



# Vorkurs Mathematik für Ingenieur\_Innen

Jürgen Pannek, Sören Böttcher

Fachbereich Produktionstechnik – Maschinenbau & Verfahrenstechnik, Universität Bremen

05.10. – 14.10.2016

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

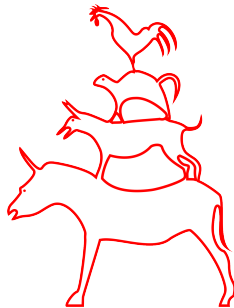
Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie



2 **Organisatorisches**

Kursdaten  
Literatur  
Personen

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

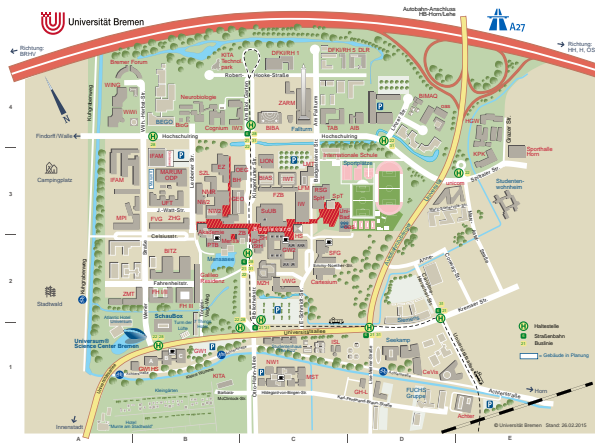
Integralrechnung

Analytische Geometrie

<b>Rahmen</b>	Septemberakademie
<b>Termin</b>	05.10.2016 – 14.10.2016
<b>Ablauf</b>	Vorlesung 12–14 Uhr, Übung 14–16 Uhr
<b>Zielgruppe</b>	Produktionstechnik Systems Engineering Wirtschaftsingenieurwesen Produktionstechnik Berufliche Bildung
<b>Ziel</b>	Verständnis- und Wissenslücken in mathematischen Grundlagen zum Studienbeginn schließen
<b>www</b>	<a href="http://www.dil.biba.uni-bremen.de/vorkurs_mathematik.html">http://www.dil.biba.uni-bremen.de/vorkurs_mathematik.html</a>

		MI 05.10.	DO 06.10.	FR 07.10.	DI 11.10.	MI 12.10.	DO 13.10.	FR 14.10.
V		12–14	12–14	12–14	8–10	12–14	12–14	12–14
	alle	GW1 H0070	GW1 H0070	GW1 H0070	HS 2010	GW1 H0070	GW1 H0070	NW1 H1 H0020
Ü		14–16	14–16	14–16	12–14	14–16	14–16	14–16
	Gruppe 1	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200	IW3 0200
	Gruppe 2	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390	IW3 0390
	Gruppe 3	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210	IW3 0210
	Gruppe 4	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330	IW3 0330
	Gruppe 5	SFG 1080	SFG 1080	SFG 1080	SFG 1080	SFG 1080	SFG 1080	SFG 1080
	Gruppe 6	SFG 1070	SFG 1070	SFG 1070	SFG 1070	SFG 1070	SFG 1070	SFG 1070

[http://www.dil.biba.uni-bremen.de/vorkurs\\_mathematik.html](http://www.dil.biba.uni-bremen.de/vorkurs_mathematik.html)



## Bücher

- ▶ Bosch, *Brückenkurs Mathematik*, Oldenbourg
- ▶ Erven/Erven/Hörwick, *Vorkurs Mathematik*, Oldenbourg
- ▶ Kemnitz, *Mathematik zum Studienbeginn*, Vieweg
- ▶ Marti/Gröger, *Brückenkurs Mathematik*, Peikert Verlag
- ▶ Schäfer/Georgi/Trippler, *Mathematik-Vorkurs*, B.G. Teubner
- ▶ Schirotzek/Scholz, *Starthilfe Mathematik*, B.G. Teubner
- ▶ van de Craats/Bosch, *Grundwissen Mathematik*, Springer
- ▶ ...

## Online Mathematik Brückenkurs

- ▶ <http://www.om-bridge.de/omb/public/index.html>

**Koordination** Dr. Sabine Kuske

Bettina da Rocha

**Übungen** Elham Behmanesh

Tobias Sprodowski

**Tutoren** Pascal Rink

Fabian Falke

Marcella Bernado Papini Jonathan von Schröder

Paul Haak Arne Wacker

Berat Arifi Hilke Behrends

Timur Schäfer

Christina Moor

## Jürgen Pannek

Fachgebiet Dynamics in Logistics

BIBA – Bremer Institut für Produktion und Logistik  
Universität Bremen, Hochschulring 20, 28359 Bremen

**Büro** Gebäude BIBA – Raum 1090

**Telefon** +49 (0) 421 218–50190

**E-Mail** [pan@biba.uni-bremen.de](mailto:pan@biba.uni-bremen.de)

**www** <http://www.dil.biba.uni-bremen.de>

Vorkurs Mathematik

J. Pannek

Organisatorisches

Kursdaten

Literatur

8

Personen

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie



Rechenregeln  
Klammern  
Binome  
Brüche  
Ungleichungen  
Potenzen  
Logarithmen  
Sonstiges

Organisatorisches

**Arithmetik**

Trigonometrie

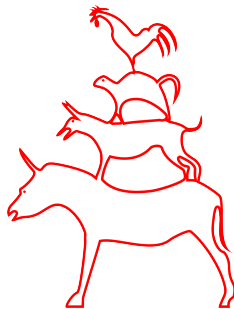
Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie



## Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

## Produktzeichen

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

## Absolutbetrag

$$|a| = \begin{cases} +a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

## Punktrechnung vor Strichrechnung

$$a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$$

$$a - b : c = a - (b : c)$$

## Potenzrechnung vor Punktrechnung

$$a \cdot b^2 = a \cdot (b^2)$$

Es gilt also  $ab^2 \neq (ab)^2$ .

## Beispiele

$$a : b^2 - 3 \cdot 2^3 = \tag{1}$$

$$4 \cdot 5^3 - 7 \cdot 4^2 = \tag{2}$$

## Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

## Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

## Neutrales Element

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

## Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

## Wichtige Regeln der Klammerrechnung

$$+(a + b) = a + b$$

$$-(a + b) = -a - b$$

$$-(a - b) = -a + b$$

## Vorzeichenregeln

$$+(a + b) = a + b$$

$$-(a + b) = -a - b$$

## Beispiele

$$(3 + 5 - 2) + (5 + 8) = \quad (1)$$

$$(4 + 7) - (-6 + 3 - 8) = \quad (2)$$

$$3a - (4b + 2c - 6d) + (3a - 5c) - (6a + 3b - d) = \quad (3)$$

## Multiplikation und Division mit Klammern

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Es gilt also  $(a \cdot b) \cdot c \neq ac \cdot bc$  und  $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ .

## Klammern auflösen

$$a(b + c(d + e)) = a(b + cd + ce) = ab + acd + ace$$

## Beispiele

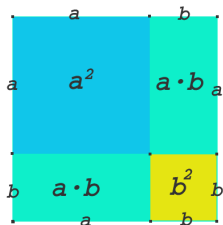
$$(x + 2)(x - 5) - (x - 3)(x - 7) = \quad (1)$$

$$5(x - 2(x - y - 3y - 6x - 3y) + 2y) = \quad (2)$$

## 1. Binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

### Geometrie

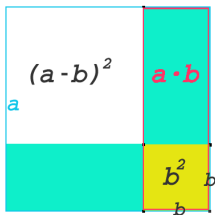
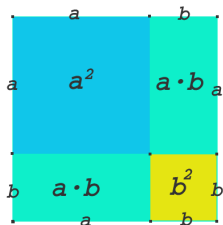


Bilder: Mikue – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## 2. Binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### Geometrie



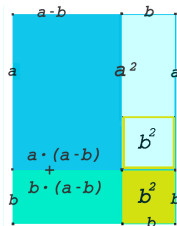
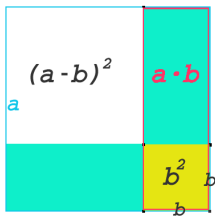
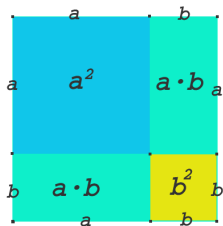
Bilder: Mikue – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de



## 3. Binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

### Geometrie



Bilder: Mikue – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Fakultäten

$$0! = 1$$

$$k! = 1 \cdot \dots \cdot k \quad \text{für jede positive ganze Zahl } k$$

## Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

## Beispiele

$$(2x - 5y)^2 = \quad (1)$$

$$(3x + 4y)(3x - 4y) = \quad (2)$$

## Bruch

$$\frac{m}{n} = m : n, \quad n \neq 0$$

$\frac{m}{n}$  – Bruch (Quotient),  $m$  – Zähler (Dividend),  $n$  – Nenner (Divisor)

## Begriffe

Echte Brüche:  $m < n$

Unechte Brüche:  $m > n$

Stammbrüche:  $m = 1$

Gemischte Brüche (!)

## Kehrwert

$$\frac{1}{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m}$$

## Erweitern und Kürzen

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{ac}{bc}, \quad b, c \neq 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad b, c \neq 0$$

## Hinweise

- ▶ Vorzeichen von Zähler und Nenner stets beachten
- ▶ Niemals aus Summen kürzen

## Beispiele

$$\frac{a \cdot b + c}{a}, \frac{a}{a \cdot b + c} \rightsquigarrow \text{Kürzen nicht möglich!}$$

$$\text{Aber } \frac{a \cdot b + a \cdot c}{a \cdot d} = \frac{a \cdot (b + c)}{a \cdot d} = \frac{b + c}{d}$$

## Gleichnamige Brüche

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad c \neq 0$$

## Ungleichnamige Brüche

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{i \cdot a \pm j \cdot b}{k}, \quad c, d \neq 0$$

$k$  ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV), schlimmstenfalls  $k = c \cdot d$ ,  $i = d$ ,  $j = c$ . GgT und kgV kann man über die Primfaktorzerlegung der beiden gegebenen Zahlen bestimmen, z.B.:

$$3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \quad \rightsquigarrow \text{ggT}(3528, 3780) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 252$$

Für  $b, c, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{bc}$$

**Beispiele**

$$\frac{a^2 - 1}{2b} \cdot \frac{12b}{ac - c} =$$

$$(1) \quad \frac{22ax^2y^2}{27brs^2} : \frac{66x^2y}{18r^2s} = \quad (2)$$

## Eigenschaften

- ▶  $a \leq a$  (Reflexivität)
- ▶  $a \leq b$  und  $b \leq c \implies a \leq c$  (Transitivität)
- ▶  $a \leq b$  und  $b \leq a \implies a = b$  (Antisymmetrie)

## Rechenregeln

- ▶  $a < b \iff b > a$
- ▶  $a \leq b \implies a + c \leq b + c$
- ▶  $a \leq b$  und  $c \leq d \implies a + c \leq b + d$
- ▶  $a \leq b, c \geq 0 \implies ac \leq bc$
- ▶  $a \leq b, c \leq 0 \implies ac \geq bc$  ( $a < b \implies -a > -b$ )
- ▶  $a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

	(1)	(2)	(3)
Seite 9	$\frac{a}{b^2} - 24$	338	
Seite 11	19	22	$-7b - 7c - 7d$
Seite 12	$7x - 31$	$55x + 80y$	
Seite 16	$4x^2 - 20xy + 25y^2$	$9x^2 - 16y^2$	
Seite 20	$\frac{6(a+1)}{c}$	$\frac{2ary}{9bs}$	



## Potenz

Für Zahlen  $a$  und  $n$  bezeichnen wir

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren, } n \in \mathbb{N}}$$

als Potenz,  $a$  als Basis und  $n$  als Exponent.

## Hinweis

- ▶ Für  $x \in \mathbb{N}$  ist  $a^x$  nur für  $a \in \mathbb{R}$  definiert.
- ▶ Für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $a^x$  nur für  $a \in \mathbb{R}^+$  definiert.

## Rechenregel

$$a^{\frac{p}{q}} = c \iff a^p = c^q$$

## Negative Exponenten

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

## Exponenten 1 und 0

$$a^1 = a \qquad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

## Spezielle Potenz, $n \in \mathbb{Z}$

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

# Regeln der Potenzrechnung

(Seien  $a, b, p, q \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$ .)

## Potenzrechnung vor Punktrechnung

$$ba^n = b \cdot (a^n)$$

Es gilt  $ba^n \neq (ba)^n$ .

## Addieren und Subtrahieren

$$p \cdot a^n \pm q \cdot a^n = (p \pm q) \cdot a^n$$

## Multiplizieren und Dividieren bei gleicher Basis

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

## Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Exponenten

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Es gelten (i.A.)  $a^n \cdot b^n \neq (ab)^{2n}$ ,  $\frac{a^n}{b^n} \neq \frac{a}{b}$ ,  $(a+b)^n \neq (a \cdot b)^n$ .

## Potenzieren einer Potenz

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$$

$$x^{3m-1} x^{m+1} = \quad (1)$$

$$\frac{8^2 \cdot 5^2}{8^2 + 6^2} = \quad (2)$$

$$\frac{5a^{x+y} b^{3u+v}}{7c^2} : \frac{5c^4}{28a^{y-x} b^{v-2u}} = \quad (3)$$

$$\left( \frac{5a^{-1}}{-2^2 b^{-3}} \right)^{-4} = \quad (4)$$

$$\left( \frac{2}{3} x^{-1} - 3x \right) \left( 3x^{-1} - \frac{2}{3} x \right) = \quad (5)$$

## Wurzel

Für Zahlen  $a \geq 0$  und  $n \geq 1$  bezeichnen wir

$$\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a \quad (x \geq 0)$$

als Wurzel,  $a$  als Radikand und  $n$  als Wurzelexponent.

## Bemerkungen

1. Nach Definition der Wurzel:  $\sqrt{a^2} = |a|$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Aber die Gleichung  $x^2 = a$  hat die Lösungen  $x_1 = \sqrt{a}$  und  $x_2 = -\sqrt{a}$ .
2. Für ungerade  $n$  kann die  $n$ -te Wurzel auch für negative Zahlen  $a$  eindeutig definiert werden, z.B.  $\sqrt[3]{-27} = -3$ .

# Regeln der Wurzelrechnung

(Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ .)

## Addieren und Subtrahieren

$$p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$$

## Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Radikanden

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$$

## Multiplizieren und Dividieren bei gleichem Wurzelexponenten

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

## Radizieren und Potenzieren einer Wurzel

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= {}^{m \cdot n}\sqrt{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \\ (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}}\end{aligned}$$

## Rationalmachen des Nenners

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

## Speziell

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$



$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \quad (1)$$

$$\frac{a}{a + \sqrt{a}} = \quad (2)$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{xy^2}} = \quad (3)$$

$$\frac{a-2}{\sqrt{a^2-4}} = \quad (4)$$

$$\sqrt{9\sqrt[3]{\frac{1}{18}}} = \quad (5)$$

## Logarithmus

Für Zahlen  $a > 0$  und  $b \geq 0$  bezeichnen wir

$$\log_a(b) = x \iff a^x = b$$

als Logarithmus  $b$  zur Basis  $a$ ,  $a$  als Basis und  $b$  als Numerus.

## Folgerungen

$$\log_a(a) = 1 \quad \log_a(1) = 0$$

## Spezielle Basen

$$\log_{10}(b) = \lg(b) \quad \log_e(b) = \ln(b) \quad \log_2(b) = \text{ld}(b)$$

Eulersche Zahl  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284\dots$

## Rechenregeln

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$$

$$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$$

$$\log_a(a^r) = r$$

$$\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v)$$

## Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen

$$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)} \quad \text{Spezialfall: } \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

$$\log_2(8) = \quad (1)$$

$$\log_3(81) = \quad (2)$$

$$\lg(\sqrt{2}) = \quad (3)$$

$$\lg(0,01) = \quad (4)$$

$$\log_5(\sqrt[3]{5}) = \quad (5)$$

$$\log_2(\sqrt[3]{64}) = \quad (6)$$

$$\log_{10}(10000) = \quad (7)$$

## Organisatorisches

### Arithmetik

- Rechenregeln
- Klammern
- Binome
- Brüche
- Ungleichungen
- Potenzen

### 35 Logarithmen

- Sonstiges

### Trigonometrie

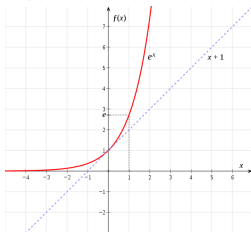
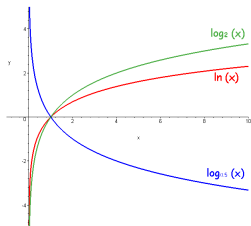
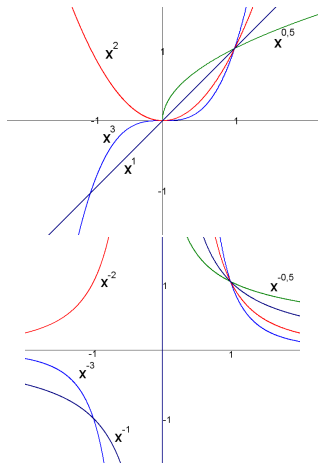
### Gleichungen

### Funktionen

### Differentialrechnung

### Integralrechnung

### Analytische Geometrie



## Arithmetisches Mittel

$$\bar{x}_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

## Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}$$

## Harmonisches Mittel

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

## Quadratisches Mittel

$$\bar{x}_q = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}$$

## Eigenschaften

$$|-a| = |a|$$

$$|a| \geq 0; \quad |a| = 0 \iff a = 0$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ für } b \neq 0; \quad \left| \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b|} \text{ für } b \neq 0$$

$$|a^n| = |a|^n \text{ für } n \in \mathbb{N}; \quad \left| \frac{1}{a^n} \right| = \frac{1}{|a|^n} \text{ für } n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

## Dreiecksungleichung

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

	Seite 27	Seite 31	Seite 34
(1)	$x^{4m}$	2	3
(2)	16	$\frac{a-\sqrt{a}}{a-1}$	4
(3)	$\frac{4a^{2y}b^{u+2v}}{c^6}$	$\frac{1}{y} \sqrt[3]{x^2y}$	$\frac{1}{2}$
(4)	$\frac{256a^4}{625b^{12}}$	$\frac{\sqrt{a^2-4}}{a+2}$	-2
(5)	$2x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{85}{9}$	$\frac{1}{2} \sqrt[6]{2^5 \cdot 3^4}$	$\frac{1}{3}$
(6)			2
(7)			4



Organisatorisches

Arithmetik

**Trigonometrie**

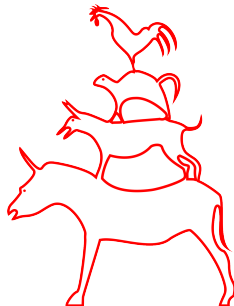
Gleichungen

Funktionen

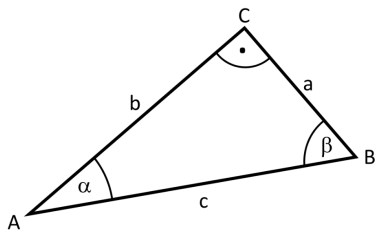
Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie



# Definition der trigonometrischen Funktionen



$a$  = Gegenkathete von  $\alpha$

$a$  = Ankathete von  $\beta$

$b$  = Gegenkathete von  $\beta$

$b$  = Ankathete von  $\alpha$

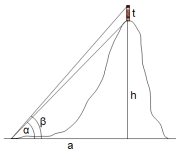
$c$  = Hypotenuse

Bei rechtwinkligen Dreiecken mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma = 90^\circ$  gilt:  
 $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad \cot(\alpha) = \frac{b}{a}$$

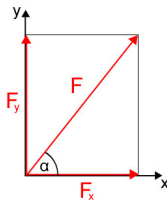
$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a} \quad \cot(\beta) = \frac{a}{b}$$

**Geometrie:** Gegeben sind Höhe des Turms  $t$  und  $\alpha, \beta$ , gesucht ist Höhe des Bergs  $h$ .



**Kräftezerlegung:** Gegeben sind  $F$  und  $\alpha$ , gesucht sind  $F_x$  und  $F_y$ :

$$F_x = F \cos(\alpha), \quad F_y = F \sin(\alpha)$$



Bogenmaß $b$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Gradmaß $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Berechnung via **Satz des Pythagoras** möglich ...

$$a^2 + b^2 = c^2$$

# Exkurs: Maße im Kreis

Kreiszahl  $\pi = 3,1415926535\dots$

## Kenngößen

Umfang  $U = 2\pi \cdot r$

Fläche  $A = \pi \cdot r^2$

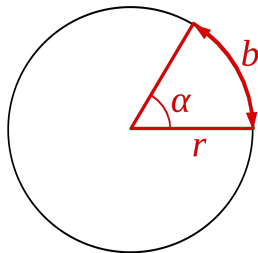
Kreisausschnitt  $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$

Kreisbogen  $b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$

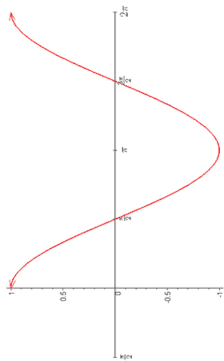
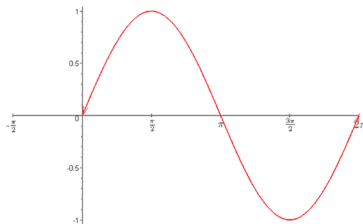
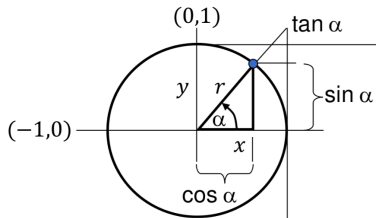
**Umrechnung:** ( $2\pi\text{rad} = 360^\circ$ )

Grad:  $\alpha = \frac{s}{\pi} \cdot 180^\circ$

Radian:  $s = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$



# Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel



$$\sin(\alpha) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{r},$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}, \quad \cot(\alpha) = \frac{x}{y}$$

$$\sim r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

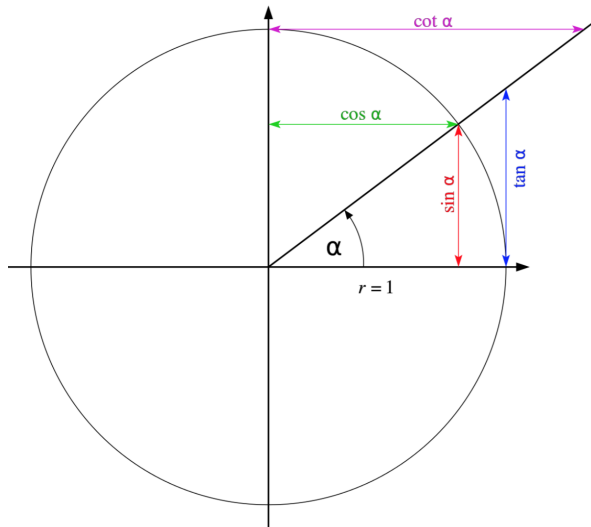
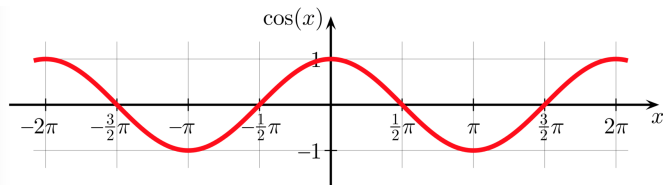
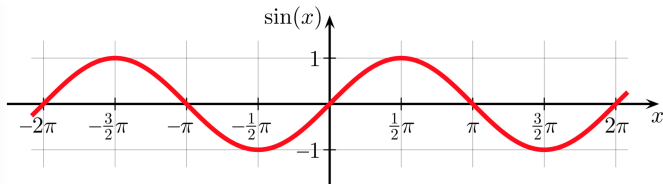


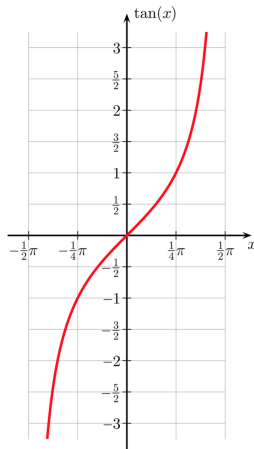
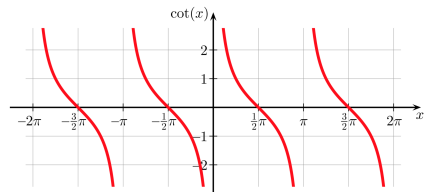
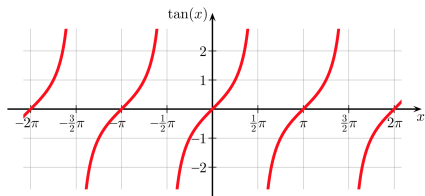
Bild: Lars H. Rohwedder



Bilder: Geek3 – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de



# Graphen der trigonometrischen Funktionen



Bilder: Geek3 – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Komplementwinkel

$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha), \quad \tan(\alpha) = \cot(90^\circ - \alpha)$$

## Umrechnungsformeln

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) \cot(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

## Negative Winkel

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

## Periodizität

$$\sin(n\pi) = 0, \quad \cos(\pi/2 + n\pi) = 0, \quad \sin(x + \pi/2) = \cos(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

## Summe zweier Winkel

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

## Summe zweier Funktionen

$$\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

**Gegeben:** Funktionswert einer trigonometrischen Funktion

**Gesucht:** zugehöriger Winkel

## Arkussinus

$$x = \arcsin(y) \iff y = \sin(x) \quad \text{und} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]$$

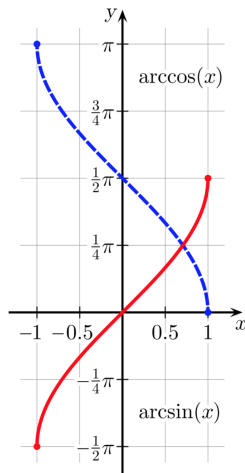
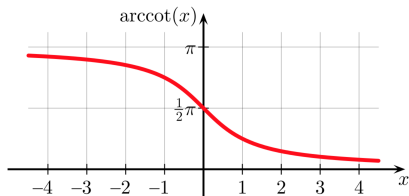
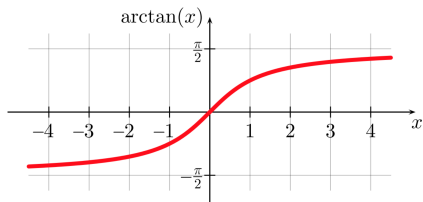
## Arkuscossinus

$$x = \arccos(y) \iff y = \cos(x) \quad \text{und} \quad x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]$$

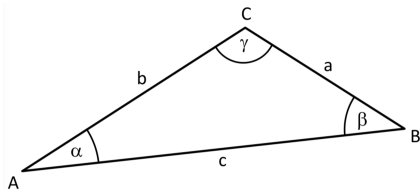
## Arkustangens

$$x = \arctan(y) \iff y = \tan(x) \quad \text{und} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-\infty, \infty]$$

# Graphen der Arkusfunktionen



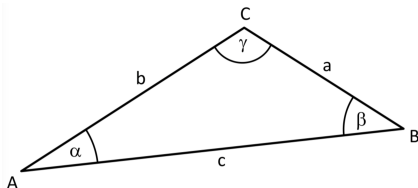
Bilder: Geek3 – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de



## Flächeninhaltsformel

Die Fläche eines ebenen Dreiecks ist gegeben durch

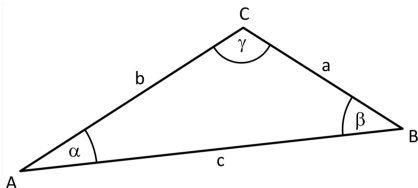
$$A = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ca \sin(\beta) = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma)$$



## Sinussatz

Im ebenen Dreieck gilt stets

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



## Cosinussatz (Verallgemeinerter Satz von Pythagoras)

Im ebenen Dreieck gilt stets

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos(\gamma)$$



Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

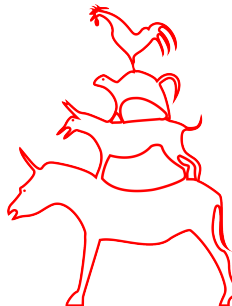
**Gleichungen**

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie



Vorkurs Mathematik

J. Pannek

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

55 **Gleichungen**

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Biquadratische  
Gleichungen

Algebraische Gleichungen

Lineare Gleichungen

Geradengleichungen

Parabelgleichung

Lineare Gleichungen

Kreisgleichung

Lineare  
Gleichungssysteme

Determinanten

Gaussverfahren

Lineare Ungleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie

## Arten von Gleichungen

Wir unterscheiden die Gleichungsarten

- ▶ Identitätsgleichung, z.B.  $a(b + c) = ab + ac$
- ▶ Bestimmungsgleichungen, z.B.  $x + 2 = 3$
- ▶ Funktionsgleichungen, z.B.  $y = 2x + 1$

## Äquivalente Umformungen

$$x - a = b \iff x = b + a$$

$$x + a = b \iff x = b - a$$

$$\frac{x}{a} = b \iff x = b \cdot a$$

$$ax = b \iff x = \frac{b}{a}$$

## Spezialfall: Lineare Gleichung

Eine Gleichung wird als lineare Gleichung bezeichnet, wenn sie in die Form  $f(x) = y$  gebracht werden kann und

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt. Die Gleichung

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

heißt lineare Gleichung in allgemeiner Form.

## Normalform

$$x + \frac{b}{a} = x + c = 0, \quad c = \frac{b}{a}$$

## Lösung und Lösungsmenge

$$x = -c = -\frac{b}{a}, \quad \mathbb{L} = \{-c\} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

$$15x - 33 = 42 \quad (1)$$

$$78 - 3x = 24 \quad (2)$$

$$5(x - 7) + 48 = 73 \quad (3)$$

$$11(5x - 2) = 4(5 + 12x) \quad (4)$$

$$5x - 6 = 29 \quad (5)$$

$$5x - 20 = 60 - 11x \quad (6)$$

$$3(x + 2) = 5(-2x + 9) \quad (7)$$

$$\frac{5}{4} = \frac{5 + x}{x} \quad (8)$$

$$15x - 33 = 42 \quad (1)$$

$$78 - 3x = 24 \quad (2)$$

$$5(x - 7) + 48 = 73 \quad (3)$$

$$11(5x - 2) = 4(5 + 12x) \quad (4)$$

$$5x - 6 = 29 \quad (5)$$

$$5x - 20 = 60 - 11x \quad (6)$$

$$3(x + 2) = 5(-2x + 9) \quad (7)$$

$$\frac{5}{4} = \frac{5 + x}{x} \quad (8)$$

**Lösungen:**

$$x_1 = 5, x_2 = 18, x_3 = 12, x_4 = 6, x_5 = 7, x_6 = 5, x_7 = 3, x_8 = 20$$

## Spezialfall: Quadratische Gleichung

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung lautet

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

### Normalform

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$$

**Lösung:**  $((p, q)$  oder Mitternachtsformel)

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

## Ablauf der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

**Rezept:** Addition der Hälfte des Vorfaktors von  $x$

## Diskriminante der Normalform

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

- ▶  $D > 0 \rightsquigarrow$  zwei reelle Lösungen  $x_1, x_2$
- ▶  $D = 0 \rightsquigarrow$  eine reelle Lösung (Doppellösung  $x_1 = x_2$ )
- ▶  $D < 0 \rightsquigarrow$  keine reelle Lösung

## Zerlegung in Linearfaktoren $\rightsquigarrow$ Produktform

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$



## Spezialfall: Biquadratische Gleichung

Die allgemeine Form einer biquadratischen Gleichung lautet

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0.$$

### Gleichung (Normalform)

$$x^4 + sx^2 + u = 0$$

### Substitution $x^2 = z$

$$z^2 + sz + u = 0$$

### Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - u}$$

### Lösungen der biquadratischen Gleichung

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

62 Biquadratische  
Gleichungen

Algebraische Gleichungen

Lineare Gleichungen

Geradengleichungen

Parabelgleichung

Lineare Gleichungen

Kreisgleichung

Lineare  
Gleichungssysteme

Determinanten

Gaussverfahren

Lineare Ungleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie

## Spezialfall: Kubische Gleichungen

Die allgemeine Form einer kubischen Gleichung lautet

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$$

## Spezialfall: Gleichungen vierten Grades

Die allgemeine Form einer Gleichung vierten Grades lautet

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, a \neq 0.$$

## Gleichung $n$ -ten Grades

Die allgemeine Form einer Gleichung  $n$ -ten Grades lautet

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0.$$

**Lösung:** Cardanische Formeln (kubisch), Reduktionsmethode

## Begriffe

- ▶ **Polynom**  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$
- ▶ **Division**  $\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = P_k(x)$ ,  $n \geq m$  verläuft ganz analog dem schriftlichen Dividieren von Dezimalzahlen
- ▶  $x_0$  heißt **Nullstelle** von  $P_n(x)$ , wenn  $P_n(x_0) = 0$
- ▶  $m$  heißt **Vielfachheit** der Nullstelle  $x_0$  von  $P_n(x)$ , wenn  $P_n(x) = (x - x_0)^m \cdot P_k(x)$

**Beispiel:**  $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 2) = x^2 - 4x + 3$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ \underline{- x^3 + 2x^2} \\ -4x^2 + 11x \\ \underline{4x^2 - 8x} \\ 3x - 6 \\ \underline{- 3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Biquadratische

Gleichungen

Algebraische Gleichungen

64

Lineare Gleichungen

Geradengleichungen

Parabelgleichung

Lineare Gleichungen

Kreisgleichung

Lineare

Gleichungssysteme

Determinanten

Gaussverfahren

Lineare Ungleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie

## Bruchgleichungen

$$\frac{x+2}{2x-1} = \frac{4x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{7}$$

## Wurzelgleichungen

$$11 - \sqrt{x+3} = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 22$$

## Exponentialgleichungen

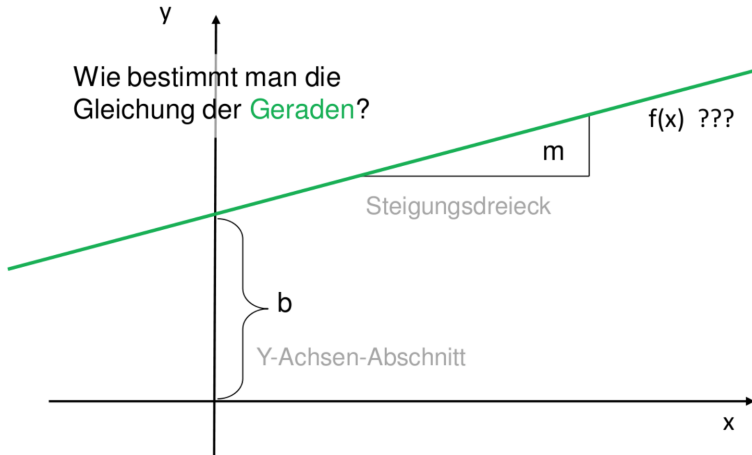
$$e^{2x+3} = e^{x-4} \quad \Rightarrow \quad x = -7$$

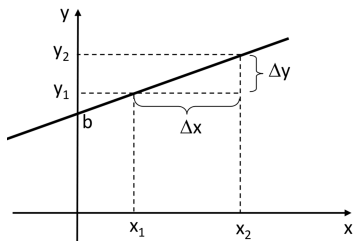
## Logarithmische Gleichungen

$$\lg(6x+10) - \lg(x-3) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

## Trigonometrische Gleichungen

$$\sin^2(x) - 1 = -0,5 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 45^\circ$$





## Grundform:

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## Zweipunktform:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

## Punktsteigungsform:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

## Achsenabschnittsform:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

## Grundform:

$$y = ax^2 + bx + c$$

## Berechenbar durch drei Punkte:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

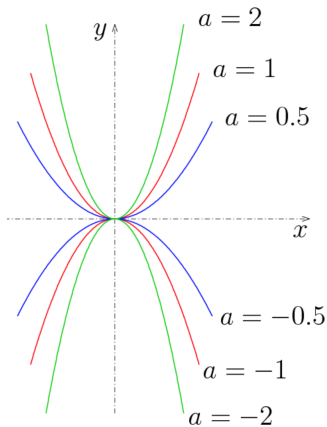
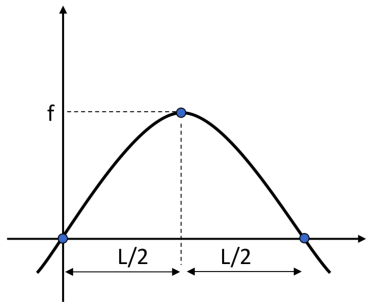


Bild: Ag2gaeh – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Beispiel

Wie läßt sich eine Parabel durch die Punkte  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (L, 0)$  und  $P_3 = \left(\frac{L}{2}, f\right)$  beschreiben?

↪ Gleichungssystem mit drei Unbekannten:



$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$0 = aL^2 + bL + c$$

$$f = a \left(\frac{L}{2}\right)^2 + b \left(\frac{L}{2}\right) + c$$

$$\leadsto y = 4f \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Biquadratische Gleichungen

Gleichungen

Algebraische Gleichungen

Lineare Gleichungen

Geradengleichungen

69 **Parabelgleichung**

Lineare Gleichungen

Kreisgleichung

Lineare

Gleichungssysteme

Determinanten

Gaussverfahren

Lineare Ungleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie



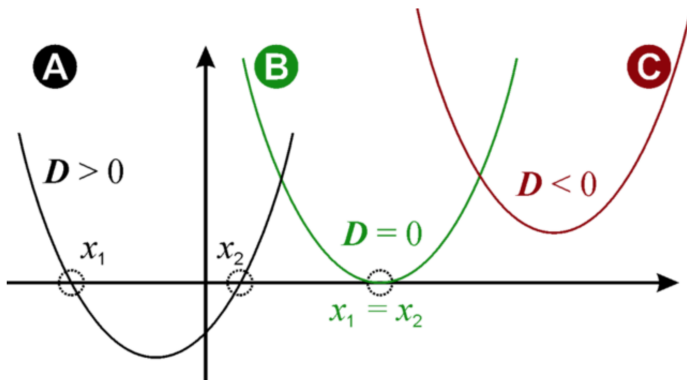


Bild: Ralf Pfeifer – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Zur Erinnerung: Diskriminante der Normalform

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

## Kreisgleichung

Wir bezeichnen die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

als Kreisgleichung in allgemeiner Form.

## Mittelpunktsform oder Grundform

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

## Parameterdarstellung

$$x = x_m + r \cos(t), \quad y = y_m + r \sin(t), \quad 0 \leq t < 2\pi$$

## Mittelpunktsform der Ellipsengleichung

$$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$

## Beispiel

$$7x + 4y = 23$$

$$2x - 3y = 19$$

## Lösungsmöglichkeiten

- ▶ Gleichsetzungsverfahren
- ▶ Einsetzungsverfahren (Substitutionsverfahren)
- ▶ Additionsverfahren
- ▶ (Determinantenverfahren)
- ▶ Eliminationsverfahren nach Gauß

**Hinweis:** Probe in den Ausgangsgleichungen durchführen!

## Beispiel

$$\begin{array}{l} 7x + 4y = 23 \\ 2x - 3y = 19 \end{array} \implies \begin{array}{l} x = \frac{23 - 4y}{7} \\ x = \frac{19 + 3y}{2} \end{array} \implies \frac{19 + 3y}{2} = \frac{23 - 4y}{7}$$

## Vorgehensweise

- ▶ Beide Gleichungen nach derselben Variable auflösen
- ▶ Terme *gleichsetzen*
- ▶ Lineare Gleichung mit einer Variablen lösen
- ▶ Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen
- ▶ Lineare Gleichung mit der anderen Variablen lösen

**Lösung:**  $x = 5, y = -3$

## Beispiel

$$\begin{array}{l} 7x + 4y = 23 \\ 2x - 3y = 19 \end{array} \implies x = \frac{23 - 4y}{7} \implies 2 \frac{23 - 4y}{7} - 3y = 19$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 2x-3y=19}$

## Vorgehensweise

- ▶ Eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen auflösen
- ▶ Term in die andere Gleichung *einsetzen*
- ▶ Lineare Gleichung mit einer Variablen lösen
- ▶ Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen
- ▶ Lineare Gleichung mit der anderen Variablen lösen

**Lösung:**  $x = 5, y = -3$

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Biquadratische  
Gleichungen

Algebraische Gleichungen

Lineare Gleichungen

Geradengleichungen

Parabelgleichung

Lineare Gleichungen

Kreisgleichung

74

Lineare  
Gleichungssysteme

Determinanten

Gaussverfahren

Lineare Ungleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie

## Beispiel

$$\begin{array}{r} 7x + 4y = 23 \\ 2x - 3y = 19 \end{array} \implies \begin{array}{r} 3 \cdot 7x + 3 \cdot 4y = 3 \cdot 23 \\ 4 \cdot 2x - 4 \cdot 3y = 4 \cdot 19 \end{array} \implies \begin{array}{r} 21x + 12y = 69 \\ 8x - 12y = 76 \end{array} \implies 21x + 8x = 69 + 76$$

## Vorgehensweise

- ▶ Beide Gleichungen mit einem Faktor multiplizieren, so dass bei anschließender *Addition* der Gleichungen eine der Variablen wegfällt
- ▶ Lineare Gleichung mit einer Variablen lösen
- ▶ Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen
- ▶ Lineare Gleichung mit der anderen Variablen lösen

**Lösung:**  $x = 5$ ,  $y = -3$

## Allgemeine Form

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

## Lösung

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

## Fallunterscheidung

1.  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \rightsquigarrow$  *genau eine* Lösung (homogenes Gleichungssystem, d.h.  $c_1 = c_2 = 0 \rightsquigarrow$  nur triviale Lösung)
2.  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , aber (mindestens)  $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$  oder  $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0 \rightsquigarrow$  *keine* Lösung
3. Nenner = 0 und zudem beide Zähler = 0  $\rightsquigarrow$  *unendliche viele* Lösungen

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Biquadratische Gleichungen

Algebraische Gleichungen

Lineare Gleichungen

Geradengleichungen

Parabelgleichung

Lineare Gleichungen

Kreisgleichung

76

Lineare Gleichungssysteme

Determinanten

Gaussverfahren

Lineare Ungleichungen

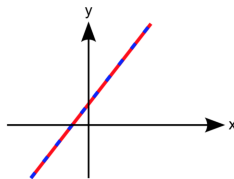
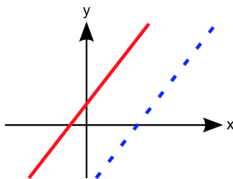
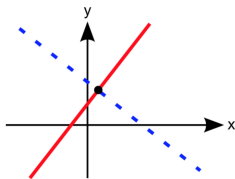
Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie

1. *Lösung* bildendes Zahlenpaar ist das Koordinatenpaar des eindeutigen Schnittpunktes der beiden Geraden (Koordinatenursprung  $\leadsto$  triviale Lösung)
2. *Keine Lösung*; Graphen der beiden Gleichungen sind parallele Geraden
3. *Unendlich viele Lösungen*; Graphen der beiden Gleichungen sind gleich





$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{= \text{Matrix } \mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{= \text{Vektor } \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{= \text{Vektor } \mathbf{c}}$$

## Determinanten und Unterdeterminanten

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\det_x(A) = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2c_1 - b_1c_2, \quad \det_y(A) = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

## Lösung (Cramersche Regel)

$$x = \frac{\det_x(A)}{\det(A)} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{\det_y(A)}{\det(A)} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

## Regel nach Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

$\det_1(A)$ ,  $\det_2(A)$  und  $\det_3(A)$  analog (Ersetzen der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Spalte durch die  $c$ -Spalte)

## Lösung

$$x = \frac{\det_1(A)}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det_2(A)}{\det(A)}, \quad z = \frac{\det_3(A)}{\det(A)}$$

## Lineares Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

## Algorithmus

1. Vorwärtselimination
2. Rückwärtseinsetzen (Rücksubstitution)

**1. Schritt: Stufenform**, d.h. pro Zeile wird eine Variable *eliminiert*

$$\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 = \tilde{b}_1$$

$$\tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 = \tilde{b}_2$$

$$\tilde{a}_{33}x_3 = \tilde{b}_3$$

**Elementare Zeilenumformungen:** Transformation des Gleichungssystems in ein neues mit derselben Lösungsmenge

1. Eine Zeile oder das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren
2. Zwei Zeilen vertauschen

**2. Schritt: Rückwärtseinsetzen:** Ausgehend von der letzten Zeile die Variablen ausrechnen und in die darüberliegende Zeile einsetzen

## Allgemeines

- ▶ Standardlösungsverfahren für allgemeine lineare Gleichungssysteme
- ▶ Teil aller wesentlichen Programmbibliotheken für numerische lineare Algebra (mit kleinen Modifikationen)

## Aufgabe

$$\begin{array}{r} +7x_1 \quad +3x_2 \quad -5x_3 \quad = \quad -12 \\ -x_1 \quad -2x_2 \quad +4x_3 \quad = \quad +5 \\ -4x_1 \quad +x_2 \quad -3x_3 \quad = \quad +1 \end{array}$$

## 1. Vorwärtselimination

$$\begin{array}{r} +7x_1 \quad +3x_2 \quad -5x_3 \quad = \quad -12 \\ -x_1 \quad -2x_2 \quad +4x_3 \quad = \quad +5 \\ -4x_1 \quad +x_2 \quad -3x_3 \quad = \quad +1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \quad \leftarrow \\ \cdot 7 \quad \leftarrow + \\ \cdot 7 \quad \leftarrow \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 4 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} +7x_1 \quad +3x_2 \quad -5x_3 \quad = \quad -12 \\ \phantom{+7x_1} -11x_2 \quad +23x_3 \quad = \quad +23 \\ \phantom{+7x_1} \phantom{-11x_2} 19x_2 \quad -41x_3 \quad = \quad -41 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} +7x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = -12 \\ & -11x_2 & +23x_3 & = +23 \\ & +19x_2 & -41x_3 & = -41 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot 19 \leftarrow + \\ | \cdot 11 \leftarrow + \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} +7x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = -12 \\ & -11x_2 & +23x_3 & = +23 \\ & & -14x_3 & = -14 \end{array} \right|$$

## 2. Rückwärtssubstitution

$$\begin{array}{rcl} & -14x_3 = -14 & \implies x_3 = 1 \\ -11x_2 + 23 = 23 & \implies -11x_2 = 0 & \implies x_2 = 0 \\ +7x_1 + 0 - 5 = -12 & \implies +7x_1 = -7 & \implies x_1 = -1 \end{array}$$

## Allgemein

- ▶ *Unterbestimmte Gleichungssysteme*, d.h. mehr Unbekannte als Gleichungen  $\leadsto$  nie eindeutig lösbar
- ▶ *Überbestimmte Gleichungssysteme*, d.h. mehr Gleichungen als Unbekannte  $\leadsto$  im Allgemeinen nicht lösbar
- ▶ Erweiterung auf reduzierte Stufenform  $\leadsto$  *Gauss-Jordan-Algorithmus*

## Aufgaben

$$\begin{cases} +1x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & -5 \\ +3x_1 & +3x_2 & +1x_3 & = & +6 \\ +2x_1 & +1x_2 & -1x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +3z_1 & +15z_2 & +8z_3 & = & +10 \\ -5z_1 & +10z_2 & +12z_3 & = & -1 \\ +2z_1 & +7z_2 & +1z_3 & = & +1 \end{cases}$$

**Lösungen:**  $\mathbf{x} = (2, -1, 3)$ ,  $\mathbf{z} = (3, -1, 2)$

## Lineare Ungleichungen mit einer Variablen

$$ax + b < 0, \quad a > 0 \quad \leadsto \quad \mathbb{L} = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$$

$$ax + b \geq 0, \quad a > 0 \quad \leadsto \quad \mathbb{L} = \left[-\frac{b}{a}, -\infty\right)$$

## Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

$$\text{Ungleichung} \quad ax + by + c < 0 \quad (b > 0)$$

$$\text{Lösungsmenge} \quad \mathbb{L} = \left\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \right\}$$

## Beispiel

$$x - y < -1 \quad \leadsto \quad \mathbb{L} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y > x + 1\}$$



Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

**Funktionen**

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie

Vorkurs Mathematik

J. Pannek

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

86 **Funktionen**

Definition

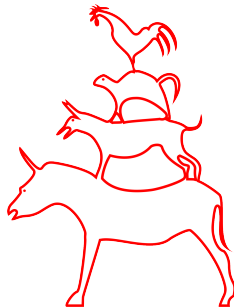
Eigenschaften

Umkehrfunktion

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie



## Abbildung oder Funktion

### Eine Funktion

$$f : D \rightarrow W, \quad x \mapsto f(x)$$

ordnet jedem Punkt  $x$  des Definitionsbereichs  $D \subseteq X$  einen Wert  $y$  aus dem Wertebereich  $W \subseteq Y$  zu. Die Menge  $f(D) \subseteq W$  wird als Bildmenge bezeichnet.

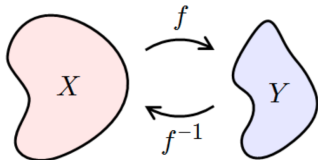
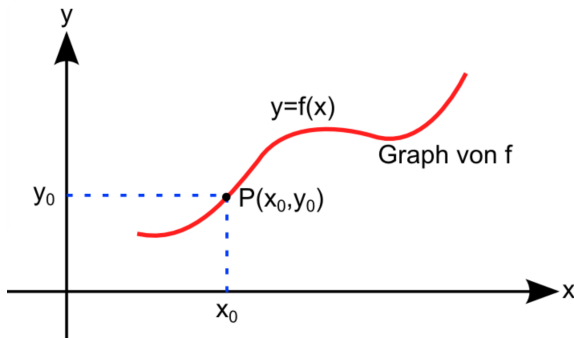


Bild: Jim.belk – Lizenz:  
Creative Commons by-sa 3.0 de

### Darstellung der Funktionsgleichung

- ▶ Explizit:  $y = f(x)$
- ▶ Implizit:  $F(x, y) = 0$
- ▶ Parametrisiert:  $x = \varphi(t)$ ,  
 $y = \psi(t)$

**Graph einer Funktion** – Bild, das man erhält, wenn man die geordneten Zahlenpaare  $(x, y) = (x, f(x))$  mit  $x \in D$  in ein Koordinatensystem einträgt



**Bestimmung:** Kurvendiskussion und Wertetabelle

## Injektivität

Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  heißt injektiv, wenn gilt:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$$

## Surjektivität

Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  heißt surjektiv, wenn gilt:

$$f(D) = W$$

## Bijektivität

Ist eine Funktion injektiv und surjektiv, so wird sie als bijektiv bezeichnet.

Bijektive Funktionen besitzen Umkehrfunktionen.

## Monotone Funktionen

Wir nennen eine Funktion

- ▶ *monoton wachsend*, wenn  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$ ,
- ▶ *streng monoton wachsend*, wenn  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ ,
- ▶ *monoton fallend*, wenn  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ , und
- ▶ *streng monoton fallend*, wenn  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ .

## Symmetrische Funktionen

Eine Funktion heißt

- ▶ *gerade*, d.h. symmetrisch zur  $y$ -Achse, wenn  $f(x) = f(-x)$ , und
- ▶ *ungerade*, d.h. symmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn  $-f(x) = f(-x)$

## Beschränkte Funktionen

Falls Werte  $a, b \in \mathbb{R}$  existieren mit  $a < b$ , so dass  $a \leq f(x) \leq b$  für alle  $x \in D$ , dann heißt die Funktion  $f : D \rightarrow W$  beschränkt.

## Umkehrfunktion

Für eine bijektive Funktion  $f : D \rightarrow W$  bezeichnet

$$f^{-1} : W \rightarrow D, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

die Umkehrfunktion, wenn gilt  $f^{-1} \circ f = \text{Id}$ .

### Berechnung:

1. Auflösen von  $y = f(x)$  nach  $x$ :  $x = f^{-1}(y)$
2. Vertauschen von  $x$  und  $y$ :  $y = f^{-1}(x)$

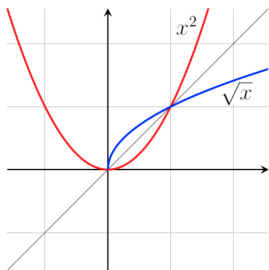


Bild: Jim.belk – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

- ▶ Rationale Funktionen
  - ▶ Gebrochenrationale Funktionen
  - ▶ Ganzrationale Funktionen
    - ▶ Lineare Funktionen
    - ▶ Quadratische Funktionen
    - ▶ Potenzfunktionen
- ▶ Irrationale Funktionen
  - ▶ Wurzelfunktionen
  - ▶ Trigonometrische Funktionen
    - ▶ Sinusfunktion
    - ▶ Cosinusfunktion
    - ▶ Tangensfunktion
    - ▶ Arkusfunktionen
  - ▶ Exponentialfunktionen
  - ▶ Logarithmusfunktionen
- ▶ Spezielle Funktionen
  - ▶ konstante Funktion
  - ▶ Betragsfunktion
  - ▶ Impulsfunktion

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

**Differentialrechnung**

Integralrechnung

Analytische Geometrie

Vorkurs Mathematik

J. Pannek

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

**93 Differentialrechnung**

Ableitung

Geometrie

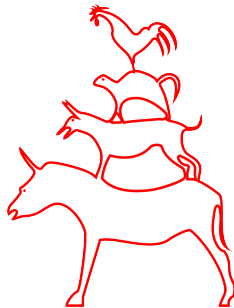
Regeln

Maxima/Minima

Kurvendiskussion

Integralrechnung

Analytische Geometrie





## Definition

Existiert für eine Funktion  $y = f(x)$  mit dem Definitionsbereich  $D$  der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x_0 \in D)$$

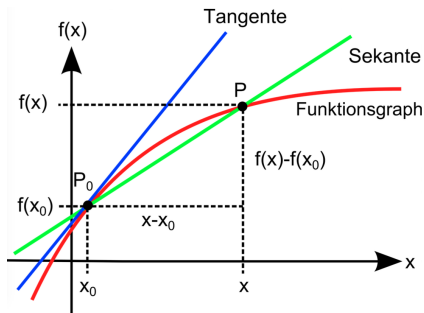
dann nennt man  $f'(x_0)$  die Ableitung der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = x_0$ . Die Funktion  $f(x)$  heißt dann differenzierbar in  $x_0$ .

## Schreibweisen

$$y'(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

## Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



► **Differenzenquotient**

~ Steigung der  
Sekante (Tangens  
des  
Steigungswinkels)

► **Grenzwert  $f'(x_0)$**

~ Steigung der  
Tangente in  $x_0$  an den  
Graphen von  $f(x)$

► **Existenz der  
Ableitung**

~ Kurvenverlauf glatt

## Summenregel

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

## Faktorregel

$$(cf(x))' = cf'(x), c = \text{const.}$$

## Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

## Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$$

## Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## Ableitung der Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## Höhere Ableitungen

$$f''(x) = (f')'(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x), \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x)$$

**Sekante** durch die Punkte  $P_1 = (x_1, f(x_1))$  und  $P_2 = (x_2, f(x_2))$

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

**Tangente** von  $f(x)$  in dem Punkt  $P = (a, f(a))$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\exp(ax)$	$a \exp(ax)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x = \exp(x \ln(a))$	$a^x \ln(a)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$		
$\ln(x^n)$	$\frac{n}{x}$		

## Maximum

Ein Punkt  $a \in D$  heißt absolutes Maximum, falls gilt:

$$f(x) < f(a) \quad \text{für } x \neq a.$$

Wir bezeichnen  $a \in D$  als absolutes Minimum, falls

$$f(x) > f(a) \quad \text{für } x \neq a.$$

## Notwendige Bedingung für Extrema

Ist  $a \in D$  ein Extremum einer differenzierbaren Funktion  $f$ , so gilt

$$f'(a) = 0.$$

## Geometrische Bedeutung

$f(x)$  hat eine zur  $x$ -Achse parallele Tangente in  $P = (a, f(a))$

## Hinreichende Bedingung für Extrema

Erfüllt  $a \in D$  die notwendige Bedingung  $f'(a) = 0$  und

$$f''(a) \neq 0, \quad \text{oder}$$

$$f''(a) = 0, \quad f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \text{ gerade}),$$

dann ist  $a$  ein Extremum.

## Relatives/absolutes Minimum

$$f''(a) > 0, \quad f^{(n)}(a) > 0$$

## Relatives/absolutes Maximum

$$f''(a) < 0, \quad f^{(n)}(a) < 0$$

## Krümmungsverhalten von Funktionen

$$f'(x) > 0 \quad f(x) \text{ nimmt mit wachsendem } x \text{ zu}$$

$$f'(x) < 0 \quad f(x) \text{ nimmt mit wachsendem } x \text{ ab}$$

$$f''(x) > 0 \quad f(x) \text{ ist linksgekrümmt (konvex)}$$

$$f''(x) < 0 \quad f(x) \text{ ist rechtsgekrümmt (konkav)}$$

## Konvex/Konkav

Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  heißt konvex bei  $a \in N \subseteq D$ , falls gilt

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad \forall x, y \in N, t \in [0, 1].$$

Die Funktion heißt konkav an der Stelle  $a \in N \subseteq D$ , falls gilt

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad \forall x, y \in N, t \in [0, 1].$$

## Wendepunkt

Ist eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  konvex/konkav auf  $(a, b]$  und konkav/konvex auf  $[b, c)$ , dann wird  $b$  als Wendepunkt bezeichnet.



## Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt

Ist  $a \in D$  ein Wendepunkt einer zweimal differenzierbaren Funktion  $f$ , so gilt

$$f''(a) = 0.$$

## Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt

Gilt für ein  $a \in D$  die notwendige Bedingung und

$$f'''(a) \neq 0$$

$$f'''(a) = 0, \quad f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \text{ ungerade}),$$

so ist  $a$  ein Wendepunkt.

## Sattelpunkt

$a \in D$  ist Wendepunkt und zudem gilt  $f'(a) = 0$

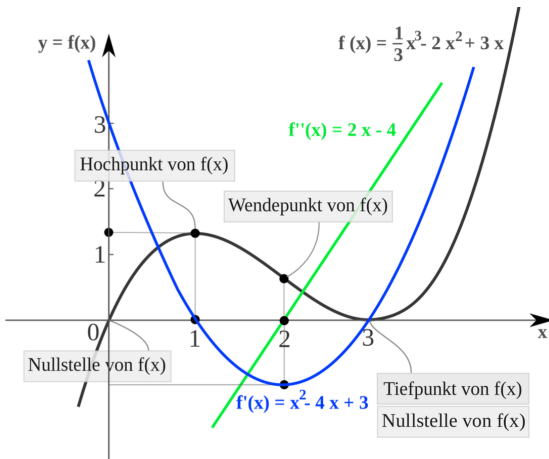


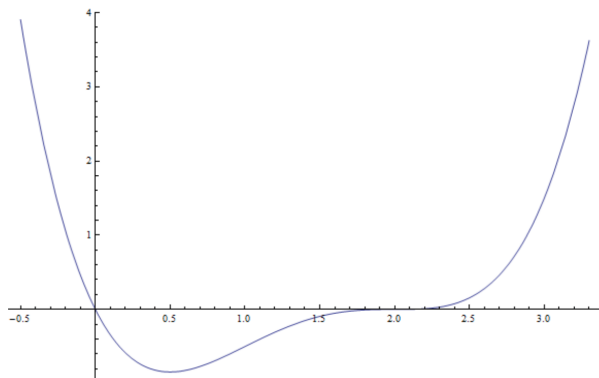
Bild: Honina; Vektorisierung von LoKiLeCh – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Ablauf

1. Bestimmung von Definitionsbereich
2. Untersuchung auf Symmetrie
3. Bestimmung von Nullstellen
4. Bestimmung von relativen/absoluten Extrema
5. Untersuchung auf Monotonie
6. Untersuchung des Krümmungsverhaltens
7. Bestimmung von Wendepunkten
8. Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs (Unstetigkeitsstellen und Asymptoten)
9. Skizze des Funktionsgraphen

## Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3$$



Graph der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x(x - 2)^3$

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

**Integralrechnung**

Analytische Geometrie

Vorkurs Mathematik

J. Pannek

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

106 **Integralrechnung**

Stammfunktion

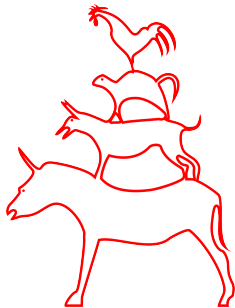
Regeln

Bestimmtes Integral

Hauptsatz

Eigenschaften

Analytische Geometrie



## Stammfunktion

Sei  $f : D \rightarrow W$  gegeben und  $F$  auf  $D$  differenzierbar. Falls für alle  $x \in D$  gilt

$$F'(x) = f(x)$$

dann heißt  $F$  Stammfunktion von  $f$ .

## Eigenschaften

- ▶  $f$  heißt **integrierbar**
- ▶  $F(x) + c$  eine Stammfunktion
- ▶  $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$  – Menge aller Stammfunktionen

## Zusammenhang

Integralrechnung ist Umkehrung der Differentialrechnung

1. Funktion  $f(x) = x^2 - 2x - 3$   
Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + c$
2. Funktion  $f(x) = \sin(x)$   
Stammfunktion  $F(x) = -\cos(x) + c$
3. Funktion  $f(x) = x^k, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$   
Stammfunktion  $F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$
4. Funktion  $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$   
Stammfunktion  $F(x) = \ln(x) + c$
5. Funktion  $f(x) = \exp(x)$   
Stammfunktion  $F(x) = \exp(x) + c$

## Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen  $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$  heißt unbestimmtes Integral und wird dargestellt durch

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

### Bezeichnungen

- ▶  $\int$  – Integralzeichen
- ▶  $f(x)$  – Integrand
- ▶  $x$  – Integrationsvariable
- ▶  $c$  – Integrationskonstante

### Beispiele

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c, \quad \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$



## Faktorregel

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

## Potenzregel

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

## Summenregel

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

## Spezialfall

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

## Partielle Integration

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

### Beispiel

$$\int \ln(x) dx = \dots \quad (1)$$

## Substitutionsmethode

Wähle Substitution s.d.  $x = \varphi(t)$  nach  $t$  differenzierbar

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(x) dx$$

### Beispiel

$$\int (1+x)^n dx = \dots \quad (2)$$

## Spezialfall

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

## Beispiele

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 5) dx = \dots \quad (1)$$

$$\int (x^4 - 3x^2 + 1) dx = \dots \quad (2)$$

$$\int (2x - 4x^3) dx = \dots \quad (3)$$

$$\int 2\pi(r^2 - x^2) dx = \dots \quad (4)$$

# Einige Grundintegrale (ohne Integrationskonstanten)

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$c$	$cx, c = \text{const.}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b} \ln \left  \frac{x-a}{x-b} \right $
$\frac{1}{x-a}$	$\ln x-a $	$\frac{1}{(x-a)^2}$	$-\frac{1}{x-a}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a} \sqrt{ax+b}$

**Beachte** Ist  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ , so ist  $F(x) + c$  für alle  $c$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ .

## Bestimmtes Integral

Ist  $f : D \rightarrow W$  eine beschränkte Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall  $I = [a, b] \subseteq D$ , dann ist das **bestimmte Integral** von  $f(x)$  definiert durch

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

falls dieser Grenzwert existiert und unabhängig von der Wahl der Zahlen  $x_i$  und  $\xi_i$  ist.

## Bezeichnungen

- ▶  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  ist eine Einteilung des Intervalls  $I = [a, b]$
- ▶  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  und  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  bezeichnen Teilintervalle und Werte daraus

- ▶  $f(x)$  heißt dann im Intervall  $I = [a, b]$  integrierbar

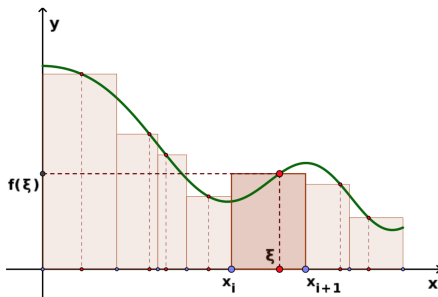


Bild: Helder, Marcos Antonio Nunes de Moura – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

- ▶  $f(x) \geq 0$   
 $\leadsto \int_a^b f(x) dx$  ist gleich dem Flächeninhalt des von der Kurve (Graph der Funktion  $y = f(x)$ ) und der  $x$ -Achse zwischen  $x = a$  und  $x = b$  berandeten Fläche.
- ▶  $f(x) \leq 0$   
 $\leadsto$  negativer Flächeninhalt
- ▶  $y = f(x)$  besitzt Nullstellen  
 $\leadsto$  Differenz der Flächeninhalte ober-/unterhalb der  $x$ -Achse

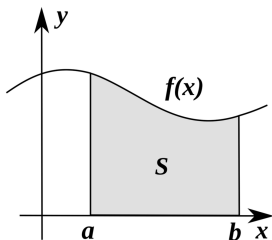


Bild: 4C – Lizenz:  
Creative Commons by-sa 3.0 de

## Existenz

Jede in einem Intervall  $I = [a, b]$  stetige Funktion ist dort auch integrierbar.

## Alternativer Zugang

- ▶ Streifeneinteilung des Intervalls  $[a, b]$
- ▶ Obersumme  $S_f := \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$
- ▶ Untersumme  $s_f := \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$
- ▶  $\bar{I}_f := \inf(S_f) \geq I_f := \sup(s_f)$
- ▶  $\bar{I}_f = I_f = I \rightsquigarrow I := \int_a^b f(x) dx$



## Hauptsatz

Ist die Funktion  $y = f(x)$  mit  $D = [a, b]$  im Intervall  $[a, b]$  integrierbar und besitzt  $f(x)$  eine Stammfunktion  $F(x)$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

## Schreibweisen

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(x) \Big|_a^b = [F(x)]_a^b$$

## Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

## Zusammenfassen der Integrationsintervalle

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

## Gleiche untere und obere Grenze

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

## Beispiele

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2), \quad \int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = 2$$

	Seite 112	Seite 113
(1)	$x \ln(x) - x + c$	$x^4 - x^3 + 5x + c$
(2)	$\frac{1}{1+n}(1+x)^{1+n} + c, n \neq -1$	$\frac{1}{5}x^5 - x^3 + x + c$
(3)		$x^2 - x^4 + c$
(4)		$2\pi \left( r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) + c$

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

**Analytische Geometrie**

Vorkurs Mathematik

J. Pannek

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

**121 Analytische Geometrie**

Vektoren

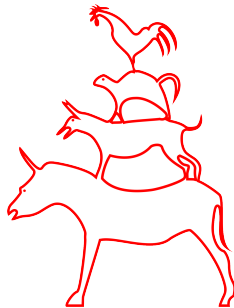
Regeln

Darstellung

Skalarprodukt

Vektorprodukt

Spatprodukt



## Vektor

- ▶ gerichtete und orientierte Strecke
- ▶ charakterisiert durch Betrag, Richtung und Orientierung
- ▶ Beispiele: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung

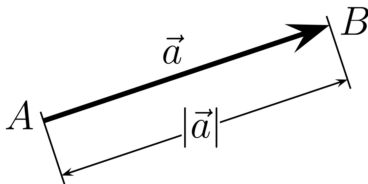


Bild: Markus A. Hennig – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Skalar

- ▶ charakterisiert durch einen einzigen reellen Zahlenwert
- ▶ Beispiele: Temperatur, Arbeit, Masse, Energie

## Bezeichnung

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

## Betrag

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$$

## Gleichheit

$\vec{a} = \vec{b} \iff$  gleicher Betrag, gleiche Richtung, gleiche Orientierung

## Spezielle Vektoren

- ▶ *Ortsvektoren*  $\overrightarrow{OA}$  können nicht verschoben werden
- ▶ *Nullvektor*  $\vec{0} \rightsquigarrow$  Betrag 0, unbestimmte Richtung
- ▶ *Einheitsvektor*  $\vec{e}$ ,  $|\vec{e}| = 1$

## Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$

- ▶ Vektor  $\vec{a}$ , Betrag  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
- ▶  $\lambda > 0 \rightsquigarrow \lambda \vec{a}$  und  $\vec{a}$  haben gleiche Richtung und Orientierung
- ▶  $\lambda < 0 \rightsquigarrow \lambda \vec{a}$  und  $\vec{a}$  haben gleiche Richtung und entgegengesetzte Orientierung

## Addition und Subtraktion zweier Vektoren

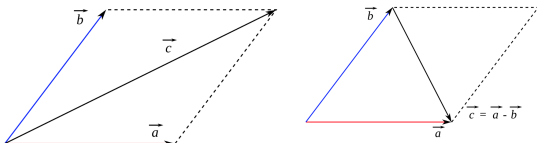


Bild: Jacek FH – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Addition und Subtraktion zweier Vektoren

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

## Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

## Assoziativgesetz

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

## Distributivgesetz

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$



Wähle im kartesischen Koordinatensystem der Ebene die beiden Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  mit Richtung und Orientierung wie die positive  $x$ -Achse und die positive  $y$ -Achse

## Eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

## Identifizierung via Spaltenvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

## Betrag (Länge des Vektors)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

## Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

## Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

## Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

Wähle im kartesischen Koordinatensystem des Raums die drei Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  mit Richtung und Orientierung wie die positive  $x$ -Achse, die positive  $y$ -Achse und die positive  $z$ -Achse

## Eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad (a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R})$$

## Identifizierung via Spaltenvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

## Betrag (Länge des Vektors)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

## Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

## Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

## Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

## Skalarprodukt

Für die beiden Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  heißt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Skalarprodukt oder inneres Produkt.

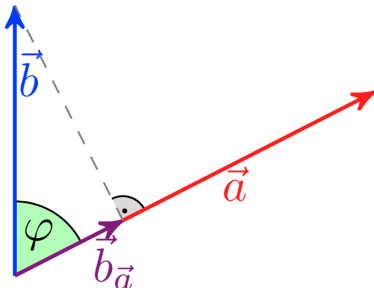
Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein **Skalar**.

### Interpretation

- ▶ stellt das Produkt des Betrags von  $\vec{a}$  und des Betrags der senkrechten Projektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$  dar

## Geometrie

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi), \quad \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$



MartinThoma – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Rechenregeln

- ▶  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- ▶  $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- ▶  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- ▶  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$
- ▶  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

## Beispiel

Für welchen Wert von  $c$  sind die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$$

orthogonal?

## Lösung

$$c = 2$$

## Vektorprodukt

Für die beiden Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  im Raum heißt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt oder äußeres Produkt.

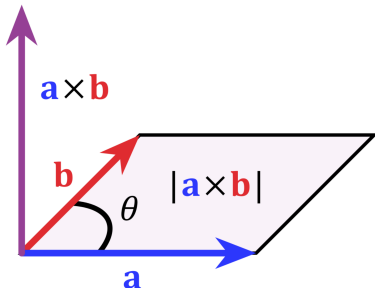
## Geometrie

- ▶  $\vec{a} \times \vec{b}$  steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$
- ▶  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  ist gleich dem Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms
- ▶ Falls  $\vec{a}$  auf dem kürzesten Weg nach  $\vec{b}$  gedreht wird, zeigt  $\vec{a} \times \vec{b}$  in Richtung der Bewegung einer Schraube mit Rechtsgewinde



## Merkregel

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$



Acdx – Lizenz: Creative Commons by-sa 3.0 de

## Rechenregeln

- ▶  $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
- ▶  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , falls  $\vec{a} = \vec{0}$  oder  $\vec{b} = \vec{0}$  oder  $\vec{a}$  parallel zu  $\vec{b}$
- ▶  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- ▶  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- ▶  $\vec{a} \times \vec{b}$  steht senkrecht auf den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$
- ▶  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\theta)$ ,  $\theta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- ▶  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

## Spatprodukt

Für die drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  heißt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Spatprodukt.

## Geometrie

- ▶ Betrag des Spatprodukts ist orientiertes Volumen des aufgespannten Spats
- ▶ falls Reihenfolge der Vektoren ein Rechtssystem ist, dann ist Volumen positiv
- ▶ liegen Vektoren in einer Ebene, dann ist Spatvolumen Null

## Berechnung

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

## Rechenregeln

- ▶  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}], [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$
- ▶  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$
- ▶  $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}] = 0$
- ▶  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- ▶  $[\alpha \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
- ▶  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]$

BIBA | Universität Bremen  
Fachbereich 4 – Produktionstechnik  
Fachgebiet 28 – Dynamics in Logistics  
Hochschulring 20  
28359 Bremen

**Name**           Jürgen Pannek

**Telefon**       +49 (0) 421 218–50190

**E-Mail**         [pan@biba.uni-bremen.de](mailto:pan@biba.uni-bremen.de)

**www**           <http://www.dil.biba.uni-bremen.de>

Vorkurs Mathematik

J. Pannek

Organisatorisches

Arithmetik

Trigonometrie

Gleichungen

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Analytische Geometrie

Vektoren

Regeln

Darstellung

Skalarprodukt

Vektorprodukt

Spatprodukt

138