf{3.2}, 4, \mathbf{0.8})$. Verzweigt wird anhand von $x_5 = 3.2$, mit 0.2. hat sie den kleinsten nicht-ganzzahligen Anteil. Verzweige in zwei Probleme mit zusätzlichen Restriktionen $x_2 \leq 3$ bzw. $x_2 \geq 4$.

Inhalt der Vorlesung



Maschinenbelegungsproblem als Zuordnungsproblem

Es gibt vier Aufträge A1 bis A4 sowie vier Maschinen M1 bis M4.

- Jede Maschine muss genau einen Auftrag bearbeiten.
- Jeder Auftrag muss auf genau einer Maschine bearbeitet werden. (Relaxierung!)

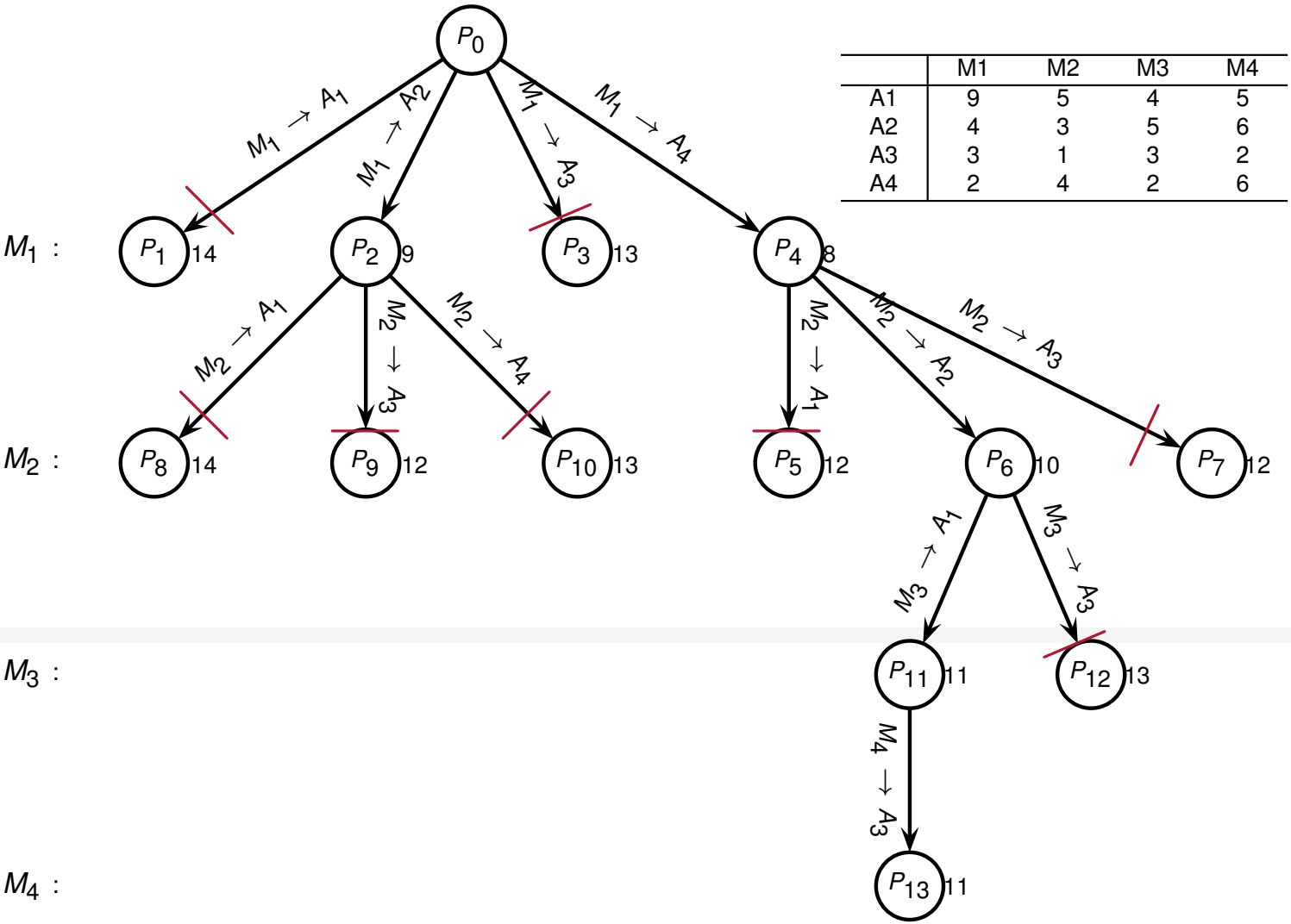
Bearbeitungsdauern in Stunden:

	M1	M2	M3	M4
A1	9	5	4	5
A2	4	3	5	6
A3	3	1	3	2
A4	2	4	2	6

Problem

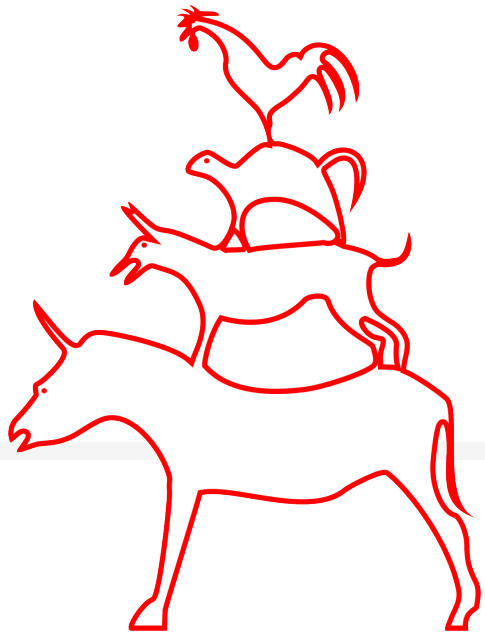
Wie müssen die Maschinen mit Aufträgen belegt werden, damit die gesamte Produktionszeit minimal ist?

B&B für ein Zuordnungsproblem



	M1	M2	M3	M4
A1	9	5	4	5
A2	4	3	5	6
A3	3	1	3	2
A4	2	4	2	6

Inhalt der Vorlesung



Rucksackproblem zur Auswahl von Investitionsprojekten

In welche Projekte soll investiert werden, um bei einem Investitionsbudget von 25 Mio. € den erwarteten Gewinn zu maximieren?

	Projekt j				
	1	2	3	4	5
erw. Gewinn (Mio. €) u_j	10	9	12	5	9
Investition (Mio. €) w_j	5	6	12	10	12

Formulierung als Rucksackproblem

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 10x_1+9x_2+12x_3+5x_4+9x_5 \\
\text{s.t.} \quad & 5x_1+6x_2+12x_3+10x_4+12x_5 \leq 25 \\
& x_i \in \{0,1\} \quad i=1,\ldots,5
\end{aligned}
$$

Spezifizierung des verwendeten B&B-Verfahrens

- **Relaxierung**: LP-Relaxierung

  D.h. die Restriktion $x_j \in \{0, 1\}$ wird zu $0 \leq x_j \leq 1$ relaxiert.

- **Auswahl** des zu verzweigenden Problems: LIFO-Regel

- **Verzweigungs-Variable**: beliebige Variable x_j mit nicht-ganzzahligem Wert. Fixiere einmal $x_j = 0$ und einmal $x_j = 1$.

LP-Relaxierung zur Berechnung eines UB

Üblicherweise: Löse LP-relaxiertes Problem mit Simplex.

Ausnahmsweise ist es hier einfacher, da **nur eine** Restriktion:

- Berechne für jedes j den Nutzen pro Gewichtseinheit ($\frac{u_j}{w_j}$)
- Weise in monoton absteigender Reihenfolge von $\frac{u_j}{w_j}$ den zugehörigen Variablen x_j den Wert 1 zu, solange das Budget nicht erschöpft ist. Plane das erste nicht mehr voll aufnehmbare Projekt anteilig ein.

	Projekt j				
	1	2	3	4	5
u_j	10	9	12	5	9
w_j	5	6	12	10	12
$\frac{u_j}{w_j}$	2	1.5	1	0.5	0.75

Werte

Reihenfolge	1.	2.	3.	4.	5.
Wert Variablen	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1$	$x_5 = \frac{2}{12}$	$x_4 = 0$
Ausnutzung Budget	5	11	23	25	25

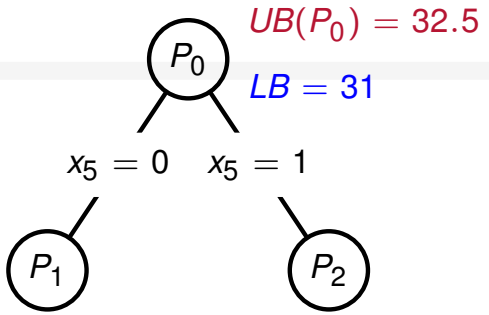
Bearbeitung von P_0

	1	2	3	4	5
u_j	10	9	12	5	9
w_j	5	6	12	10	12
$\frac{u_j}{w_j}$	2	1.5	1	0.5	0.75

Liste aktiver Probleme: $L = (P_0)$

Bearbeitetes Problem: P_0, wegen LIFO-Regel

- Löse Relaxierung P_0^R mit $0 \leq x_i \leq 1, \forall i$:
  $x^*(P_0^R) = (1, 1, 1, 0, 1/6)$ mit $z^*(P_0^R) = 32.5$, d.h. $UB(P_0) = 32.5$
- (Optional:) Lower Bound? Wert von x_5 kann auf 0 abgerundet werden, $LB = f(1, 1, 1, 0, 0) = 31$
- Prüfe Auslotung von P_0: $UB(P_0) > LB$ (daher nicht **Fall a**) und Lsg $(1, 1, 1, 0, 1/6)$ ist zulässig für P_0^R (daher nicht **Fall c**) aber nicht für P_0 (daher nicht **Fall b**). P_0 ist zu verzweigen und zwar anhand von x_5.



Liste aktiver Probleme $L = (P_2, P_1)$ (Reihenfolge bei Handrechnung nicht eindeutig!)

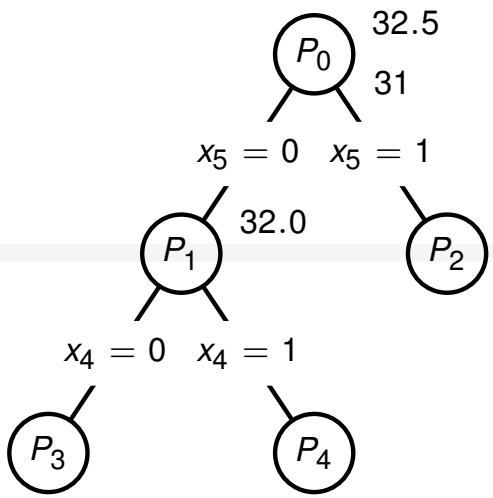
Bearbeitung von Teilproblem P_1

	1	2	3	4	5
u_j	10	9	12	5	9
w_j	5	6	12	10	12
u_j / w_j	2	1.5	1	0.5	0.75

Liste aktiver Probleme: $L = (P_2, P_1)$

Bearbeitetes Problem: P_1, wegen LIFO

- Löse Relaxierung P_1^R (P_0 mit $x_5 = 0$):
  $x^*(P_1^R) = (1, 1, 1, 1/5, 0)$ mit $z^*(P_1^R) = 32.0$, d.h. $UB(P_1) = 32.0$
- Prüfe Auslotung: P_1 ist **nicht auslotbar**, weil $UB(P_1) > LB$ und $x^*(P_1^R)$ unzulässig für P_0. Verzweige P_1 anhand von x_4.



Liste aktiver Probleme $L = (P_2, P_4, P_3)$

Bearbeitung von Teilproblem P_3

	1	2	3	4	5
u_j	10	9	12	5	9
w_j	5	6	12	10	12
u_j / w_j	2	1.5	1	0.5	0.75

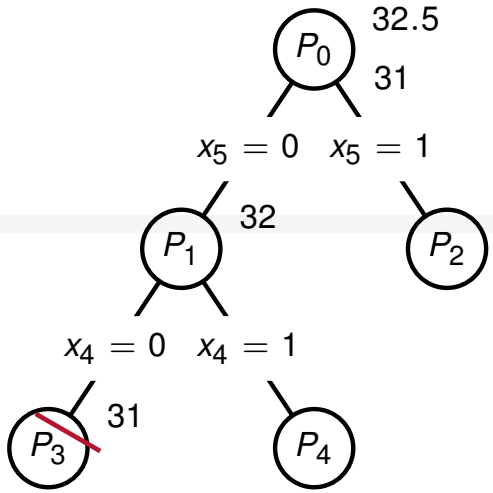
Liste aktiver Probleme: $L = (P_2, P_4, P_3)$

Bearbeitetes Problem: P_3 (P_0 mit $x_5 = 0, x_4 = 0$), wegen LIFO

- Löse Relaxierung P_3^R :

  $x^*(P_3^R) = (1, 1, 1, 0, 0)$ mit $z^*(P_3^R) = 31.0$, d.h. $UB(P_3) = 31$

- Prüfe Auslotung: $UB(P_3) \geq LB$ und Lsg (1,1,1,0,0) ist ganzzahlig (d.h. zulässig für P_0. Fall b trifft zu, das Teilproblem P_3 wurde optimal gelöst und ist *auslotbar*. (LB aktualisieren)



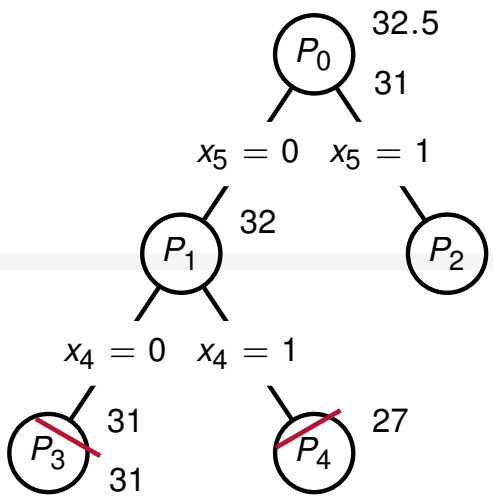
Bearbeitung von Teilproblem P_4

	1	2	3	4	5
u_j	10	9	12	5	9
w_j	5	6	12	10	12
u_j / w_j	2	1.5	1	0.5	0.75

Liste aktiver Probleme: $L = (P_2, P_4)$

Bearbeitetes Problem: P_4 (P_0 mit $x_5 = 0, x_4 = 0$), wegen LIFO-Regel

- Löse Relaxierung P_4^R:
  $x^*(P_4^R) = (1, 1, 1/3, 1, 0)$ mit $z^*(P_4^R) = 27$, d.h. $UB(P_4) = 27.0$
- Prüfe Auslotung: $UB(P_4) \leq LB$ gilt, d.h. P_4 *ist auszuloten*, da es keine bessere Lösung als die bislang beste Lösung enthalten kann (Fall a).



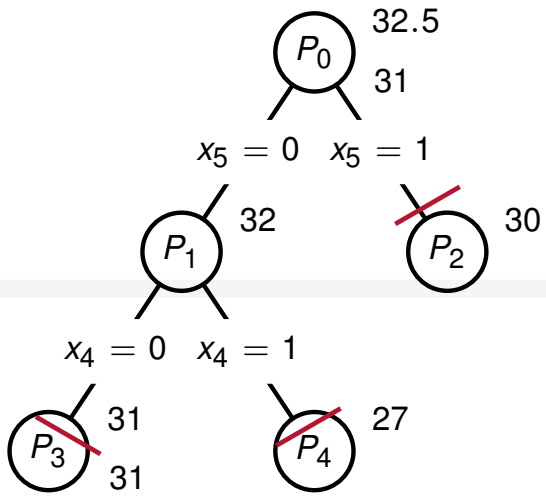
Bearbeitung von Teilproblem P_2

	1	2	3	4	5
u_j	10	9	12	5	9
w_j	5	6	12	10	12
u_j/w_j	2	1.5	1	0.5	0.75

Liste aktiver Probleme: $L = (P_2)$

Bearbeitetes Problem: P_2 (P_0 mit $x_5 = 1$), wegen LIFO-Regel

- Löse Relaxierung P_2^R:
  $x^*(P_2^R) = (1, 1, 1/6, 0, 1)$ mit $z^*(P_2^R) = 30.0$, d.h. $UB(P_2) = 30.0$
- Prüfe Auslotung: P_2 *ist auslotbar*, weil $UB(P_2) < LB$ (Fall a).



Es gibt nun keine aktiven Probleme mehr. Die bislang beste Lösung $x^*(P_3) = (1, 1, 1, 0, 0)$ muss optimal sein!

Zusammenfassung & Ausblick

LogDynamics

Fragen zur Wiederholung:

- Wie wird ein IP/MIP mittels Branch-and-Bound Verfahren gelöst?
- Was funktioniert die Zerlegung in Teilprobleme (*Branching*) und die Bestimmung einer Untersuchungsreihenfolge der Teilprobleme (*Bounding*), insb. Auslotung?

Klausurrelevante Literatur

Branch-and-Bound-Verfahren Lösung von IP/MIP mit **Branch & Bound**, siehe Domschke/Drexler Kapitel 6.4, 6.5

Ausblick

- Tutorium: Modellierung **ganzzahliger** Optimierungsprobleme
- Vorlesung: Heuristische Verfahren zur Lösung von kombinatorischen Optimierungsproblemen, siehe Domschke/Drexler Kapitel 6.2, 6.6.1 oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 6 oder Suhl/Mellouli Kapitel 8.1, 8.2, 8.4

Teil X

Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung III – Heuristische Verfahren

Inhalt der Vorlesung

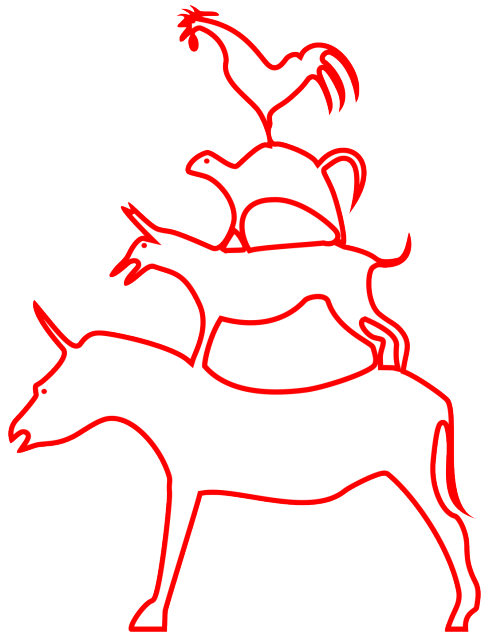
Wiederholung

Das kapazitierte Tourenplanungsproblem (CVRP)

Heuristische Lösungsverfahren

Konstruktionsheuristiken
- Nächster-Nachbar-Heuristik für das TSP
- Sukzessives-Einfügen für das TSP
- Savings-Verfahren für das CVRP
- Sweep-Verfahren für das CVRP

Nachbarschaftssuchverfahren



Branch & Bound Verfahren

Input : Ganzzahliges Problem P_0

1 Bestimme LB anhand initialer Lösung (optional)
2 Löse die Relaxierung P_0^R von P_0
3 **if** P_0 *ist ausgelotet* **then**
4 $L := \emptyset$ `// L ist eine Liste mit aktiven Teilproblemen`
5 **else**
6 $L := \{P_0\}$
7 **while** $L \neq \emptyset$ **do**
8 Wähle ein aktives Problem P_k aus L, setze $L := L \setminus \{P_k\}$.
9 Löse die Relaxierung P_k^R von P_k
10 **if** P_k *ist ausgelotet* **then**
11 $L := L \setminus \{P_k\}$
12 **else**
13 Verzweige P_k und füge die entstehenden Teilprobleme zu L hinzu.

Output: Optimale Lösung x^* und optimaler Wert LB von P_0

Auslotung

Problem P_i heißt ausgelotet und muss nicht verzweigt werden, falls:

a. $UB(P_i) \leq LB(P_0)$ – Ausloten wg. Bound

   Der optimale Wert von P_i ist schlechter als der beste bislang gefundene Wert

b. $UB(P_i) > LB(P_0)$ und $x^*(P_i^R) \in \mathbb{M}(P_0)$ – Ausloten wg. Optimalität

   Das Teilproblem P_i wurde optimal gelöst, zugleich ist die gefundene Lösung besser als die beste bislang bekannte Lösung.

c. $\mathbb{M}(P_i^R) = \emptyset$ – Ausloten wg. Unzulässigkeit

   Für das relaxierte Problem P_i^R gibt es keine zulässige Lösung, daher gibt es auch für P_i keine.

Komponenten Spezifikation des B&B

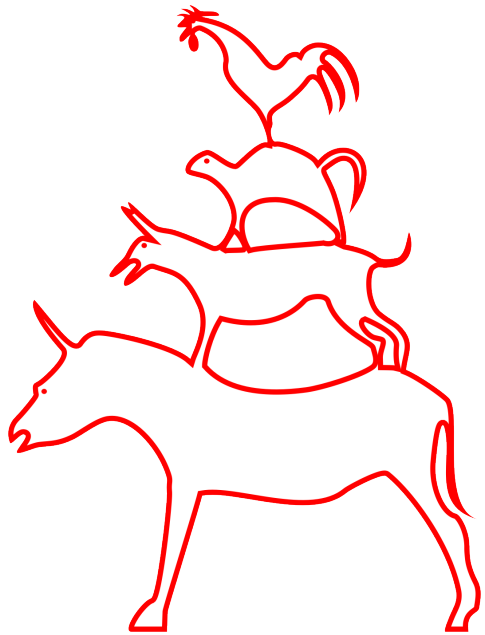
Welches Teilproblem soll als nächstes verzweigt werden?

- Last-in, first-out (LIFO-Regel): das zuletzt der Liste L hinzugefügte Problem wird verzweigt.
- Maximum-upper-bound (MUB-Regel): das aktive Problem P_i mit dem größten $UB(P_i)$ wird verzweigt.

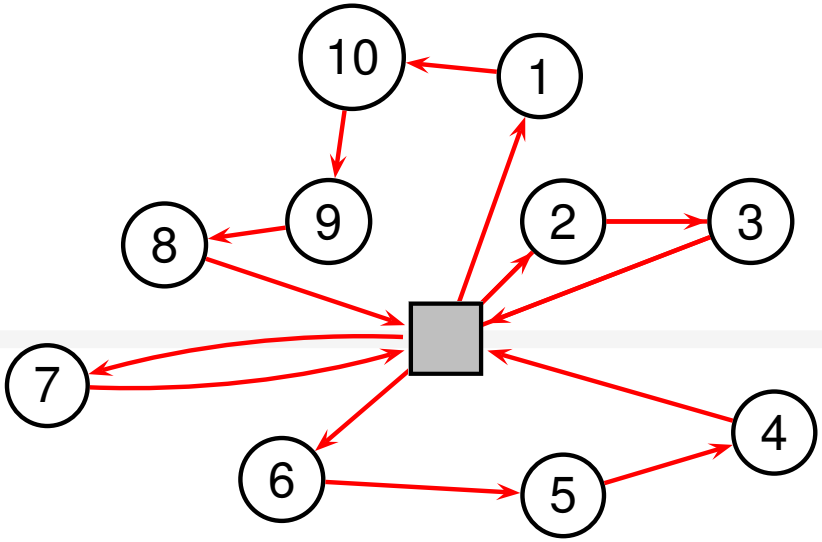
Wie soll ein Problem verzweigt werden? Bei LP-Relaxierung:

- Verzweige beliebige nicht-ganzzahlige Variable x_i^R, mit $x_i \leq \lfloor x_i^R \rfloor$ bzw. $x_i \geq \lceil x_i^R \rceil$
- Verzweige Variable mit kleinsten nicht-ganzzahligen Anteil

Inhalt der Vorlesung



Terminologie der Tourenplanung



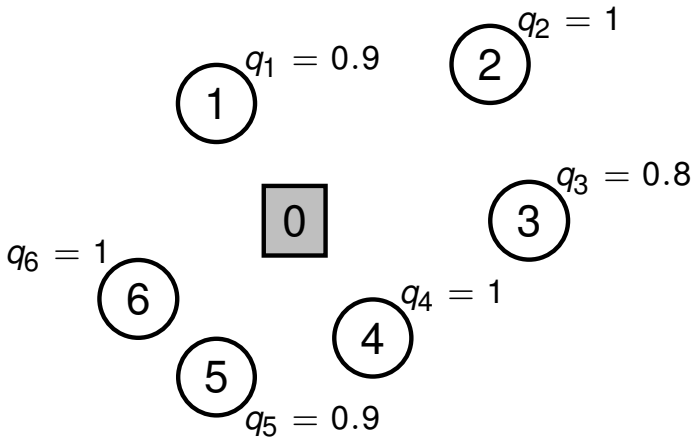
Depot: Knoten, an dem Fahrzeuge stationiert sind. Im Depot beginnt und endet eine Fahrt.

Tour: Menge aller Kunden, die in derselben Fahrt anzufahren sind.

Route: Reihenfolge, in der die Kunden einer Tour zu bedienen sind.

Tourenplan: Menge aller Touren und zugehöriger Routen, die alle Restriktionen erfüllen = zulässige Lösung eines Tourenplanungsproblems.

- Knoten $1, \ldots, n$ sind Kunden(-standorte) i mit einer Nachfrage $q_i > 0$.
- Im Depot (Knoten 0, $q_0 = 0$) stehen ausreichend viele identische Fahrzeuge mit Fahrzeugkapazität Q bereit.
- Die Nachfrage eines Kunden ist durch genau ein Fahrzeug zu bedienen.
- Eine Fahrzeugtour startet und endet im Depot; die in einer Tour bediente Kundennachfrage darf Q nicht übersteigen.
- Bediene alle Kunden und minimiere Gesamtwegstrecke aller Touren.



Distanzmatrix (c_{ij}):

	0	1	2	3	4	5	6
0	–	20	30	30	20	50	35
1		–	30	45	35	65	45
2			–	30	45	75	55
3				–	35	70	60
4					–	35	25
5						–	25
6							–

Anwendung

Auslieferung von Gütern zu Kunden

- Büroartikel
- Auslieferung neuer PKW zum Autohändler
- Weihnachtsgeschenke durch Weihnachtsmann (zur Not auch DHL, UPS, . . .)
- Essen-auf-Rädern
- Telekom-Techniker zur Freischalten des DSL-Anschlusses

Einsammeln von Gütern

- Einsammeln von Milch
- Entleerung Dixi-Toiletten

Müllabfuhr? Briefträger? Straßenreinigung? $\rightarrow$ kantenorientierte Modelle

Mögliche Erweiterungen des CVRP

- Heterogener Fuhrpark
- Zeitfenster, in denen Belieferung erfolgen muss
- Einsammeln und Ausliefern gleichzeitig (Pickup-and-Delivery)
- Rechtsabbiegen bevorzugen
- Minimierung Treibstoffverbrauch
- Arbeitszeit Fahrer, Lenk- und Ruhezeiten

Inhalt der Vorlesung

Was sind Heuristiken?

Heuristiken berechnen für ein Optimierungsproblem i.d.R. gute aber nicht notwendigerweise optimale Lösungen.

- Im Gegensatz zu einem Branch-and-Bound-Verfahren
  - garantiert eine Heuristik weder das Finden einer optimalen Lösung,
  - noch erfolgt ein Optimalitätsbeweis.
  - Zudem sind Heuristiken problemspezifisch.
- Bei Heuristiken handelt es sich lediglich um plausible und erfolgsversprechende Vorgehensregeln.
- Heuristiken erfreuen sich bei Unternehmen großer Beliebtheit.

Heuristiken berechnen in der Regel
KEINE optimale Lösung!

Fragestellung

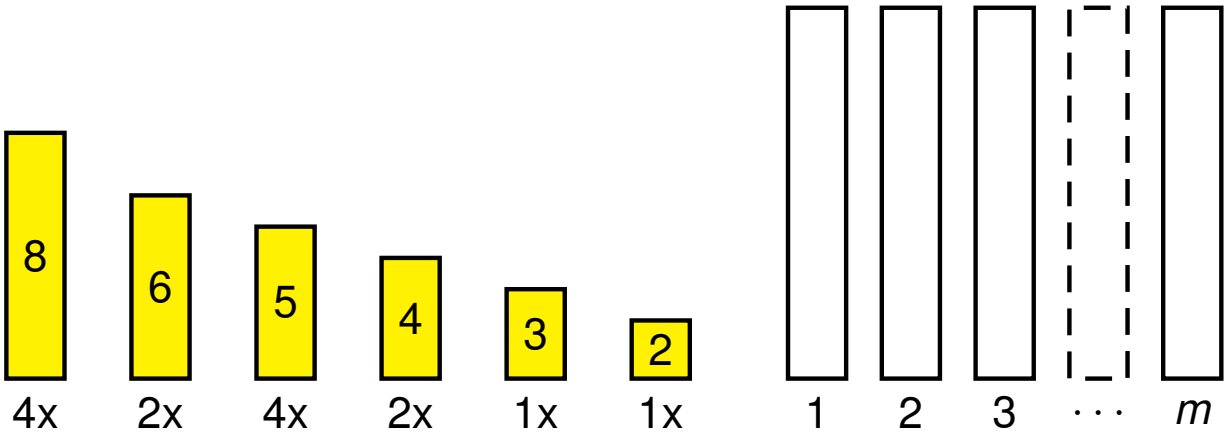
Wie viele Fahrzeuge benötigt man im CVRP mindestens, um alle Kunden zu bedienen?

Gegeben: Eine Menge $J = \{1, \ldots, n\}$ von n unteilbaren Objekten mit einer individuellen Größe von w_i, $(i = 1, \ldots, n)$ sowie m Behältern (bins) mit identischer Kapazität $c \geq w_i$, $(i = 1, \ldots, n)$.

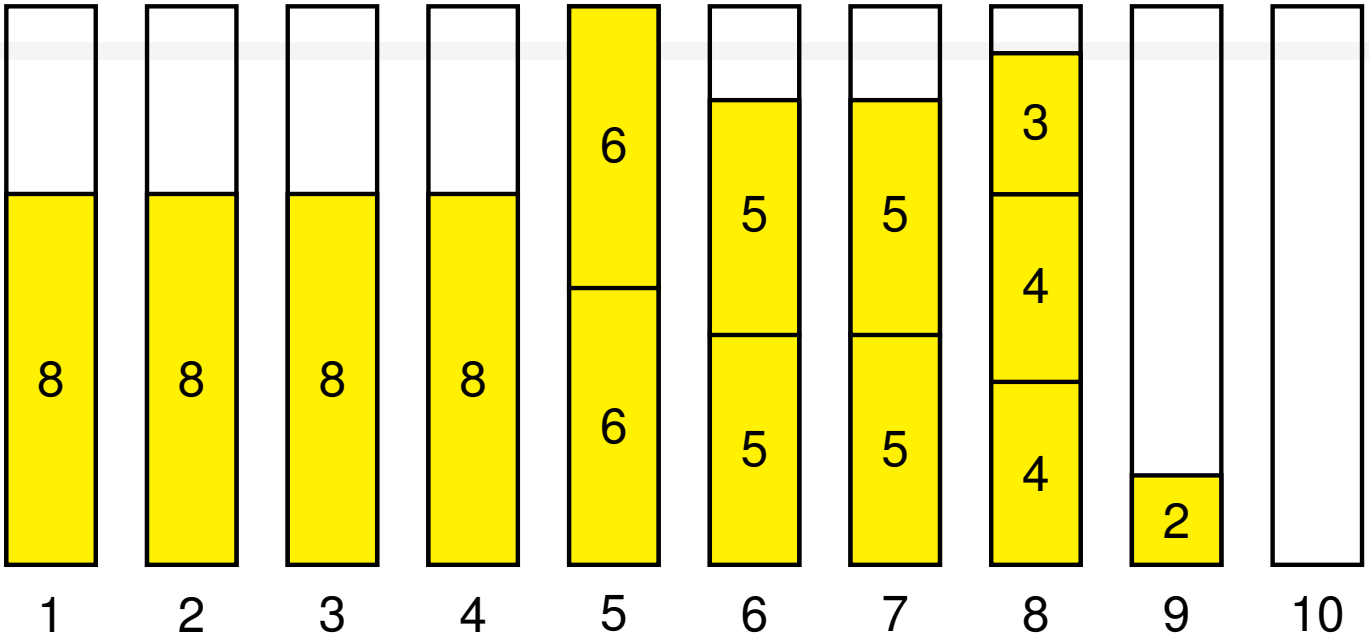
Gesucht: Die minimale Anzahl von Bins, so dass jedes Objekt aus J in einen Behälter gepackt ist, wobei die Gesamtlänge aller Objekte in einem Bin die Bin-Kapazität nicht übersteigen darf.

Beispiel-Probleminstanz

$c = 12, n = 14, w = (8, 8, 5, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 4, 4, 2)$



Gegeben:
Bins der Länge 12, vierzehn Objekte der Längen 8, 8, 5, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 4, 4, 2.
Sortiere Objekte in nicht-aufsteigender Reihenfolge ihrer Länge:
8, 8, 8, 8, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2



Rechtfertigung für den Einsatz von Heuristiken

Heuristiken garantieren keine optimale Lösung, warum werden sie dennoch eingesetzt?

1. Berechnung von Bounds in Branch-and-Bound-Verfahren
2. Komplizierte Realität wird durch vereinfachtes Modell abgebildet. Ist die optimale Lösung eines vereinfachten Modells eine besser Lösung der realen Problemstellung als eine Näherungslösung?
3. Die im Modell verwendeten Parameterwerte sind häufig ungenau oder unbekannt.
4. Die in der Realität verfügbare Zeit zur Berechnung einer optimalen Lösung ist zu kurz. Näherungslösung besser als gar keine Lösung.

Klassifikation von Heuristiken

Eröffnungsverfahren / Konstruktionsheuristiken

- Greedy-Heuristiken
- Vorausschauende Heuristiken

Verbesserungsverfahren / Nachbarschaftssuchverfahren

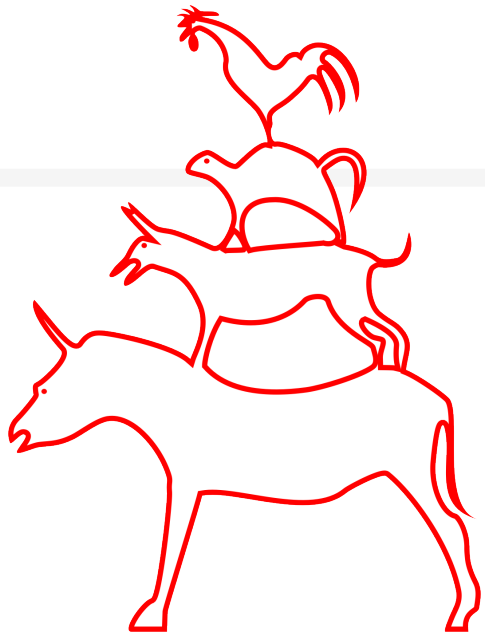
- r-opt (2-opt, 3-opt, . . .)
- r-exchange
- . . .

Metaheuristiken

- Genetische Algorithmen
- Variable Nachbarschaftssuche
- Matheuristiken
- . . .

Inhalt der Vorlesung

Konstruktionsheuristiken
- Nächster-Nachbar-Heuristik für das TSP
- Sukzessives-Einfügen für das TSP
- Savings-Verfahren für das CVRP
- Sweep-Verfahren für das CVRP



Greedy-Konstruktionsheuristik 1/2

engl. greedy = gierig, hier auch kurzsichtig

Charakteristika:
Den Entscheidungsvariablen werden sukzessive Werte zugewiesen.

Bei jeder Wertzuweisung wird jedesmal die größtmögliche Verbesserung (Maximierung) bzw. kleinstmögliche Verschlechterung (Minimierung) der Zielfunktion angestrebt (daher gierig).

Einmal erfolgte Wertzuweisung an Variablen werden nicht revidiert.

Vorteil: schnelles und meist einfach nachvollziehbares Verfahren

Nachteil: meist nur mäßige Lösungsgüte

Greedy-Konstruktionsheuristiken 2/2 – Ablauf

LogDynamics

Üblicher Ablauf einer Greedy-Konstruktionsheuristik:

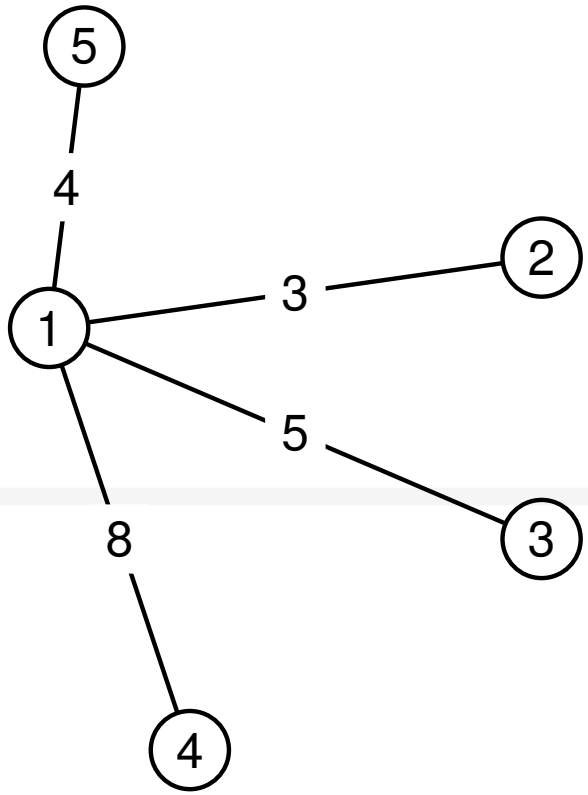
1. Beginne mit einer unzulässigen Lösung x, i.d.R. $x = \emptyset$.
2. Wiederhole 2.1 und 2.2 solange, bis x zulässig ist:
   - 2.1 Bewerte jede Komponente mit einem Greedy-Kriterium
   - 2.2 Wähle die gierigste Komponente (größtmöglichen Lösungsverbesserung) und füge diese x hinzu

Problemspezifische Entwurfsentscheidungen:

Was ist eine Komponente?

Wie misst man die Gier einer Komponente?

Nächster-Nachbar-Heuristik für das TSP 1/2 – Beispiel



Distanzmatrix D für $n = 5$ Städte.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 10 & 8 \\ 8 & 5 & 10 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Ablauf Nächster-Nachbar-Heuristik:

Iteration	Vorläufige Rundreise
1	$(1, 2, 1)$
2	$(1, 2, 5, 1)$
3	$(1, 2, 5, 4, 1)$
4	$(1, 2, 5, 4, 3, 1)$

Länge gefundene Tour: 27
minimale Tourlänge: 26

Nächster-Nachbar-Heuristik für das TSP 2/2

LogDynamics

Verfahren des nächsten Nachbarn für das TSP

Input : Symmetrisches Traveling Salesman Problem mit n Städten und Distanzmatrix D

1 **begin**

2 Wähle $s_0 := s_n \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig als Start und Ziel der Rundreise

3 **for** $i := 1$ **to** $n - 1$ **do**

4 Bestimme s_i als diejenige Stadt, die am nächsten an s_{i-1} liegt und noch nicht in der Rundreise enthalten ist.

Output: Rundreise $(s_0, s_1 \ldots, s_n)$ mit $s_0 = s_n$

Vorausschauende Heuristiken

Analogie zu Greedy-Heuristiken:

- Sukzessive Zuweisung von Werten zu Entscheidungsvariablen.

Abweichung von Greedy-Heuristiken:

- Die Konsequenzen einer Entscheidung, d.h. setzen eines Wertes für eine Variable, auf zukünftige Entscheidungen werden abgeschätzt.
- Entscheidungen können revidiert werden, d.h. ein einmal zugewiesener Wert zu einer Entscheidungsvariable kann sich im Verfahrensverlauf wieder ändern.

Vorteil: bessere Lösungen als reines Greedy-Vorgehen

Nachteil: höherer Rechenaufwand als Greedy-Verfahren

Sukzessives-Einfügen für das TSP 1/2

LogDynamics

Verfahren des sukzessiven Einfügens für das TSP

Input : Symmetrisches Traveling Salesman Problem mit n Städten und Distanzmatrix D

1 **begin**

2 Wähle zwei Städte s_0 und s_1, die am weitesten voneinander entfernt sind und setze $S := (s_0, s_1, s_0)$

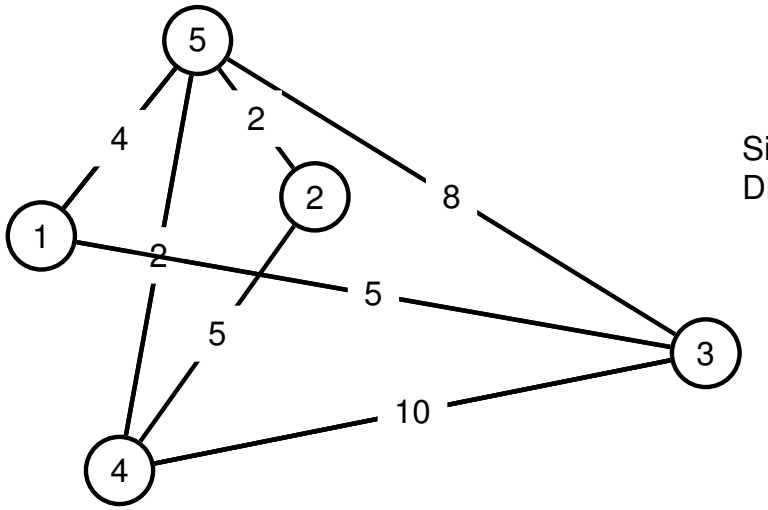
3 **for** $i := 2$ **to** $n - 1$ **do**

4 Bestimme s_i als diejenige Stadt, deren kleinste Entfernung zu einer Stadt in S am größten ist.

5 Füge s_i so in S ein, dass die Länge von S am wenigsten zunimmt.

Output: Rundreise S

Sukzessives-Einfügen für das TSP 2/2 – Beispiel



Siehe animierte Folie!
Distanzmatrix wie bei Nächster-Nachbar-Bsp.:

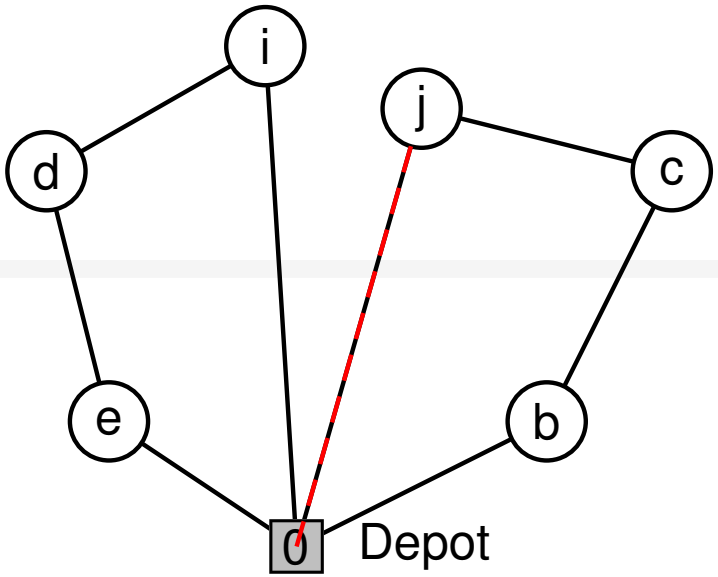
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 10 & 8 \\ 8 & 5 & 10 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteration	Gewählter Knoten s_i	Einfügetest	Länge
1	$s_2 = 5$	**(3,5,4,3)**	**25**
		(3,4,5,3)	25
2	$s_3 = 1$	**(3,1,5,4,3)**	**26**
		(3,5,1,4,3)	29
		(3,5,4,1,3)	28
3	$s_4 = 2$	(3,2,1,5,4,3)	31
		(3,1,2,5,4,3)	27
		(3,1,5,2,4,3)	**26**
		(3,1,5,4,2,3)	28

Savings-Verfahren — Idee

Berechne die durch Vereinigung von zwei Touren eingesparte Wegstrecke (saving)

Einsparung durch Vereinigung der beiden Touren: $s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$



- Zwei Touren $(0, e, d, i, 0)$ und $(0, j, c, b, 0)$ mit Kanten $\{0, i\}$ und $\{0, j\}$
- Entferne Kante $\{0, i\}$ und $\{0, j\}$ und füge Kante $\{i, j\}$ hinzu
- Kombination der Touren nur möglich, falls Kundenbedarf der Tour $\leq$ Fahrzeugkapazität

Savings-Verfahren nach 2/3 – Pseudocode

LogDynamics

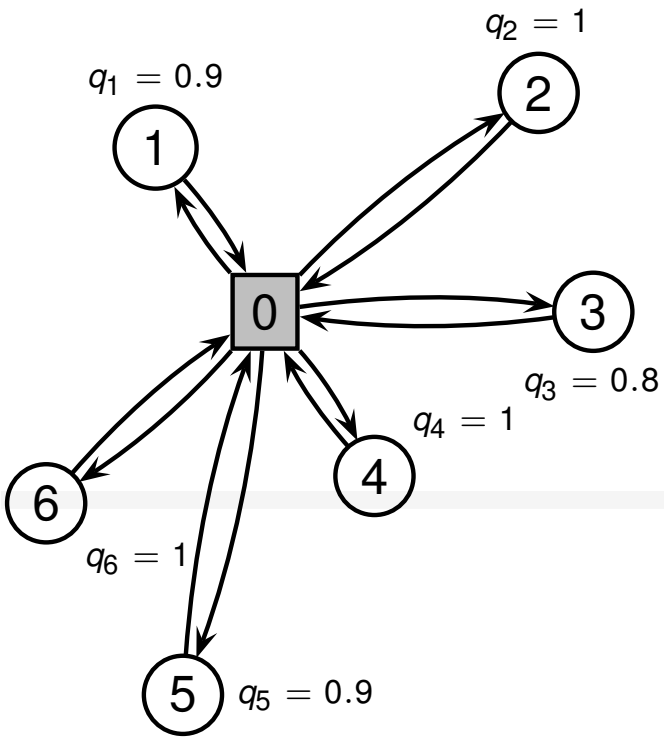
1. Berechne Savings-Werte s_{ij} für alle Kundenpaare i, j :

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$$

   Konstruiere Pendeltouren (0,i,0), $i = 1, \ldots, n$
2. Betrachte (und lösche) Kundenpaar i, j mit größtem Saving s_{ij}.
3. Bediene Kunde i und Kunde j in einer neuen, einzigen Tour, falls:
   - Beide Kunden i und j sind Endkunden verschiedener Touren. Die eine Tour enthält also die Kante $(0, i)$ und die andere Tour enthält die Kante $(0, j)$.
   - Gesamtbedarf der neuen Tour $\leq Q$.

   Weiter mit Schritt 2, bis alle $s_{ij} > 0$ betrachtet wurden.

Savings-Verfahren für das CVRP 3/3 – Beispiel



Distanzmatrix (c_{ij})

	0	1	2	3	4	5	6
0	–	20	30	30	20	50	35
1		–	30	45	35	65	45
2			–	30	45	75	55
3				–	35	70	60
4					–	35	25
5						–	25
6							–

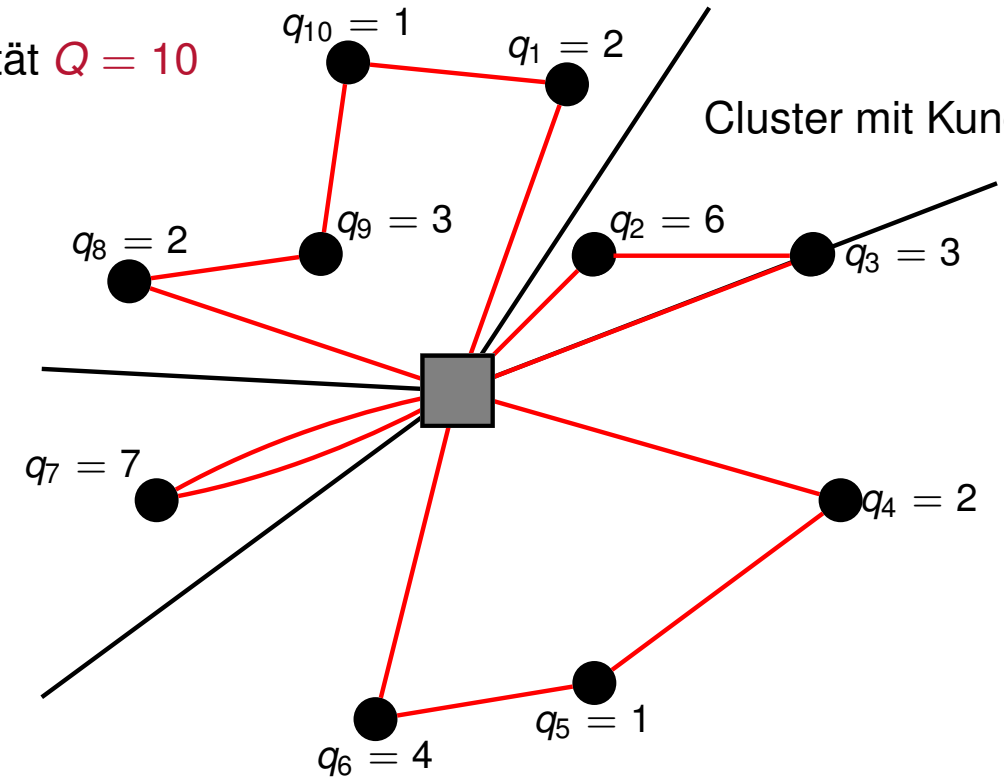
Savingsmatrix (s_{ij})

Fahrzeugkapazität $Q = 3$

Gesamtlänge der Touren: 370, Anzahl der Touren: 6

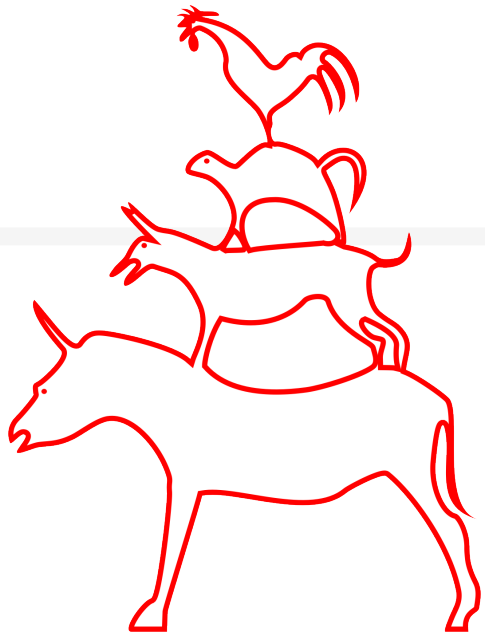
Sweep-Verfahren für das CVRP

Fahrzeugkapazität $Q = 10$



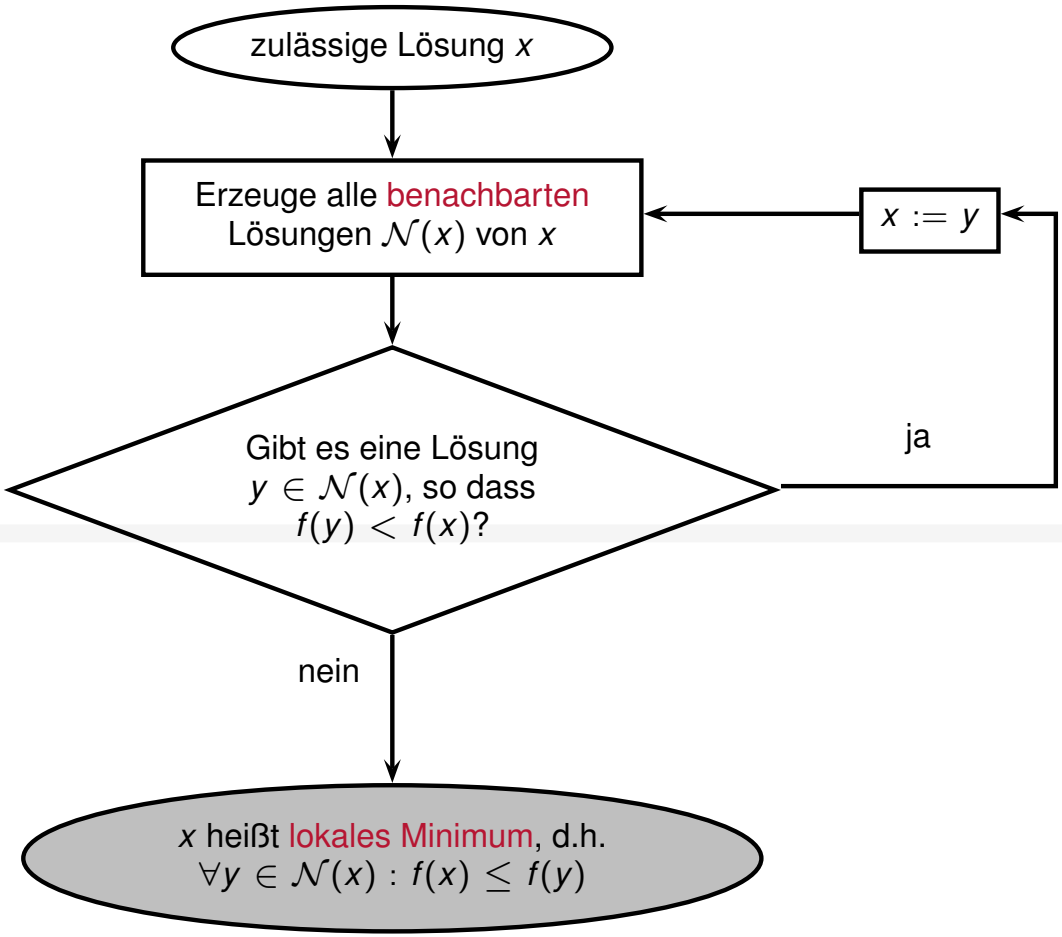
1. Wähle beliebigen Startknoten.
2. Füge nächsten Kunden (entgegen Uhrzeigersinn) zu Cluster hinzu, falls Kapazität $\leq Q$. Beginne andernfalls neuen Cluster.
3. Löse für Knoten jedes Clusters ein TSP, z.B. mit Nächster-Nachbar Heuristik oder Branch-and-Bound.

Inhalt der Vorlesung



Nachbarschaftssuche für ein Minimierungsproblem 1/2

Begriff des lokalen Minimums



Nachbarschaftssuche für ein Minimierungsproblem 2/2

LogDynamics

- **Synonyme:** Lokale Suche oder Verbesserungsverfahren
- **Voraussetzung:** eine bekannte zulässige Lösung $x = (x_1, \ldots, x_n)$
- Alle Lösungen, die durch Anwendung eines Zugs auf x entstehen, heißen Nachbarschaft $\mathcal{N}(x)$ von x.
- Ein Zug (engl. move) ist eine Vorschrift, wie die Werte von $(x_1, \ldots, x_n)$ zu ändern sind.
- Ein Zug ändert nur wenige Werte von $(x_1, \ldots, x_n)$, daher nennt man die entstehenden Lösungen Nachbarn von x.
- Gibt es in der Nachbarschaft $\mathcal{N}(x)$ von x eine bessere Lösung, wird diese als neue Ausgangslösung gewählt.
- Gibt es keine bessere Lösung, dann heißt x lokales Minimum und die Suche stoppt.

Ein einfacher Zug für das Rucksackproblem 1/2

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 8 \qquad x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

Die zulässigen Startlösung sei $x = (1,0,1,1,0)$.

Zug A: **Ändere den Wert genau einer binären Variable**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$	
Ausgangslösung x	1	0	1	1	0	10	
x^1	0	0	1	1	0	$10-3=7$	
x^2	1	1	1	1	0	$10+6=16$	**unzulässige Lsg!**
x^3	1	0	0	1	0	$10-3=7$	
x^4	1	0	1	0	0	$10-4=6$	
x^5	1	0	1	1	1	$10+2=12$	

Die Lösung x hat folgende Nachbarschaft: $\mathcal{N}(1,0,1,1,0) = \{x^1, x^3, x^4, x^5\}$.

Ein einfacher Zug für das Rucksackproblem 2/2

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = 3x_1+6x_2+3x_3+4x_4+2x_5 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+4x_2+2x_3+3x_4+2x_5 \leq 8 \qquad x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

Die zulässigen Startlösung sei $x = (1,0,1,1,0)$.

Zug B: **Tausche einen Gegenstand mit $x_i = 1$ gegen einen mit $x_j = 0$**

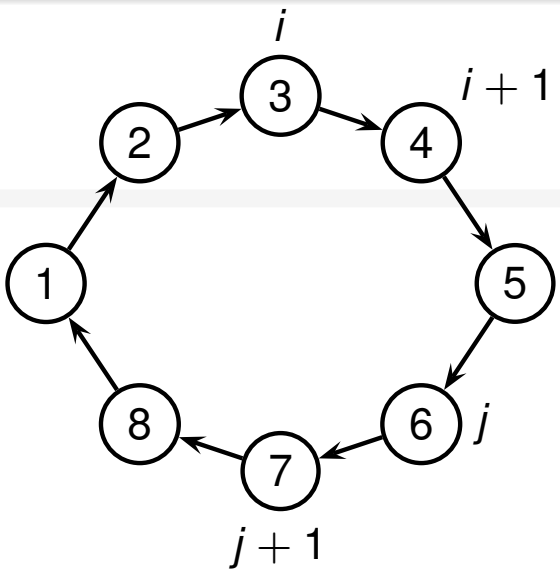
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$	
Ausgangslösung x	1	0	1	1	0	10	
x^1	0	1	1	1	0	10-3+6=13	**unzulässige Lsg!**
x^2	0	0	1	1	1	10-3+2=9	
x^3	1	1	0	1	0	10-3+6=13	
x^4	1	0	0	1	1	10-3+2=9	
x^5	1	1	1	0	0	10-4+6=12	
x^6	1	0	1	0	1	10-4+2=8	

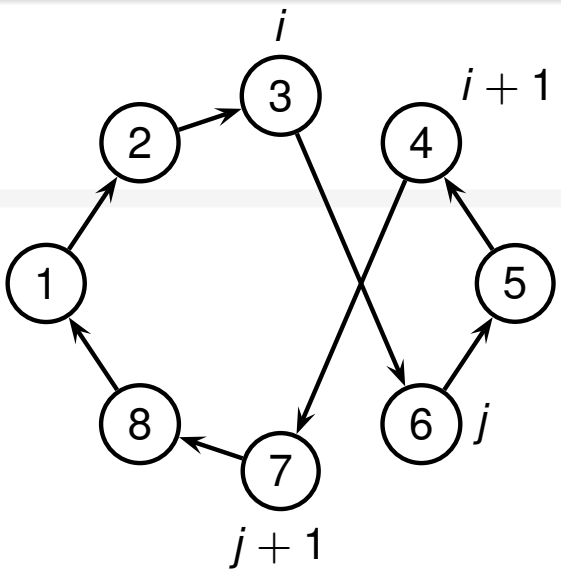
Die Lösung x hat folgende Nachbarschaft:
$\mathcal{N}(1,0,1,1,0) = \{x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$.

Die 2-opt Nachbarschaft für das TSP 1/2

2-opt Zug

1. Wähle zwei beliebige Pfeile, z.B. $(i, i+1)$ und $(j, j+1)$
2. Bilde daraus zwei neue Pfeile, nämlich (i, j) und $(i+1, j+1)$ (Endknoten des 1. Pfeils wird zu Startknoten des 2. Pfeils)
3. Kehre die Richtung aller Pfeile zwischen Knoten $i+1$ und Knoten j um.

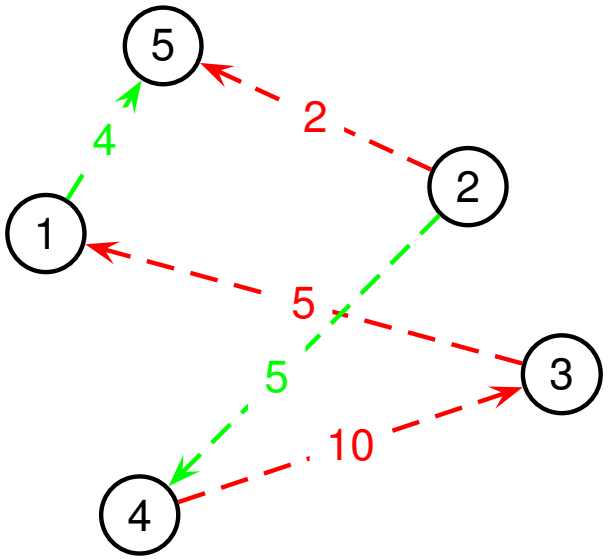




Pfeilpaar (3,4) und (6,7) wird zu (3,6) und (4,7)

Umkehrung Pfeilrichtungen, d.h. $(4, 5) \rightarrow (5, 4)$, $(5, 6) \rightarrow (6, 5)$

Die 2-opt Nachbarschaft für das TSP 2/2



Distanzmatrix D wie Nächster-Nachbar-Beispiel:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 10 & 8 \\ 8 & 5 & 10 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Nächster-Nachbar-Heuristik ergibt Tour $(1, 2, 5, 4, 3, 1)$ als Startlösung für 2-opt.

$j$te Position

Iteration	i	j	Änderung Länge	Rundreise
1	1	3	$4 + 5 - 3 - 7$=-1	$(1, 5, 2, 4, 3, 1)$
2	1	3	$3 + 7 - 4 - 5 = 1$	unverändert
	1	4	$8 + 8 - 10 - 4 = 2$	unverändert
	1	5	$5 + 4 - 4 - 5 = 0$	unverändert
	2	4	$7 + 7 - 2 - 10 = 2$	unverändert
	2	5	$8 + 3 - 2 - 5 = 4$	unverändert
	3	5	$7 + 8 - 5 - 5 = 5$	unverändert

Eine Heuristik für das CVRP

Eine Heuristik zur Lösung des CVRP könnte aus folgenden Bausteinen bestehen:

Konstruktion einer ersten zulässigen Lösung:

- **Savings**-Verfahren
- Für jede Tour: Versuche die Länge der Routen mit der **Nächster-Nachbar-Heuristik** zu verkürzen.

Nachbarschaftssuche zur Verbesserung der konstruierten Lösung:

- Für jede Tour: Anwendung von **2-opt** bis lokales Minimum erreicht.

Weitere Verbesserung im Rahmen der Nachbarschaftssuche: Vertausche Kunden zwischen zwei Touren

Umfangreiche Probleme werden häufig durch Kombination mehrere Basisheuristiken bearbeitet.

LogDynamics

Fragen zur Wiederholung:

- Wie funktionieren Konstruktionsheuristiken und Nachbarschaftssuche?
- Was bedeuten die Begriffe Lokales Minimum, Nachbarschaft, Nächster-Nachbar, Sukzessives Einfügen (TSP), Savings und Sweep (CVRP)?

Klausurrelevante Literatur

Heuristische Verfahren zur Lösung von kombinatorischen Optimierungsproblemen, siehe Domschke/Drexler Kapitel 6.2, 6.6.1 oder Nickel/Stein/Waldman Kapitel 6 oder Suhl/Mellouli Kapitel 8.1, 8.2, 8.4

Ausblick

- Tutorium: Heuristische Verfahren
- Vorlesung: Simulation, siehe Domschke/Drexler Kapitel 10 oder oder Werners Kapitel 7

Teil XI

Simulation

Wiederholung

Grundstrukturen

- Lineares Problem
- Ganzzahlige Variablen
- Logische/Mengenmäßige Verknüpfungen

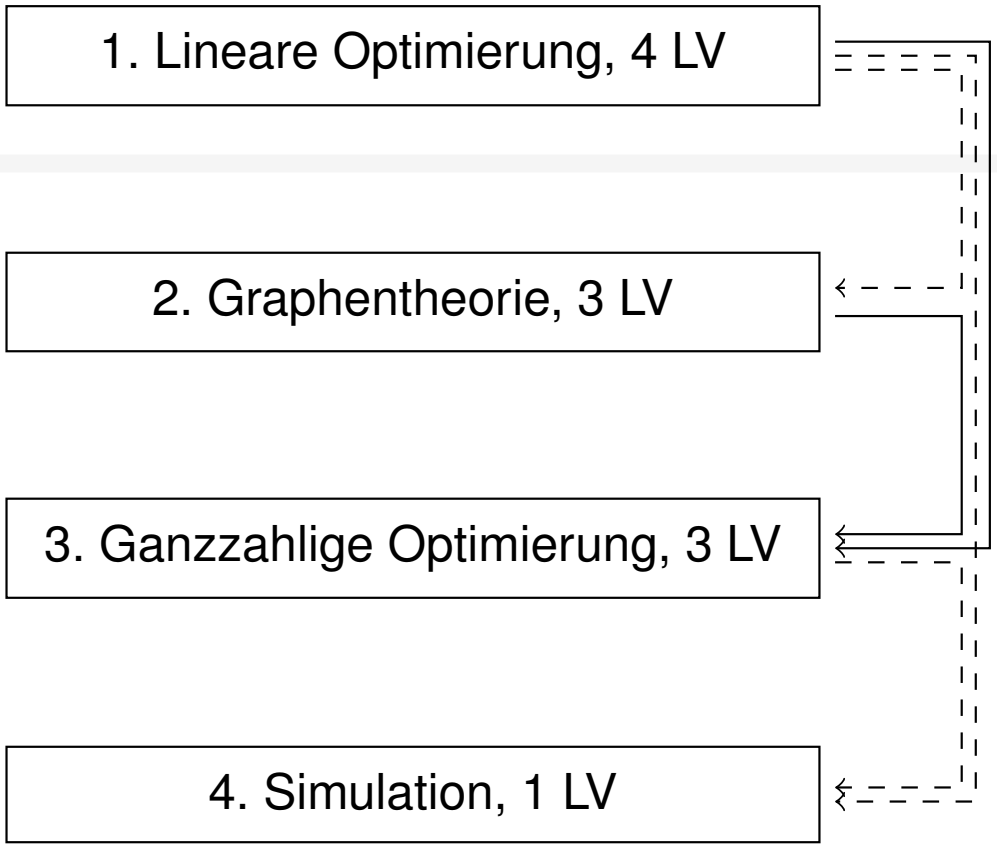
Standardprobleme

- Zuordnungsproblem
- Reihenfolgeproblem
- Gruppierungsproblem
- Auswahlproblem

Wiederholung Ganzzahlige Optimierung I – III
Algorithmen

- Branch–and–Bound Verfahren
- Nächster–Nachbar–Heuristik
- Sukzessives–Einfügen
- Savings–Verfahren
- Sweep–Verfahren

Struktur dieser Vorlesung



Inhalt der Vorlesung

Simulation: Experimentieren mit Modellen realer Systeme

Idee:

- Modellieren von Prozessen realer Systeme
- Durchführen von (Stichproben-)Experimenten

Zweck:

- Systemverhalten erklären oder gestalten, insbesondere falls es von umfangreichen stochastischen Einflüssen geprägt ist

Beispiele für den Einsatz von Simulation

Windkanal Automobilbau

Flugsimulator zur Pilotenausbildung

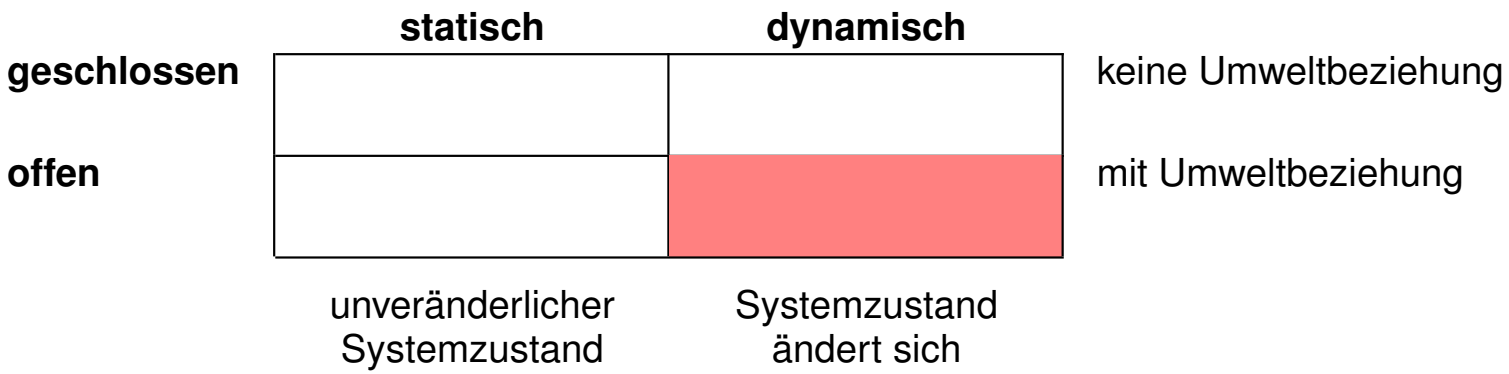
Tierversuche zur Untersuchung der Wirkung von Medikamenten

Mathematisches Modell eines Lagerhauses oder Produktionssystems

Wann bietet sich Simulation an?

- Ein vollständiges mathematisches Optimierungsmodell ist nicht verfügbar oder die Kosten zur Entwicklung sind zu hoch
- Analytische Methoden, sofern vorhanden, erfordern zu stark vereinfachende Annahmen, sodass der Kern des Problems verfälscht wird
- Analytische Methoden zu kompliziert bzw. so aufwändig, dass Einsatz nicht praktikabel erscheint
- Reale Experimente, z.B. mit Prototypen (Flugzeug, Lagersystem), zu kostspielig
- Beobachtung reales System zu gefährlich (Reaktorverhalten) oder zu zeitaufwändig (Konjunkturschwankungen)

Arten zu simulierender Systeme und Simulationsmodelle



Besonders relevant: offene & dynamische Systeme (Warteschlangen, Produktion, Warenhaus . . .)

Deterministische Simulationsmodelle

Eingangsgrößen und Parameter bestimmen eindeutig Ausgangsgrößen.

Stochastische Simulationsmodelle

Zufallseinflüsse treten im System auf, welche durch Zufallsvariablen mit Verteilungfunktionen charakterisierbar sind.

Arten der Simulation 1/3 – Monte-Carlo-Simulation

Name: Roulette in einem Spielkasino in Monte Carlo

Eigenschaften des Roulette und der Monte-Carlo-Simulation:

- Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Zahl a priori bekannt und für alle Zahlen gleich groß
- Wahrscheinleichkeit für ein bestimmte Zahl ist unabhängig von vorherigen Würfen der Kugel

Anwendung:

- Lösung von Integralen oder komplizierten Integral- und Differentialgleichungen
- Künstliche Erzeugung von Stichproben

Mit Monte-Carlo-Simulation lassen sich auch deterministische Probleme lösen!

Arten der Simulation 2/3 – Diskrete Simulation

Eigenschaften:

- Zustand wird durch zeitabhängige Variablen beschrieben
- Zustandsvariablen ändern sich bei Eintritt bestimmter Ereignisse

Typen:

- Periodenorientierte Zeitführung
- Ereignisorientierte Zeitführung

Arten der Simulation 3/3 – Kontinuierliche Simulation

LogDynamics

Eigenschaften:

- Zustandsvariablen ändern sich kontinuierlich mit der Zeit
- Modellierung typischerweise mit Differentialgleichungen

Beispiel diskrete vs. kontinuierliche Modelle

- Geschwindigkeit eines PKW ändert sich kontinuierlich bei Druck auf Gaspedal
- Kontinuierlicher Verkehrsfluss an einer Ampel aus Vogelperspektive
- Diskreter Verkehrsfluss an einer Ampel aus Fußgängerperspektive
- Diskrete Warteschlange bei Essensausgabe in einer Mensa

Inhalt der Vorlesung

Ein Maschinenbelegungsproblem 1/2

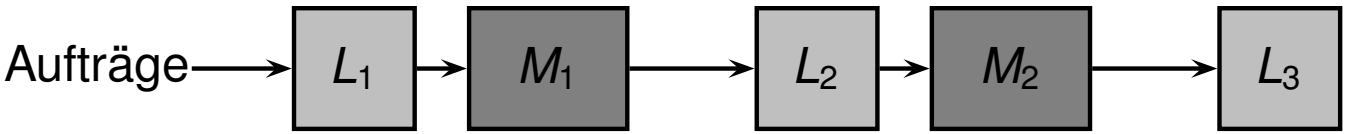
Es gibt zwei Maschinen M_1, M_2 und vier Aufträge A_1, A_2, A_3, A_4.

Bearbeitungsdauern von Aufträgen auf Maschinen:

Maschine	Auftrag			
	A_1	A_2	A_3	A_4
M_1	2	1	3	4
M_2	4	2	1	2

Ein Auftrag A_i muss zuerst mit M_1 und danach mit M_2 bearbeitet werden.

Lager L_i vor und nach jeder Maschine



Ein Maschinenbelegungsproblem 2/2

Mittels Simulation soll das dynamische Verhalten des Produktionssystems untersucht werden:

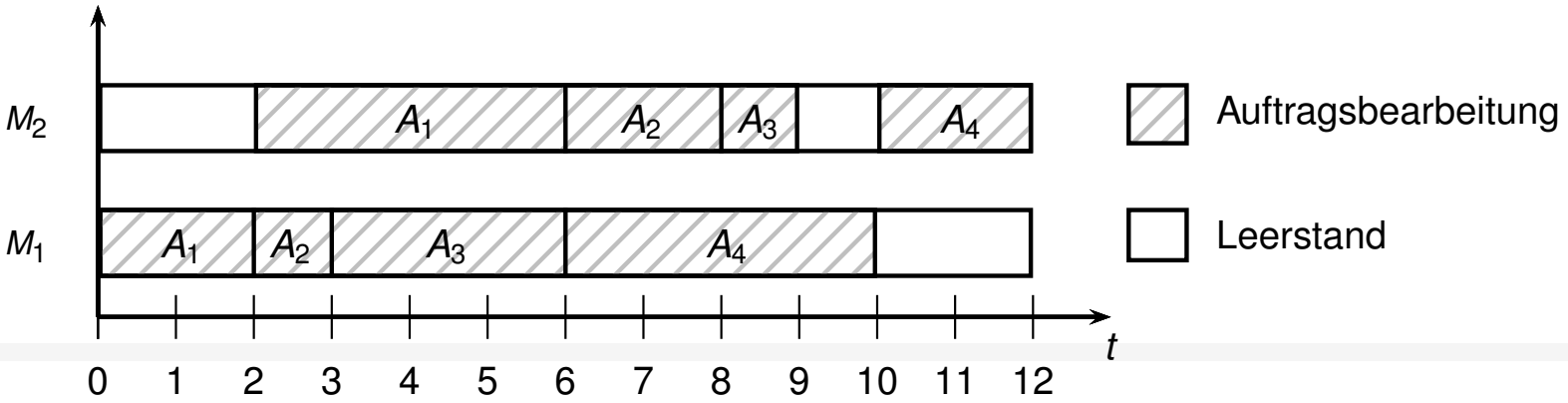
- **Variable Eingangsgrößen:** Reihenfolge, in der die Aufträge zu bearbeiten sind, z.B. A_1, A_2, A_3, A_4
- **Parameter:** Bearbeitungsdauer, z.B. Tabelle vorherige Folie
- **Ausgangsgröße:** Zeitdauer Gesamtdurchlauf, Auslastung Maschinen, durchschnittliche Wartezeit eines Auftrags vor einer Maschine

Diskrete Simulation mit periodenorientierter Zeitführung

Periode	L_1	M_1	L_2	M_2	L_3
Initialz.	A_1, A_2, A_3, A_4				
1	A_2, A_3, A_4	A_1			
2	A_2, A_3, A_4	A_1			
3	A_3, A_4	A_2		A_1	
4	A_4	A_3	A_2	A_1	
5	A_4	A_3	A_2	A_1	
6	A_4	A_3	A_2	A_1	
7		A_4	A_3	A_2	A_1
8		A_4	A_3	A_2	A_1
9		A_4		A_3	A_1, A_2
10		A_4			A_1, A_2, A_3
11				A_4	A_1, A_2, A_3
12				A_4	A_1, A_2, A_3
Endez.					A_1, A_2, A_3, A_4
Dauer	11	10	5	9	13

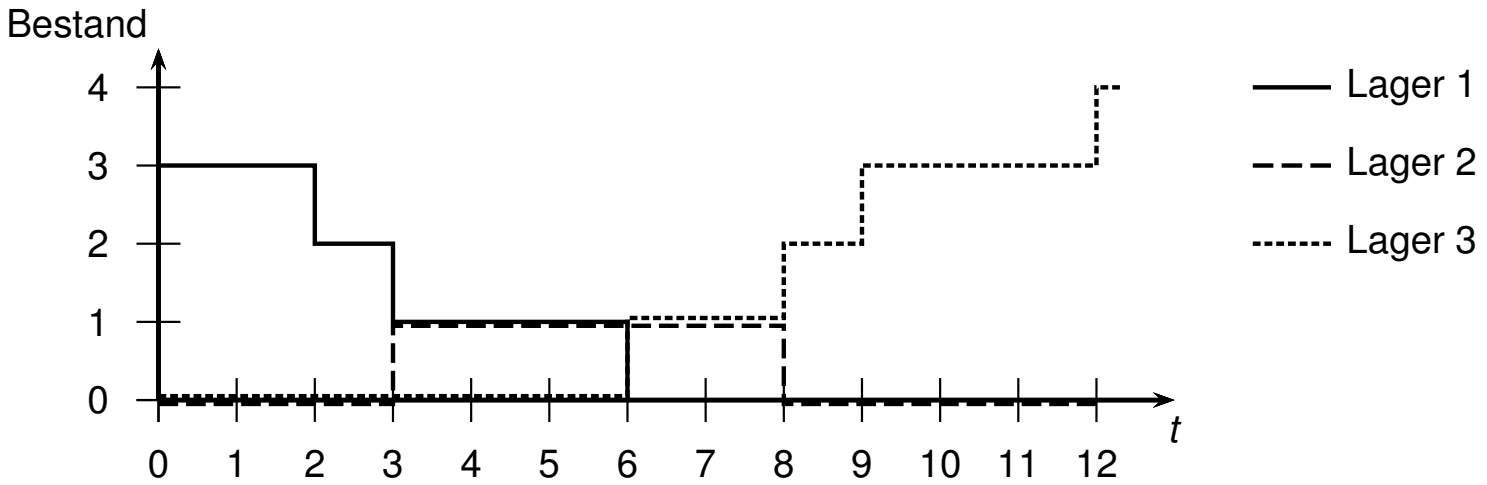
Auswertung des Simulationslaufes

Gesamtdurchlaufzeit: 12 Perioden



Auslastung M_1: $\frac{10}{12} = 83\frac{1}{3}\%$ und M_2: $\frac{9}{12} = 75\%$

$\varnothing$ Wartezeit: vor M_1: $\frac{11}{4} = 2.75$ Perioden; M_2: $\frac{5}{4} = 1.25$



Bestimmung einer Bearbeitungsreihenfolge 1/2

Aufgabe

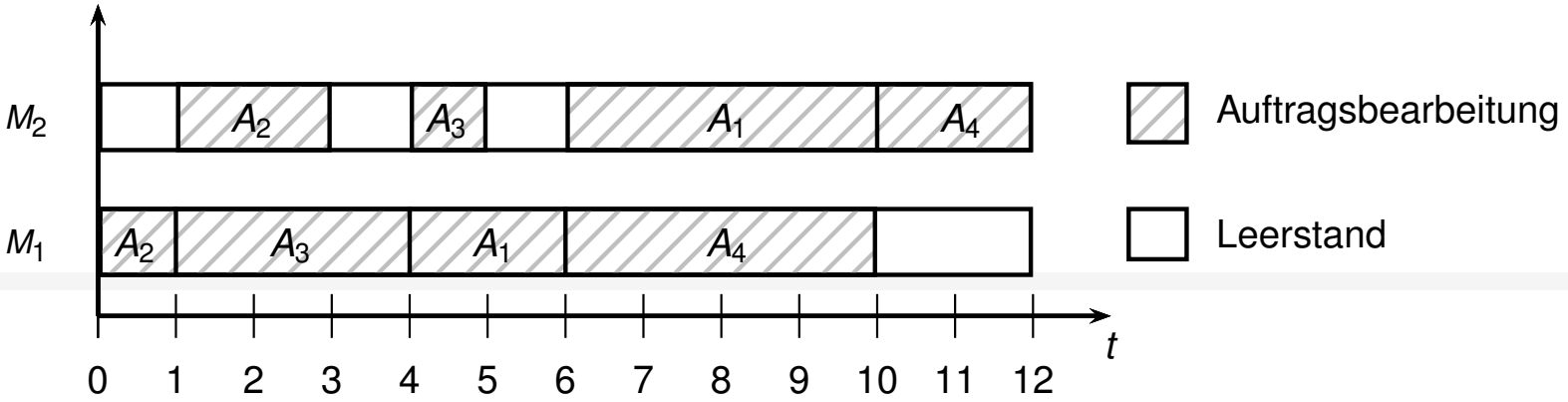
Maschinen M_1, M_2 und Aufträge A_1, A_2, A_3, A_4 wie bisher. Die Bearbeitungsreihenfolge der Aufträge erfülle jedoch nun:

Der Auftrag mit der kürzesten Bearbeitungsdauer (Operationszeit) wird als nächstes bearbeitet (KOZ-Regel).

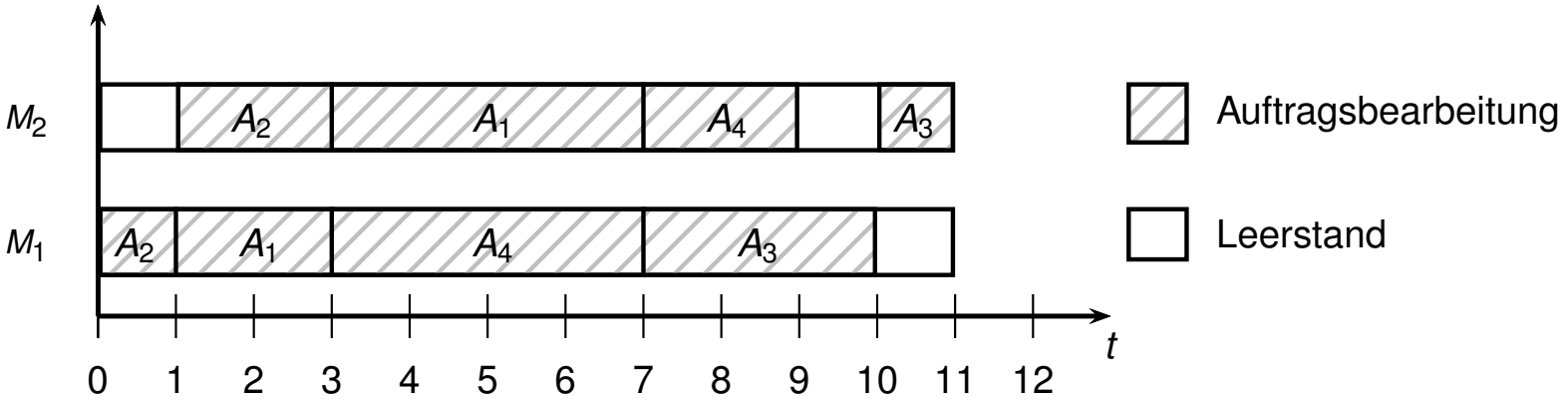
Skizzieren Sie ein Maschinenbelegungsdiagramm und geben sie die Auslastung von M_1 und M_2 an.

Bestimmung einer Bearbeitungsreihenfolge 2/2

Bearbeitungsreihenfolge: Der Auftrag mit der jeweils kürzesten Gesamtbearbeitungsdauer wird zuerst bearbeitet.



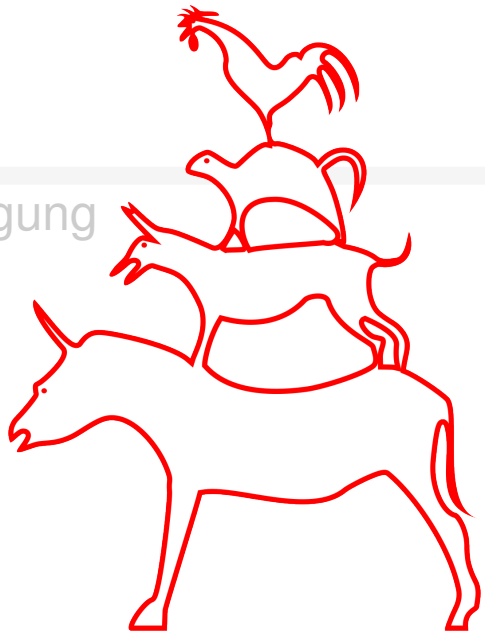
Auftragsreihenfolge: minimale Gesamtdurchlaufzeit (mittels Branch-and-Bound bestimmt): A_2, A_1, A_4, A_3



Bemerkung zu Maschinenbelegungsproblemen

- Simulation eignet sich vor allem zur Erklärung bzw. zur Analyse von Systemen (Analyse-/Erklärungsmodelle).
- Interessiert lediglich die Bearbeitungsreihenfolge mit der kürzesten Durchlaufzeit, sollten Verfahren der ganzzahligen Optimierung verwendet werden.
- Komplexität realitätsnäherer Maschinenbelegungsprobleme deutlich höher als dieses Beispiel
- In der Praxis meist konkurrierende Zielfunktionen:
  - min Durchlaufzeit
  - max Termineinhaltung (min maximale Terminüberschreitung)
  - max Kapazitätsauslastung
  - min Zwischenlagerbestand

Inhalt der Vorlesung



Stochastische Simulation

Zufallsgeschehen des realen Systems wird durch Zufallsvariable erfasst, z.B.

- Ausfallhäufigkeit von Maschinen
- Eingang neuer Aufträge
- Zeitpunkt und Dauer von Anrufen im Call Center

Beschreibung des Verhaltens einer Zufallsvariable X mittels:

Dichtefunktion: $f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_i & \text{falls } X = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

1. Wie kann das Verteilungsgesetz ermittelt werden, welches das Verhalten einer Zufallsvariable beschreibt?
2. Wie können können entsprechende Zufallswerte erzeugt werden?

Ermittlung einer Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen i.A. unbekannt, daher zwei Vorgehensweisen:

1. Zusatzinformationen rechtfertigen die Annahme einer bestimmten theoretischen Verteilung.

   Bsp.: die Lebensdauer von Bauteilen meist exponentialverteilt.

   Lediglich Verteilungsparamter aus Stichprobe ableiten, z.B. Erwartungswert, Standardabweichung bei Normalverteilung.
2. Ohne Zusatzinformationen Beschränkung auf empirische Verteilung.

Statistische Hypothesentests zur

- Überprüfung der getroffenen Annahmen über eine Verteilung sowie
- Ermittlung von Konfidenzintervallen von Verteilungsparametern.

Bestimmung einer empirischen Verteilungsfunktion

Beobachtungswerte können näherungsweise mit einer empirschen Verteilungsfunktion beschrieben werden.

1. Erfasse Stichprobenwerte in Klassen
2. Ermittle Klassenhäufigkeiten
3. Berechne Verteilungsfunktion

Ausfallverhalten eines Zahnkranzpaares in einer Maschine

Laufzeit: Zeit von Einbau des Zahnkranzpaars bis Ausfall

Klassen: bis 3749h, von 3750h bis 4249h, von 4250h bis 4749h, ...

Laufzeit in 1000h	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
Ausfälle	200	400	600	800	600	520	480	200	120	80
rel. Häufigkeit	0.05	0.10	0.15	0.20	0.15	0.13	0.12	0.05	0.03	0.02
Verteilungsfkt.	0.05	0.15	0.30	0.50	0.65	0.78	0.90	0.95	0.98	1.00

Ein Zahnkranzpaar hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 Prozent eine Laufzeit von weniger als 4749 Stunden.

Woher kommt eine Zufallszahl?

Echte Zufallszahl: Ziehen von Kugeln aus einer Urne, Würfeln

Unechte oder Pseudo-Zufallszahl:

- Ausnutzen von unregelmäßigen Ziffernfolgen von π, $\sqrt{2}$ oder e
- Arithmetischer Zufallszahlengenerator

LogDynamics

Linearer Kongruenzgenerator nach Lehmer

$$x_{i+1} = (a \cdot x_i + b) \mod m$$

Die $(i+1)$-te **Zufallszahl** x_{i+1} wird aus i-ten Zufallszahl x_i erzeugt.

Vorzugebende **Parameter**: a, b, m ganzzahlig mit $a, m > 0$ und $b \geq 0$ sowie $a, b < m$; ein Startwert x_0 (Saatwert, engl. seed)

Der Operator **mod** gibt den Rest bei Ganzzahldivision an, z.B. $10 \mod 3 = 1$ ($10/3 = 3$ Rest 1) oder $22 \mod 6 = 4$ ($22/6 = 3$ Rest 4).

Berechnung einer Standardzufallszahl z_i, die im Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt ist: $z_i = \frac{x_i}{m-1}$.

Beispiele für die Erzeugung von Zufallszahlen

LogDynamics

Zufallszahlengenerator: $x_{i+1} = (a \cdot x_i + b) \mod m$

1. Variante: $a = 4, b = 0, m = 5$, Saatwert $x_0 = 4$

$x_0 = 4$, $x_1 = (4 \cdot 4) \mod 5 = 1$, $x_2 = (4 \cdot 1) \mod 5 = 4$, $x_3 = (4 \cdot 4) \mod 5 = 1$, ... Periodenlänge ist 2

2. Variante: $a = 3, b = 2, m = 8$, Saatwert $x_0 = 7$

$x_0 = 7$, $x_1 = (3 \cdot 7 + 2) \mod 8 = 7$, $\ldots \rightarrow$ Periodenlänge ist 1

Aufgabe

Wie lautet die generierte Zufallszahlensequenz mit Startwert $x_0 = 4$ und Parametern $a = 5, b = 3, m = 8$?

$x_0 = 4$, $x_1 = (5 \cdot 4 + 3) \mod 8 = 7$, $x_2 = (5 \cdot 7) \mod 8 = 6$,
$x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 3, x_6 = 2, x_7 = 5, x_4 = 4, \ldots$
$\rightarrow$ Periodenlänge ist 8 ($= m$) und damit maximal.

Anforderungen an gute Zufallszahlengeneratoren

- Möglichst genaue Annäherung der Pseudo-Zufallszahlen an die gewünschte Verteilungsfunktion
- Zufallszahlenfolge soll reproduzierbar sein, um (Computer-)Experimente mit Zufallszahlen reproduzieren zu können
- Effiziente Berechnung
- Zahlenfolge soll große Periodenlänge aufweisen
- Zufallszahlenfolge soll im Intervall $(0, 1)$ eine hohe Besetzungsdichte haben, d.h. durchschnittliche und maximale Abstände zwischen den Zahlen sollen möglichst gering sein.

LogDynamics

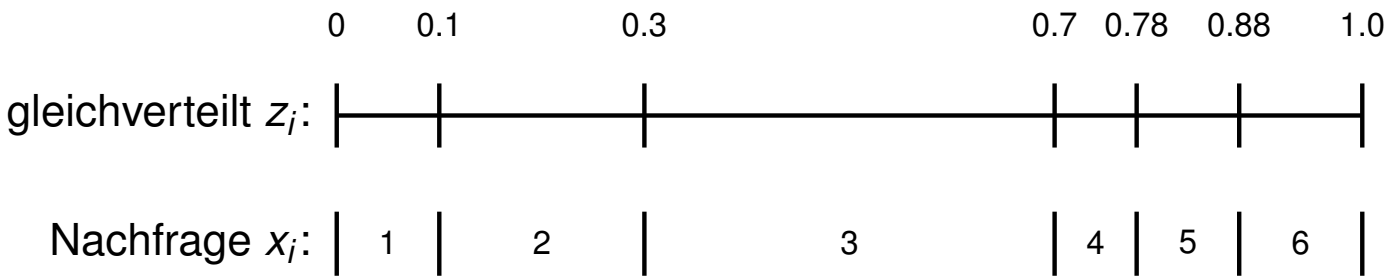
Ableitung von Zufallszahlen

Zufallszahlen, die beliebigen Verteilungen genügen, lassen sich aus (0,1)-Zufallszahlen ableiten (z.B. Werners Kapitel 7.2.2 oder Domschke/Drechsler Kapitel 10.3)

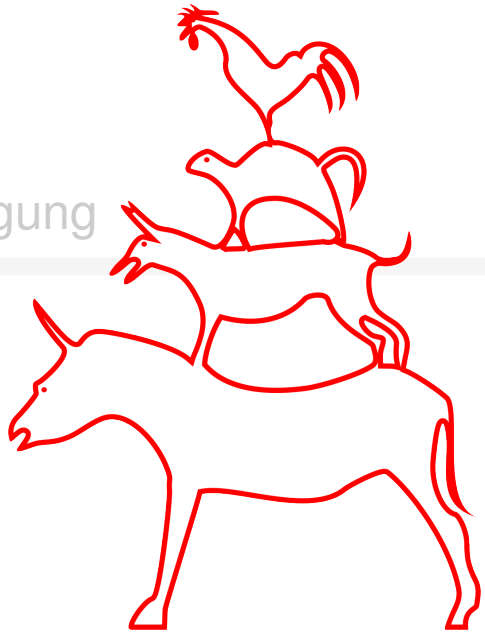
Transformation einer empirischen Verteilung:

Nachfragemenge	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit ($\sum = 50$)	5	10	20	4	5	6
relative Häufigkeit	0.1	0.2	0.4	0.08	0.1	0.12

Unterteilung des Intervalls $(0, 1)$ gemäß relativer Häufikeiten in disjunkte Abschnitte:
$]0, 0.1[, [0.1, 0.3[, [0.3, 0.7[, [0.7, 0.78[, [0.78, 0.88[, [0.88, 1.0[$



Inhalt der Vorlesung



Stochastische Simulation zur Risikoanalyse von Investitionsprojekten

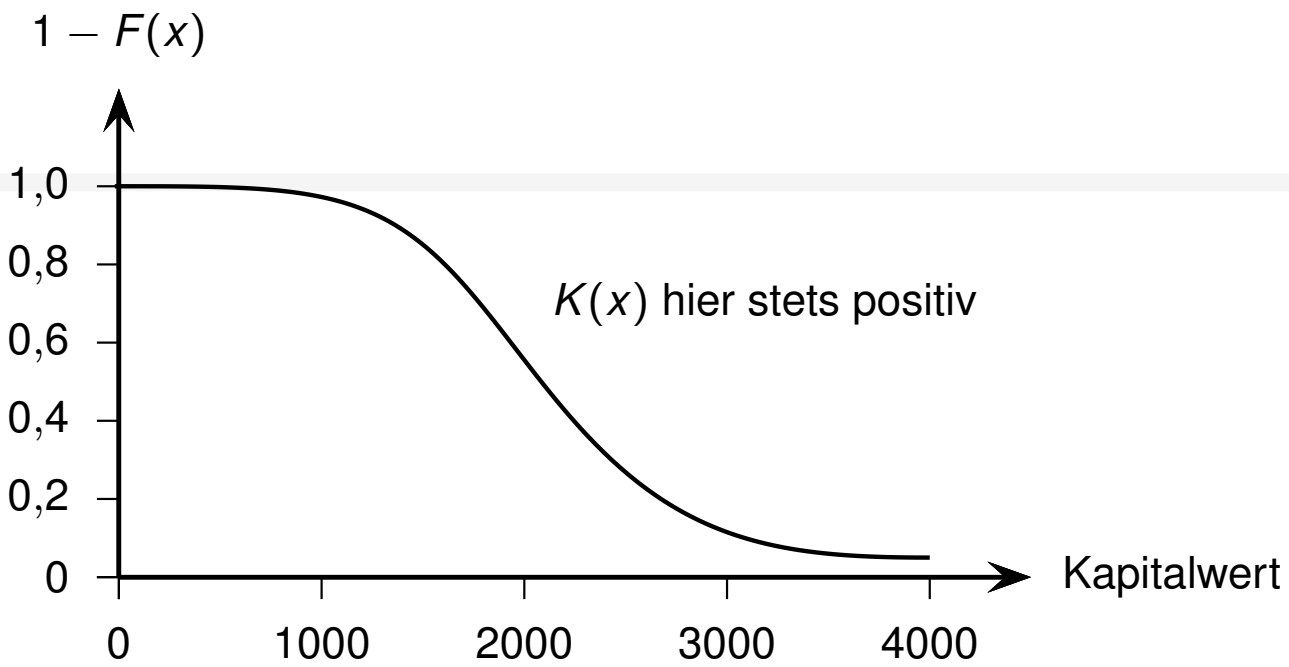
Vorteilhaftigkeit eines Investitionsprojektes mittels Kapitalwert
Kapitalwert: Abzinsung aller Ein- und Auszahlungen auf den Startzeitpunkt der Investition

$$K(x) = \sum_{t=0}^{T} x_t \cdot (1+i)^{-t}$$

- i Kalkulationszins
- T Laufzeit (Perioden) des Projekts
- x_t Einzahlungen minus Auszahlungen in Periode t
- Interpretation:

  $K(x) > 0 \rightarrow$ Projekt lohnenswert
  $K(x) < 0 \rightarrow$ Projekt **nicht** lohnenswert

- Zahlungen x_t unterliegen zufälligen Einflüssen
- Verschiedene Zahlungsreihen werden ermittelt, z.B. durch Expertenbefragungen
- $F(x)$ ist Verteilungsfunktion des unsicheren Kapitalwertes $K(x)$
- $1 - F(x)$ ist Risikoprofil



Beispiel – Zahlungsreihe eines Investitionsprojekts

Aufgabe: Ermittlung des Risikoprofils für Investitionsprojekt:

Zeitpunkt	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Zahlung	-2100	[900;1100]	[850;1150]	[830;1230]

Rückzahlung in $t = 1$ zufällig (gleichverteilt) im Intervall [900; 1100]

Annahmen:

- Kalkulationszins $i = 10\%$
- Zufallszahlungen jeder Periode sind unabhängig voneinander
- Zufallszahlungen sind im angegebenen Intervall gleichverteilt

Frage: Wie kann man Simulation zur Ermittlung eines Risikoprofils einsetzen?

Zufallszahlen, Transformation, Kapitalwert 1/2

LogDynamics

Vorgehensweise:

1. Berechne Zufallszahlen und leite $[0, 1[$ gleichverteilte Zufallszahlen ab
2. Bestimme Transformationsfunktion für gegebene Intervalle
3. Berechne Kapitalwert für jede Zufallszahl

Beispiel

zu 1) Zufallszahlengenerator: $u_k = (5u_{k-1} + 3) \mod 64$, $u_0 = 4$

Es sollen 10 Realisationen betrachtet werden, dazu benötigt man 30 Zufallszahlen: $4, 23, 54, 17, 24, 59, 42, 21, 44, 31, \ldots$

$[0, 1[$-Zufallszahlen (gerundet):
$0.06; 0.37; 0.86; 0.27; 0.38; 0.94; 0.67; 0.33; 0.70; 0.49; \ldots$

zu 2) Transformationsfunktionen:

$[900; 1100] \rightarrow z_1(u) = 900 + 200u$

$[850; 1150] \rightarrow z_2(u) = 850 + 300u$

$[830; 1230] \rightarrow z_3(u) = 830 + 400u$

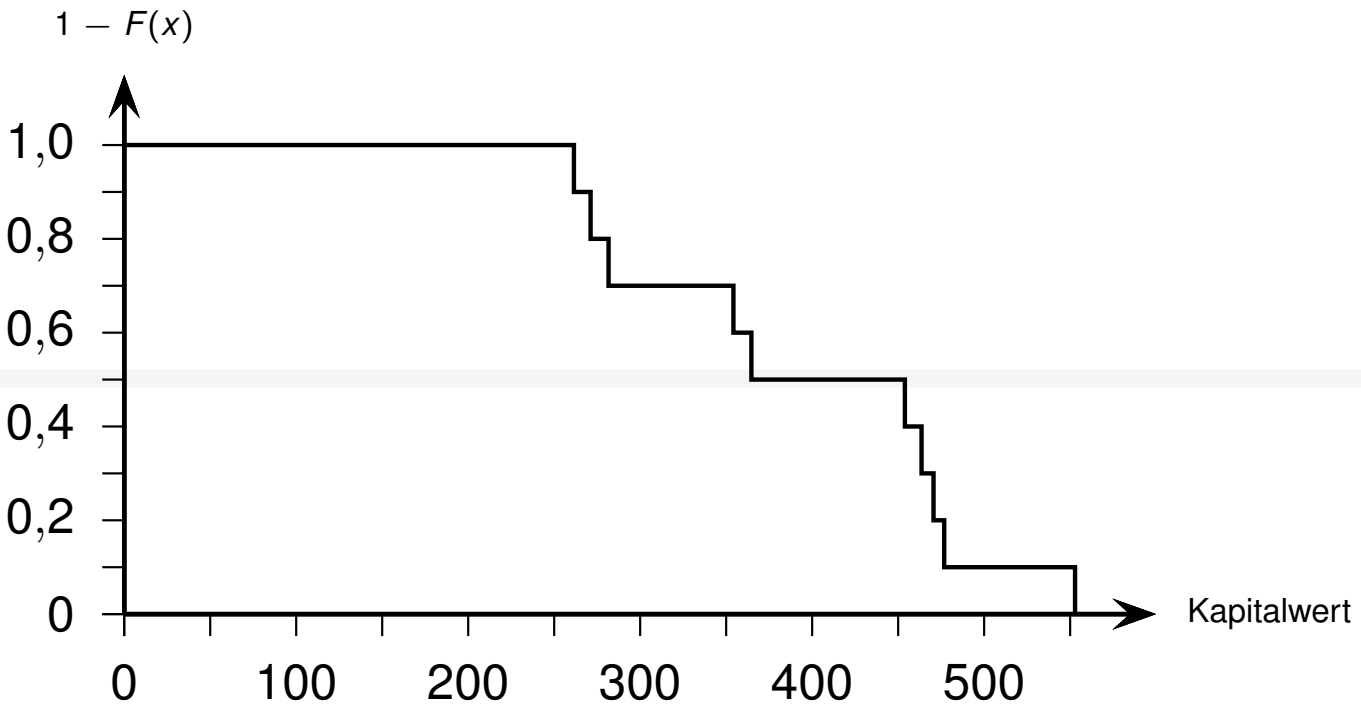
Beispiel (Fortsetzung) – zu 3) Zahlungen und Kapitalwerte

Realisation k	x_1	x_2	x_3	$K^k(x)$
1	912.70	992.86	1083.97	364.67
2	973.02	969.05	899.84	261.49
3	1071.43	850.00	1198.25	476.77
4	593.97	864.29	1064.92	281.62
5	976.19	935.71	1210.95	470.57
6	1087.30	988.10	1128.41	552.86
7	1033.33	945.24	1122.06	463.61
8	966.67	1035.71	1090.32	453.92
9	1039.68	878.57	931.59	271.17
10	998.41	1007.14	950.63	354.22

$$K^1 = -2100 + 912.70 \cdot 1.1^{-1} + 992.86 \cdot 1.1^{-2} + 1083.97 \cdot 1.1^{-3} = 364.67$$
$$K^2 = -2100 + 973.02 \cdot 1.1^{-1} + 969.05 \cdot 1.1^{-2} + 899.84 \cdot 1.1^{-3} = 261.49$$

Risikoanalyse mittels Simulation

k	2	9	4	10	1	8	7	5	3	6
K^k	261.49	271.17	281.62	354.22	364.67	453.92	463.61	470.57	476.77	552.86
$F(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$1 - F(x)$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0



Risikoprofil kann nun mittels statistischem und finanzwirtschaftlichen Instrumentarium eingehender analysiert werden.

Fragen zur Wiederholung:

- Wie funktioniert Maschinenbelegung mittels deterministischer Simulation?
- Was ist eine stochastische Simulation und wie wird sie zur Risikianalyse eingesetzt?

Klausurrelevante Literatur

Domschke/Drexler Kapitel 10 oder Werners Kapitel 7

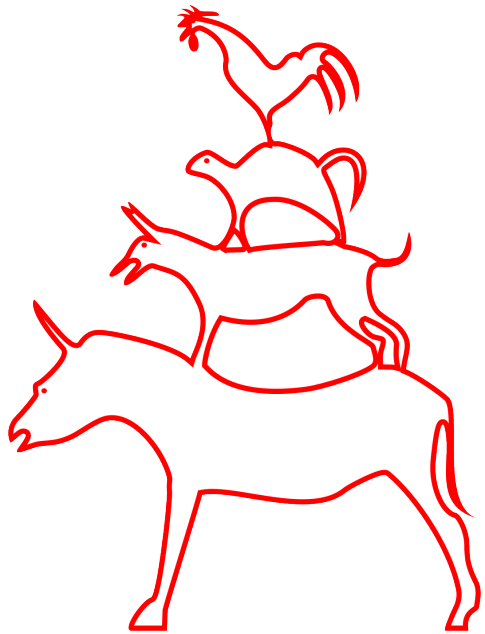
Ausblick

- Tutorium: Simulation

Teil XII

Kooperative Spieltheorie

Motivation und Problemstellung



Taxifahrt

Drei Personen mit verschiedenen Fahrtzielen teilen sich ein Taxi. Wie sollen die anfallenden Kosten auf die drei Personen verteilt werden?

Beispiel: Cash Group

Kunden der kooperierenden Banken können an Geldautomaten kostenlos Bargeld abheben.

Geldautomatennetze der Mitglieder stark heterogen (regionale Verteilung, Anzahl)

Wie soll der Kooperations*nutzen* auf die Mitglieder einer Kooperation verteilt werden?

Beispiel: Wasserwerk für zwei Städte

Ein Kostenaufteilungsspiel (Young 1994)

Stadt A (36.000 Einwohner) und Stadt B (12.000 Einwohner) planen je ein Wasserwerk.

Kosten Stadt A: 11 Mio. €, d.h. $\frac{11.000.000}{36.000} \approx 306$ €/Einwohner

Kosten Stadt B: 7 Mio. €, d.h. $\frac{7.000.000}{12.000} \approx 583$ €/Einwohner

Kosten eines gemeinsamen Wasserwerks für A und B: 15 Mio. €

Problemstellung

Wie sollen die gesamten Kosten auf die Städte verteilt werden?

Beispiel: Wasserwerk für zwei Städte – 4 Lösungen

1. Jede Stadt trägt dieselbe Last.

Stadt A: 7,5 Mio Stadt B: 7,5 Mio

2. Jeder Einwohner trägt dieselbe Last

$\frac{15.000.000}{36.000+12.000} \approx 312$ €/Einwohner

Stadt A: 11,25 Mio Stadt B: 3,75 Mio

3. Jede Stadt realisiert die gleiche Ersparnis.

Ersparnis 11+7-15 = 3 Mio; 1,5 Mio je Stadt;

Stadt A: 11 - 1,5 = 9,5 Mio. Stadt B: 7 - 1,5 = 5,5 Mio.

4. Jeder Einwohner realisiert die gleiche Ersparnis.

Stadt A: $\frac{11.000.000}{36.000} - \frac{3.000.000}{48.000} 36.000 = 8,75$ Mio.

Stadt B: $\frac{7.000.000}{12.000} - \frac{3.000.000}{48.000} 12.000 = 6,25$ Mio.

(Nichtkooperative) **Spieltheorie**

Wie soll sich ein Spieler verhalten, um seinen Nutzen zu maximieren?

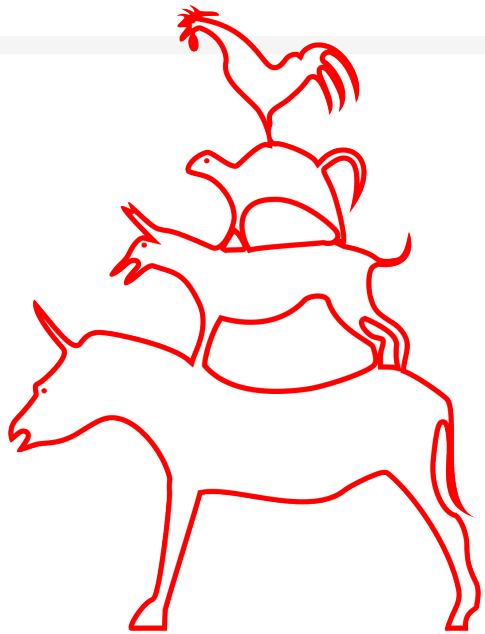
- strategieorientiert
- Aktionen, Strategien, Auszahlungen, Informationsmengen
- Lösung: Nash-Gleichgewicht

Kooperative Spieltheorie

Wie soll der Nutzen eines kooperativen Spiels auf die Spieler verteilt werden?

- auszahlungsorientiert
- Lösung: Auszahlung je Spieler, meist basierend auf Axiomen
- Es werden **keine** strategischen Spiele mit Absprachen zwischen Spielern betrachtet!

Inhalt der Vorlesung



- Betrachtet wird stets eine Menge von *Spielern* oder Agenten $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Spieler müssen keinesfalls gleichberechtigt sein.
- Eine Koalition K ist eine Teilmenge von N, $K \subseteq N$.

Welche/wie viele Koalitionen enthält die Menge $N = \{a, b, c\}$?

$2^N = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
Anz. Koalitionen: $|2^N| = |2^{\{a,b,c\}}| = 2^{|N|} = 2^3 = 8$

- Die Menge aller Koalitionen ist 2^N (jeder Spieler kann *Mitglied* oder *nicht Mitglied* sein).
- N heiSSt *groSSe Koalition*.

- Ein *Koalitionsspiel* (N, v) besteht aus
- einer Menge N von $1, \ldots, n$ Spielern sowie
- einer *Koalitionsfunktion* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ mit $v(\emptyset) = 0$.

Die Funktion v ordnet jeder Koalition K den Nutzen (eine reele Zahl $v(K)$) zu, der gemeinsame von den Mitgliedern in K geschaffen werden kann.

Der Wert $v(K)$ kann auf die Mitglieder in K aufgeteilt werden; wie dies erfolgt ist Gegenstand von Lösungskonzepten (Shapley, Kern)

Gewichtete Abstimmungsspiele

- Für n Spieler lässt sich ein Abstimmungsspiel als Tupel

$$[q; g_1, \ldots, g_n]$$

angeben. q ist die erforderliche Quote, g_i das Stimmgewicht von Spieler i.

- Erreicht eine Koalition die erforderliche Quote?

$$v(K) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{i \in K} g_i \geq q \quad \text{K ist siegreich} \\ 0, & \text{falls } \sum_{i \in K} g_i < q \quad \text{K ist unterlegen} \end{cases}$$

Mehrheitsregel

$$\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right]$$

- Sicherheitsrat: 5 ständige Mitglieder (USA, Russland, China, GB, F) 10 nicht-ständige Mitglieder
- Resolutionen müssen alle 5 ständigen Mitglieder zustimmen und mindestens 4 nicht-ständige.

$$[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Wie lautet die Koalitionsfunktion des Sicherheitsrates?

Sei S die Menge der ständigen Mitglieder.

$$v(K) = \begin{cases} 1, S \subseteq K \text{ und } |K| \geq 9 \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Inhalt der Vorlesung

Was ist eine Lösung für ein Koalitionsspiel (N, v)?

- Eine Lösung für (N, v) ist ein Auszahlungsvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$
- Jedem Spieler i aus N wir eine Auszahlung x_i zugeordnet (x wird auch Nutzenvektor genannt).
- Je nach Spiel: Nutzen x_i den Spieler i erhält bzw. Kosten, die i übernehmen muss

Bsp. Auszahlungsvektor

Wasserwerk-Spiel (Kosten Stadt A & Stadt B: 15 Mio. €)
$(x_A, x_B) = (7.5, 7.5)$ oder $(14, 1)$ oder $(5, 20)$ oder $(5, 5)$

Lösungskonzepte:

- mengenwertig, d.h. eine Menge von Auszahlungsvektoren
- punktwertig, d.h. genau ein Auszahlungsvektor

Punktwertiges Lösungskonzept

Ein punktwertiges Lösungskonzept ψ ordnet jedem Koalitionsspiel genau einen Auszahlungsvektor zu.

1. Spieler $i \in N$ erhält alles:

$$\psi_j^{\text{alles für } i}(v) = v(N), \text{ falls } j = i, \text{ andernfalls } 0$$

2. Jeder Spieler $i \in N$ erhält z:

$$\psi_i^{\text{jeder erhält } z}(v) = z, i \in N$$

3. Egalitär:

$$\psi_i^{\text{egalitär}}(v) = \frac{v(N)}{n}, i \in N$$

4. Marginaler Beitrag zu N:

$$\psi_i^{\text{marginaler Beitrag zu } N}(v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}), i \in N$$

LogDynamics

Unter welchen Umständen gilt

1. $\psi^{\text{alles für } i} = \psi^{\text{egalitär } i}$,
2. $\psi^{\text{alles für } i} = \psi^{\text{jeder erhält } z}$ oder
3. $\psi^{\text{egalitär}} = \psi^{\text{jeder erhält } z}$?

zu 1 entweder $v(N) = 0$ oder $N = \{i\}$,

zu 2 sowohl $N = \{i\}$ als auch $v(N) = z$,

zu 3 falls $v(N)/n = z$.

Die Shapley-Lösung in axiomatischer Definition

Lloyd Shapley und *Alvin Roth* – Nobelpreis 2012 'for the theory of stable allocations and the practice of market design'

Shapley-Lösung

Die Shapley-Lösung φ ist dasjenige Lösungskonzept, das die folgenden Axiome erfüllt (Shapley 1953):

- Pareto-Axiom
- Symmetrie-Axiom
- Axiom über den unwesentlichen Spieler
- Additivitäts-Axiom

Axiome – Pareto-Axiom

[

Pareto-Axiom] Die Auszahlung $\psi_i(v), \forall i \in N$ verteilt die maximal mögliche Nutzensumme:

$$\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N).$$

Aufgabe: Welches der vier Konzepte $\psi_j^{\text{alles für } i}$, $\psi_i^{\text{jeder erhält } z}$, $\psi_i^{\text{egalitär}}$, $\psi_i^{\text{marginaler Beitrag zu } N}$ erfüllt das Pareto-Axiom?

ja: $\psi_j^{\text{alles für } i}$, $\psi_i^{\text{egalitär}}$

nein: $\psi_i^{\text{marginaler Beitrag zu } N}$, $\psi_i^{\text{jeder erhält } z}$, letzteres ja, falls $z = \frac{v(N)}{n}$.

Axiome – Unwesentlicher Spieler

Definition

Ein Spieler i, der zu jeder Koalition genau $v(i)$ beiträgt,

$$v(K \cup \{i\}) = v(K) + v(\{i\}), i \notin K, K \subseteq N,$$

heiSSt unwesentlich. Ein Spieler i, der zu keiner Koalition etwas beiträgt,

$$v(K \cup \{i\}) = v(K), K \subseteq N,$$

heiSSt **Nullspieler**.

Axiom (Unwesentlicher Spieler)

Jeder unwesentliche Spieler erhält genau den Wert seiner Einerkoalition:

$$\psi_i(v) = v(\{i\}).$$

Axiome – Additivitäts-Axiom

Axiom (Additivitäts-Axiom)

Wenn v und w Koalitionsfunktionen sind, dann soll für jeden Spieler $i \in N$ die Auszahlung bei $v + w$ gleich der Summe der Auszahlungen bei v und w sein:

$$\psi_i(v + w) = \psi_i(v) + \psi_i(w).$$

Die Gesamtauszahlung ist unabhängig davon, ob

- zwei Koalitionsfunktionen zuerst addiert werden und danach das Lösungskonzept angewendet wird, oder
- ob zuerst das Lösungskonzept auf jede der Koalitionsfunktionen einzeln angewendet wird und die Zahlungen danach addiert werden.

LogDynamics

Axiom (Symmetrie-Axiom)

Die Auszahlungen hängen nicht von der Benennung der Spieler ab, sondern nur davon, was diese zu den Koalitionen beitragen.

Falls für jede Koalition K, die die Spieler i und $j (i \neq j)$ nicht enthält,

$$v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\})$$

gilt, soll

$$\psi_i(v) = \psi_j(v)$$

gelten.

Shapley-Formel – Idee

Jeder Spieler erhält den Durchschnitt seiner marginalen Beiträge zu allen möglichen Koalitionen.

Herleitung 1/3 – Alle Koalitionen bzw. Beitrittsreihenfolgen

- ρ bezeichnet eine **Reihenfolge** $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ der Spieler in N
- bei $N = \{1, 2, 3, 4\}$ z.B.
  $\rho^1 = (3, 1, 2, 4), \rho^2 = (2, 4, 3, 1), \rho^3 = (1, 3, 2, 4), \ldots$.
- $K_i(\rho)$ bezeichnet die Koalition bestehend aus den Spielern $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ (also ohne die Spieler $\rho_{i+1}, \ldots, \rho_n$).

Beispiele

Reihenfolge $\rho = (3, 1, 4, 2)$ und Spieler $i = 1$:

$$K_1((3, 1, 4, 2)) = \{1, 3\}$$

Reihenfolge $\rho = (2, 3, 1, 4)$ und Spieler $i = 4$:

$$K_4((2, 3, 1, 4)) = \{2, 3, 1, 4\}$$

Reihenfolge ρ^3 und Spieler $i = 3$: $K_3(\rho^3) = K_3((1, 3, 2, 4)) = \{1, 3\}$

Herleitung 2/3 – Marginaler Beitrag zu einer Koalition

- Welchen Wert hat eine Koalition K mit i und welchen ohne i?
- Marginaler Beitrag eines Spielers i zur Koalition K:

$$MB_i^K(v) = v(K \cup \{i\}) - v(K \setminus \{i\}).$$

- Alternative Schreibweise bei gegebener Beitrittsreihenfolge ρ:

$$MB_i^\rho(v) = v(K_i(\rho) \cup \{i\}) - v(K_i(\rho) \setminus \{i\}).$$

Bestimmen Sie die marginalen Beiträge $MB_B^{(A,B)}$ und $MB_B^{(B,A)}$ im Wasserwerk-Spiel $(c(A,B) = 15, c(A) = 11, c(B) = 7, c(\{\}) = 0)$.

$MB_B^{(A,B)} = 15 - 11 = 4$

$MB_B^{(B,A)} = 7 - 0 = 7$

Herleitung 3/3 – Gewichtung

- Addiere für alle möglichen Beitrittsreihenfolgen (bzw. für alle Koalitionen) die marginalen Beiträge des Spielers i und dividiere durch die Anzahl möglicher Beitrittsreihenfolgen.
- Für $n = |N|$ gibt es $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ Beitrittsreihenfolgen.

Beispiel: Shapley-Zahlung $\varphi_B(c)$ für Stadt B im Wasserwerk-Spiel $N = \{A, B\}$, $c(A,B) = 15, c(A) = 11, c(B) = 7, c(\{\}) = 0$

1. Reihenfolgen: (A,B), (B,A)
2. Summe marginaler Beiträge Spieler B für alle Reihenfolgen:

$$MB_B = MB_B^{(A,B)} + MB_B^{(B,A)} = 4 + 7 = 11$$

3. Shapley-Zahlung für Spieler B: $\varphi_B(c) = \frac{1}{n!} \cdot MB_B = \frac{1}{2} \cdot 11$

Die Shapley-Formel

Die Shapley-Formel lautet

$$\begin{aligned}\psi_i^{Shapley}(v) &= \varphi_i(v)\\ \varphi_i(v) &= \frac{1}{n!}\sum_{\rho\in RF} MB_i^{\rho}(v)\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\rho\in RF}[v(K_i(\rho)) - v(K_i(\rho)\setminus\{i\})].\end{aligned}$$

Die Shapley-Lösung für ein Koalitionsspiel (N, v) lautet $\varphi(v) = (\varphi_i(v), \ldots, \varphi_n(v))$.

Shapley-Lösung des Wasserwerk-Spiels

Anwendung Shapley-Formel entweder direkt auf Kostenaufteilungsfunktion c oder auf Kostenersparnisfunktion v.

$$c(\{A\}) = 11$$
$$c(\{B\}) = 7$$
$$c(\{A, B\}) = 15$$

Wie lauten die Shapley-Zahlungen φ_A, φ_B?

Reihenfolgen ρ	MB_A^ρ	MB_B^ρ
(A,B)	11	4
(B,A)	8	7
Summe	19	11
Shapley-Zahlungen φ_i	$\frac{19}{2}$	$\frac{11}{2}$

Shapley-Formel für ein Eisenbahnkoalitionsspiel 1/2

Drei Bergbaukonzerne fördern in Brasilien Eisenerz. Zum Abtransport des Erzes aus den Minen hin zu mehreren Seehäfen unterhalten die drei Bergbaukonzerne ein gemeinsames Eisenbahnnetz. Gegeben ist die nachfolgende Kostenfunktion, welche jeder Teilkoalition die jährlich zu tragenden Gesamtkosten (in Geldeinheiten GE) des Eisenbahnnetzes zuordnet.

$$\begin{aligned} c(1) = 400, \quad c(2) = 500, \quad c(3) = 500 \\ c(1,2) = 750, \quad c(1,3) = 750, \quad c(2,3) = 900 \\ c(1,2,3) = 1050 \end{aligned}$$

Die drei Bergbaukonzerne suchen nach einer geeigneten Aufteilung der jährlichen Gesamtkosten in Höhe von 1050 GE.
Welche Kosten müssen die drei Bergbaukonzerne (Spieler 1, 2 und 3) jeweils gemäSS der Shapley-Formel tragen?

Shapley-Formel für ein Eisenbahnkoalitionsspiel 2/2

Reihenfolgen ρ	MB_1^ρ	MB_2^ρ	MB_3^ρ
(1,2,3)	400-0=400	350	300
(1,3,2)	400-0=400	300	350
(2,1,3)	750-500=250	500	300
(2,3,1)	1050-900=150	500	400
(3,1,2)	750-500=250	300	500
(3,2,1)	1050-900=150	400	500
Summe	1600	2350	2350
Shapley-Zahlung φ_i	$\frac{1600}{6} \sim 267$	$\frac{2350}{6} \sim 392$	$\frac{2350}{6} \sim 392$

Shapley-Formel für ein Abstimmungsspiel

LogDynamics

Vergleichen Sie die Shapley-Auszahlung der beiden Abstimmungsspiele $[70; 50, 25, 25]$ und $[70; 55, 35, 10]$ für Spieler 1

$a) \varphi_1 = \frac{4}{6}$
$b) \varphi_1 = \frac{3}{6}$

Trotz Erhöhung des Stimmgewichts von Spieler 1 sinkt dessen Shapley-Auszahlung, weil sein marginaler Beitrag zu allen Koalitionen (insb. mit Spieler 3) sinkt.

Zusammenfassung & Ausblick

Fragen zur Wiederholung:

- Was bedeutet der Shapley Wert als punktwertiges Lösungskonzept für Koalitionsspiele?
- Was ist ein Kooperationsspiel und eine Kooperationsfunktion?

Literatur

Wiese 2004 (klick mich), Kapitel C1-C4, F1 bis F6