



Regelungstechnik 1

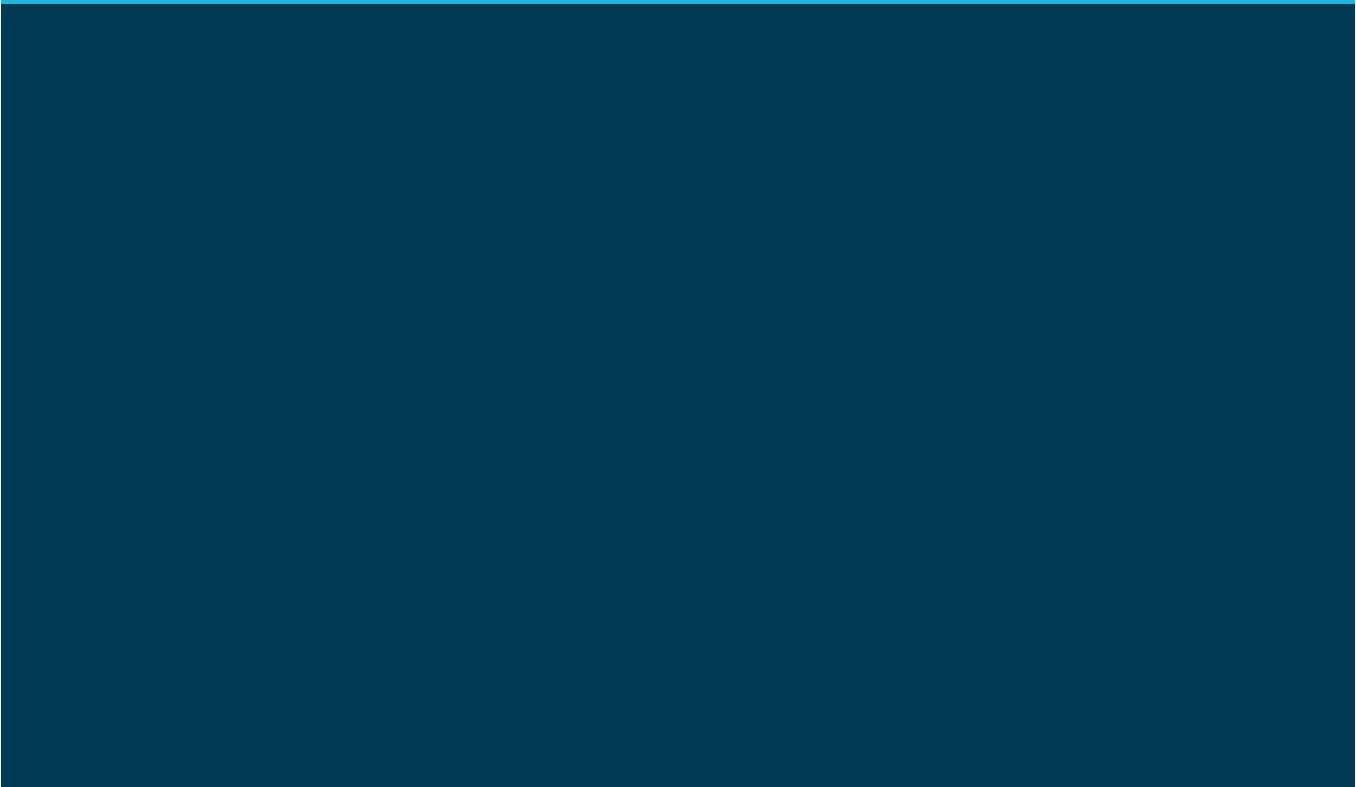
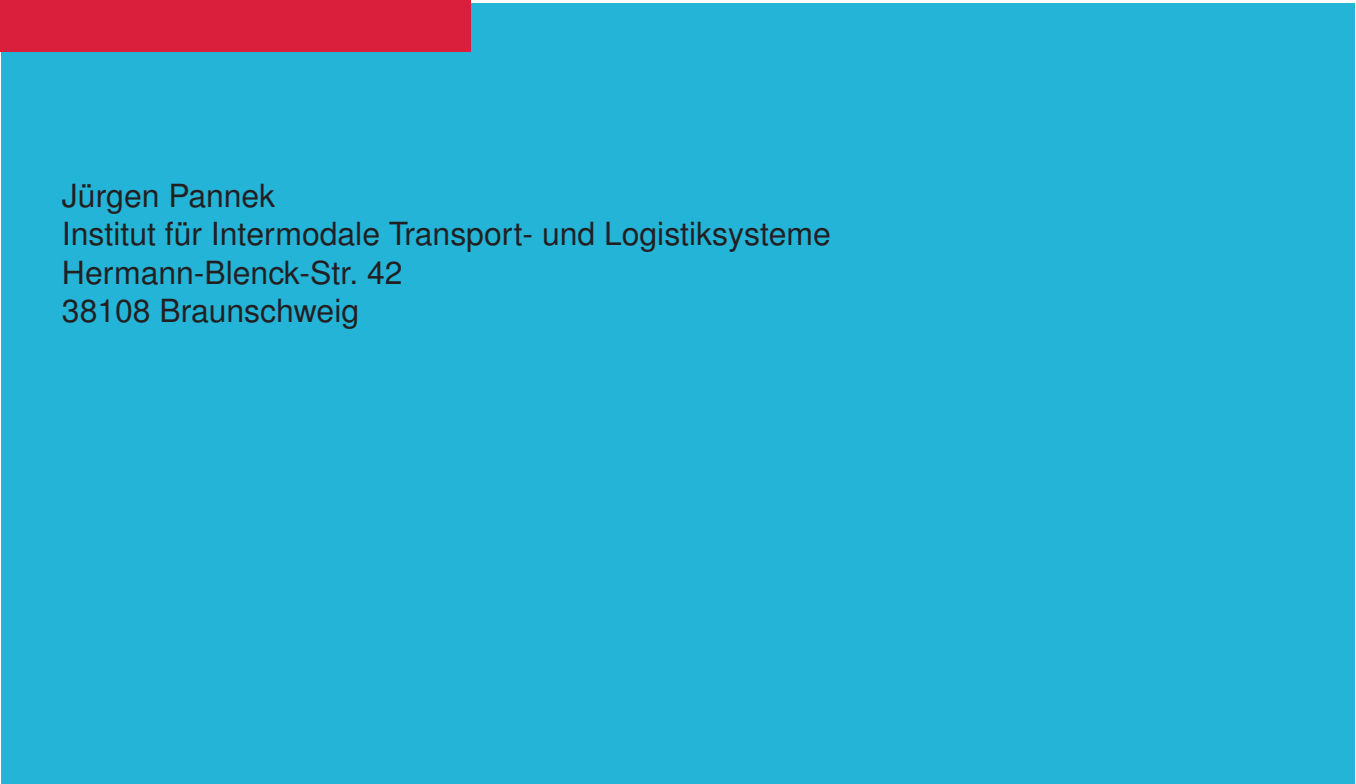
Vorlesungsunterlagen

Jürgen Pannek

29. Juni 2025



Jürgen Pannek
Institut für Intermodale Transport- und Logistiksysteme
Hermann-Blenck-Str. 42
38108 Braunschweig



Im Sommersemester 2025 habe ich die Veranstaltung *Regelungstechnik 1* an der Technischen Universität Braunschweig gehalten. Zur Strukturierung der Veranstaltung sowie zur Unterstützung der Studierenden beim Erlernen der Inhalte habe ich diese Unterlagen erstellt. Die Unterlagen entwickle ich im Rahmen der Veranstaltung sowie nach den Bedürfnissen und Anforderungen der Studierenden weiter. Daher werden fortlaufend Anmerkungen und Korrekturen im Laufe des Semesters erfolgen.

Das Ziel des Moduls *Regelungstechnik 1* ist es, den Studierenden grundlegenden Strukturen, Begriffe und Methoden der Regelungstechnik zu vermitteln sowie sie zu befähigen, diese auf alle einfachen technischen bzw. physikalischen Systeme anzuwenden. Im Fokus der Veranstaltungen wird

- die Analyse linear zeitinvarianter Systems in
- Zustandsraum und
- Frequenzgang

stehen. Mit Laplace Transformation, Übertragungsfunktion und der Beschreibung mathematischer Systeme erlernen die Studierenden das Aufstellen der Gleichungen für unbekannte dynamische Systeme. Darauf aufbauend erlernen die Studierenden die Konzipierung, Auslesung und Anwendung von Reglern hinsichtlich Stabilität. Anhand von theoretischen Beweisen und anschaulichen Beispielen können die Studierenden aus vielseitigen Disziplinen die regelungstechnische Problemstellung abstrahieren und behandeln.

Die Vorlesung wird durch theoretische und praktische Übungen ergänzt. Das Modul ist auf 5 ECTS ausgelegt.

Eine elektronische Version des Skripts ist abrufbar unter

<https://www.tu-braunschweig.de/itl/lehre/skripte>

Weitere Literaturvorschläge

- FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. 13. überarbeitete Auflage. VDE-Verlag, 2022
- LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 11. überarbeitete und ergänzte Auflage. Springer, 2016
- LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 9. überarbeitete Auflage. Springer, 2016
- UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik I*. Vieweg / Teubner, 2007
- UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik II*. Vieweg / Teubner, 2007

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	v
Abbildungsverzeichnis	viii
Verzeichnis von Definitionen/Theoremen	xi
1 Ziele und Systemeigenschaften	1
1.1 Ziele der Regelungstechnik	2
1.2 Grundlegende Begriffe	3
2 Systeme im Zeitbereich	15
2.1 Blockschaltbild	16
2.2 Lösung von LTI Systemen	17
2.3 Normalformen	21
3 Systeme im Frequenzbereich	27
3.1 Übertragungsfunktionen	28
3.2 Realisierbarkeit und Sprungfähigkeit	36
3.3 Darstellung	38
3.3.1 Bode Diagramm	40
3.3.2 Ortskurve / Polargang	47
3.3.3 Pol-/Nullstellendiagramm	48
3.4 Klassifikation von Übertragungselementen	51
3.4.1 Proportionalfaktor (P-Glied)	53
3.4.2 Integrator (I-Glied)	54
3.4.3 Differenzierer (D-Glied)	56
3.4.4 Totzeitglied (T-Glied)	57
3.4.5 Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT ₁ -Glied)	58
3.4.6 Komplexere Glieder	59

3.5	Frequenzganganalyse	60
3.5.1	Knickfrequenz	61
3.5.2	Amplitudenreserve	65
3.5.3	Phasenreserve	68
4	Regelkreise	73
4.1	Dynamisches Verhalten	76
4.1.1	Führungsverhalten	76
4.1.2	Störungsverhalten	82
4.2	Anforderungen	83
4.3	Beurteilungskriterien	85
5	Stabilität und Stabilitätskriterien	91
5.1	Stabilität im Zeitbereich	92
5.2	E/A Stabilität	98
5.3	Hurwitz Kriterium	102
5.4	Routh Kriterium	105
5.5	Nyquist Kriterium	109
6	Reglerentwurf	117
6.1	Reglerstruktur	117
6.2	Experimentelle Auslegung – Wendetangenten	123
6.2.1	Ziegler-Nichols Methode	124
6.2.2	Cohen-Coon Methode	128
	Appendices	131
	A Vorlagen	133
	Literaturverzeichnis	136

Tabellenverzeichnis

1.1	Vorteile und Nachteile von Steuerung und Regelung	13
2.1	Vorteile und Nachteile von Blockschaltbildern und Normalformen	25
3.1	Wichtige Sätze zu Laplace transformierter Funktionen	30
3.2	Äquivalenztabelle zur Laplace Transformation ¹	31
3.3	Wertetabelle des Bode Diagramms für einen Tiefpass Filter	42
3.4	Wertetabelle des Bode Diagramms für einen Tiefpass Filter in [dB]	44
3.5	Ziele und Vorteile von Bode Diagramm und Ortskurve	50
3.6	Wertebereiche im Amplitudengang	61
3.7	Einzelkomponenten des Amplitudengangs	65
3.8	Ziele und Eigenschaften der Themenblöcke im Frequenzbereich	70
4.1	Ziele und Eigenschaften der Themenblöcke im Regelkreis	88
5.1	Koeffizientenaufteilung des Routh Schemas	106
5.2	Zweite Iteration des Routh Schemas	106
5.3	Kondensierte Tabelle des Routh Schemas	107
5.4	Routh Schemas für Feder-Masse-Dämpfer System mit P-Glied	108
5.5	Ziele und Eigenschaften der Stabilitätskriterien für Regelkreise	116
6.1	Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols offener Kreis	125
6.2	Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols geschlossener Kreis	128
6.3	Reglereinstellung nach Cohen-Coon	128

Abbildungsverzeichnis

1.1	Illustration System und Prozess	3
1.2	Beispiel eines statischen und dynamischen Schaltkreises	7
1.3	Schaltbild einer Steuerung	12
1.4	Schaltbild einer Regelung	13
2.1	Standardelement eines Blockdiagramms	17
2.2	Poincaré Diagramm in der $(\det(A), \text{tr}(A))$ Ebene	21
3.1	Schematisches Vorgehen zur Nutzung von Laplace Transformationen	30
3.2	Schaltung eines einfachen Tiefpass Filters	41
3.3	Bode Diagramm für den Tiefpass Filter	43
3.4	Bode Diagramm für den Tiefpass Filter in [dB]	45
3.5	Schemazeichnung einer Ortskurve	47
3.6	Ortskurve für den Tiefpass Filter	48
3.7	Pol-Nullstellen Diagramm für den Tiefpass Filter	50
3.8	Darstellung einer Reihenschaltung im Blockschaltbild	52
3.9	Darstellung einer Parallelschaltung im Blockschaltbild	52
3.10	Darstellung einer Rückkopplung im Blockschaltbild	52
3.11	Graph der Heaviside Funktion	53
3.12	Darstellung eines Proportionalfaktors im Blockschaltbild	54
3.13	Diagramme für Proportionalfaktor mit $K_P = 0.5$	54
3.14	Darstellung eines Integrators im Blockschaltbild	55
3.15	Diagramme für Integrator mit $K_I = 1$	55
3.16	Darstellung eines Differenzierers im Blockschaltbild	56
3.17	Diagramme für Differenzierer mit $K_D = 1$	57
3.18	Darstellung eines Totzeitgliedes im Blockschaltbild	57
3.19	Diagramme für Totzeitglied mit $K_T = 1$	58
3.20	Rückkopplung eines Integrators zum Verzögerungsglied 1. Ordnung	59
3.21	Darstellung eines Verzögerungsglieds 1. Ordnung im Blockschaltbild	59
3.22	Diagramme für Verzögerungsglied 1. Ordnung mit $K_P = T_1 = 1$	60

3.23	Darstellung eines IT_1 -Glieds im Blockschaltbild	60
3.24	Darstellung eines DT_1 -Glieds im Blockschaltbild	61
3.25	Knickfrequenz im Bode Diagramm des PT_1 -Glieds in [dB]	62
3.26	Skizze des Amplitudengangs des PDT_1 aus Tabelle 3.7	66
3.27	Schaltbild einer Regelung	66
3.28	Amplitudenreserve im Bode Diagramm in [dB]	68
3.29	Phasenreserve im Bode Diagramm in [dB]	69
4.1	Blockschaltbild geschlossener Kreis mit Störungen	74
4.2	Wirkkette auf Chassis in Vertikaldynamik als PT_2 -System	75
4.3	Bode Diagramm für das Viertelfahrzeug	76
4.4	Blockschaltbild Kreisübertragungsfunktion Kreis mit Störungen	77
4.5	Blockschaltbild PT_2 mit P-Regler	78
4.6	Sprungantwort des PT_2 -Systems mit P-Regler	81
4.7	Sprungantwort des PT_2 -Systems mit P-Regler mit Störgrößenaufschaltungen	84
4.8	Schemazeichnung der Ausregelzeit	87
4.9	Schematische Darstellung der maximalen Überswingweite	87
4.10	Schemazeichnung der Regelfläche	88
5.1	Lösung des PT_2 für verschiedene Dämpfungen ζ	97
5.2	Lösung des PT_2 mit P-Glied für verschiedene Dämpfungen ζ	100
5.3	Blockschaltbild geschlossener Kreis mit Störungen	109
5.4	Nyquistkurve $\mathcal{D}$	113
5.5	Nyquistkurven für Feder-Masse-Dämpfer System	116
6.1	Bode Diagramm für phasenhebende/-absenkende Korrekturglieder	121
6.2	Wendetangente einer Systemantwort	123
6.3	Approximation einer Übertragungsfunktion durch $PT_1 T_t$	124
6.4	Lösungsverlauf für verschiedene Regler nach Ziegler-Nichols	126
6.5	Kritischer Fall eines PT_2 mit P-Glied	127
A.1	Vorlage Bode Diagramm in [dB]	133
A.2	Vorlage Ortskurve	134
A.3	Vorlage Pol-Nullstellen Diagramm	134

Verzeichnis von Definitionen/Theoremen

Definition 1.1 System und Prozess	4
Definition 1.5 Zeit	5
Definition 1.7 Signal	6
Definition 1.11 Zustand	8
Definition 1.12 LTI System	8
Definition 1.15 Arbeitspunkt	10
Definition 1.18 Stabilität und Kontrollierbarkeit	11
Definition 1.20 Steuerung	12
Definition 1.21 Regelung	12
Definition 1.22 Referenz	13
Definition 2.1 Blockschaltbild	16
Definition 2.3 Transitionsmatrix	18
Theorem 2.6 Lösung autonomer LTI Systeme	18
Theorem 2.8 Lösung LTI Systeme	19
Definition 2.10 Kanonische Normalform	22
Theorem 2.11 Kanonische Normalform	22
Theorem 2.14 Jordansche Normalform	23
Definition 2.15 Regelungsnormalform	24
Definition 3.1 Laplace Transformation	28
Definition 3.3 Inverse Laplace Transformation	29
Definition 3.4 Übertragungsfunktion	33
Theorem 3.5 LTI Übertragungsfunktion	34
Theorem 3.7 Partialbruchzerlegung	35
Definition 3.10 SISO System	36
Definition 3.12 Sprungfähigkeit	36
Theorem 3.13 Nicht-Sprungfähigkeit und Realisierbarkeit	37
Definition 3.15 E/A Verhalten	38
Theorem 3.16 Betrag und Phase	39
Definition 3.18 Frequenzgang	40
Definition 3.19 Bode Diagramm	40

Definition 3.21 Tiefpass Filter	41
Definition 3.23 Grenzfrequenz	42
Definition 3.24 Dezibel	44
Theorem 3.26 Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen	44
Definition 3.30 Ortskurve / Polargang	47
Definition 3.32 Pole und Nullstellen	48
Definition 3.34 Pol-Nullstellen-Form und Zeitkonstantenform	49
Definition 3.36 Sprungantwort	52
Definition 3.37 Knickfrequenz	62
Definition 4.2 Übertragungsfunktion geschlossener Kreis	77
Definition 4.4 Kreisübertragungsfunktion	78
Definition 4.6 Führungs- und Störübertragungsfunktionen	82
Definition 4.8 Anforderung Führungsgrößenverhalten	84
Definition 4.9 Anforderung Störverhalten	85
Definition 4.10 Anforderung Robustheit	85
Definition 4.11 Stationäre Genauigkeit	85
Definition 4.13 Ausregelzeit	86
Definition 4.14 Maximal Überswingweite	86
Definition 4.15 Regelfläche	88
Definition 5.3 Stabilität und Kontrollierbarkeit	94
Definition 5.8 E/A Verhalten	98
Definition 5.9 E/A Stabilität	98
Theorem 5.12 Kriterium für E/A Stabilität	100
Theorem 5.14 Zustandsstabilität und E/A Stabilität	102
Definition 5.17 Hurwitz Matrix	103
Theorem 5.18 Hurwitz Kriterium	103
Theorem 5.21 Routh Äquivalenz	105
Theorem 5.23 Routh Stabilitätskriterium	108
Definition 5.25 Rückführdifferenzfunktion	110
Definition 5.29 I-Stabilität	112
Theorem 5.30 Hsu-Chen Theorem	112
Theorem 5.33 Nyquist Kriterium	114
Theorem 5.34 Nyquist Kriterium für nicht-sprungfähige Systeme	114
Theorem 5.35 Nyquist Kriterium für stabilen offenen Kreis	114
Definition 6.1 PID Regler	118
Definition 6.3 PID Regler Zeitbereich	118
Definition 6.5 Korrekturglied	120

Definition 6.8 Wendetangente	123
Definition 6.9 PT_1T_t Approximation der Sprungantwort	124
Theorem 6.10 Ziegler-Nichols offener Entwurf	125
Definition 6.13 Kritische Verstärkung/Periodenlänge	127
Theorem 6.15 Ziegler-Nichols geschlossener Entwurf	128

KAPITEL 1

ZIELE UND SYSTEMEIGENSCHAFTEN



Generiert mit deepai.org

Any teacher that can be replace by a computer should be replaced by a computer.

Isaac Asimov

Zu Anfang der Veranstaltung fragen wir uns, was wollen wir eigentlich mit Regelungstechnik erreichen. Was sind also Ziele? Was sind Strategien, um diese Ziele zu erreichen? Und insbesondere, wie setzen wir das in der Praxis um?

Die Regelungstechnik umfasst die *Analyse*, den *Entwurf* und die *Implementierung* von Vorgängen, die dazu befähigt sind bzw. werden, um spezifische Größen auf vorgegebene Sollwerte zu bringen. Dabei kann ein Sollwert und ein System etwas einfaches wie eine Winkeleinstellung am Lenkrad, etwas dynamisches wie eine Motordrehzahl einer Produktionsmaschine, etwas komplexes wie die Wegplanung einer Rakete sein, oder auch etwas softwaretechnisches wie die Wertebellegung von Parametern oder Variablen. Die Regelungstechnik ist also ein Hilfsmittel und findet in einer Vielzahl von Bereichen Anwendung, darunter die Automobilindustrie, die Prozesssteuerung sowie die Luft- und Raumfahrt.

1.1. Ziele der Regelungstechnik

Um das Ziel der Regelungstechnik zu erreichen, schauen wir uns folgenden Satz aus der Einleitung nochmal genauer an:

Die Regelungstechnik umfasst die **Analyse**, den **Entwurf** und die **Implementierung** von **Vorgängen**, die dazu **befähigt sind bzw. werden**, um spezifische Größen auf vorgegebene Sollwerte zu bringen.

In der Regelungstechnik betrachten wir also Vorgänge, für die die gewünschte Eigenschaft nachgewiesen, erhalten, oder hergestellt werden soll. Hiermit können wir unterscheiden, ob **Fähigkeit** vorliegt oder wir aktiv eine **Befähigung** herstellen müssen. Die Eigenschaft ist dabei „spezifische Größen auf vorgegebene Sollwerte zu bringen“. Diese Eigenschaft ist typischerweise nicht direkt zu erreichen, sondern wir brauchen eine Strategie, die sich auch weiteren Eigenschaften zusammensetzt. Diese Eigenschaften werden wir im folgenden Kapitel 1.2 definieren. Ideen, Methoden und Algorithmen, um diese Eigenschaften nachzuweisen, zu erhalten oder herzustellen, werden uns im Rest der Veranstaltung beschäftigen.

Generell fokussieren wir uns also auf die folgenden Aspekte:

- **Analyse:** Beschreiben des Systemverhaltens und analysieren von Systemeigenschaften
- **Entwurf:** Konstruieren von fundierten Methoden zur Berechnung von Eingriffen
- **Implementierung:** Verstehen und Umsetzen von realisierbaren Zielen dieser Methoden

Hierzu werden wir **Vorgänge** als Systeme angeben. Wir unterscheiden zwischen einem Prozess als Durchführung eines Vorgangs und einem System, das die Verbindungen unterschiedlicher miteinander interagierender Teile bildet, um einen Vorgang umzusetzen. Schematisch können wir den Zusammenhang wie in Abbildung 1.1 gezeigt auffassen.

Ein zentrales Problem der Regelungstechnik liegt darin, dass die Wirkung einer Eingabe auf die Ausgabe nicht unmittelbar erfolgt, sondern es zu einer zeitlichen Verzögerung zwischen einer

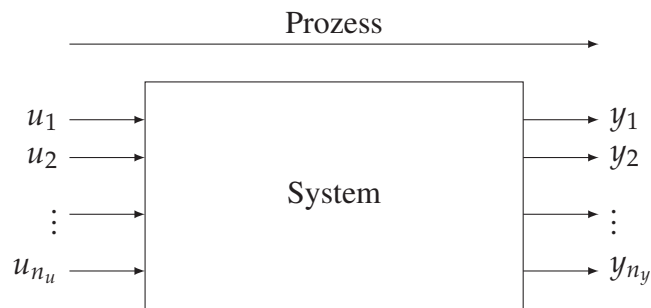


Abbildung 1.1.: Illustration System und Prozess

Eingabe und Ausgabe kommt. Wenn wir also eine bestimmte Ausgabe generieren wollen, müssen wir uns mit der Dynamik zwischen Ein- und Ausgabe auseinandersetzen und Eingriffe so auslegen, dass Überreaktionen oder Unterreaktionen vermieden werden.

Beachte, dass der Begriff eines *Systems* in einzelnen wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Fachgebieten unterschiedlich genutzt wird. Gleiches gilt leider für viele Begriffe wie beispielsweise Beschreibungen „Problem“ und „Modell“, aber auch für Aktivitäten wie „messen“ oder „optimieren“. Im folgenden Kapitel 1.2 definieren wir daher die Begriffe, wie wir sie innerhalb dieser Veranstaltung nutzen werden.

1.2. Grundlegende Begriffe

Für diese Veranstaltung orientieren wir uns an der DIN IEC 60050 [1] und nutzen folgende Formalisierungen:

Ein Signal ist eine physikalische Größe, die mit Hilfe eines oder mehrerer ihrer Parameter Informationen über eine oder mehrere variable Größen übermittelt.

DIN IEC 60050-351 (2014)

Signale können wir nun nutzen, um diese zu einem größeren Ganzen zusammenzusetzen:

Ein System ist eine Reihe von miteinander verbundenen Elementen, die in einem bestimmten Kontext als Ganzes betrachtet werden und sich von ihrer Umgebung unterscheiden.

DIN IEC 60050-351 (2014)

In der Regelungstechnik wird für uns neben dem System an sich auch der Ablauf interessant sein, wofür wir den Begriff des Prozesses einführen:

Ein Prozess ist die Gesamtheit der Beziehungen und interagierenden Elemente in einem System, durch die Materie, Energie oder Information umgewandelt, transportiert oder gespeichert wird.

DIN IEC 60050-351 (2014)

Formal definieren wir für diese Veranstaltung folgendes:

Definition 1.1 (System und Prozess).

Gegeben seien zwei Mengen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{Y}$, wobei $\mathcal{U}$ als *Eingangsmenge* und $\mathcal{Y}$ als *Ausgangsmenge* bezeichnet wird. Dann nennen wir eine Abbildung $\Sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ ein *System*. Die Anwendung der Abbildung auf einen Eingang $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ zur Gewinnung eines Ausgangs $\mathbf{y} = \Sigma(\mathbf{u}) \in \mathcal{Y}$ nennen wir einen *Prozess*.

In dieser Definition umfasst die Eingangsmenge $\mathcal{U}$ alle Kombinationen einzelner möglicher Eingänge und die Ausgangsmenge $\mathcal{Y}$ alle Kombinationen einzelner möglicher Ausgänge.

Aufgabe 1.2

Ein Fahrzeug steht an einem Hügel. Gib ein Beispiel einer Ein- und Ausgangsmenge an.

Lösung zu Aufgabe 1.2: Die Eingangsmenge könnte definiert werden als $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, wobei $\mathcal{U}_1$ die Beschleunigungsfähigkeit des Fahrzeugs und $\mathcal{U}_2$ die Steigung des Hügels angibt. Die Ausgangsmenge könnte definiert werden als $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Y}_3$, wobei $\mathcal{Y}_1$ der Energieverbrauch, $\mathcal{Y}_2$ die Geschwindigkeit und $\mathcal{Y}_3$ der Materialverlust am Reifen ist.

Mit den Mengen $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ beschreiben wir noch keine Realisierungen, sondern Möglichkeiten. Eine Realisierung ist eine ausgewählte Kombination $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ bzw. $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Dementsprechend bezeichnen wir mit einem Eingang $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ eine Variable, die aus der Umgebung des Systems auf dieses einwirken und nicht vom System selbst oder von Systemeigenschaften abhängt. Ein Ausgang $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ hingegen ist eine Variablen, die durch das System generiert wird und auf die Umgebung des Systems wirkt.

Bemerkung 1.3

Beachte, dass die Eingangs- und Ausgangsmengen hier als Mengen und nicht als Körper angegeben sind. Daher können wir z.B. sowohl reellwertige Körper als auch den Ring der ganzen Zahlen darunter fassen. Ganze Zahlen sind dahingehend anders, dass es kein multiplikatives Inverses gibt. In Anwendungsbeispielen brauchen wir diese Möglichkeiten etwa bei Schaltvorgängen (ganzzahlig) oder Kräften (reellwertig). Wie schon in Aufgabe 1.2 können die Mengen Dimensionen größer 1 aufweisen, so dass Ein- und Ausgangswerte vektorwertig sein können. Dementsprechend sind gleichzeitige Eingänge (z.B. Beschleunigen und Schalten) umsetzbar.

Die Lösung von Aufgabe 1.2 verrät bereits, dass wir für *Eingangswerte* $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n_u})^\top \in \mathcal{U}$ unterscheiden müssen zwischen Variablen, die

- absichtlich zur Manipulation des Systems genutzt werden (Stellgrößen), und
- nicht absichtlich auf das System einwirken (Störungen).

Die technische Realisierung einer absichtlichen Manipulation wird als *Stellglied* bezeichnet.

Analog unterscheiden wir bei *Ausgangswerten* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n_y})^\top \in \mathcal{Y}$ Variablen, die

- gemessen werden (können) (Messgrößen), und
- nicht gemessen werden (können)

Wie bei Eingängen wird die technische Realisierung einer Messung als *Messglied* bezeichnet.

Bemerkung 1.4

Da jedes Mess- oder Stellglied Sensoren bzw. Aktoren benötigt, versucht man die Anzahl möglichst gering zu halten. Daher werden im Allgemeinen weder alle messbaren Variablen gemessen noch alle stellbaren Variablen manipuliert.

Um unser eingangs aufgestelltes Ziel zu erreichen, müssen wir mit Systemen umgehen und sie analysieren können. Hierzu existieren mehrere Möglichkeiten, die sich in Beschreibungsmittel, Methoden und Werkzeuge (BMW) unterteilen lassen. Um mit Systemen umgehen zu können, führen wir zunächst das Konzept der Zeit ein.

Definition 1.5 (Zeit).

Eine *Zeitmenge* $\mathcal{T}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.

Warum ist diese Definition wichtig? In dieser Veranstaltung werden wir uns mit den systemischen Eigenschaften auseinandersetzen, die in der Natur der Anwendung liegen und insbesondere nicht in der Art, ob wir mit Computern oder sonstigen Schaltungen auf eine Anwendung Eingänge erstellen. Der Unterschied liegt darin, dass ein Algorithmus (typischerweise) in einer Zeit auf Basis natürlicher Zahlen $\mathbb{Z}$, d.h. $j = 1, 2, 3, \dots$, operiert. Ein Computer hingegen arbeitet mit einer festgelegten Taktzahl auf Basis rationaler Zahler $\mathbb{Q}$. Es gilt also

Lemma 1.6 (Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$)

Es gilt $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ und $([a, b], +)$ mit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ sind Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$.

Beweis. Wir nutzen, dass eine nichtleere Menge M von G genau dann eine Untergruppe $(M, +)$ von $(G, +)$ bildet, wenn

$$\forall m \in M, g \in G \setminus M : m + g \notin M.$$

Nun zeigen wir per Widerspruch, dass $(\mathbb{Z}, +)$ Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist:

Angenommen, es existieren $z \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, so dass $z + q \in \mathbb{Z}$ ist. Wir können q umschreiben zu $q = \lfloor q \rfloor + (q - \lfloor q \rfloor)$. Daraus erhalten wir

$$z + g = z + \lfloor q \rfloor + (q - \lfloor q \rfloor)$$

Da $z \in \mathbb{Z}$ und $\lfloor q \rfloor \in \mathbb{Z}$ sind, ist $z + \lfloor q \rfloor \in \mathbb{Z}$. Da $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ist, gilt aber $(q - \lfloor q \rfloor) \notin \mathbb{Z}$ und wir erhalten einen Widerspruch zu $z + g \in \mathbb{Z}$.

Analog folgt, dass $(\mathbb{Q}, +)$ Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist, indem wir nutzen, dass für ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ein $q \in \mathbb{Q}$ mit minimalem Abstand existiert, jedoch immer gilt $|r - q| > 0$.

Im Fall $([a, b], +)$ Untermenge zu $(\mathbb{R}, +)$ können wir $r \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ wählen mit $r = b - a + 1$. Dadurch erhalten wir den Widerspruch $a + r = a + b - a + 1 = b + 1 \notin [a, b]$. $\square$

Definition 1.5 erlaubt uns also sowohl analytisch zu arbeiten, als auch gleichzeitig das Verhalten von Computern und Algorithmen zu betrachten. Gleichzeitig können wir damit ein Signal mathematisch formulieren:

Definition 1.7 (Signal).

Sei S eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Zeitmenge. Dann bezeichne eine Abbildung $s : \mathcal{T} \rightarrow S$ ein Signal.

Mit der Menge S bezeichnen wir dabei die Möglichkeiten der Signalwerte. Daraus können wir ableiten:

Korollar 1.8 (Eingangssignal und Ausgangssignal)

Für eine Zeitmenge $\mathcal{T}$ und gegebene Mengen $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ sind die Funktionen $\mathbf{u} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ und $\mathbf{y} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ Signale. Wir bezeichnen diese als Eingangssignal- und Ausgangssignal.

Beweis. Folgt aus Definition 1.7. □

Ebenso können wir direkt erhalten:

Korollar 1.9 (Digitale Eingangs- und Ausgangssignale)

Für gegebene Menge $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ sind $\mathbf{u} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{U}$ und $\mathbf{y} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{Y}$ Signale. Wir bezeichnen diese als digitale Eingangssignal- und Ausgangssignal.

Beweis. Nach Lemma 1.6 ist $(\mathbb{Q}, +)$ Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$. Somit sind $\mathbf{u}(\cdot)$ und $\mathbf{y}(\cdot)$ nach Korollar 1.8 Signale. □

Über die Eingangs- und Ausgangssignale erhalten wir die Möglichkeit, zeitlich aufgelöste Eingänge an das System zu senden und Ausgänge aus dem System zu erhalten. Im einfachsten Fall können wir uns das als Tabellen mit Zeitstempeln vorstellen, die wir mathematisch als Zeitreihen bezeichnen würden.

Zusätzlich erlaubt uns die Zeit aus Definition 1.5, die Wirkung von Eingängen zeitlich von Ausgängen zu trennen. Dies ist notwendig, wenn Eingänge nicht direkt auf Ausgänge wirken:

Aufgabe 1.10 (Statischer und dynamischer Schaltkreis)

Stelle die Systemgleichungen für die Schaltkreise aus Abbildung 1.2 auf.



Abbildung 1.2.: Beispiel eines statischen und dynamischen Schaltkreises

Lösung zu Aufgabe 1.10: Für die Schaltung mit dem elektrischen Widerstand R erhalten wir

$$y(t) = U(t) = R \cdot I(t) = R \cdot u(t) \quad (1.1)$$

mit Eingangssignal $u(t) = I(t)$ als Stromstärke und Ausgangssignal $y(t) = U(t)$ als die abgefallene Spannung zwischen den Messpunkten.

Im Fall der Kapazität C ergibt sich die Integralgleichung

$$y(t) = U(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau,$$

die wir bei gegebener Anfangsspannung berechnen können durch

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} I(\tau) d\tau}_{U(t_0)} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(\tau) d\tau = U(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

berechnen können.

An Beispiel 1.10 sehen wir, dass die Anfangsspannung $U(t_0)$ kein Signal ist, auch nicht gemessen wird, und dennoch das System in seinem Verhalten zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal massiv davon abhängt. Um dies in unserem Systembegriff erfassen zu können, definieren wir den sogenannten Zustand:

Definition 1.11 (Zustand).

Gegeben sein ein System $\Sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$. Wenn das Ausgangssignal $\mathbf{y}(t)$ eindeutig vom Eingangssignal $\mathbf{u}(\tau)$ für $t_0 \leq \tau \leq t$ und einem $\mathbf{x}(t_0)$ abhängt, dann bezeichnen wir die Variable $\mathbf{x}(t)$ als Zustand.

Um unser System aus Definition 1.1 mit Zuständen nach Definition 1.11 im Zeitbereich nach Definition 1.5 darzustellen, nutzen wir Differentialgleichungen. Im Kontext dieser Veranstaltung beschränken wir uns zudem auf sogenannte linear zeitinvariante Systeme.

Definition 1.12 (LTI System).

Wir bezeichnen ein System $\Sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ als *linear zeitinvariant (LTI)*, wenn es in die Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) + B \cdot \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{y}(t) = C \cdot \mathbf{x}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t). \quad (1.3b)$$

gebracht werden kann.

In dieser Definition sind zwei Begriffe, die der Linearität und die der Zeitinvarianz eines Systems, enthalten. Vereinfacht heißt dies, dass die Systemzustände durch Matrizen A, C und die Eingänge durch B, D linear kombiniert werden, wobei die Einträge von A, B, C, D nicht von der Zeit $t \in \mathcal{T}$ abhängen.

Korollar 1.13 (Linearität)

Gegeben sei ein LTI System (1.3). Dann gilt für alle Eingangssignale $\mathbf{u}(\cdot)$, alle Zeiten $t_0 \geq 0$ mit zugehörigem Zustand $\mathbf{x}_0$, dass das Ausgangssignal die Gleichungen

$$\mathbf{y}(\alpha_1 \mathbf{x}_{0,1} + \alpha_2 \mathbf{x}_{0,2}, 0, t) = \alpha_1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,1}, 0, t) + \alpha_2 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,2}, 0, t) \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{y}(0, \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2, t) = \beta_1 \mathbf{y}(0, \mathbf{u}_1, t) + \beta_2 \mathbf{y}(0, \mathbf{u}_2, t) \quad (1.4b)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, 0, t) + \mathbf{y}(0, \mathbf{u}, t) \quad (1.4c)$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ für alle $t \geq t_0$ erfüllt.

Beweis. Folgt direkt aus Linearität. □

In Korollar 1.13 nennen wir

- Gleichung (1.4a) *Nulleingangs-Linearität*,
- Gleichung (1.4b) *Nullzustands-Linearität* und
- Gleichung (1.4c) *Superpositionsprinzip*.

Gerade der letzte Punkt, das Superpositionsprinzip, wird uns die Lösbarkeit derartiger Probleme erleichtern.

Bemerkung 1.14

LTI Systeme sind in der Praxis sehr relevant, obwohl sie typischerweise ein vorliegendes System nicht korrekt beschreiben. Diese sind meist nichtlinear in der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{y}(t) = h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$. Wir können aber durch Linearisierung ein LTI System daraus ableiten mit

$$\begin{aligned} A &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & B &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ C &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & D &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Nun kommen wir zurück auf unser Ziel, eine spezifische Größe auf einen vorgegebenen Sollwert zu bringen. Das bringt uns zu folgender Definition:

Definition 1.15 (Arbeitspunkt).

Gegeben sei ein LTI System (1.3). Wenn für das Paar $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ gilt

$$A \cdot \mathbf{x}^* + B \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (1.5)$$

dann nennen wir $\mathbf{x}^*$ einen *Arbeitspunkt* des Systems. Wenn (1.5) bei gegebenem $\mathbf{x}^*$ für alle $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ gilt, dann nennen wir den Arbeitspunkt *stark* bzw. *robust*.

Warum ist die Definition des Arbeitspunkts wichtig, wenn es doch das Ziel ist, eine spezifische Größe auf einen Sollwert zu bringen. Das rührt daher, dass

- die spezifische Größe nicht unbedingt ein Ausgang sein muss sondern auch ein Zustand sein kann, und
- wir durch das richtige Eingangssignal zwar eine Ausgangssignal erzwingen, diese potentiell aber nicht halten können.

Aufgabe 1.16

Gegeben sei der Doppelintegrator $\ddot{x}(t) = u(t)$ mit $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Zeige, dass für die Wahl $u(t) = 1$, $t \in [0, 1]$ der Punkt $x(1) = 1$ erreicht wird, dieser aber kein Arbeitspunkt ist.

Lösung zu Aufgabe 1.16: Wir erhalten direkt

$$\dot{x}(1) = \dot{x}(0) + \int_0^1 u(t) dt = 1 \quad \text{und} \quad x(1) = x(0) + \int_0^1 \int_0^1 u(t) dt dt = 1$$

wodurch der Punkt erreicht wird. Für $\mathbf{x} = (x, \dot{x})^\top$ ergibt sich das LTI System

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mit $\mathbf{x}^* = (1, 1)^\top$ können wir nun $\mathbf{u}^* = 0$ wählen und die zweite Komponente zu Null bringen. Die erste Komponente von $\mathbf{x}^*$ ist nicht beeinflussbar und damit auch kein Arbeitspunkt.

Bemerkung 1.17

Beachte, dass in Aufgabe 1.16 spezielle Eingänge gewählt wurde. Es existieren Eingänge, für die der Punkt ein Arbeitspunkt wäre.

Die Eigenschaft, ob ein Arbeitspunkt gehalten werden kann oder nicht, wird als Stabilität bezeichnet. Formal gliedern wir diese Eigenschaft wie folgt:

Definition 1.18 (Stabilität und Kontrollierbarkeit).

Für ein System nennen wir $\mathbf{x}^*$

- *starken* oder *robust stabilen* Arbeitspunkt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Eingänge $\mathbf{u}(\cdot)$ gilt

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (1.6)$$

- *stark* oder *robust asymptotisch stabilen* Arbeitspunkt, wenn er stabil ist und ein $r > 0$ existiert, so dass für alle Eingänge $\mathbf{u}(\cdot)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0 \quad (1.7)$$

gilt für alle Anfangswerte $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq r$. Kann zudem r beliebig gewählt werden, dann nennen wir den Arbeitspunkt *global stark* oder *global robust asymptotisch stabil*.

- *schwach stabiler* oder *kontrollierbarer* Arbeitspunkt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x}_0$ ein Eingang $\mathbf{u}(\cdot)$ existiert mit

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (1.8)$$

- *schwach asymptotisch stabiler* oder *asymptotisch kontrollierbarer* Arbeitspunkt, wenn er schwach stabil ist und zusätzlich ein $r > 0$ existiert, so dass gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0 \quad \forall \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq r. \quad (1.9)$$

Ist r beliebig wählbar, dann heißt der Arbeitspunkt *global asymptotisch stabil*.

Bemerkung 1.19 (BIBO)

In der Literatur wird die Eigenschaft eines stabilen Arbeitspunkts auch als BIBO für *bounded input bounded output* bezeichnet.

Warum unterscheiden wir die beiden Fälle stark und schwach? In der Praxis sind viele Systeme bereits in sich stabil. So kommen etwa Motoren ohne die Zuführung weiterer Energie durch die Reibung irgendwann zu einem Stillstand, was einen Arbeitspunkt darstellt. Um beim gleichen Beispiel zu bleiben kann ein Motor auch bei einer konstanten Drehzahl betrieben werden. Dies ist ebenfalls ein Arbeitspunkt. Jedoch ist die Erreichung von Arbeitspunkte auf unterschiedliche Arten möglich. Daher können Eingänge genutzt werden, um das Verhalten bis zu Arbeitspunkt (transientes Verhalten) zu verbessern.

Schwache Arbeitspunkte hingegen erfordern es, dass wir die Eingänge aktiv nutzen.

In beiden Fällen stellt sich die Frage, wie wir die Eingänge berechnen und wie wir die Qualität der Eingänge bewerten können. Hierzu wird zwischen zwei Konzepten unterschieden, der sogenannten Steuerung und der Regelung. Diese unterscheiden sich insbesondere in ihrem Definitionsraum.

Bei einer Steuerung wird eine Eingangsstrategie entworfen, so dass die uns interessierende Größe über die Zeit hinweg auf einen Sollwert gebracht wird. Formal definieren wir:

Definition 1.20 (Steuerung).

Wir nennen einen Eingang $\mathbf{u} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ eine *Steuerung*.

Anschaulich stellt Abbildung 1.3 dies noch einmal dar.

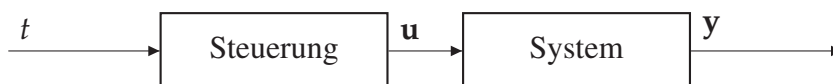


Abbildung 1.3.: Schaltbild einer Steuerung

In der Praxis kann man sich die Steuerung wie das Navigationssystem im Auto vorstellen. Es stellt einen Plan dar, wie wir vom derzeitigen Istwert zu einem Sollwert kommen. Ähnlich wie bei einer Autofahrt kennt die Steuerung auch keine potentiell noch aufkommenden Staus und weiß auch nicht, wann auf welcher Spur ein anderes Fahrzeug mit welcher Geschwindigkeit fährt. Um auf derartige Störungen reagieren zu können, bietet es sich an, den Eingang auf Basis des derzeitigen Zustands zu entwerfen. Das bringt uns zum Konzept der Regelung:

Definition 1.21 (Regelung).

Ist der Eingang gegeben durch eine Abbildung $\mathbf{u} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, so nennen wir diese *Regelung*.

Um eine Regelung analog zur Darstellung einer Steuerung zeichnen zu können, müssen wir den Sollwert einbringen. Formal definieren wir diesen wie folgt:

Definition 1.22 (Referenz).

Wir nennen eine Funktion $w : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ eine *Referenz*.

Wie in Abbildung 1.4 gezeigt können wir nun über die Differenz zwischen der Referenz und dem Istwert des Ausgangs eine Regelung entwerfen.

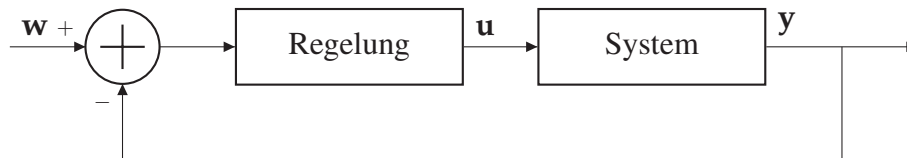


Abbildung 1.4.: Schaltbild einer Regelung

Die Regelung ist somit in der Lage, auf Störungen im Istwert zu reagieren. Jedoch ist die Strategie bereits festgelegt, eine Regelung kann also nicht mehr auf Alternativen umschwenken. Am Beispiel der Autofahrt könnten wir so in einer Sackgasse landen und das Ziel nicht erreichen. Im Rahmen der Vorlesung werden wir uns insbesondere mit den Eigenschaften von Regelungen näher auseinandersetzen. Den entsprechenden Vor- und Nachteile greifen wir mit Tabelle 1.1 bereits vor.

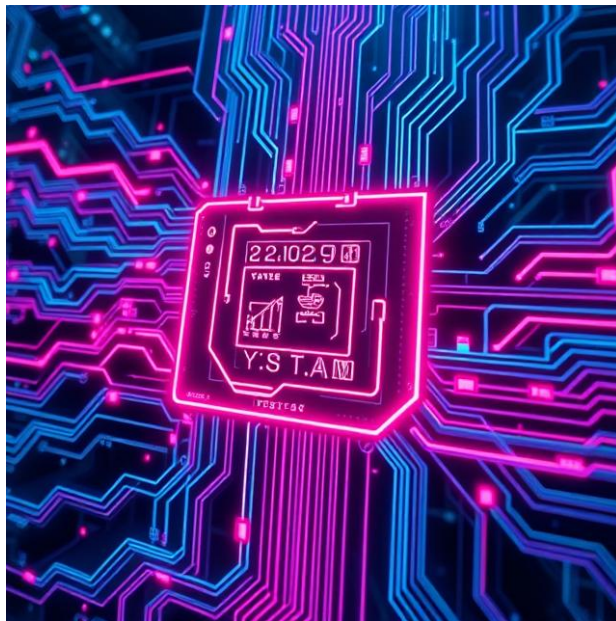
Tabelle 1.1.: Vorteile und Nachteile von Steuerung und Regelung

Methode	Vorteile	Nachteile
Steuerung	Integriert externes Wissen Plant voraus Adressiert KPIs	Kann unzulässig werden Benötigt Modell
Regelung	Garantiert Stabilität Reagiert auf Störungen Adressiert Systemeigenschaften	Evtl. ungewollte Arbeitspunkte Benötigt theoretisches Wissen

Um diese Eigenschaften herauszuarbeiten werden wir in den folgenden Kapitel die Darstellungen von Systemen im Zeitbereich und im Frequenzbereich untersuchen. Aufbauend auf den Eigenschaften werden wir anschließend Methoden herleiten, wie Regelungen konzipiert werden können.

KAPITEL 2

SYSTEME IM ZEITBEREICH



Generiert mit deepai.org

A system is never the sum of its parts its the product of their interaction.

Russel Ackoff

In diesem Kapitel fokussieren wir uns auf den *Zeitbereich*, d.h. wir sind daran interessiert, wie sich Zustände eines Systems über die Zeit hinweg entwickeln. Wir betrachten hier nur LTI Systeme, für die wir Lösungen berechnen wollen. Um zu zeigen, dass unsere Berechnungen Sinn

machen, weisen wir Existenz und Eindeutigkeit nach. Um Lösungen effektiv zu berechnen, werden wir sogenannten *Normalformen* einführen. Manche sind aus Berechnungen heraus motiviert, andere aus systemischen Eigenschaften, die wir in folgenden Kapiteln nutzen werden.

Vorab machen wir uns aber Gedanken, wie ein System anschaulich beschrieben werden kann. Hierzu nutzen wir den Signalfluss, um eine graphische Schreibweise einzuführen. Diese wird uns bei weiteren strukturellen Eigenschaften nützlich sein.

2.1. Blockschaltbild

Zur Beschreibung und Veranschaulichung von Systemen wird in der Praxis oft das sogenannte Blockschaltbild genutzt. Wir definieren dies wie folgt:

Definition 2.1 (Blockschaltbild).

Gegeben sei ein System $\Sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$. Dann bezeichnen wir eine Darstellung aus Blöcken und Pfeilen als Blockschaltbild, wenn

- Blöcke die rückwirkungsfreien Rechenoperationen und
- Pfeile die Signale mit eindeutiger Wirkungsrichtung

darstellen.

Somit ist bereits unsere Systemdarstellung aus Abbildung 1.1 ein Blockschaltbild. Für LTI Systeme verwenden wir insbesondere die Blöcke, die in Abbildung 2.1 enthalten sind. Hieran können wir bereits erkennen, dass die Summen-, Verstärkerblöcke und Signalverzweigungsblöcke hinreichend sind, um die rechte Seite der LTI Systeme beschreiben zu können.

Korollar 2.2 (LTI Blockschaltbild)

Jedes LTI System in Form (1.4) kann durch die Blöcke Summe, Verstärker, Signalverzweigung und Differential dargestellt werden.

Beweis. Die linke Seite von (1.4) erfordert den Block Differential. Für die rechte Seite stellt jede Multiplikation mit einem Matrixelement einen Verstärker und jede Linearkombination eine Summe dar. Parallele Linearkombinationen sind durch Signalverzweigungen realisierbar. $\square$

Im weiteren Verlauf werden wir zusätzliche Blöcke kennenlernen, die für die Generierung von Eingängen für uns interessant sein werden.

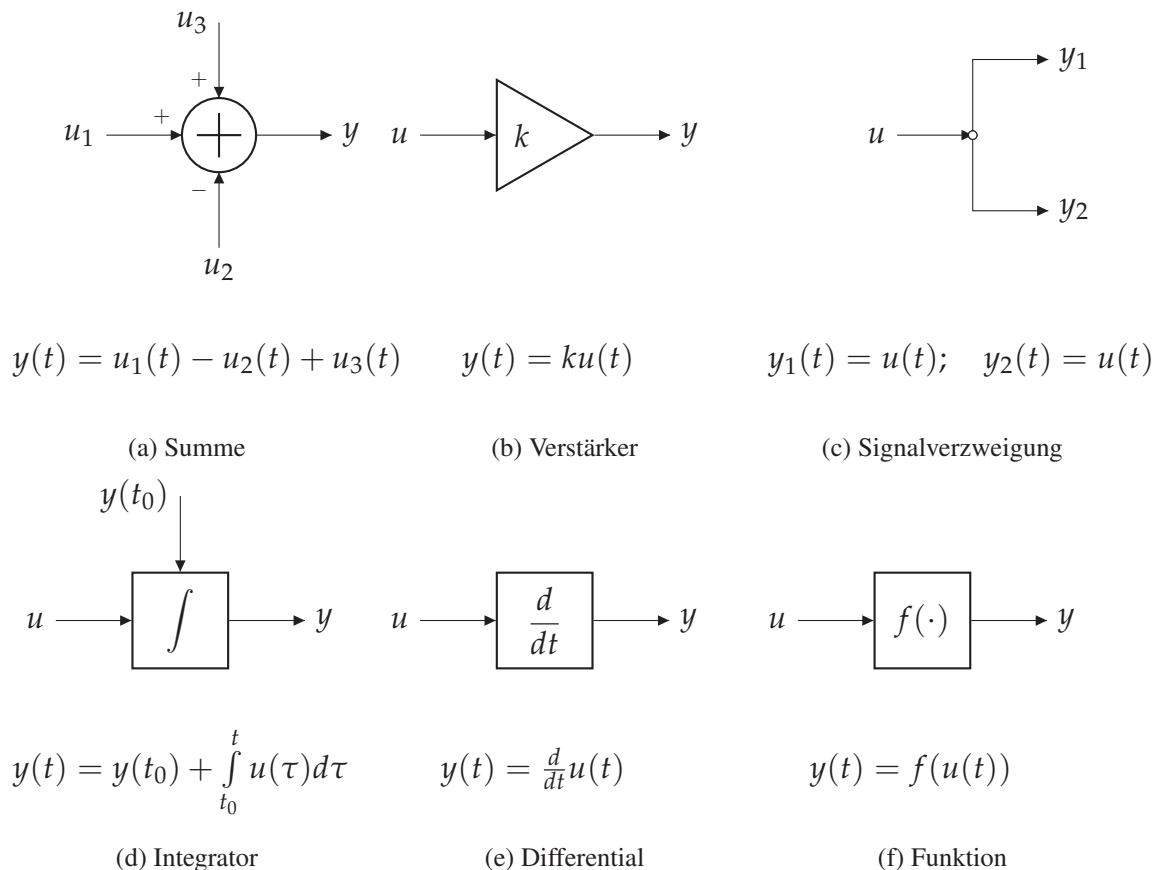


Abbildung 2.1.: Standardelement eines Blockdiagramms

2.2. Lösung von LTI Systemen

Um uns Gedanken über die richtige Beeinflussung von Systemen, also die Generierung von Steuer- und Regelstrategien zu machen, müssen wir zunächst das Verhalten von LTI Systemen an sich verstehen. LTI Systeme haben die schöne Eigenschaft, dass wir eine Lösung direkt berechnen und angeben können. Die Lösung wird uns dann erlauben, Eigenschaften direkt an der Systemgleichung (1.3) abzulesen.

Verweis: Für nichtlineare Systeme ist eine allgemeine Lösung typischerweise nicht bekannt. Daher ist es besonders wichtig, dass die Lösung nicht notwendig ist, um Eigenschaften des Systems angeben zu können. Auf nichtlineare Systeme werden wir in den Veranstaltungen *Control Engineering 2/3* eingehen.

Zur Lösungsdarstellung führen wir die Transitionsmatrix ein. Diese beruht auf der Idee, dass wir den homogenen und inhomogenen Anteil der Lösung eines LTI Systems voneinander trennen können. Beachte, dass wir das bereits im Superpositionsprinzip (1.4c) nachgewiesen haben.

Definition 2.3 (Transitionsmatrix).

Für ein System der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.1)$$

nennen wir

$$\Phi(t) := \exp(A \cdot t) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j \frac{t^j}{j!} \right) \quad (2.2)$$

die Transitionsmatrix des Systems.

Da in der Systemgleichung (2.1) kein Eingang vorkommt, wird das System auch als autonom bezeichnet.

Bemerkung 2.4

Für uns sind autonome Systeme eigentlich uninteressant, da wir hierfür keine Eingänge konstruieren können. Die Eigenschaften von autonomen Systemen hingegen entsprechen denen eines LTI Systems mit Regelung. Beachte, dass eine Regelung eine Abbildung $\mathbf{u} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ darstellt. Dadurch kann der Eingang durch eine Abbildung ersetzt werden, die rein vom Zustand $\mathbf{x}$ abhängt. Damit erhalten wir ein autonomes System.

Die Transitionsmatrix erlaubt uns nun, den homogenen Teil der Lösung eines LTI Systems kompakt auszudrücken. Hierzu brauchen wir noch folgende Zwischenerkenntnis:

Lemma 2.5

Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ gilt

$$\frac{d}{dt} \exp(A \cdot t) = A \cdot \exp(A \cdot t). \quad (2.3)$$

Beweis. Folgt aus Linearität von A . □

Theorem 2.6 (Lösung autonomer LTI Systeme).

Die Lösung eines autonomen LTI Systems (2.1) ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0. \quad (2.4)$$

Beweis. Da die Matrix A konstant ist, ist $A \cdot \mathbf{x}$ linear und damit Lipschitz stetig. Daher existiert (lokal) eine eindeutige Lösung des Systems (2.1) [3, §12, Satz 3]. Nun können wir die Tayler-Reihe mit Lemma 2.5 für die Lösung der Systemdynamik (2.1) bilden und die Picard-Lindelöf Fixpunktiteration [3, §12, Satz 5] anwenden. Daraus erhalten wir

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\text{Id} + A \cdot t + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots + A^j \frac{t^j}{j!} \right) \mathbf{x}_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j \frac{t^j}{j!} \right) \mathbf{x}_0 = \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0$$

als eindeutige Lösung und die Behauptung folgt. $\square$

Aufbauend auf der homogenen Lösung können wir die inhomogene Lösung für LTI Systeme konstruieren. Hierfür müssen wir eine Annahme an den Eingang $\mathbf{u}(t)$ treffen:

Annahme 2.7 (Stückweise stetiger Eingang)

Der Eingang $\mathbf{u}(t)$ ist stückweise stetig.

Der Hintergrund für diese Annahme ist erstmal mathematischer Natur: Wenn wir uns die Gleichungen des LTI Systems (1.3) ansehen, so müssen wir dieses für die Lösungsberechnung integrieren. Dazu muss der Eingang $\mathbf{u}(t)$ integrierbar sein, was durch Annahme 2.7 gegeben ist. Zum anderen ist Annahme 2.7 kaum einschränken, da wir neben stetigen Funktionen auch etwa digitale Funktionen (stückweise konstant) oder ähnliches zulassen können.

Mit dieser Annahme erhalten wir folgende Gesamtlösung:

Theorem 2.8 (Lösung LTI Systeme).

Gegeben sei ein LTI System (1.3) mit zugehöriger Transitionsmatrix Φ des autonomen LTI Anteils mit Eingang $\mathbf{u} \equiv 0$. Dann ist die Lösung des LTI Systems gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{y}(t) = C \cdot \mathbf{x}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t). \quad (2.5b)$$

Beweis. Wir rechnen nach, dass (2.5a) eine Lösung des LTI Systems (1.3) und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{d}{dt} \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2.2)}{=} \frac{d}{dt} \exp(A \cdot t) \cdot \mathbf{x}_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t \exp(A \cdot (t - \tau)) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \\
&\stackrel{(2.3)}{=} A \cdot \exp(A \cdot t) \cdot \mathbf{x}_0 + \underbrace{[\exp(A \cdot (t - \tau)) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau)]_{\tau=t}}_{B \cdot \mathbf{u}(t)} \\
&\quad + \int_0^t A \cdot \exp(A \cdot (t - \tau)) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \\
&= A \left(\exp(A \cdot t) \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp(A \cdot (t - \tau)) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \right) + B \cdot \mathbf{u}(t) \\
&\stackrel{(2.5a)}{=} A \cdot \mathbf{x}(t) + B \cdot \mathbf{u}(t)
\end{aligned}$$

und die Dynamik damit nachgewiesen. Außerdem erhalten wir

$$\underbrace{\exp(A \cdot (0 - 0)) \cdot \mathbf{x}_0}_{=\text{Id}} + \underbrace{\int_0^0 \exp(A \cdot (t - \tau)) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau}_{=0} = \mathbf{x}_0$$

die Anfangswertbedingung. Für Eindeutigkeit betrachten wir zwei Lösungen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ mit gleichem Eingang $\mathbf{u}(\cdot)$ und Anfangswert $\mathbf{x}_0$ und bilden deren Differenz $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_2(t) = A\mathbf{x}_1(t) + B\mathbf{u}(t) - A\mathbf{x}_2(t) - B\mathbf{u}(t) = A(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) = A\bar{\mathbf{x}}(t) \\
\bar{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0 = 0.
\end{aligned}$$

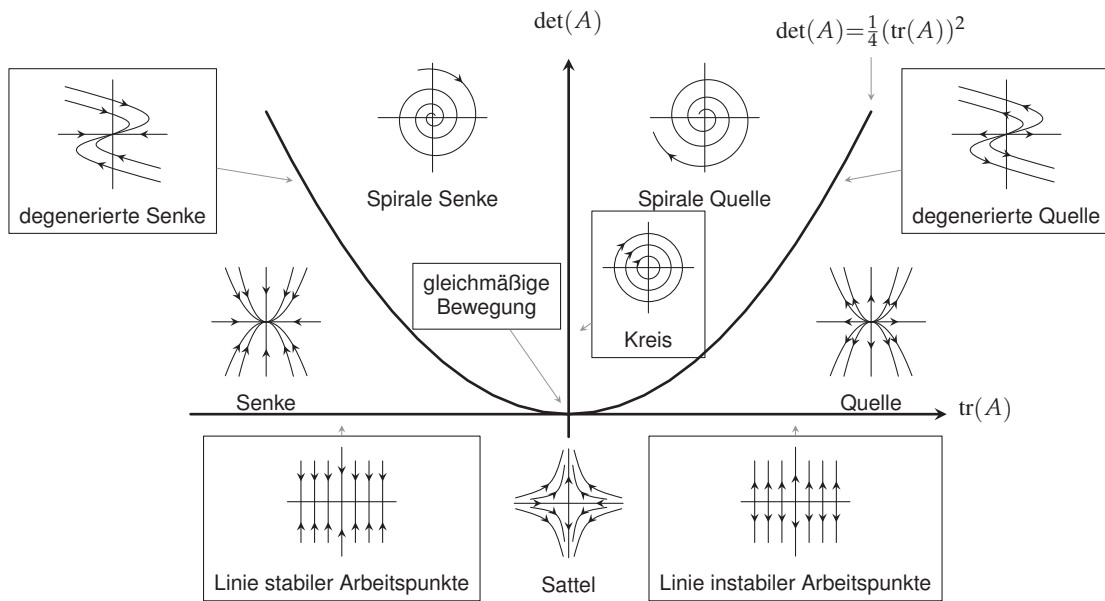
Folglich ist die Differenz $\bar{\mathbf{x}}(t)$ die Lösung des autonomen Systems und es gilt

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \exp(A \cdot t) \cdot 0 = 0.$$

Folglich müssen alle Lösungen identisch und die Lösung damit eindeutig sein. Weiter folgt (2.5b) direkt aus der Lösung von $\mathbf{x}(t)$. $\square$

Die Lösungen von LTI Systemen können sich drastisch voneinander unterscheiden. Dabei weisen die Visualisierungen der Lösungen selbst für autonome LTI Systeme sehr unterschiedliche Eigenschaften auf. Einen Einblick hierzu erhalten wir aus dem sogenannten Poincaré Diagramm. In Abbildung 2.2 sehen wir in diesem Diagramm die Phasenportraits unterschiedlicher autonomer LTI Systeme.

Die in Abbildung 2.2 beobachtbaren Eigenschaften lassen sich auf die Determinante und die Spur von A zurückführen. Um diese auch in der Systemmatrix an sich zu sehen, gibt es geschick-

Abbildung 2.2.: Poincaré Diagramm in der $(\det(A), \operatorname{tr}(A))$ Ebene

tere Schreibweisen. Diese sogenannten Normalformen erlauben uns zusätzlich, die Lösung (2.5) einfacher zu berechnen.

2.3. Normalformen

Geschickte Schreibweisen können viele Vorteile bringen. Wir müssen uns aber über die Ziele im Klaren sein, für die wir derartige Transformationen durchführen wollen. Dazu orientieren wir uns an den folgenden Punkten:

1. Die Wahl der Zustandsvariablen ist nicht eindeutig. Daher brauchen wir eine Methodik, wie wir zwischen diesen Wahlen – oder Koordinatensystemen im groberen Sinn – wechseln können.
2. Wenn wir wechseln können, dann sollten wir den Wechsel so wählen, dass
 - a) wir die Lösung möglichst einfach berechnen können, und
 - b) wir das Verhalten der Lösungen einfach analysieren können.

Grundlage bildet eine Folgerung aus der Transitionsmatrix:

Lemma 2.9 (Transformation)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ und eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ gegeben. Dann gilt

$$\exp(T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot t) = T^{-1} \cdot \exp(A \cdot t) \cdot T \quad (2.6)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Betrachte das autonome System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \text{Id}.\end{aligned}$$

Dann existiert nach Theorem 2.6 eine eindeutige Lösung und aus (2.4) folgt die Aussage. $\square$

Auf Basis dieser Aussage können wir also zwischen Koordinatensystemen hin- und herwechseln und haben eine Antwort auf die erste der obigen Fragen.

Darauf aufbauend wollen wir nun Transformationen suchen, für die wir die Lösung des LTI Systems möglichst einfach berechnen können. Hierzu sehen wir uns zuerst folgenden Spezialfall an:

Definition 2.10 (Kanonische Normalform).

Ein LTI System (1.3) ist in kanonischer Normalform, wenn $A = \text{diag}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, n_x$ eine Diagonalmatrix ist.

Nun wollen wir Lemma 2.9, um diese Diagonalform aus einer Matrix A zu berechnen, sofern diese denn diagonalisierbar ist.

Theorem 2.11 (Kanonische Normalform).

Gegeben sei ein LTI System (1.3). Wenn die Matrix A diagonalisierbar ist mit $\text{diag}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, n_x$, dann gilt

$$\Phi(t) = \exp(\text{diag}(\lambda_j t)) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp(\lambda_{n_x} t) \end{pmatrix} = \text{diag}(\exp(\lambda_j t)). \quad (2.7)$$

Wenn T die zugehörige Transformationsmatrix ist, dann ist das resultierende System

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) + T^{-1} \cdot B \cdot \mathbf{u}(t) \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{y}(t) = C \cdot T \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t) \quad (2.8b)$$

in kanonischer Normalform.

Beweis. Da A diagonalisierbar ist, existiert nach Lemma 2.9 eine invertierbare Matrix T . Nach Definition der Transitionsmatrix in (2.2) folgt aus (2.6) die Behauptung. $\square$

Der Fall aus Theorem 2.11 ist deswegen so interessant, weil er technisch bedeutet, dass alle Zustände des Systems entkoppelt voneinander betrachtet werden können. Entsprechend können wir hierzu jeweils einzelne Eingänge bestimmen.

Etwas komplizierter wird der Fall, wenn die komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{j,j+1} = \alpha \pm i\beta$ auftauchen. Hier gilt Folgendes:

Korollar 2.12 (Komplexe kanonische Normalform)

Weißt ein LTI System (1.3) komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{j,j+1} = \alpha \pm i\beta$ auf und ist ansonsten diagonalisierbar, so heißt das System (2.8) mit

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -\beta & \alpha & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{n_x} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

in komplexer kanonischer Normalform.

Beweis. Folgt direkt aus Theorem 2.11 mit der Wahl der Transformationsmatrix. $\square$

Bemerkung 2.13

Beachte, dass die transformierte Systemgleichung (2.9) nicht direkt in die Transitionsmatrix eingesetzt werden kann, sondern die Bewegungsgleichungen für die beiden komplex konjugierten Eigenwerte gemeinsam gelöst werden müssen.

Noch allgemeiner wissen wir, dass eine Zerlegung in Jordan-Normalform immer möglich ist und beweisen das nicht separat.

Theorem 2.14 (Jordansche Normalform).

Gegeben sei ein LTI System (1.3). Dann existiert eine invertierbare Transformationsmatrix T , so dass

$$J = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{n_x} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

gilt, wobei die Teilmatrizen J_j Jordanblöcke zu den Eigenwerten λ_j heißen und die Struktur

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

mit Blocklänge der Eigenvektorketten aufweisen. Die Gesamtdimension der Jordanblöcke eines Eigenwerts λ_j ist die algebraische Vielfachheit und gleich der Summe der geometrischen Vielfachheiten. Die Transformationsmatrix ist durch die Eigenvektoren bestimmt.

Die Transitionsmatrix zu einem Jordanblock ist bei Blocklänge k durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_j t) & t \exp(\lambda_j t) & \dots & \frac{t^k}{k!} \exp(\lambda_j t) \\ 0 & \exp(\lambda_j t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \exp(\lambda_j t) \\ 0 & \dots & 0 & \exp(\lambda_j t) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

gegeben.

Beweis. Die Jordanblöcke sind analog zur kanonischen Normalform aus Theorem 2.11 unabhängig. Die Superdiagonalen führen zu einer Integratorkette, deren Vorfaktoren durch die Taylor-Reihe gegeben sind und die Behauptung zeigen. $\square$

Mit der Jordanschen Normalform können wir also die Transitionsmatrizen beliebiger LTI Systeme berechnen. Neben dieser generalistischen Herangehensweise gibt es weitere Normalformen, die statt auf die Lösung des LTI Systems auf dessen Eigenschaften abzielen. Hier wollen wir kurz die Regelungsnormalform erwähnen.

Definition 2.15 (Regelungsnormalform).

Ein LTI System (1.3) ist in Regelungsnormalform, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n_x-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ \dots \ 0), \quad D = 0 \quad (2.13)$$

gilt. Die Dynamik ist folglich durch

$$\frac{d^{n_x}}{dt^{n_x}} \mathbf{y}(t) + a_{n_x-1} \frac{d^{n_x-1}}{dt^{n_x-1}} \mathbf{y}(t) + \dots + a_0 \mathbf{y}(t) = b_0 \mathbf{u}(t) \quad (2.14)$$

gegeben.

Das besondere an der Regelungsnormalform ist, dass wir aus der Dynamik die Matrix und umgekehrt ablesen können. Zudem gibt die Regelungsnormalform ein System an, bei dem der Eingang über mehrere Integrationsebenen auf den Ausgang wirkt. Insbesondere haben hier Eingang und Ausgang die Dimension eins. Zudem sind die Koeffizienten in der letzten Zeile der Systemmatrix auch die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda \text{Id} - A)$. Dessen Nullstellen wiederum sind die Eigenwerte der Systemmatrix A , die wir in Theoremen 2.10, 2.14 genutzt haben.

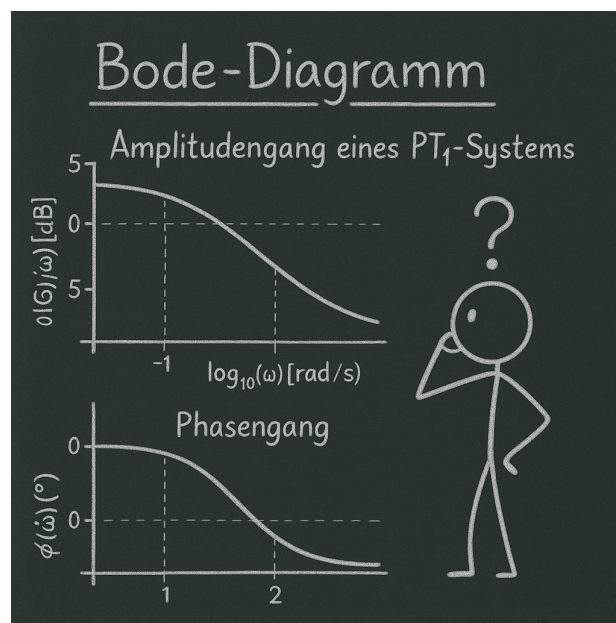
Zum Abschluss des Kapitels können wir die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

Tabelle 2.1.: Vorteile und Nachteile von Blockschaltbildern und Normalformen

Methoden	Vorteile	Nachteile
Blockschaltbild	Veranschaulicht System	Bildet keine Zustände ab
Kanonische Normalform	Vereinfacht Lösung mit Eigenwerten	Erfordert Diagonalisierbarkeit
Jordansche Normalform	Generalisiert Ansatz auf Jordanblöcke	Benötigt Jordanzerlegung
Regelungsnormalform	Zielt auf Eigenschaften charakteristisches Polynom	Limitiert auf einen Eingang

KAPITEL 3

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH



Generiert mit chatgpt.com

Aha, heute kreje mer die Dampfmaschin. Also, wat is en Dampfmaschin? Da stelle mer uns ganz dumm. Und da sage mer so: En Dampfmaschin, dat ist ene große schwarze Raum, der hat hinten un vorn e Loch. Dat eine Loch, dat is de Feuerung. Und dat andere Loch, dat krieje mer später. Wat tut nu der Dampf?

Heinrich Spoerl [10]

Wie wir im vorausgehenden Kapitel gesehen haben, können wir Systeme mathematisch über Differentialgleichungen darstellen, die das zeitliche Verhalten von Ein- und Ausgangssignalen

miteinander verknüpfen. Diese Darstellung ist grundsätzlich korrekt, aber im praktischen Umgang oft unhandlich — insbesondere wenn es darum geht, Systeme zu analysieren, miteinander zu verknüpfen oder Regler zu entwerfen. Grundständiger und ohne zuviel und unnötige Einsicht (wie Prof. Bömmel in [10] eine Dampfmaschine erklärt) können wir hierzu Methoden der Systemtheorie im *Frequenzbereich* anwenden.

Hierzu werden wir uns zuerst mit dem Konzept der *Übertragungsfunktion* auseinandersetzen. Diese entsteht durch die Anwendung der Laplace Transformation auf die Differentialgleichung und stellt das System im sogenannten Frequenzbereich bzw. s -Bereich dar. Um diese zu lösen, müssen wir nicht langwierige Rechnungen wie im Zeitbereich durchführen, sondern können eine einfache algebraische Gleichung lösen — ein enormer Vorteil in der Praxis.

Die Übertragungsfunktion liefert uns nicht nur eine kompakte Beschreibung des Systemverhaltens, sondern ermöglicht uns auch eine einfache Analyse von Stabilität, Dynamik, Frequenzverhalten und das Zusammenschalten mehrerer Teilsysteme. Als Hilfsmittel zur Analyse werden wir die graphischen Methoden des Bode Diagramms, der Ortskurve und des Pol-/Nullstellendiagramms kennenlernen. In den folgenden Kapiteln werden diese Hilfsmittel uns auch die Auslegung von Reglern erlauben.

3.1. Übertragungsfunktionen

Die Übertragungsfunktion ist ein fundamentales Werkzeug in der Regelungstechnik, das uns den Übergang von der physikalischen Beschreibung eines Systems zur graphischen Analyse und zum systematischen Reglerentwurf ermöglicht. Hierzu nutzen wir die Laplace Transformation:

Definition 3.1 (Laplace Transformation).

Gegeben sei eine Funktion $f(t)$, die

- kausal ist, d.h. $f(t) = 0$ für $t < 0$,
- stückweise konstant auf jedem endlichen Intervall $t \geq 0$ ist, und
- beschränkt ist durch $|f(t)| \leq M \exp(\gamma t)$ mit entsprechenden Konstanten $\gamma, M > 0$.

Dann nennen wir

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} \exp(-st) \cdot f(t) dt, \quad s = \alpha + i\omega \quad (3.1)$$

Laplace Transformation der Funktion $f(t)$ und die Menge $\mathbb{C}_\gamma = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \gamma\}$ nennen wir *Existenzbereich* von $\hat{f}(s)$.

Bemerkung 3.2

Beachte, dass das Laplace-Integral nicht für alle $s \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für die hier behandelten und für die Regelungstechnik interessanten Funktionen kann man aber stets davon ausgehen, dass dies der Fall ist.

Aus dieser abstrakten Definition ergeben sich für uns drei ganz essentielle Fragen:

- Was bedeutet die Definition eigentlich physikalisch?
- Was nützt uns diese Definition?
- Wie wenden wir die Definition an?

Die Laplace-Transformation (3.1) gewichtet die Funktion $f(t)$ mit einer exponentiell abklingenden Schwingung. Dafür nutzen wir die komplexe Größe $s = \alpha + i\omega$. Der Vorteil liegt für uns darin, dass wir von außen und ohne in die Funktion $f(t)$ zu schauen unterscheiden können zwischen

- der Dämpfung bzw. Verstärkung eines Signals, die dem Realteil α entspricht, und
- der Reaktion auf eine harmonische Anregung, die durch Imaginärteil ω dargestellt ist.

Wenn wir statt der Funktion $f(t)$ unser System einsetzen, dann können wir das System also scannen, indem wir verschiedene Signale als Eingänge stellen und die Ausgänge aufnehmen. So können wir das System unter verschiedenen Frequenzen und zeitlichen Abklingverhalten abtasten. Daher rührt auch der Name *Frequenzbereich* bzw. *Frequenzgang*.

Nun fragen wir uns, was uns die Definition nützt. Zum einen können wir die Darstellung im Frequenzbereich nutzen, um eine Lösung zu berechnen. Außerdem können wir die Laplace Transformation umkehren, um aus der Lösung im Frequenzbereich die Lösung im Zeitbereich zu bestimmen. Hierfür nutzen wir die inverse Laplace Transformation.

Definition 3.3 (Inverse Laplace Transformation).

Für eine auf $\mathbb{C}_\gamma$ wohldefinierte Funktion $\hat{f}(s) : \mathbb{C}_\gamma \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s))(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \hat{f}(s) \cdot \exp(st) ds, \quad t \geq 0, r \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

inverse Laplace Transformation.

Damit erhalten wir ein Lösungsverfahren, das eine Alternative zur Lösung von Differentialgleichungen im Zeitbereich darstellt. Die Bestimmung der Transitionsmatrix für LTI-Systeme in Theorem 2.8 ist damit vermeidbar. Abbildung 3.1 veranschaulicht die Wirkungskette dieses Vorgehens.

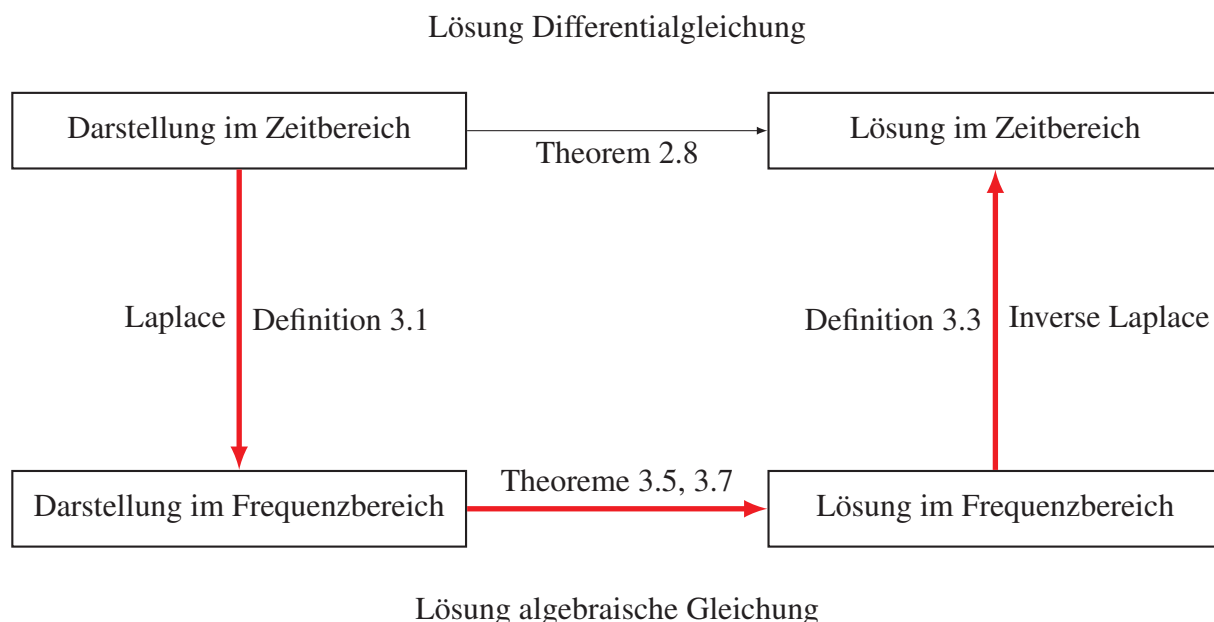


Abbildung 3.1.: Schematisches Vorgehen zur Nutzung von Laplace Transformationen

Das Lösungsverfahren macht natürlich nur dann Sinn, wenn es wirklich einfacher ist als die Lösung im Zeitbereich. Diese Einfachheit muss für die drei Komponenten Laplace Transformation, Lösung im Frequenzbereich, und inverse Laplace Transformation gelten.

Für die (inverse) Laplace Transformation nutzen wir sogenannte Äquivalenztabelle. Dadurch müssen wir nicht mehr die Lösung von (3.1) berechnen, sondern zerlegen die Funktion $f(t)$ in Komponenten gemäß der Tabelle 3.1 und ersetzen die Komponenten durch das zugehörige Äquivalent im Frequenzbereich. Dazu können wir Tabelle 3.2 heranziehen.

Tabelle 3.1.: Wichtige Sätze zu Laplace transformierter Funktionen

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Überlagerungssatz	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 \hat{f}_1(s) + c_2 \hat{f}_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at)$	$\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
wird auf der nächsten Seite fortgesetzt		

Tabelle 3.1 – fortgesetzt von der vorherigen Seite

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Differentiationssatz in s	$tf(t)$	$-\hat{f}'(s)$
Höhere Ableitungen	$t^n f(t)$	$(-1)^n \hat{f}^{(n)}(s)$
Differentiationssatz in t	$f'(t)$	$s\hat{f}(s) - f(0^+)$
Höhere Ableitungen	$f^{(n)}(t)$	$s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)$
Integrationssatz in s	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty \hat{f}(\sigma) d\sigma$
Integrationssatz in t	$\int_0^t f(\tau) d\tau = (\eta * f)(t)$	$\frac{1}{s} \hat{f}(s)$
Dämpfungssatz	$\exp(at) \cdot f(t)$	$\hat{f}(s - a)$
Verschiebungssatz	$f(t - a) \cdot \eta(t - a)$	$\exp(-as) \cdot \hat{f}(s)$
Multiplikationssatz	$f(t) \cdot g(t)$	$\frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{r-iT}^{r+iT} \hat{f}(\sigma) \cdot \hat{g}(\sigma) d\sigma$
Faltungssatz	$f(t) * g(t) = \int_0^T f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$	$\hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s)$

Tabelle 3.2.: Äquivalenztabelle zur Laplace Transformation¹

Zeitbereich	Frequenzbereich	Voraussetzung
$\delta(t)$	1	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\delta(t - T)$	$\exp(-sT)$	$T \in \mathbb{R}$
$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$t \exp(-at)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$t^n \exp(-at)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$\frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{1+sT}$	$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{T}$

wird auf der nächsten Seite fortgesetzt

Tabelle 3.2 – fortgesetzt von der vorherigen Seite

Zeitbereich	Frequenzbereich	Voraussetzung
$\frac{1}{a} (1 - \exp(-at))$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{0, -\operatorname{Re}(a)\}$
$\frac{1}{b-a} (\exp(-at) - \exp(-bt))$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{-\operatorname{Re}(a), -\operatorname{Re}(b)\}$
$\frac{1}{a-b} (a \exp(-at) - b \exp(-bt))$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{-\operatorname{Re}(a), -\operatorname{Re}(b)\}$
$\frac{\exp(-\frac{t}{T_1}) - \exp(-\frac{t}{T_2})}{T_1 - T_2}$	$\frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\left\{-\frac{1}{T_1}, -\frac{1}{T_2}\right\}$
$\frac{\frac{1}{T_1} \exp(-\frac{t}{T_1}) - \frac{1}{T_2} \exp(-\frac{t}{T_2})}{T_2 - T_1}$	$\frac{s}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\left\{-\frac{1}{T_1}, -\frac{1}{T_2}\right\}$
$\frac{1}{T^2} t \exp(-\frac{t}{T})$	$\frac{1}{(1+sT)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{T}$
$\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} \exp(-bt)$	$\frac{(s+a)}{s(s-b)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{0, -\operatorname{Re}(b)\}$
$1 + \frac{T-T_1}{T_1} \exp(-\frac{t}{T_1})$	$\frac{(1+sT)}{s(1+sT_1)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\left\{0, -\frac{1}{T_1}\right\}$
$\frac{1}{a^2} (\exp(-at) - 1 + at)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{0, -\operatorname{Re}(a)\}$
$T \exp(-\frac{t}{T}) + t - T$	$\frac{1}{T^2(1+sT)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\left\{0, -\frac{1}{T}\right\}$
$\frac{1}{a^2} (1 - (at+1) \exp(-at))$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{0, -\operatorname{Re}(a)\}$
$1 - \frac{T+t}{T} \exp(-\frac{t}{T})$	$\frac{1}{s(1+sT)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\left\{0, -\frac{1}{T}\right\}$
$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{a} \exp(-at) - \frac{1}{b} \exp(-bt)\right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\{0, -\operatorname{Re}(a), -\operatorname{Re}(b)\}$
$1 + \frac{T_1 \exp(-\frac{t}{T_1}) - T_2 \exp(-\frac{t}{T_2})}{T_2 - T_1}$	$\frac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$	$\operatorname{Re}(s) > \max\left\{0, -\frac{1}{T_1}, -\frac{1}{T_2}\right\}$
$\frac{1}{a} \sin(at)$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0, a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0, a \in \mathbb{R}$
$\exp(at) \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a), b \in \mathbb{R}$
$\exp(at) \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a), b \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{2a} t \sin(at)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0, a \in \mathbb{R}$
$t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0, a \in \mathbb{R}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

¹Beachte, dass die Laplace Transformation nur für positive Zeiten $t > 0$ definiert ist, daher formal immer die Multiplikation mit der Heaviside Funktion $\eta(t)$ mitgedacht werden muss.

Hierzu sehen wir uns unser LTI-System (1.3)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A \cdot \mathbf{x}(t) + B \cdot \mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= C \cdot \mathbf{x}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

genauer an und erhalten aus Tabelle 3.1 mit dem Differentiationssatz und dem Überlagerungssatz

$$\begin{aligned}s \cdot \hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 &= A \cdot \hat{\mathbf{x}}(s) + B \cdot \hat{\mathbf{u}}(s) \\ \hat{\mathbf{y}}(s) &= C \cdot \hat{\mathbf{x}}(s) + D \cdot \hat{\mathbf{u}}(s).\end{aligned}$$

Um den Ausgang $\hat{\mathbf{y}}(s)$ durch den Eingang $\hat{\mathbf{u}}(s)$ darzustellen, formen wir die erste Zeile nach $\hat{\mathbf{x}}(s)$ um und erhalten

$$\begin{aligned}s \cdot \hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 &= A \cdot \hat{\mathbf{x}}(s) + B \cdot \hat{\mathbf{u}}(s) \\ \iff s \cdot \hat{\mathbf{x}}(s) - A \cdot \hat{\mathbf{x}}(s) &= \mathbf{x}_0 + B \cdot \hat{\mathbf{u}}(s) \\ \iff (s \cdot \text{Id} - A) \cdot \hat{\mathbf{x}}(s) &= \mathbf{x}_0 + B \cdot \hat{\mathbf{u}}(s) \\ \iff \hat{\mathbf{x}}(s) &= (s \cdot \text{Id} - A)^{-1} \cdot (\mathbf{x}_0 + B \cdot \hat{\mathbf{u}}(s)).\end{aligned}$$

Da jetzt $\hat{\mathbf{x}}(s)$ direkt vorliegt, können wir das in die zweite Zeile einsetzen und erhalten

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \underbrace{C \cdot (s \cdot \text{Id} - A)^{-1} \cdot \mathbf{x}_0}_{\text{homogener Anteil}} + \underbrace{\left(C \cdot (s \cdot \text{Id} - A)^{-1} \cdot B + D \right) \cdot \hat{\mathbf{u}}(s)}_{\text{inhomogener Anteil}} \quad (3.3)$$

Beim homogenen Anteil spricht man auch vom sogenannten *Übergangsverhalten* des Systems bzw. dessen (freie) *Eigenbewegung*. Der inhomogene Anteil wird auch als *stationäres Verhalten* bzw. *erzwungene Bewegung* bezeichnet. In der Regelungstechnik interessiert uns insbesondere die erzwungene Bewegung, d.h. der Teil des Systems, den wir mit Eingangssignalen direkt beeinflussen können. Zusammen können wir jetzt die sogenannte *Transfer-* bzw. *Übertragungsfunktion* (oder im mehrdimensionalen Fall Transfermatrix) einführen:

Definition 3.4 (Übertragungsfunktion).

Für ein LTI System (1.12) mit Startzustand $\mathbf{x}_0 = 0$ nennen wir $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ *Übertragungsfunktion* des System, wenn

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = G(s) \cdot \hat{\mathbf{u}}(s) \quad (3.4)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt.

Für den LTI Fall können wir die Übertragungsfunktion $G(s)$ genau angeben und auch in den Zusammenhang zur Transitionsmatrix $\Phi(t)$ stellen. Hier gilt folgendes:

Theorem 3.5 (LTI Übertragungsfunktion).

Gegeben sei ein LTI System (1.12) mit Startzustand $\mathbf{x}_0 = 0$. Dann gilt

$$G(s) = C \cdot (s \cdot \text{Id} - A)^{-1} \cdot B + D = C \cdot \hat{\Phi}(s) \cdot B + D. \quad (3.5)$$

Beweis. Aus Theorem 2.8 kennen wir die Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= C \cdot \mathbf{x}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

des LTI Systems mit Transitionsmatrix $\Phi(t)$. Durch Anwendung der Laplace Transformation und des Faltungssatzes ergibt sich

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = C \cdot \hat{\Phi}(s) \cdot \mathbf{x}_0 + C \cdot \hat{\Phi}(s) \cdot B \cdot \hat{\mathbf{u}}(s) + D \cdot \hat{\mathbf{u}}(s).$$

Durch den Vergleich mit (3.3) und $\mathbf{x}_0 = 0$ ergibt sich $\hat{\Phi}(s) = (s \cdot \text{Id} - A)^{-1}$. Weiter können wir $\hat{\mathbf{u}}(s)$ ausklammern und erhalten damit die Aussage. $\square$

Der Beweis beantwortet auch gleich die Frage, ob die Lösungsbestimmung einfacher ist. Während wir im Zeitbereich die Integralfaltung von der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ mit $B \cdot \mathbf{u}(t)$ berechnen müssen, ist im Frequenzbereich nur die Multiplikation $(s \cdot \text{Id} - A)^{-1} \cdot B \cdot \hat{\mathbf{u}}(s)$ nötig.

Bemerkung 3.6

Beachte, dass auf Grund der Nicht-Kommutativität der Matrixmultiplikation die Reihenfolge der Übertragungsfunktionen wichtig ist und nicht getauscht werden darf. Im eindimensionalen Fall, das heißt bei genau einem Eingang und einem Ausgang, kann die Reihenfolge getauscht werden. Nichtsdestotrotz hat es sich bewährt, bei der Multiplikationsreihenfolge zu bleiben.

Zum Abschluss benötigen wir noch eine Möglichkeit, wie wir Tabelle 3.2 umgekehrt nutzen können. Dazu müssen wir die Lösungskomponenten von (3.5) in Bestandteile zerlegen, die aus der Tabelle bekannt sind. Das Hilfsmittel der Wahl ist die Partialbruchzerlegung, die allgemein wie folgt angewandt werden kann:

Theorem 3.7 (Partialbruchzerlegung).

Gegeben sei eine (Übertragungs-)Funktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$G(s) = \frac{\hat{Z}(s)}{\hat{N}(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (3.6)$$

wobei $\hat{Z}(s)$ und $\hat{N}(s)$ reelle teilerfremde Polynome sind mit $m = \text{grad}(\hat{Z}(s)) \leq \text{grad}(\hat{N}(s)) = n$. Weiter sei $\hat{N}(s)$ transformierbar in die Form

$$\hat{N}(s) = \prod_{j=1}^h (s - \lambda_j)^{k_j} \prod_{j=1}^m \left((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^{l_j} \quad (3.7)$$

mit $\text{grad}(\hat{N}(s)) = n = \sum_{j=1}^h k_j + 2 \sum_{j=1}^m l_j$. Dann kann $G(s)$ eindeutig zu der Partialbruchzerlegung

$$G(s) = c_0 + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^{k_j} \frac{c_{ji}}{(s - \lambda_j)^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{l_j} \frac{d_{ji} + e_{ji}s}{\left((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^i} \quad (3.8)$$

umformuliert werden mit $c_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\hat{Z}(s)}{\hat{N}(s)}$ und reellwertigen Koeffizienten $c_{ji}, d_{ji}, e_{ji} \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da $\hat{N}(s)$ reellwertig ist, existiert eine Zerlegung in lineare und quadratisch irreduzible Terme auf Basis der existierende Nullstellen bzw. der komplex-konjugierten Paare. Damit folgt (3.7). Analog gilt dies für den Zähler $\hat{Z}(s)$. Aufgrund der Teilerfremdheit können in der Kombination nur Brüche auf Basis der linearen Faktoren oder der quadratisch irreduziblen Faktoren entstehen, woraus (3.8) folgt. $\square$

Bemerkung 3.8

Bei der Berechnung von (3.5) bzw. (3.8) werden keine teilergleichen Polynome aus den Zähler-/Nennerpolynomen $\hat{Z}(s)$, $\hat{N}(s)$ gekürzt. Dies ist essentiell, um keine wichtigen Eigenschaften der Übertragungsfunktion zu verlieren. Hierzu zählt insbesondere das Teilen durch eine Nullstelle, d.h. wenn eine Eingabefrequenz genau die Nullstelle eines Teilpolynoms des Nenners $\hat{N}(s)$ darstellt.

Somit haben wir eine komplette Alternative zur Lösung von Differentialgleichungen geschaffen. Da die beiden Möglichkeiten äquivalent sind, d.h. auf gleiche Lösungen führen, stellt sich die Frage, ob wir statt der Differentialgleichung auch direkt die Systemdarstellung in Frequenzbereich analysieren können.

Bemerkung 3.9

Beachte, dass wir die Partialbruchzerlegung nur für Transferfunktionen $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert haben, also nur einen Eingang und einen Ausgang.

Auf genau derartige Systeme wollen wir uns jetzt fokussieren. Diese werden auch als Single-Input-Single-Output bezeichnet.

Definition 3.10 (SISO System).

Wir nennen ein System *Single-Input-Single-Output* bzw. *SISO*, wenn sowohl Eingangs- als auch Ausgangssignal eindimensional sind, d.h. die Transferfunktion ist eine Abbildung $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.11

Um den SISO Fall auch formeltechnisch sichtbar zu machen, wird hierfür die Schreibweise $y(s)$ statt der vektorwertigen Größe $\mathbf{y}(s)$ für den Ausgang und $u(s)$ statt $\mathbf{u}(s)$ für den Eingang genutzt.

Vorneweg müssen wir ein technisches Detail analysieren, nämlich die Ausblendung der Zeit im Frequenzbereich.

3.2. Realisierbarkeit und Sprungfähigkeit

In der vorherigen Diskussion haben wir für ein System im Zeitbereich ein System im Frequenzbereich hergeleitet und für den LTI Fall auch zeigen können, dass dies immer möglich ist. Umgekehrt stellt sich die Frage, ob wir für ein System im Frequenzbereich auch eines im Zeitbereich finden können. Diese Frage ist deswegen relevant, weil wir Zeit im Frequenzbereich völlig ausblenden und rein auf algebraische Größen abstellen. Daher kann es passieren, dass wir Systeme konstruieren, die physikalisch nicht realisierbar sind. Dazu brauchen wir den Begriff der Sprungfähigkeit.

Definition 3.12 (Sprungfähigkeit).

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die das System

$$\hat{y}(s) = G(s) \cdot \hat{u}(s)$$

definiert. Dann heißt das System *sprungfähig*, wenn ein Sprung im Eingangssignal unverzüglich auf einen Sprung im Ausgangssignal übertragen wird.

Die Sprungfähigkeit bzw. eigentlich die Nichtsprungfähigkeit ist für Realisierbarkeit von Systemen eine relevante Eigenschaft. Die Sprungfähigkeit ist ein Grenzfall. Unterhalb dieses Grenzfalles wirken vergangene Eingangssignale auf den derzeitigen Systemzustand und damit auf den aktuellen Ausgang, auch *Kausalität* genannt. Oberhalb des Grenzfalles hingegen wirken zukünftige Eingangssignale auf den aktuellen Ausgang, man spricht von Nicht-Kausalität. Dies macht physikalisch keinen Sinn, ist aber mathematisch formulierbar. Diese Formulierbarkeit werden wir im weiteren Verlauf der Veranstaltung sehen, da es aus regelungstechnischer Sicht wünschenswert sein könnte, eine derartige Regelung zu entwerfen.

Verweis: Beachte, dass Nicht-Kausalität nur physikalisch keinen Sinn macht. Mit Hilfe von Vorhersageverfahren, etwa durch Simulationen, können jedoch Systeme erschaffen werden, die auf Basis von (simulierten) zukünftigen Ereignissen auf den aktuellen Ausgang wirken. Entsprechende Verfahren sind Gegenstand der Veranstaltung *Regelungstechnik 3 - Moderne Regelungssysteme*.

Im Details wollen wir nun noch einmal auf die Nicht-Sprungfähigkeit eingehen:

Theorem 3.13 (Nicht-Sprungfähigkeit und Realisierbarkeit).

Eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \quad (3.9)$$

mit Polynomen $Z(s)$ und $N(s)$ ist nicht sprungfähig genau dann, wenn

$$\text{grad}(Z(s)) < \text{grad}(N(s)). \quad (3.10)$$

Eine Übertragungsfunktion nennen wir realisierbar, wenn

$$\text{grad}(Z(s)) \leq \text{grad}(N(s)). \quad (3.11)$$

Beweis. Da das Zählerpolynom einen kleineren Grad hat als das Nennerpolynom, existiert im Zeitbereich eine Integratorkette. Somit kann ein Sprung am Eingang keinen Sprung am Ausgang zur Folge haben sondern muss zeitlich integriert werden. In der Umkehrung gehen wir davon aus, die Übertragungsfunktion ist sprungfähig und dennoch gilt (3.10). Da wieder eine Integratorkette existieren muss, ergibt sich ein Widerspruch. $\square$

An Theorem 3.13 erkennen wir einen Sonderfall, nämlich die Möglichkeit einer realisierbaren Sprungfähigkeit genau dann, wenn die Grade von Zähler- und Nennerpolynomen gleich sind.

Korollar 3.14 (Realisierbare Sprungfähigkeit)

Gilt für eine Übertragungsfunktion (3.9)

$$\text{grad}(Z(s)) = \text{grad}(N(s)), \quad (3.12)$$

so ist diese sprungfähig und realisierbar.

Beweis. Folgt aus Theorem 3.13. □

Somit haben wir alle realisierbaren Übertragungsfunktionen erfasst. Beachte, dass auf Grund der Nicht-Kausalität es nicht möglich ist, höhere Zähler- als Nennergrade zu erhalten.

3.3. Darstellung

Nun wollen wir uns damit auseinandersetzen, wie wir Systeme darstellen können, ohne die jeweilige Lösung im Zeitbereich zu kennen und ohne die zugehörige Differentialgleichung aufzustellen. Hierzu greifen wir auf die Laplace Transformation eines Systems zurück und erhalten aus Definition 3.4 die Darstellung

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}. \quad (3.13)$$

Um die Funktion $G(s)$ zur Beschreibung des Systemverhaltens von Eingangssignalen zu Ausgangssignalen zu nutzen, werden wir immer voraussetzen, dass das System in Ruhe ist, d.h. $\mathbf{x}_0 = 0$, vgl. Definition 3.4. Wir definieren hierzu

Definition 3.15 (E/A Verhalten).

Für ein System mit Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und Anfangswert $\mathbf{x}_0 = 0$ nennen wir (3.13) das *Eingangs-/Ausgangsverhalten* bzw. *E/A Verhalten*.

Der Grund für die Annahme $\mathbf{x}_0 = 0$ liegt in der Faltung von Übertragungsfunktion mit Eingangssignal, vgl. (3.3). Ohne die Vorinformation $\mathbf{x}_0 = 0$ müsste die gesamte Historie von Eingangssignalen bis $-\infty$ betrachtet werden, und wir könnten nicht die Wirkung von Eingängen auf Ausgänge der erzwungenen Bewegung / des stationären Verhaltens betrachten.

Um das E/A Verhalten anhand von Eigenschaften zu analysieren, zerlegen wir die Übertragungsfunktion in physikalische Teile:

Theorem 3.16 (Betrag und Phase).

Eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist durch

$$G(s) = |G(s)| \cdot \exp(i\phi_G(s)) \quad (3.14)$$

in Exponentialform darstellbar mit

$$|G(s)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(G(s)))^2 + (\operatorname{Im}(G(s)))^2} \quad (3.15)$$

$$\phi_G(s) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(G(s))}{\operatorname{Re}(G(s))}\right). \quad (3.16)$$

Wir nennen $|G(s)|$ Betrag und $\phi_G(s)$ Phase der Übertragungsfunktion.

Beweis. Folgt aus der Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten. □

Was bedeuten nun Betrag und Phase?

- Der Betrag ist ein Maß für die Verstärkung eines Signals. Man spricht auch von Amplitudenveränderung. Durch die Abhängigkeit von s sehen wir, dass die Verstärkung frequenzabhängig sein kann.
- Die Phase stellt die Phasenverschiebung. In älteren Büchern wird dies auch als Argument $\arg(G(s))$ oder auch $\angle(G(s))$ bezeichnet. Auch hier sehen wir, dass die Phasenverschiebung von der jeweiligen Frequenz abhängig sein kann.

Die Phase ist besser zu verstehen, wenn wir sie im Kontext von Eingangs- und Ausgangssignal betrachten. Hier nutzen wir, dass wir diese Zerlegung für die Übertragungsfunktion bzw. für alle derartigen komplexen Funktionen durchführen können, also auch für Eingangs- und Ausgangssignale. Wir können also direkt folgenden Schluss ziehen:

Korollar 3.17 (Betrag und Phase im E/A Verhalten)

Für eine Übertragungsfunktion (3.13) gilt

$$G(s) = \frac{|\hat{y}(s)|}{|\hat{u}(s)|} \cdot \exp(i(\phi_{\hat{y}}(s) - \phi_{\hat{u}}(s))) \quad (3.17)$$

Beweis. Da die komplexen Funktionen $\hat{y}(s)$ und $\hat{u}(s)$ dargestellt werden können als

$$\hat{y}(s) = |y(s)| \cdot \exp(i\phi_y(s))$$

$$\hat{u}(s) = |u(s)| \cdot \exp(i\phi_u(s))$$

können die Beträge und Phase zusammengefasst werden und die Aussage folgt. $\square$

Nun sehen wir, dass die Phase eine Verschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal darstellen. Hier gilt im Allgemeinen $\phi_{\hat{y}}(s) \leq \phi_{\hat{u}}(s)$, d.h. die Phase ist typischerweise negativ und das Ausgangssignal folgt dem Eingangssignal mit Verspätung.

Aus Theorem 3.16 bzw. Korollar 3.17 erhalten wir eine zusätzliche Information, die wir bisher noch nicht genutzt haben: Durch die Darstellung (3.14) ist eine Darstellung über den vollen Bereich $s = i\omega$ äquivalent zur Darstellung des Zeitbereichs. Beachte, dass dies nur für die erzwungene Bewegung / das stationäre Verhalten gilt. Das heißt insbesondere, dass für die erzwungene Bewegung / das stationäre Verhalten nur die komplexen Werte $s = i\omega$ betrachtet werden müssen. Dies machen wir uns im sogenannten *Frequenzgang* zunutze, bei dem wir Betrag und Phase zur strukturierten Darstellungen für das E/A Verhalten eines Systems verwenden.

Definition 3.18 (Frequenzgang).

Für eine gegebene Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir den Anteil unter harmonischer Anregung $G(i\omega)$ den *Frequenzgang*.

Für den Frequenzgang gibt es verschiedene Darstellungen, die wir uns im folgenden genauer ansehen werden und deren Eigenschaften bzw. Aussagekraft wir herleiten werden.

3.3.1. Bode Diagramm

Als erste Darstellung nehmen wir uns das sogenannte *Bode Diagramm* vor. Im Bode Diagramm wird der Betrag im sogenannten *Amplitudengang* und die Phase im *Phasengang* dargestellt. Die Größen werden dabei typischerweise logarithmisch auf der Abszisse aufgetragen.

Definition 3.19 (Bode Diagramm).

Für eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir die Kombination der Abbildungen von

- *Amplitudengang* $|G(i\omega)| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gemäß (3.15) und
- *Phasengang* $\phi_G(i\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gemäß (3.16)

Bode Diagramm.

Bemerkung 3.20

Beachte, dass wir in Definition 3.19 bereits genutzt haben, dass wir nur die komplexen Werte $s = i\omega$ nutzen müssen. Dementsprechend können wir uns auf die Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ beschränken und erhalten eine Abbildung über den reellen Zahlen.

Bevor wir zu dem Grund kommen, warum sich für die Darstellung des Bode Diagramms eine semilogarithmische Skalierung eignet, veranschaulichen wir das Bode Diagramm an einem Beispiel aus der regelungstechnischen Praxis.

Definition 3.21 (Tiefpass Filter).

Wir bezeichnen den Vierpol nach Abbildung 3.2 als R - C Glied in *Tiefpass* Konfiguration.

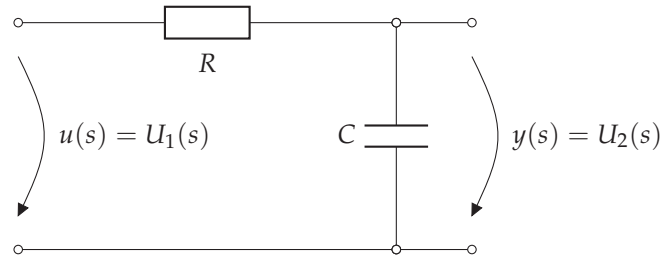


Abbildung 3.2.: Schaltung eines einfachen Tiefpass Filters

Für die Schaltung aus Abbildung 3.2 erhalten wir nach dem Spannungsteiler für das Verhältnis der Ausgangsspannung $\vec{U}_2$ zur Eingangsspannung $\vec{U}_1$

$$G(i\omega) = \frac{y(i\omega)}{u(i\omega)} = \frac{\vec{U}_2(i\omega)}{\vec{U}_1(i\omega)} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (3.18)$$

wobei wir hier die Notation von Spannungen über deren komplexe Effektivwertzeiger nutzen.

Verweis: Beachte, dass elektrotechnische Grundlagen nicht teil dieser Veranstaltung sind. Daher wird keinerlei Wissen hinsichtlich der Modellierung vorausgesetzt. Wir verwenden die bereits abgeleiteten Modelle für regelungstechnische Zwecke.

Nun können wir aus (3.18) den Amplitudengang

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| &= \frac{1}{1 + i\omega RC} \cdot \frac{1 - i\omega RC}{1 - i\omega RC} = \frac{1 - i\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \\ &= \sqrt{\left(\operatorname{Re} \left(\frac{1 - i\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \right) \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \left(\frac{1 - i\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \right) \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \right)^2 + \left(\frac{-\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\left(1 + (\omega RC)^2 \right)^2} + \frac{(-\omega RC)^2}{\left(1 + (\omega RC)^2 \right)^2}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + (\omega RC)^2}{\left(1 + (\omega RC)^2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (3.19)$$

sowie den Phasengang

$$\begin{aligned} \phi_G(i\omega) &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(G(i\omega))}{\operatorname{Re}(G(i\omega))}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}}{\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}}\right) \\ &= \arctan(-\omega RC) = -\arctan(\omega RC) \end{aligned} \quad (3.20)$$

des Tiefpass Filters berechnen. Zur Zeichnung des Bode Diagramms in Abbildung 3.2 haben wir die Werte $R = 1\Omega$ und $C = 1F$ gewählt. Hierfür ergibt sich die Wertetabelle:

Tabelle 3.3.: Wertetabelle des Bode Diagramms für einen Tiefpass Filter

Frequenz	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
Amplitude	0.999	0.995	0.707	0.0995	0.0099	0.0001
Phase	-0.57°	-5.71°	-45°	-84.29°	-89.43°	-89.94°

Bemerkung 3.22

Im Bode Diagramm werden Amplitudengang und Phasengang immer untereinander gezeichnet und die Abzissen jeweils gleich gehalten. So ist es möglich, für eine Frequenz durch einen vertikalen Strich gleichzeitig Amplitude und Phase abzulesen.

Nun können wir uns das Bode Diagramm genauer anschauen. Dabei fällt auf, dass die Amplitude für niedrige Frequenzen gegen 1 konvergiert, für hohe Frequenzen hingegen gegen 0. Physikalisch bedeutet das, dass niedrige Frequenzen am Ausgang (fast) unverändert in ihrer Amplitude ausgegeben werden. Hohe Frequenzen hingegen sind am Ausgang (fast) nicht mehr messbar.

Um diese Bereiche voneinander zu trennen, führen wir die Grenzfrequenz ein:

Definition 3.23 (Grenzfrequenz).

Gegeben eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir

$$\omega_g \in \mathbb{R} : |G(i\omega_g)| = \left| \frac{y(i\omega_g)}{u(i\omega_g)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.21)$$

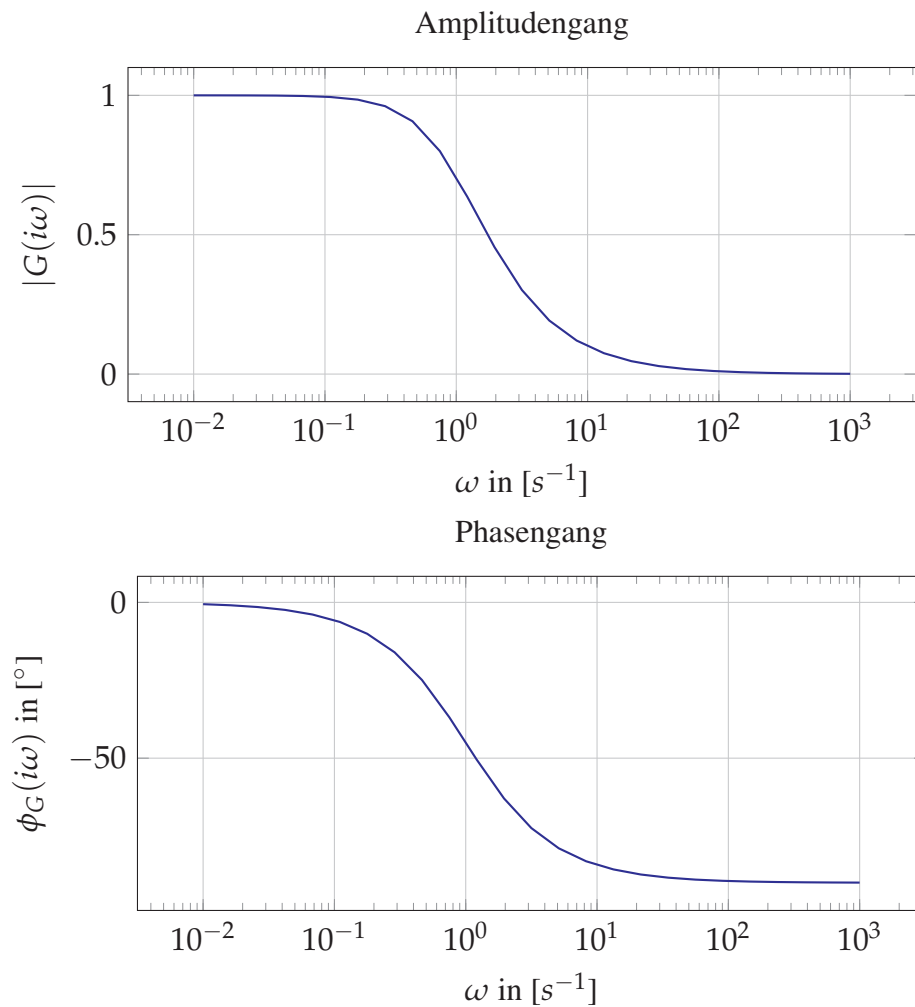


Abbildung 3.3.: Bode Diagramm für den Tiefpass Filter

als Grenzfrequenz.

Mathematisch bedeutet die Grenzfrequenz, dass der Realteil des Nenners gleich dessen Imaginärteil ist. Physikalisch wiederum splittet sich die Leistung somit gleichmäßig auf die effektive Leistung (Effektivwert), also was wir am Ausgang messen können, und Blindleistung (Blindwert), also den nicht am Ausgang messbaren Signalverlust auf. Es kommt also nur die halbe Leistung am Ausgang an. In der Phase bedeutet Realteil gleich Imaginärteil des Nenners, dass ein Phasenverschub von 45° vorliegt.

In vielen Fällen ist die Darstellung des Amplitudengangs auch volllogarithmisch sinnvoll. Damit wird sichtbar, wie schnell die Amplitude in bestimmten Frequenzbereichen abfällt. Insbesondere wird hierdurch die Hintereinanderschaltung von Übertragungsfunktionen einfacher. Hierzu führen wir die Skalierung Dezibel ein:

Definition 3.24 (Dezibel).

Für eine gegebene Größe x definieren wir die Skalierung/Hilfsgröße *Dezibel* über

$$x_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(x). \quad (3.22)$$

Die Wahl der Skalierung ist durch die Grenzfrequenz ω_g begründet. Die Skalierung mit dem Faktor 20 entsteht dabei aus der Zehnteilung der Hilfsmaßeinheit *Bel* und dem Faktor 2, den wir durch Logarithmierung des quadratischen Zusammenhangs zwischen Leistung und Effektivwert erhalten. Für die Grenzfrequenz gilt:

Korollar 3.25 (Grenzfrequenz in Dezibel)

Die Grenzfrequenz einer Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$|G(i\omega_g)|_{\text{dB}} = -3\text{dB}. \quad (3.23)$$

Abbildung 3.4 veranschaulicht den gleichen Tiefpass wie Abbildung 3.3, nutzt jedoch Dezibel im Amplitudengang. Hierin haben wir zudem die Grenzfrequenz in Amplituden- und Phasengang aufgezeichnet. Tabelle 3.4 enthält die entsprechenden Werte

Tabelle 3.4.: Wertetabelle des Bode Diagramms für einen Tiefpass Filter in [dB]

Frequenz	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
Amplitude	-0.0004	-0.04	-3	-20.5	-40	-60
Phase	-0.57°	-5.71°	-45°	-84.29°	-89.43°	-89.94°

Wie bereits angesprochen hat die volllogarithmische Darstellung neben der besseren Sichtbarkeit des Abklingens einen weiteren Vorteil. Der Vorteil wird ersichtlich, wenn wir Hintereinanderschaltungen von Übertragungsfunktionen betrachten. Diese werden miteinander multipliziert:

Theorem 3.26 (Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen).

Gegeben seien die Übertragungsfunktionen $G_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ von Schaltungen $j = 1, \dots, n$, wobei

$$G_j(i\omega) = \begin{cases} K = \text{const.} & \text{für } j = 0 \\ (i\omega - s_j) & \text{für } j = 1, \dots, m \end{cases}$$

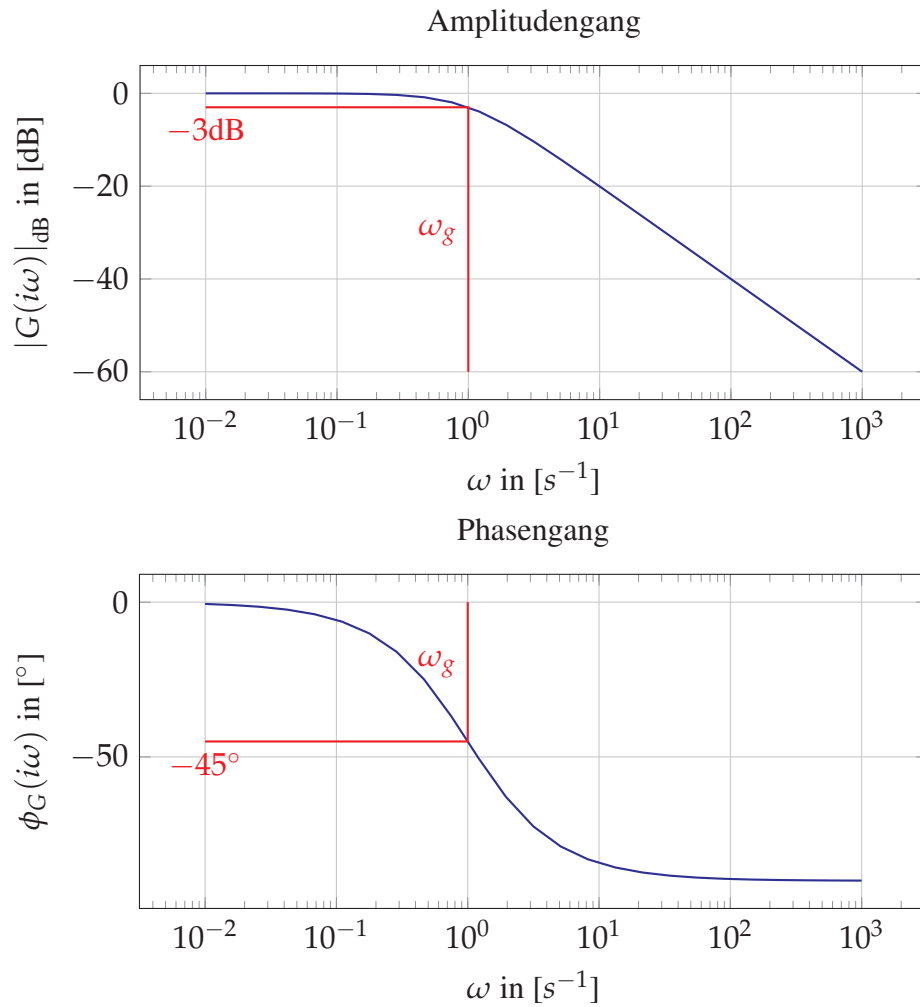


Abbildung 3.4.: Bode Diagramm für den Tiefpass Filter in [dB]

oder

$$G_j(i\omega) = \frac{1}{(i\omega - s_j)} \quad \text{für } j = m + 1, \dots, n.$$

Für die Reihenschaltung der Übertragungsfunktionen gilt dann

$$G(i\omega) = K \prod_{j=0}^n G_j(i\omega) \quad (3.24)$$

mit

$$|G(i\omega)| = |K| \prod_{j=0}^n |G_j(i\omega)| \quad \text{und} \quad \phi_G(i\omega) = \sum_{j=0}^n \phi_{G_j}(i\omega) \quad (3.25)$$

wobei $\phi_{G_0}(i\omega) = 0^\circ$ für $K > 0$ und $\phi_{G_0}(i\omega) = -180^\circ$ für $K < 0$.

Beweis. Da für jede Übertragungsfunktion $\hat{y}_j(i\omega) = G_j(i\omega) \cdot \hat{u}_j(i\omega)$ gilt, können wir bei einer Reihenschaltung $\hat{y}_j(i\omega) = \hat{u}_{j+1}(i\omega)$ wählen. Somit gilt

$$\hat{y}_{j+1}(i\omega) = G_{j+1}(i\omega) \cdot \hat{u}_{j+1}(i\omega) = G_{j+1}(i\omega) \cdot \hat{y}_j(i\omega) = G_{j+1}(i\omega) \cdot G_j(i\omega) \cdot \hat{u}_j(i\omega).$$

Durch die iterative Anwendung dieses Einsetzens folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.27

Beachte, dass eine Zerlegung in die Übertragungsfunktionen $G_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf Grund der Partialbruchzerlegung (vgl. Theorem 3.7) immer möglich ist. Die Partialbruchzerlegung entspricht damit einer Reihenschaltung der einzelnen Übertragungsfunktionen.

Nutzen wir nun eine volllogarithmische Darstellung, so folgt für den Amplitudengang direkt

Korollar 3.28 (Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen in Dezibel)

Für eine Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen wie in Theorem 3.26 gilt

$$|G(i\omega)|_{dB} = |K|_{dB} + \sum_{j=0}^n |G_j(i\omega)|_{dB}. \quad (3.26)$$

Beweis. Durch die Logarithmierung des Produkts des Amplitudengangs in (3.26) mittels der Dezibel Funktion (3.22) wird die Multiplikation zu einer Addition, woraus die Behauptung folgt. □

In der Folge von Korollar 3.28 können wir Bode Diagramme von Reihenschaltungen verschiedener Übertragungsfunktionen sowohl in Amplitude als auch Phase aufsummieren. Damit können auch komplexe Schaltungen zuerst auf Basiskomponenten reduziert und deren Bode Diagramme anschließen summiert werden.

Bemerkung 3.29

Die Basiskomponenten sind durch die Darstellung in Theorem 3.26 bzw. durch Theorem 3.7 ableitbar. Wir werden diese später beim Regelkreisentwurf erneut aufgreifen.

3.3.2. Ortskurve / Polargang

Eine weitere Darstellungsweise ist die sogenannte *Ortskurve*. Bei der Ortskurven wird eine Übertragungsfunktion durch Betrag und Phase als komplexwertige Kurve dargestellt. Formal definieren wir

Definition 3.30 (Ortskurve / Polargang).

Für eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir die Abbildung

$$\omega \mapsto G(i\omega) \quad (3.27)$$

Ortskurve bzw. *Polargang* der Übertragungsfunktion.

Die Ortskurve ist damit eine Abbildung der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen. Graphisch stellt die Ortskurve die Spitze des Zeigers dar, der durch die Länge $|G(i\omega)|$ und den Winkel $\phi_G(i\omega)$ definiert ist. Abbildung 3.5 stellt dies bildlich dar.

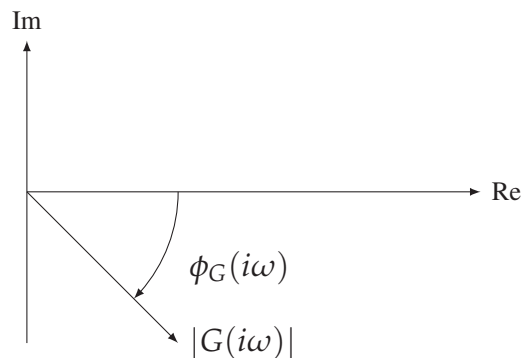


Abbildung 3.5.: Schemazeichnung einer Ortskurve

Folglich können wir wieder Wertetabellen wie im Fall des Tiefpasses in Tabelle 3.3 nutzen, um eine Abbildung zu erzeugen. Wir erhalten eine Kurve, indem wir die Punkte für den variierenden Parameter $\omega \in [0, \infty)$ betrachten.

Anhand des Tiefpass Filter Beispiels erkennen wir, dass aus dem Bode Diagramm Amplitude und Phase abgelesen und in der Ortskurve aufgezeichnet werden können. So erhalten wir eine gute Approximation des Ortskurvenverlaufs. Umgekehrt ist die Konstruktion des Bode Diagramms schwierig, da die Frequenz ω nicht für alle Punkte angegeben ist und die Kurve auch nicht gleichmäßig schnell durchläuft. Um die Geschwindigkeit mit in die Ortskurve aufzunehmen, werden ausgewählte Punkte mit der zugehörigen Frequenz ins Diagramm eingezeichnet, vgl. Abbildung 3.6.

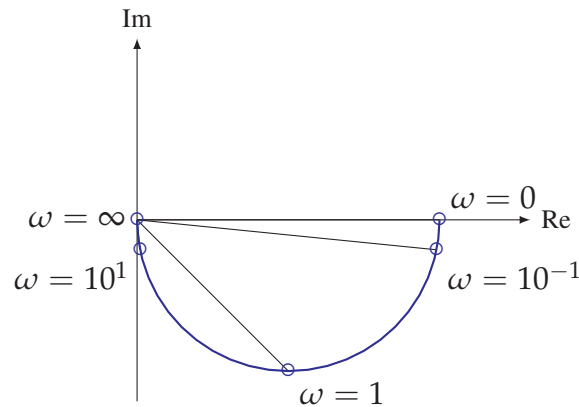


Abbildung 3.6.: Ortskurve für den Tiefpass Filter

Sind keine zugehörigen Frequenzen eingezeichnet, so können wir bei der Ortskurve im Gegensatz zum Bode Diagramm keine frequenzabhängigen Verstärkungen und auch keine Grenzfrequenz ablesen. Die Existenz von Verstärkungen können wir an komplexen Punkten erkennen, die in der rechten Halbebene mit Realteilen größer 1 liegen. Die Grenzfrequenz ist bei der imaginären Gerade mit Realteil $1/\sqrt{2}$ erreicht.

Bemerkung 3.31

In der späteren Stabilitätsbetrachtung von Systemen werden wir die Ortskurve im Rahmen des Nyquistkriteriums wieder aufgreifen.

3.3.3. Pol-/Nullstellendiagramm

Eine andere Darstellungsweise ist das sogenannte *Pol-/Nullstellendiagramm*. Die Pol- und Nullstellen einer Übertragungsfunktion sind dabei wie folgt definiert:

Definition 3.32 (Pole und Nullstellen).

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \quad (3.28)$$

mit Polynomen $Z(s)$ und $N(s)$. Für die Polynomzerlegung

$$Z(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 = b_m \prod_{j=1}^m (s - s_{0j}) \quad (3.29)$$

$$N(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = \prod_{j=1}^n (s - s_j) \quad (3.30)$$

bezeichnen wir s_{0j} als *Nullstellen* und s_j als *Pole*.

Bemerkung 3.33

Die Polynomzerlegung in (3.29) existiert gemäß unseres Theorems 3.7 zur Partialbruchzerlegung immer. Hier haben wir genutzt, dass s_j bzw. s_{0j} komplexwertig sind, wodurch die Anzahl an Produkten n in (3.29) gleich $h + m$ in 3.7 entspricht.

Die Pol- und Nullstellen sind für uns deswegen so interessant, weil sie die Grenzwerte von ganz spezifischem systemischen Verhalten beschreiben. Hierzu betrachten wir zunächst die Übertragungsfunktion in der sogenannten *Pol-Nullstellen-Form* bzw. der *Zeitkonstantenform*.

Definition 3.34 (Pol-Nullstellen-Form und Zeitkonstantenform).

Die Darstellungen einer Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Polen s_j und Nullstellen s_{0j} über

$$G(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - s_{0j})}{\prod_{j=1}^n (s - s_j)} \quad (3.31)$$

$$G(s) = k_s \cdot \frac{\prod_{j=1}^m \left(-\frac{s}{s_{0j}} + 1\right)}{\prod_{j=1}^n \left(-\frac{s}{s_j} + 1\right)} \quad (3.32)$$

heißen *Pol-Nullstellen-Form* bzw. *Zeitkonstantenform*.

Beachte, dass beide Darstellungen in Definition 3.34 nicht äquivalent sind. Wir haben in Zähler und Nenner jeweils durch die Pole bzw. Nullstellen geteilt, wodurch eine Skalierung der jeweiligen Produkte entsteht. Für formale Gleichheit könnte der Verstärkungsfaktor k_s genutzt werden, was in der Praxis aber nicht gemacht wird. Stattdessen verbleibt man bei der systemischen Interpretierbarkeit von $k_s = b_0/a_0$ als statische Verstärkung des Systems. Die Beträge $|1/s_{0j}|$ und $|1/s_j|$ können damit als Zeitkonstanten angesehen werden.

Nun können wir Pole und Nullstellen interpretieren.

- Wenn die Eingangsfrequenz s gleich einer Nullstelle s_{0j} ist, so wird das Zählerpolynom $Z(s) = 0$. Entsprechend können wir hier im Regelfall erwarten, dass die Übertragungsfunktion eine Amplitude von 0 bzw. $-\infty \text{ dB}$ aufweist.

- Für diesen Regelfall gibt es eine Ausnahme, die wir gleich adressieren werden. Zuvor sehen wir uns das Verhalten bei Polen an. Hierzu gilt, dass $N(s) = 0$ wenn $s = s_j$. Folglich würden wir hier durch 0 teilen und erhalten eine vertikale Asymptote in der Amplitude. Die Ausnahme tritt aus, wenn eine Nullstelle gleich einem Pol ist, d.h. $s_{0j} = s_j$, dann würden wir hier $0/0$ teilen. Hier ist entscheidend, in welcher Potenz die Pole und Nullstellen auftreten, d.h. welches Verhalten im Limes überwiegt.

Für unseren Tiefpass Filter

$$G(s) = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

erhalten wir den Pol $s_1 = -\frac{1}{R \cdot C}$. Für unsere Standardwerte $R = C = 1$ erhalten wir also $s_1 = -1$.

Im Pol-Nullstellen Diagramm werden in der komplexen Ebene die Pole als Kreuze $\times$ und die Nullstellen als Nullen $\circ$ eingetragen. Abbildung 3.7 veranschaulicht den Pol für unseren Tiefpass Filter.

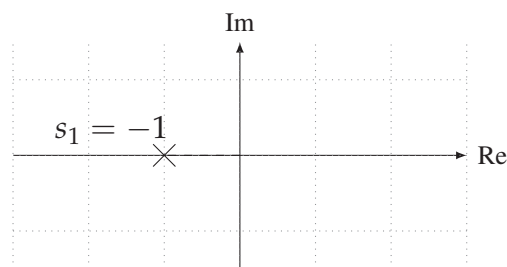


Abbildung 3.7.: Pol-Nullstellen Diagramm für den Tiefpass Filter

Die Ziele und Vorteile der hier besprochenen Darstellungen lassen sich wie in Tabelle 3.5 zusammenfassen.

Tabelle 3.5.: Ziele und Vorteile von Bode Diagramm und Ortskurve

Methode	Ziele	Vorteile
Bode Diagramm	Reglerauslegung mit Verstärkungs-/Phasenreserve	Frequenzabhängige Änderungen anschaulich getrennt
wird auf der nächsten Seite fortgesetzt		

Tabelle 3.5 – fortgesetzt von der vorherigen Seite

Methoden	Ziele	Vorteile
Ortskurve	Kombiniertes Amplituden-/Phasenverhalten	Direkt anwendbar bei Nyquist Stabilitätskriterium
Pol-/Nullstellen	Frequenzcharakterisierung	Ablesbarkeit von Stabilitätsverhalten

3.4. Klassifikation von Übertragungselementen

Im Folgenden wollen wir uns wichtige Übertragungselemente genauer ansehen. Die Elemente sind in ihrer Beschreibung so gewählt, dass mit ihnen jedwede Kombination einer Übertragungsfunktion in Pol-Nullstellenform (3.31)

$$G(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - s_{0j})}{\prod_{j=1}^n (s - s_j)}$$

dargestellt werden kann. Für uns ist das in zweierlei Richtung wichtig:

- Durch die Übertragungselemente können wir jede Übertragungsfunktion in obiger Form in diese Elemente aufsplitten, d.h. wir können das System beschreiben.
- Wenn das Systemverhalten beeinflusst werden soll, also durch eine Steuerung oder Regelung, dann können wir Steuerung bzw. Regelung durch diese Elemente zusammensetzen.

Zur Standardisierung wird in der Regelungstechnik für jedes dieser Elemente ein zugehöriger Block eingeführt. Systeme bzw. Steuerung/Regelungen können somit aus diesen Blöcken aufgebaut werden. Für jedes der Elemente zeigen wir zudem die Charakteristika des Elements anhand ihrer Darstellungen in Bode Diagramm, Ortskurve und Pol-Nullstellen Diagramm auf. Für die Zerlegung bzw. den Aufbau nutzen wir folgenden Zusammenhang

Korollar 3.35 (Blockrechnung)

Für zwei gegebene Übertragungsfunktionen $G_1, G_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt für die Gesamtübertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

- bei Reihenschaltung (vergleiche Abbildung 3.8) $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$,
- bei Parallelschaltung (vergleiche Abbildung 3.9) $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$, und
- bei Rückkopplung (vergleiche Abbildung 3.10) $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$.

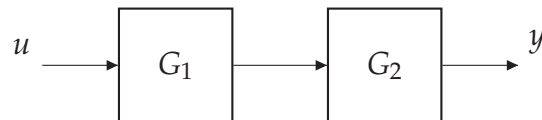


Abbildung 3.8.: Darstellung einer Reihenschaltung im Blockschaltbild

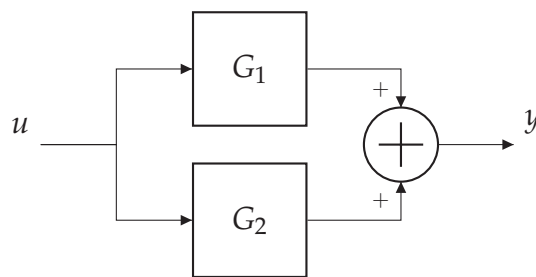


Abbildung 3.9.: Darstellung einer Parallelschaltung im Blockschaltbild

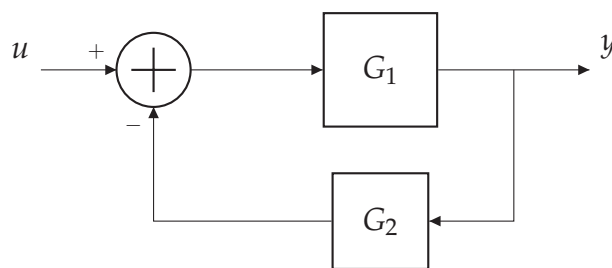


Abbildung 3.10.: Darstellung einer Rückkopplung im Blockschaltbild

Um einer Standardisierung gerecht zu werden, wird zur Darstellung innerhalb des Blocks die sogenannte *Sprungantwort* genutzt.

Definition 3.36 (Sprungantwort).

Für eine gegebene Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir das zur *Sprungfunktion* (bzw.

Heaviside Funktion)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{nicht definiert}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

gehörige Ausgangssignal $y(s) = G(s) \cdot \eta(t)$ Sprungantwort.

Die Heaviside Funktion ist ein Einheitssprung, d.h. das Eingangssignal wird plötzlich und dauerhaft umgestellt, vergleiche Abbildung 3.11. Die Sprungantwort zeigt damit die Reaktion des Systems auf diese plötzliche dauerhafte Änderung.

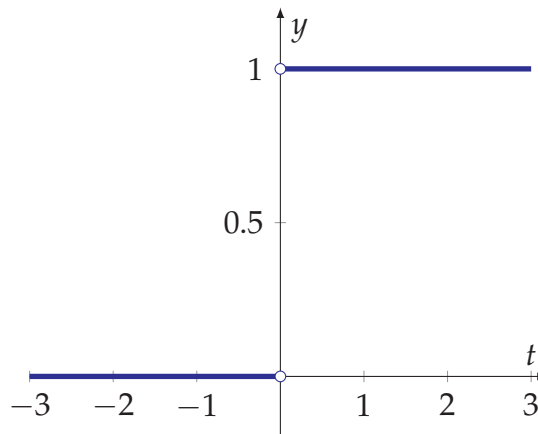


Abbildung 3.11.: Graph der Heaviside Funktion

Wir beginnen mit den idealisierten Elementen, den sogenannten *P*-, *I*- und *D*- und *T*-Gliedern. Anschließend greifen wir den zuvor behandelten Tiefpass Filter erneut auf, um *P*-, *I*- und *D*-Glieder realitätsnäher umzusetzen.

3.4.1. Proportionalfaktor (P-Glied)

Das einfachste Element ist ein Proportionalfaktor, der durch

$$\begin{aligned} y(t) &= b_0 \cdot u(t) \\ \hat{y}(s) &= b_0 \cdot \hat{u}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Allgemeine Darstellung: } G(s) := K_P \end{aligned}$$

im Zeit- und Frequenzbereich beschrieben ist, wobei $K_P = b_0$ die sogenannte *Proportionalkonstante* darstellt. Das bedeutet, dass ein System sofort und proportional auf ein Eingangssignal

reagiert. Inhaltlich ist das P-Glied damit ein Verstärker. Abbildung 3.12 stellt die Blockschreibweise des P-Gliedes dar.



Abbildung 3.12.: Darstellung eines Proportionalfaktors im Blockschaltbild

Beispiele für Proportionalfaktoren bzw. P-Glieder sind

- ein Lautsprecherverstärker, der ein Funk- oder Radiosignal proportional auf einen Lautsprecher überträgt, oder
- eine elektrische Heizung, die proportional zur angelegten Spannung Wärme abgibt.

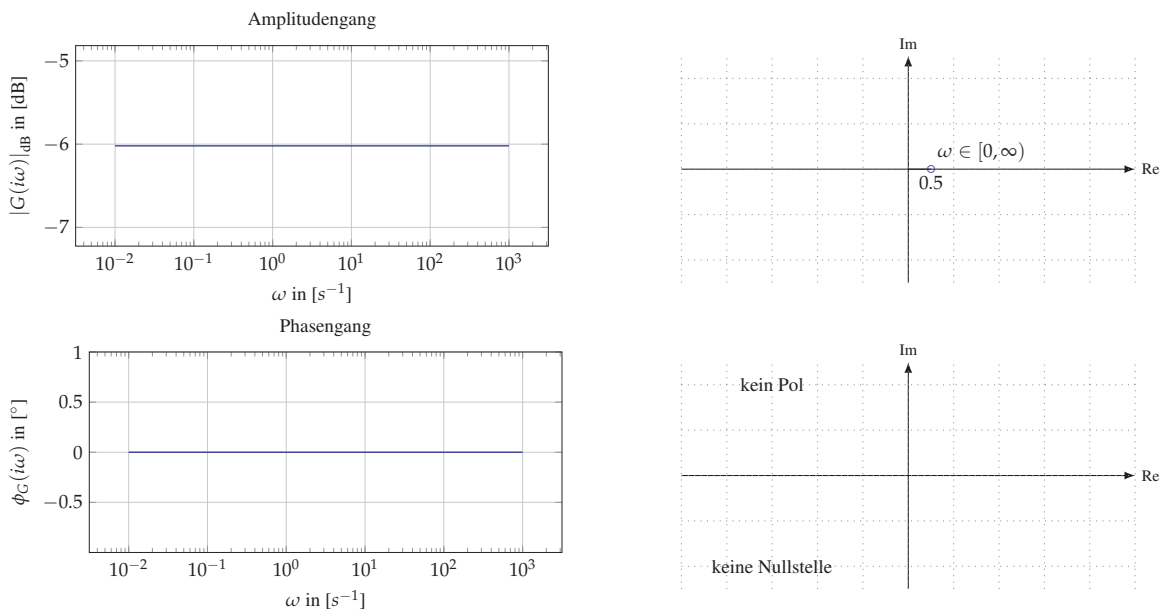


Abbildung 3.13.: Diagramme für Proportionalfaktor mit $K_P = 0.5$

Da keine physikalisch gleichmäßige Größe instantan ihren Wert ändern kann, zeigt bereits das Blockschaltbildes des P-Gliedes, dass es sich hier um ein idealisiertes Element handelt.

3.4.2. Integrator (I-Glied)

Ein weiteres Element ist der Integrator. Hierbei stellt das Ausgangssignal $y(\cdot)$ das Integral des Eingangssignals dar, sammelt also die Fläche zwischen dem Eingangssignal und dem Ursprung

über die Zeit hinweg auf. Formeltechnisch erhalten wir

$$\frac{d}{dt}y(t) = b_0 \cdot u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad y(t) = b_0 \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

$$\hat{y}(s) = \frac{b_0}{s} \cdot \hat{u}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Allgemeine Darstellung: } G(s) := \frac{1}{K_I \cdot s}$$

wobei $K_I = 1/b_0$ die sogenannte Integrierzeitkonstante darstellt. So erreicht das Ausgangssignal nach K_I Zeiteinheiten die Höhe des Eingangssignals. In der Blockschreibweise wird die in Abbildung 3.14 dargestellte Kurzform genutzt.

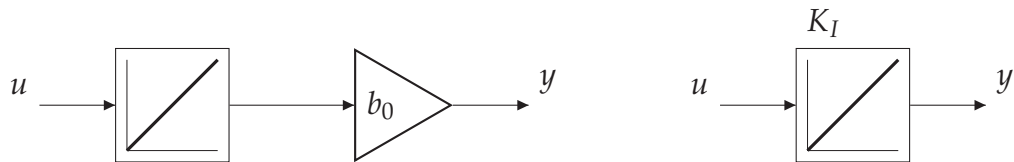


Abbildung 3.14.: Darstellung eines Integrators im Blockschaltbild

Beispiele für einen Integrator bzw. für I-Glieder sind

- der Füllstand einer Anlage mit konstantem Zulauf oder
- die Winkelgeschwindigkeit eines Schwungrades mit gegebenem Drehmoment.

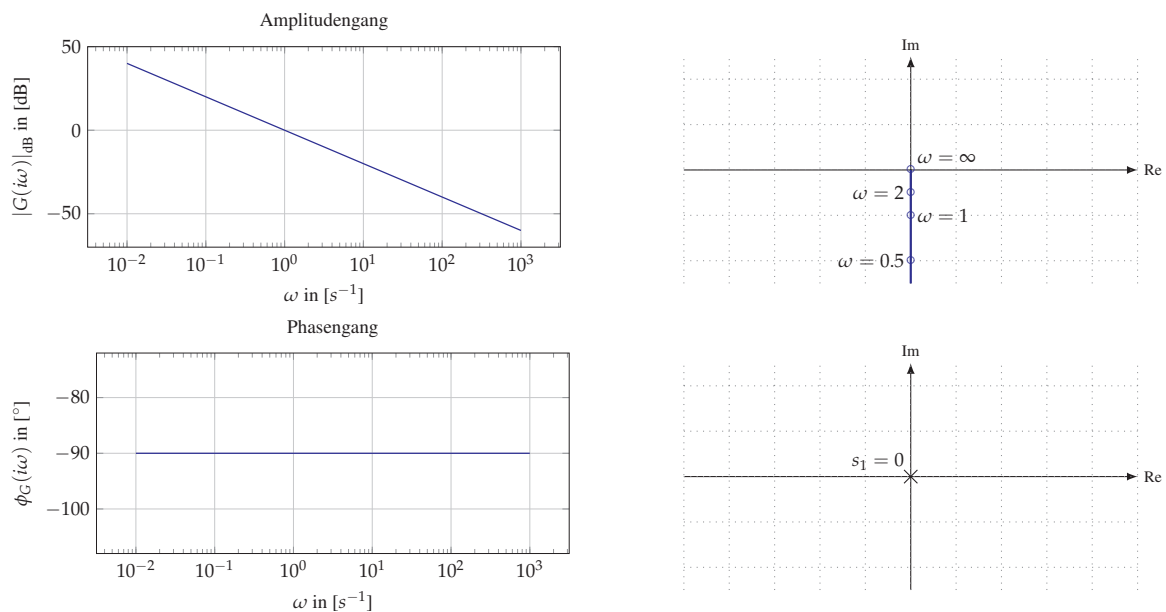


Abbildung 3.15.: Diagramme für Integrator mit $K_I = 1$

Das I-Glied wirkt also wie ein Integrator, der die Trägheit eines Systems ignoriert und ist entsprechend idealisiert.

3.4.3. Differenzierer (D-Glied)

Analog zum Integrator stellt der Differenzierer ein weiteres Element dar. Hierbei ist das Ausgangssignal $y(\cdot)$ die Ableitung des Eingangssignals, ist also durch die Steigung des Eingangssignals bestimmt. Formeltechnisch erhalten wir

$$y(t) = b_0 \cdot \frac{d}{dt}u(t)$$

$$\hat{y}(s) = b_0 \cdot s \cdot \hat{u}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Allgemeine Darstellung: } G(s) := K_D \cdot s$$

wobei $K_D = b_0$ die sogenannte *Differenzierverstärkung* darstellt. Abbildung 3.16 veranschaulicht die Blockschreibweise des D-Gliedes.

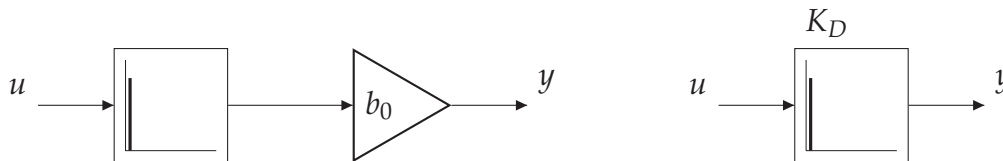


Abbildung 3.16.: Darstellung eines Differenzierers im Blockschaltbild

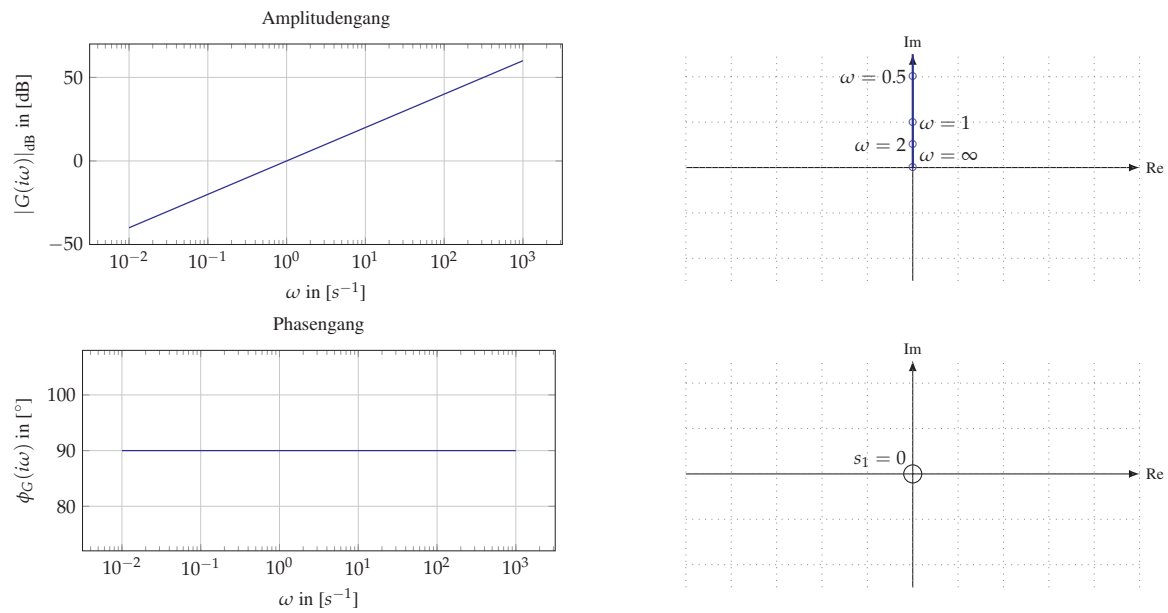
Beispiele für einen Differenzierer bzw. für D-Glieder sind

- Geschwindigkeitssensoren, die abhängig vom Drehwinkel als Eingangssignal eine Spannung proportional zur Winkeländerung (Drehgeschwindigkeit) generieren, oder
- Stoßdämpfer, die eine proportionale Dämpfungskraft relativ zur Geschwindigkeit von Kolben zu Gehäuse aufweisen.

Analog zu dem P- und dem I-Glied stellt auch das D-Glied eine Idealisierung dar. So ist die Ableitung der Sprungfunktion der Dirac-Impuls

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\eta(t) - \eta(t - \tau)}{\tau} = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

der in physikalisch realen Systemen nicht vorkommt.

Abbildung 3.17.: Diagramme für Differenzierer mit $K_D = 1$

3.4.4. Totzeitglied (T-Glied)

Im Gegensatz zum P-Glied, bei dem der Eingang direkt verstärkt im Ausgang sichtbar ist, stellt das *Totzeitglied* eine zeitliche Verzögerung dar, d.h. die Wirkung des Eingangssignals ist weiterhin proportional, ist jedoch nicht direkt sondern zeitlich verzögert am Ausgang zu erkennen. In der Literatur wird das Totzeitglied auch *Laufzeitglied* genannt, wobei auch die Notation T_t -Glied üblich ist. Formal erhalten wir

$$y(t) = \eta(t - K_T) \cdot u(t)$$

$$\hat{y}(s) = \exp(-K_T \cdot s) \cdot \hat{u}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Allgemeine Darstellung: } G(s) := \exp(-K_T \cdot s)$$

wobei $\eta(t - K_T)$ die Heaviside Funktion mit Verzögerung $K_T > 0$ darstellt, d.h. in Abbildung 3.11 wird der Sprungpunkt von 0 auf K_T verschoben. In der Blockschreibweise dargestellt in Abbildung 3.18 wird die Heaviside Funktion verwendet, bei der der zeitliche Verschiebung angegeben ist.

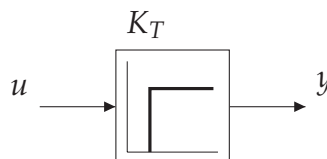


Abbildung 3.18.: Darstellung eines Totzeitgliedes im Blockschaltbild

Beispiele für ein Totzeitglied bzw. für T-Glieder sind

- ein Transportband, bei der an der Einschleuse Pakete aufgeladen werden, die bei der Ausschleusung erfasst werden, oder
- eine Heizung, bei der eine Temperaturänderung erst nach einiger Zeit am Messfühler erfasst wird.

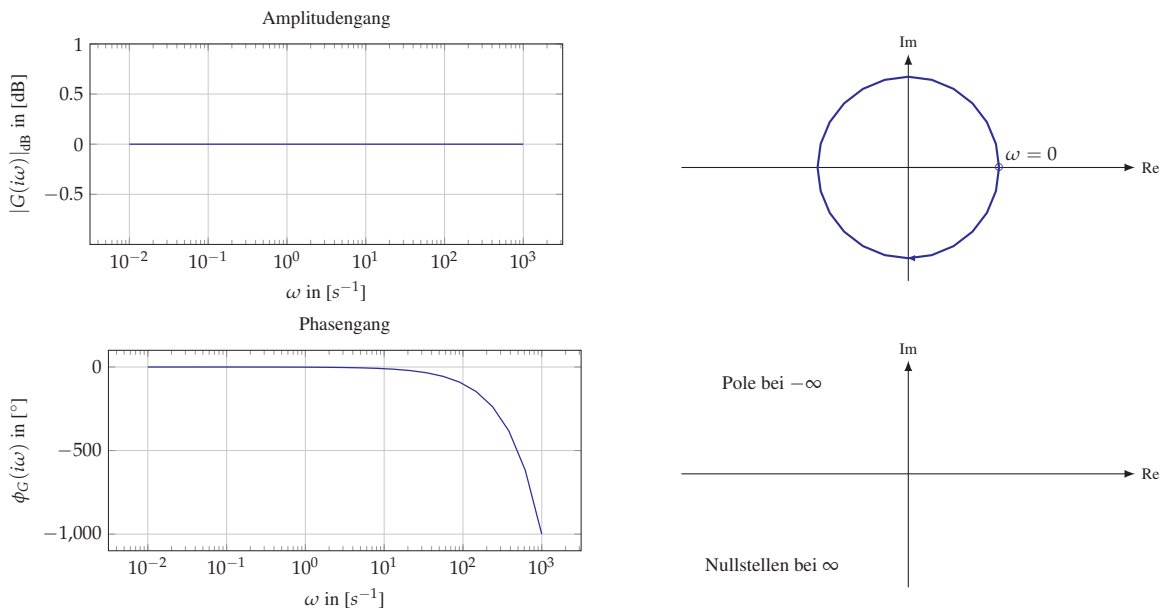


Abbildung 3.19.: Diagramme für Totzeitglied mit $K_T = 1$

3.4.5. Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT₁-Glieder)

Zur Ent-Idealisierung der zuvor genannten P-, I- und D-Glieder kann das sogenannte *Verzögerungsglied 1. Ordnung* eingesetzt werden. Das Ziel ist dabei, das Verhalten von physikalisch realen Systemen nachzuahmen, d.h. insbesondere Rampenverläufe statt Sprünge bei Proportionalfaktor, Trägheit beim Integrator und Beschränktheit bei Differenzierer.

Das PT₁-Glieder stellt dabei einen Kapazitätsverlauf nach, d.h. eine Größe kann nur bis zu einer gewissen Schranke wachsen. Dazu wird ein Integrator auf sich selbst rückgekoppelt wie in Abbildung 3.20 gezeigt. Dies definiert das *Verzögerungsglied 1. Ordnung* bzw. PT₁-Glieder.

Formeltechnisch erhalten wir

$$\frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad T_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = K_P \cdot u(t)$$

$$\hat{y}(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \cdot \hat{u}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Allgemeine Darstellung: } G(s) = \frac{K_P}{T_1 \cdot s + 1}$$

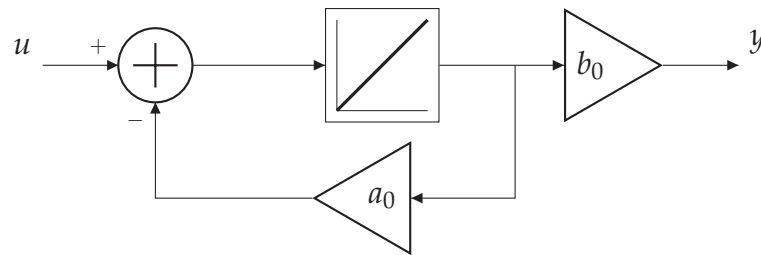


Abbildung 3.20.: Rückkopplung eines Integrators zum Verzögerungsglied 1. Ordnung

wobei $K_P = b_0/a_0$ den Grenzwert des Ausgangssignals angibt und $T_1 = 1/a_0$ die Zeit darstellt, die bei linearer Verlängerung der Anfangssteigung den Schnitt mit dem Grenzwert V angibt. Beachte, dass nach T_1 Zeiteinheiten das Ausgangssignal also NICHT die Höhe des Eingangssignals erreicht, sondern erst für $t \rightarrow \infty$. In der Blockdarstellung wird das Verzögerungsglied 1. Ordnung wie in Abbildung 3.21 dargestellt.

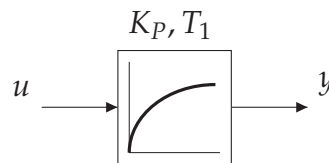


Abbildung 3.21.: Darstellung eines Verzögerungsglieds 1. Ordnung im Blockschaltbild

Beispiele für ein Verzögerungsglied 1. Ordnung sind

- ein hydraulischer Zylinder mit Drossel, bei dem die Drossel eine Strömungsverzögerung erzeugt, oder
- ein Schwungrad mit Dämpfung, bei dem die Trägheit das System verzögert und die Dämpfung es zur Ruhe bringt.

3.4.6. Komplexere Glieder

Aufbauend auf den P-, I-, D-, T- und PT_1 -Gliedern können wir nun weitere Kombinationen entwerfen. Das PT_1 -Glieder können wir insbesondere nutzen, um physikalisch reale Systeme auch im Integrations- und Differentiationsverhalten besser nachzubilden. So erhalten wir das sogenannte *IT₁-Glieder* durch die Reihenschaltung eines Integrators und eines PT_1 -Glieds, vergleiche Abbildung 3.23.

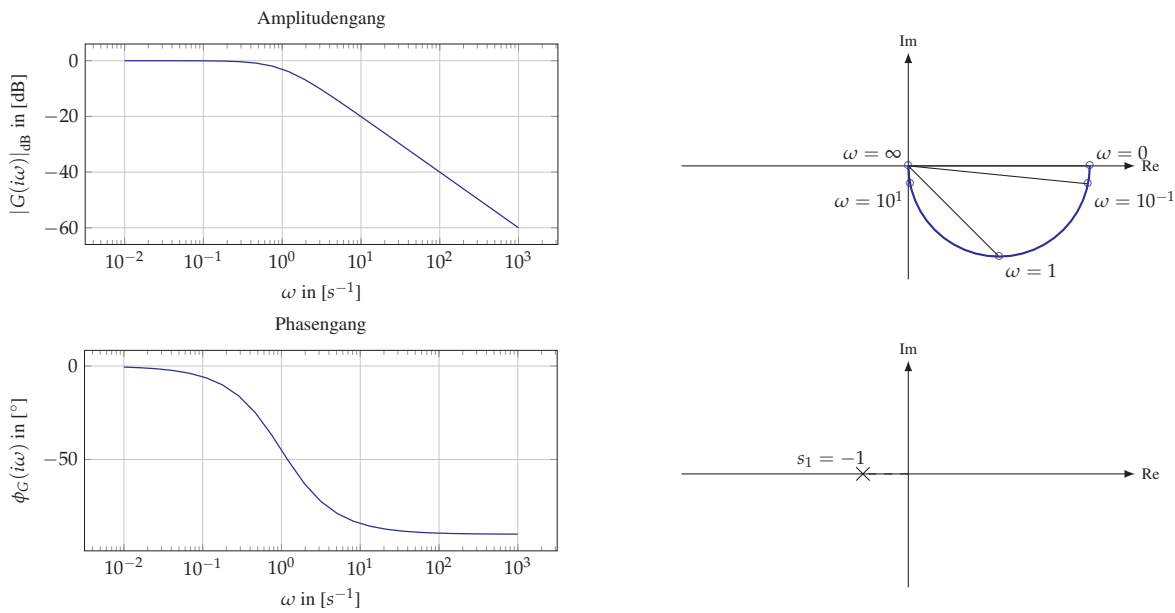


Abbildung 3.22.: Diagramme für Verzögerungsglied 1. Ordnung mit $K_P = T_1 = 1$

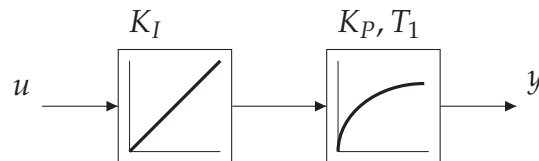


Abbildung 3.23.: Darstellung eines IT_1 -Glieds im Blockschaltbild

Die zugehörige Übertragungsfunktion ergibt sich aus der Multiplikation der beiden Übertragungsfunktionen zu

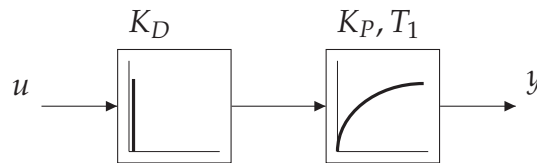
$$G(s) = \frac{1}{K_I \cdot s} \cdot \frac{K_P}{T_1 \cdot s + 1} = \frac{1}{K_I \cdot s (T_1 \cdot s + 1)}.$$

Analog ergibt sich das DT_1 -Glieder als Reihenschaltung eines Differenzierers und eines PT_1 -Gliedes, vergleiche Abbildung 3.24 zur Übertragungsfunktion

$$G(s) = K_D \cdot s \cdot \frac{K_P}{T_1 \cdot s + 1} = \frac{K_D \cdot s}{T_1 \cdot s + 1}.$$

3.5. Frequenzganganalyse

Ausgehend von der Zerlegung von Übertragungsfunktionen in Elemente wollen wir uns nun das Übertragungsverhalten eines bekannten oder eben auch unbekannten Systems ansehen und dieses

Abbildung 3.24.: Darstellung eines DT_1 -Glieds im Blockschaltbild

auf Kenngrößen reduzieren. Eine der Kenngrößen ist die Grenzfrequenz, die wir bereits beim PT_1 -Glied kennengelernt haben. Analog zu dieser Charakterisierung der Übertragungsleistung in bestimmten Frequenzbereichen, wollen wir dies noch für weitere Eigenschaften tun.

Hierzu gehen wir zunächst auf graphische Eigenschaften ein, die wir am Bode Diagramm festmachen können. Anschließend werden wir uns mit strukturellen Eigenschaften auseinandersetzen.

3.5.1. Knickfrequenz

Beim PT_1 -Glied haben wir bereits gesehen, dass die Amplitude ab einer gewissen Frequenz $i\omega$ in der Dezibel Darstellung linear fällt. Der technisch interessante Wertebereich für die Amplitude lässt sich wie in Tabelle 3.6 in Dekadenschreibweise darstellen.

Tabelle 3.6.: Wertebereiche im Amplitudengang

$ G(i\omega) $	$ G(i\omega) _{\text{dB}}$
100	40
10	20
1	0
0.1	-20
0.01	-40

Beim PT_1 -Glied

$$G(s) = \frac{K_P}{T_1 \cdot s + 1}$$

können wir folgende Beobachtung machen:

- Bis zu einer gewissen Frequenz ist die Phase ungefähr gleich 0° und die Amplitude nahezu konstant bei K_P .

- Ab einer gewissen Frequenz ist die Phase ungefähr gleich -90° , wohingegen die Amplitude in diesem Bereich einen linearen Abfall von -20dB/Dekade aufweist, d.h. pro 10er Potenz der Frequenz linear abfällt.

Da beide Bereiche durch lineare Funktionen approximiert werden können und nicht parallel sind, weisen sie einen Schnittpunkt auf. Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir als *Knickfrequenz*.

Definition 3.37 (Knickfrequenz).

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Wenn $|G(i\omega)|_{\text{dB}}$ in zwei aufeinander folgenden Frequenzbereichen lineares Verhalten zeigt, so wird der Schnittpunkt der linearen Geraden Knickfrequenz ω_k genannt.

Abbildung 3.25 veranschaulicht die Knickfrequenz für das PT_1 -Glied.

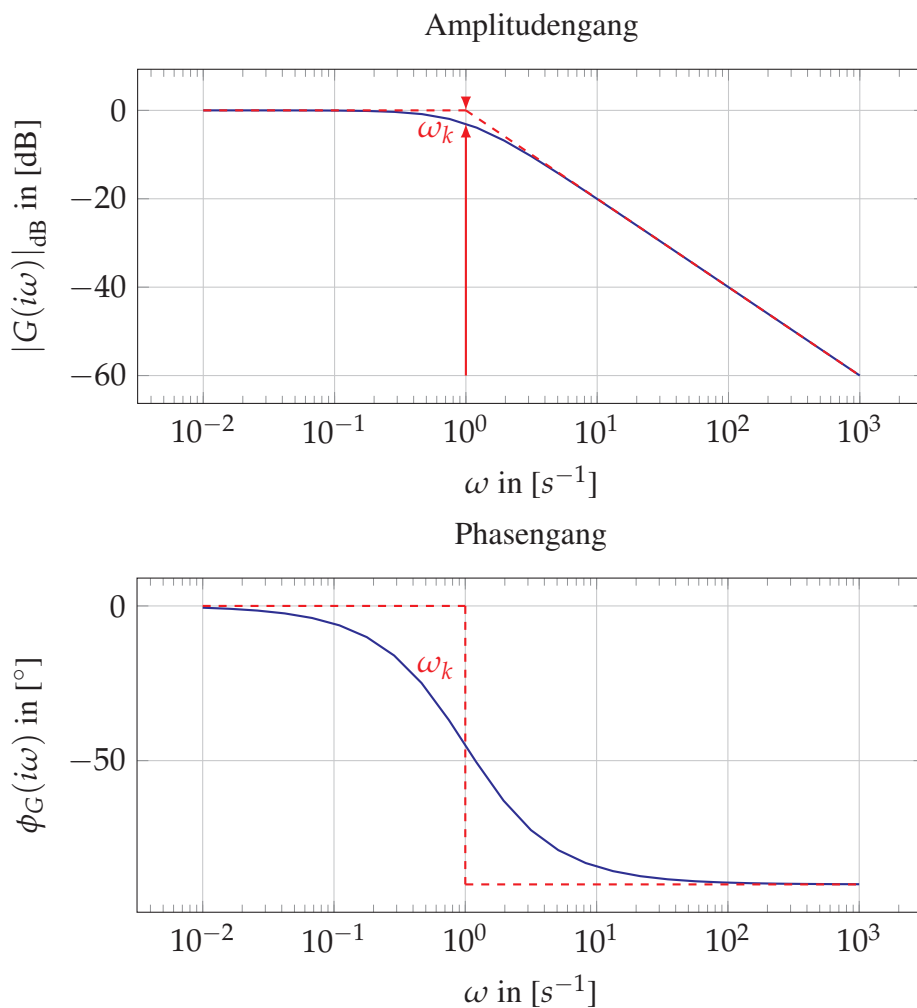


Abbildung 3.25.: Knickfrequenz im Bode Diagramm des PT_1 -Glieds in [dB]

Bemerkung 3.38

Im Beispiel des PT_1 -Gliedes fallen Knickfrequenz ω_k und Grenzfrequenz ω_g zusammen. Dies ist bei komplexeren Beispielen nicht zwingend der Fall. Stattdessen ist die Knickfrequenz eine graphische Vereinfachung, während die Grenzfrequenz den -3dB Abfall beschreibt.

Beachte, dass der Abstieg mit -20dB/Dekade allgemein gilt:

Korollar 3.39 (Nickfrequenz und Abstieg)

Jedes PT_1 -Glieð weist eine Nickfrequenz $\omega_k = 1/T_1$ und einen Abfall von -20dB/Dekade auf.

Beweis. Ein PT_1 ist gegeben durch

$$G(s) = \frac{K_P}{T_1 \cdot s + 1}$$

mit Amplitude

$$|G(i\omega)| = \frac{K_P}{\sqrt{(T_1 \cdot \omega)^2 + 1}}.$$

Daher gilt für kleine $\omega \ll \omega_k$

$$|G(i\omega)| \approx |G(0)| = K_P$$

und für große $\omega \gg \omega_k$

$$|G(i\omega)| \approx \frac{K_P}{T_1 \cdot \omega} \propto \frac{1}{\omega}.$$

Die Nickfrequenz ω_k erhalten wir aus dem Schnittpunkt

$$|G(0)| = \frac{K_P}{T_1 \cdot \omega} \iff K_P = \frac{K_P}{T_1 \cdot \omega} \iff \omega = \frac{1}{T_1}.$$

Wegen $|1/\omega|_{\text{dB}} = -20 \cdot \log_{10}(\omega)$ ergibt sich der Abstieg von -20dB/Dekade . □

Bemerkung 3.40

Es können durchaus mehrere Nickfrequenzen existieren. Hierzu können wir beispielhaft zwei PT_1 -Glieder in Reihe schalten und erhalten daraus eine zweite Nickfrequenz mit Folgeabstieg -40dB/Dekade , die sich aus der Multiplikation der Blöcke ergibt. Dieses Glied wird auch PT_2 genannt.

Die Knickfrequenz kann auch genutzt werden, um Parameter in Übertragungsfunktionen graphisch zu bestimmen. Hierzu können wir beim PT_1 -Glied wie folgt vorgehen:

1. Für niedrige Frequenzen approximieren wir den Amplitudengang durch eine konstante Gerade. Der Schnittpunkt dieser Gerade mit $i\omega = 0$ ergibt $G(0) = K_P$.
2. Für hohe Frequenzen bestimmen wir eine lineare Funktion mit Steigung -20dB/Dekade . Der resultierende Schnittpunkt mit der konstanten Gerade ergibt die Knickfrequenz $\omega_k = 1/T_1$. Somit erhalten wir $T_1 = 1/\omega_k$.

Analog existiert beim D-Glied einen Winkel von -90° mit linearem Abfall von -20dB/Dekade und beim I-Glied ein Winkel von 90° mit linearem Anstieg um 20dB/Dekade . Hier gilt folgender Zusammenhang:

Korollar 3.41 (Parameter von I- und D-Glied)

Für jedes I- und D-Glied bei gegebenem $A_{dB} := |G(i\omega)|$ mit frei gewähltem $\omega > 0$ gilt

$$K_I = \omega \cdot 10^{A_{dB}/20} \quad \text{bzw.} \quad K_D = \frac{10^{A_{dB}/20}}{\omega}. \quad (3.33)$$

Beweis. Folgt direkt aus den Beträgen $|G(i\omega)| = K_I/\omega$ bzw. $|G(i\omega)| = K_D \cdot \omega$. $\square$

Dies gibt uns also eine graphische Möglichkeit, die Parameter der Übertragungselemente zu bestimmen. Dies können wir wie folgt allgemeiner halten:

Algorithmus 3.42 (Knickfrequenz)

Gegeben sei das Bode Diagramm einer Übertragungsfunktion.

1. Identifiziere Frequenzbereiche, in denen die Übertragungsfunktion durch lineare Funktionen mit Steigung $j \cdot (-20)\text{dB/Dekade}$ mit $j \in \mathbb{Z}$ approximiert werden kann.
2. Bestimme Schnittpunkte zwischen den Geraden unterschiedlicher Steigung in aufeinander folgenden Frequenzbereichen als Knickfrequenz ω_k .

Umgekehrt können Knickfrequenzen dazu genutzt werden, um graphisch eine Approximation des Bode Diagramms zu erstellen. Hierzu gehen wir wie folgt vor:

Algorithmus 3.43 (Graphische Approximation des Amplitudengangs)

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Stelle Übertragungsfunktion in Pol-Nullstellenform oder Zeitkonstantenform dar.
2. Zerlege in Übertragungselemente.
3. Stelle Amplitude jedes Elements im Amplitudengang dar.
4. Addiere alle Amplituden.

Hierzu betrachten wir die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10 \cdot s}{0.1 \cdot s + 1},$$

welche das P-Glied $G_1(s) = 10$, das D-Glied $G_2(s) = s$ und das PT₁-Glied $G_3(s) = 1/(0.1 \cdot s + 1)$ enthält. Die Übertragungsfunktion stellt somit ein PDT₁-Glied dar. Ausgehend von den Übertragungselementen erhalten wir die in Tabelle 3.7 dargestellten Zusammenhänge.

Tabelle 3.7.: Einzelkomponenten des Amplitudengangs

Glied	Betrag in dB	Knickfrequenzen	Steigung nach Knick
P-Glied	$20 \log_{10}(10) = 20$	-	0dB/Dekade
D-Glied	$20 \log_{10}(\omega)$	-	20dB/Dekade
PT ₁ -Glied	0dB → Knick → $-20 \log_{10}(\omega)$	$\omega_k = 1/0.1 = 10$	-20dB/Dekade

Hieraus ergibt sich die Skizze in Abbildung 3.26, worin die Übertragungselemente in rot und die kombinierte Übertragungsfunktion in blau dargestellt sind.

3.5.2. Amplitudenreserve

Wenn wir ein System im Zusammenhang mit einer Regelung betrachten wollen (vergleiche Abbildung 3.27), so ist für uns die Wirkbeziehung zwischen beiden Komponenten im Gesamtzusammenhang interessant.

Die Amplitudenreserve gibt hierbei an, um wieviel die Verstärkung eines Regelung noch zunehmen darf, bevor das Gesamtsystem instabil wird. Instabilität im Bode Diagramm lässt sich an der Amplitude ablesen.

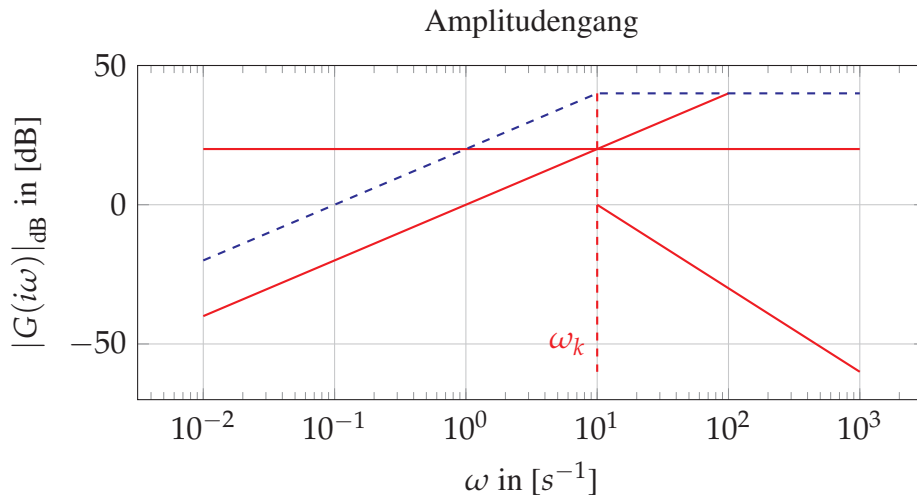
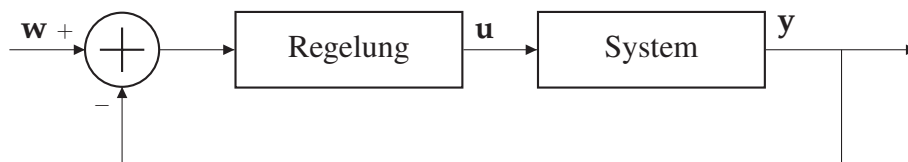
Abbildung 3.26.: Skizze des Amplitudengangs des PDT_1 aus Tabelle 3.7

Abbildung 3.27.: Schaltbild einer Regelung

Korollar 3.44 (Stabilität im Amplitudengang)

Gilt für eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\phi_G(i\omega) \in] -180^\circ, 0^\circ] \quad (3.34)$$

und gleichzeitig

$$|G(i\omega)| < 1 \quad \text{bzw.} \quad (3.35)$$

$$|G(i\omega)|_{dB} < 0 \quad (3.36)$$

für alle Frequenzen $i\omega$, so ist die Lösung im Zeitbereich stabil und konvergiert gegen 0.

Beweis. Da $\phi_G(i\omega) \in] -180^\circ, 0^\circ]$ wirkt das Signal in der Rückkopplung negativ auf das Referenzsignal. Da $|G(i\omega)| < 1$, zeigt die Lösung im Zeitbereich exponentiellen Abfall gegen 0, vgl. Tabelle 3.2 zur Laplace Transformation. Da der Exponentialanteil stärker wirkt als mögliche positive polynomiale Anteile, bleibt die Lösung beschränkt und das System damit stabil. $\square$

Beachte, dass eine Phase $\phi_G(i\omega) < -180^\circ$ bedeutet, dass sich das Vorzeichen des Signals um-

dreht und damit additiv auf das Referenzsignal wirkt.

Am Bode Diagramm können wir die Amplitudenreserve damit direkt an der Phase ablesen, indem wir folgende Schritte durchlaufen:

Algorithmus 3.45 (Graphische Bestimmung Amplitudenreserve)

Gegeben sei ein Bode Diagramm einer Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Ziehe horizontale Linie im Phasengang bei -180° .
2. Bei Schnittpunkten mit der Phase $\phi_G(i\omega) = -180^\circ$ ziehe vertikale Linie von Phasengang zu Amplitudengang.
3. Bei Schnittpunkt mit Betrag $|G(i\omega)|$ bzw. $|G(i\omega)|_{\text{dB}}$ ziehe horizontale Linie im Amplitudengang.
4. Die Differenz $\Delta_A := 1 - |G(i\omega)|$ bzw. $\Delta_A := 0 - |G(i\omega)|_{\text{dB}}$ stellt die Amplitudenreserve dar.

Abbildung 3.28 veranschaulicht das Vorgehen dazu für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.4}{(s+1)^4} \implies |G(i\omega)| = \frac{0.4}{(1+\omega^2)^2}, \quad \phi_G(i\omega) = -4 \arctan(\omega).$$

Neben dem graphischen Vorgehen hätten wir dies auch berechnen können.

Algorithmus 3.46 (Berechnung Amplitudenreserve)

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Berechne ω^* , so dass $\phi_G(i\omega) = -180^\circ$.
2. Bestimme $\Delta_A = -|G(i\omega^*)|_{\text{dB}}$.

Für unser Beispiel aus Abbildung 3.28 ergibt sich im Phasengang

$$\phi_G(i\omega) = -4 \arctan(\omega) = -180^\circ \iff \omega = \tan\left(\frac{180^\circ}{4}\right) = 1$$

und erhalten damit im Amplitudengang

$$|G(i\omega)|_{\text{dB}} = \left(\frac{0.4}{(1+\omega^2)^2} \right)_{\text{dB}} \stackrel{\omega=1}{=} \left(\frac{0.4}{(1+1^2)^2} \right)_{\text{dB}} = \left(\frac{0.4}{4} \right)_{\text{dB}} = (0.1)_{\text{dB}} = -20.$$

Somit ergibt sich eine Amplitudenreserve von $\Delta_A = 20\text{dB}$.

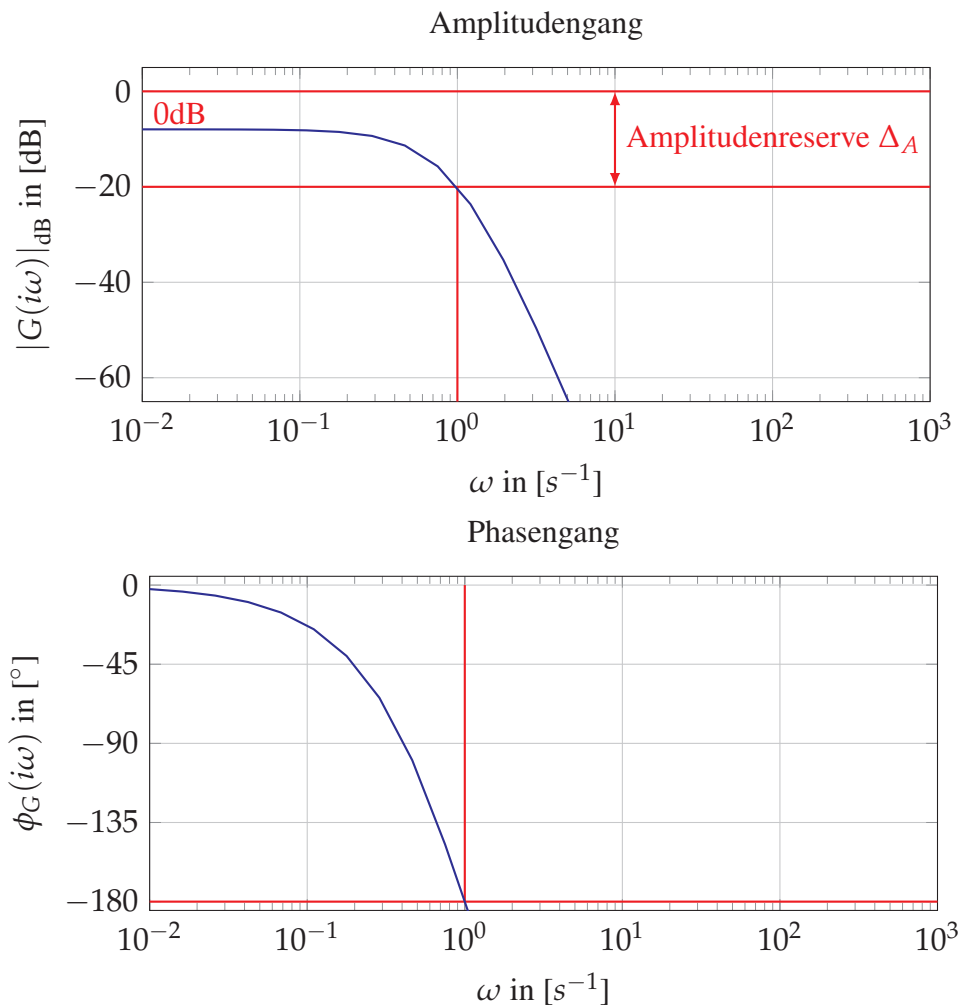


Abbildung 3.28.: Amplitudenreserve im Bode Diagramm in [dB]

3.5.3. Phasenreserve

Umgekehrt zur Amplitudenreserve gibt die Phasenreserve an, wieviel die Phasenverzögerung bis zur Instabilität des Gesamtsystems zunehmen kann. Hier nutzen wir daher die invertierte Reihenfolge:

Algorithmus 3.47 (Graphische Bestimmung Phasenreserve)

Gegeben sei ein Bode Diagramm einer Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Ziehe horizontale Linie im Amplitudengang bei 0dB.
2. Bei Schnittpunkten mit der Amplitude $|G(i\omega)|_{\text{dB}} = 0$ ziehe vertikale Linie von Amplitudengang zu Phasengang.
3. Bei Schnittpunkt mit Phase $\phi_{G(i\omega)}$ ziehe horizontale Linie im Phasengang.

4. Die Differenz $\Delta_P := 180^\circ - \phi_G(i\omega)$ stellt die Amplitudenreserve dar.

Abbildung 3.29 veranschaulicht das Vorgehen für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{s \cdot (s + 1)}$$

mit Amplitude und Phase

$$|G(i\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \phi_G(i\omega) = -90^\circ - \arctan(\omega),$$

das die Reihenschaltung eines I- und eines PT₁, also ein IT₁-Glied darstellt.

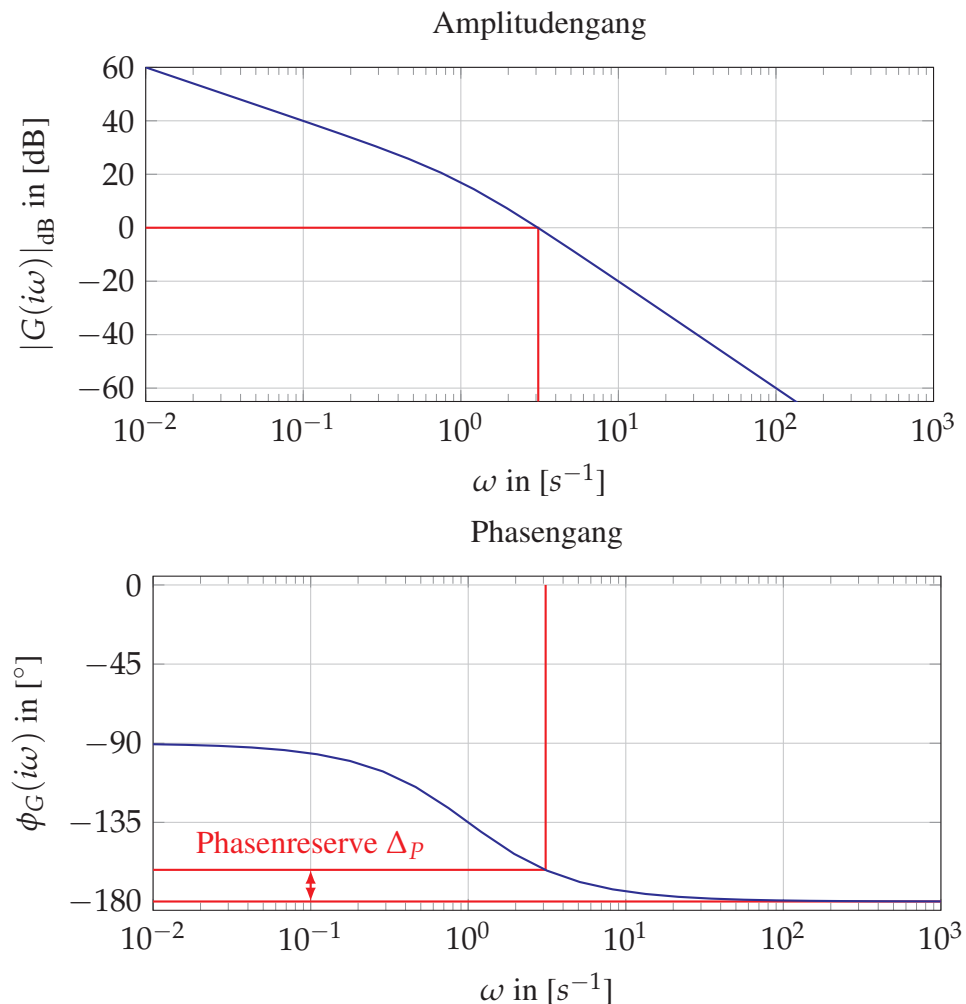


Abbildung 3.29.: Phasenreserve im Bode Diagramm in [dB]

Analog zur Amplitudenreserve hätten wir auch hier eine Rechnung durchführen können:

Algorithmus 3.48 (Berechnung Phasenreserve)

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Berechne ω^* , so dass $|G(i\omega^*)|_{\text{dB}} = 0$.
2. Bestimme $\Delta_P = \phi_G(i\omega) + 180^\circ$.

Für unser IT₁ Beispiel erhalten wir

$$|G(i\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = 1 \iff 10 = \omega\sqrt{1+\omega^2} \iff \omega^2(1+\omega^2) = 100$$

und erhalten für $\omega^4 + \omega^2 = 100$ approximativ $\omega \approx 3.1$. Somit ergibt sich

$$\phi_G(i\omega) = -90^\circ - \arctan(\omega) \stackrel{\omega \approx 3.1}{\approx} -90^\circ - \arctan(3.1) \approx -162.1^\circ.$$

Somit beläuft sich die Phasenreserve auf $\Delta_P = 17.9^\circ$.

Mit den Übertragungselementen aus Kapitel 3.4 haben wir eine Basis geschaffen, um allgemeine Übertragungsfunktionen systematisch zu klassifizieren und deren Eigenschaften graphisch mit den Methoden aus Kapitel 3.3 darstellen zu können. In der Analyse in Kapitel 3.5 haben wir zudem erste Schritte hin zur Stabilität des Gesamregelkreises getan, welche wir nun vertieft angehen werden. Tabelle 3.8 fasst Ziele und Eigenschaften aus diesem Kapitel noch einmal zusammen.

Tabelle 3.8.: Ziele und Eigenschaften der Themenblöcke im Frequenzbereich

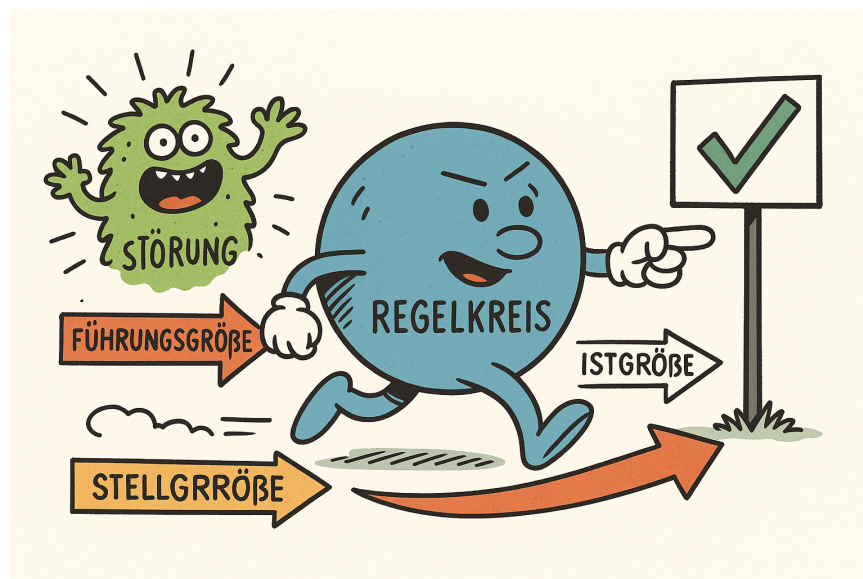
Themenbereich	Ziele	Eigenschaften
Übertragungsfunktion	Transformation in Frequenzbereich	Vereinfachte Rechnung im Blockschaltbild
Realisierbarkeit	Physikalische Umsetzbarkeit von Übertragungsfunktionen	Charakterisierung in Polynomdarstellung
Darstellungsformen	Graphische Darstellung	Übertragungsverhalten in Amplitude/Phase
wird auf der nächsten Seite fortgesetzt		

Tabelle 3.8 – fortgesetzt von der vorherigen Seite

Themenbereich	Ziele	Eigenschaften
		Stabilität in Ortskurve und durch Pole/Nullstellen
Klassifikation	Herunterbrechen auf Übertragungselementen	Nutzung elementarer Eigenschaften
Frequenzganganalyse	Interpretation von Übertragungsverhalten	Einfache Darstellung von Gesamtsystemen

KAPITEL 4

REGELKREISE



Generiert mit chatgpt.com

Engineering problems are under-defined; there are many solutions, good, bad, and indifferent. The art is to arrive at a good solution.

Richard James

Nachdem wir uns im vorangegangenen Kapitel 3 mit den Übertragungselementen und deren Eigenschaften auseinandergesetzt haben, werden wir uns nun diese Komponenten in einem Regelkreis zusammensetzen. Das Ziel eines Regelkreises ist die Modifikation des Verhaltens eines zugrundeliegenden Systems im Hinblick auf bestimmte Eigenschaften. Zentrale Eigenschaft ist

die Stabilität, die wir im folgenden Kapitel detailliert analysieren werden. Hinzu kommt aber auch

- das *Führungsverhalten*,
- das *Störverhalten* und
- die *Robustheit*.

Diese Größen sind essentiell, da wir nicht wissen, in welchem Kontext ein Regler bzw. ein Regelkreis eingesetzt wird, und da er stets zuverlässig arbeiten soll. Um möglich Effekte zu erkennen, werden wir die allgemeine Form eines Regelkreises aus Abbildung 4.1 nutzen, welche auch die Möglichkeit von Störungen berücksichtigt.

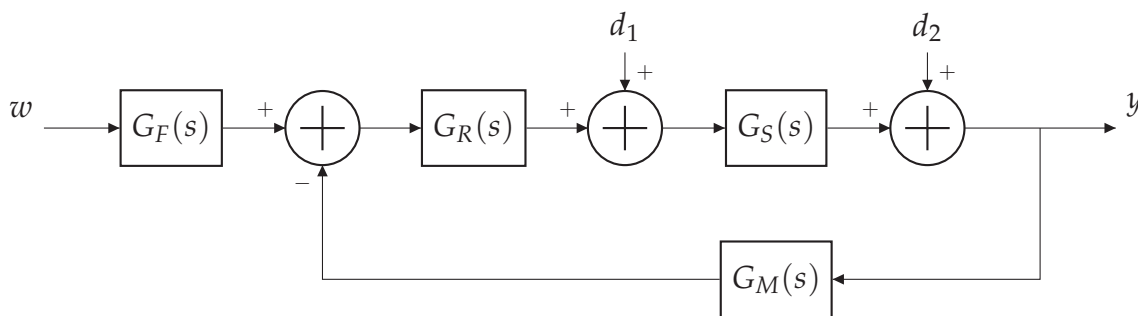


Abbildung 4.1.: Blockschaltbild geschlossener Kreis mit Störungen

In Abbildung 4.1 bezeichnet

- $G_S(s)$ die Übertragungsfunktion des Systems,
- $G_R(s)$ die Übertragungsfunktion des Reglers,
- $G_F(s)$ die Übertragungsfunktion der Führung, und
- $G_M(s)$ die Übertragungsfunktion der Rückkopplung.

Die Störungen betreffen mit d_1 das Stellglied und über d_2 das Messglied. Weitere additive Störungen sind nicht möglich bzw. können mit diesen beiden Störungen abgebildet werden. Multiplikative Störungen wären bereits bei der Modellierung aufgefallen und sind somit bereits in den Übertragungsfunktionen enthalten.

Durch den Zusammenschluss von Übertragungselementen in einem Kreis bzw. durch die Störungen kann es zu weiterem dynamischen Verhalten des Systems kommen. In diesem Kapitel werden wir für die Zusammensetzung der einzelnen Blöcke in Abbildung 4.1 nutzen und als Ganzen interpretieren.

Graphisch nutzt man zur Bewertung eines Regelkreises die Kenngrößen

- *Ausregelzeit,*
- *Überschwingweite und*
- *Regelfläche.*

Nachfolgend werden wir ein Beispiel zur Veranschaulichung der einzelnen Effekte und Eigenschaften heranziehen.

Aufgabe 4.1 (Viertelfahrzeug)

Das Viertelfahrzeug aus Abbildung 4.2 kann modelliert werden als PT_2 -Glieder

$$G(s) = \frac{K_P}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} = \frac{1}{(0.4s + 1) \cdot (0.1s + 1)}$$

mit $K_P = 1$, $T_1 = 0.4$ und $T_2 = 0.1$ betrachten, welches die Wirkkette der Anregung einer Straße auf Fahrzeug. Diese erfolgt über den Reifens auf das Federbein zum Chassis und stellt damit eine doppelte Feder-Dämpferkette dar. Stelle das System im Bode Diagramm dar.

Lösung zu Aufgabe 4.1: Da im Bode Diagramm in Abbildung 4.2 kein Schnittpunkt mit $\phi_G(i\omega) = -180^\circ$ existiert und $|G(i\omega)|_{dB} < 0$ gilt, zeigt das System stabiles Verhalten über den gesamten Frequenzbereich hinweg.

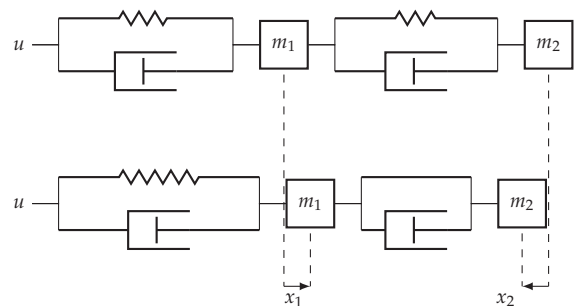


Abbildung 4.2.: Wirkkette auf Chassis in Vertikaldynamik als PT_2 -System

Beachte, dass wir sowohl die Steuerung als auch die Regelung über die Darstellung in Abbildung 4.1 betrachten können. Der Steuerungsfall ergibt sich durch die Nullsetzung der Übertragungsfunktion $G_M(s)$, wodurch der Kreis aufgetrennt wird.

Zuerst werden wir uns mit dem Verhalten von Systemen beschäftigen und führen zur Klarstellung einige Definitionen ein.

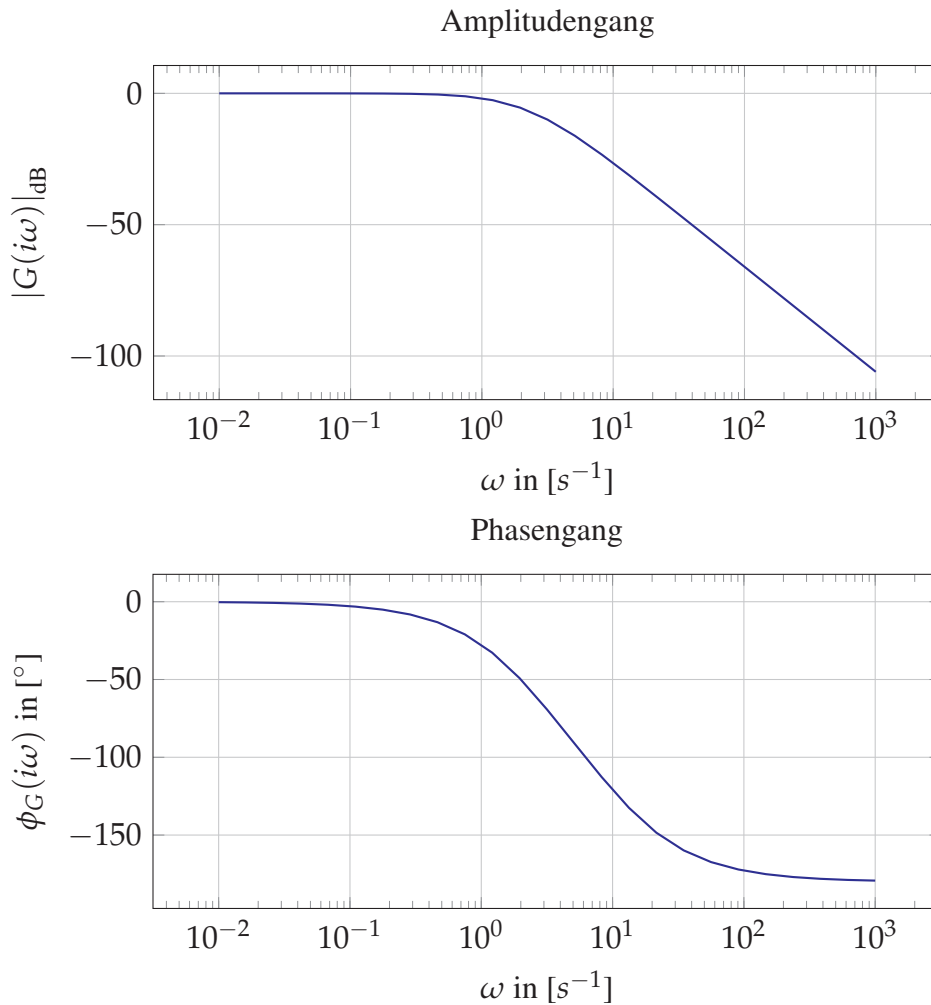


Abbildung 4.3.: Bode Diagramm für das Viertelfahrzeug

4.1. Dynamisches Verhalten

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises können wir mittels der Blockschaltrechnung bestimmen. Die angesprochenen Punkte Führungsverhalten, Störverhalten und Robustheit können wir über die Störungen genauer betrachten und uns entsprechende Effekte anhand des Beispiels aus Aufgabe 4.1 genauer ansehen.

4.1.1. Führungsverhalten

Im Führungsverhalten gehen wir vom Idealfall aus, d.h. die Störungen erfüllen $\hat{d}_1 = \hat{d}_2 \equiv 0$. Aus dem Blockschaltbild 4.1 erhalten wir den Zusammenhang

$$\hat{y}(s) = G_F(s) \cdot G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot \hat{w}(s) - G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s) \cdot \hat{y}(s).$$

Die Darstellung des Ausgangssignals $\hat{y}(s)$ auf der linken Seite hängt vom Referenzsignal $\hat{w}(s)$ und dem Ausgangssignal $\hat{y}(s)$ selbst ab. Lösen wir nach dem Ausgangssignal auf

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s) \cdot \hat{y}(s) &= G_F(s) \cdot G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot \hat{w}(s) \\ (1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)) \hat{y}(s) &= G_F(s) \cdot G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot \hat{w}(s) \\ \hat{y}(s) &= G_F(s) \cdot \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s))} \cdot \hat{w}(s)\end{aligned}$$

so erhalten wir die sogenannte *Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises*.

Definition 4.2 (Übertragungsfunktion geschlossener Kreis).

Für einen allgemeinen Regelkreis nach Abbildung 4.1 mit Störungen $\hat{d}_1 = \hat{d}_2 \equiv 0$ nennen wir

$$G_g(s) := G_F(s) \cdot \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s))} \quad (4.1)$$

Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises.

Bemerkung 4.3

Beachte, dass die Glieder außerhalb des geschlossenen Kreises nur im Zähler auftreten.

Die Pole der Übertragungsfunktion $G_g(s)$ werden durch die Nullstellen von $1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)$ bestimmt. Der zweite Summand in diesem Term stellt die Übertragung des aufgeschnittenen Kreises dar, vergleiche Abbildung 4.4.

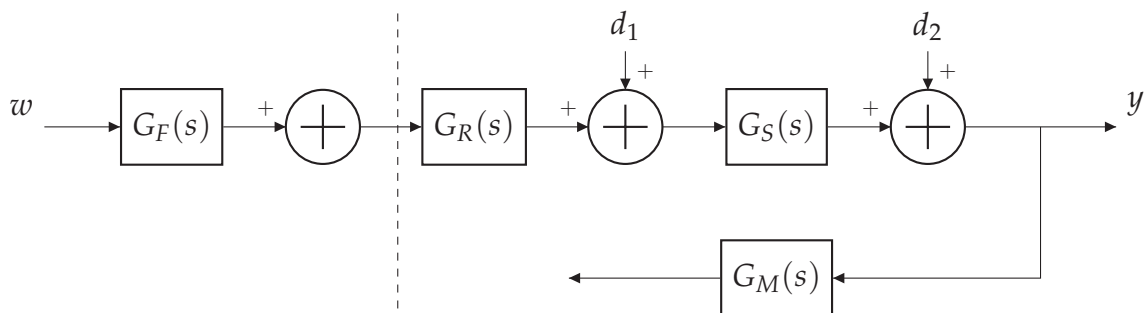


Abbildung 4.4.: Blockschaltbild Kreisübertragungsfunktion Kreis mit Störungen

Zur Klarstellung welche Pole und Nullstellen gemeint sind, unterscheiden wir zwischen der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises und der sogenannten *Kreisübertragungsfunktion*.

Definition 4.4 (Kreisübertragungsfunktion).

Für eine Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

$$G_g(s) := G_F(s) \cdot \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s))}$$

nennen wir

$$G_k(s) := G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s) \quad (4.2)$$

Kreisübertragungsfunktion.

Wenn wir dies auf unser Viertelfahrzeug-Beispiel anwenden, so können wir genauer betrachten, wie dieses System nun auf einen Regler reagiert.

Aufgabe 4.5 (Viertelfahrzeug mit P-Regler)

Betrachte das Viertelfahrzeug aus Aufgabe 4.1. Setze dieses PT_2 -System als Übertragungsfunktion des Systems $G_S(s)$ ein und nutze ein P-Glied für die Übertragungsfunktion des Regler $G_R(s)$ mit $K_P = 5$ zur Anpassung der Feder-Dämpfer-Eigenschaften etwa durch einen schaltbaren Dämpfer oder eine aktive Federung, siehe Blockdiagramm aus Abbildung 4.5. Bestimme die Sprungantworten des PT_2 -Systems und der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises.

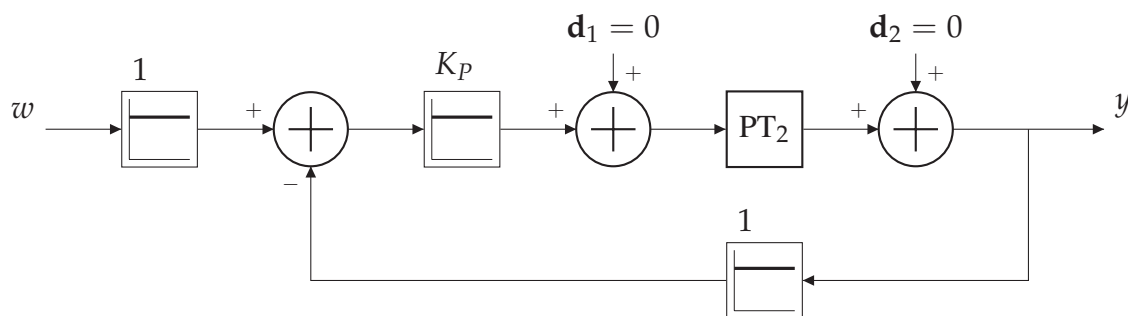


Abbildung 4.5.: Blockschaltbild PT_2 mit P-Regler

Lösung zu Aufgabe 4.4: Wir erhalten die Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(0.4s + 1) \cdot (0.1s + 1)} \quad \text{und}$$

$$G_g(s) = \frac{K_P \cdot G(s)}{1 + K_P \cdot G(s)} = \frac{5}{(0.4s + 1) \cdot (0.1s + 1) + 5}$$

bzw. die Sprungantwort mittels $\hat{w}(s) = \mathcal{L}(\eta(t)) = 1/s$

$$\hat{y}(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s \cdot (0.4s + 1) \cdot (0.1s + 1)} \quad \text{und}$$

$$\hat{y}_g(s) = G_g(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{5}{s \cdot (0.4s + 1) \cdot (0.1s + 1) + 5 \cdot s}.$$

Um dies in den Zeitbereich zu transformieren, zerlegen wir das System in Standardform

$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{0.4s + 1} + \frac{C}{0.1s + 1} = \frac{A}{s} + \frac{2.5 \cdot B}{s + 2.5} + \frac{10 \cdot C}{s + 10}.$$

Nun können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen über

$$\frac{1}{s \cdot (0.4s + 1) \cdot (0.1s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{0.4s + 1} + \frac{C}{0.1s + 1}$$

und erhalten

$$A \cdot (0.4s + 1) \cdot (0.1s + 1) + B \cdot s \cdot (0.1s + 1) + C \cdot s \cdot (0.4s + 1) = 1$$

Sortieren wir nach den Potenzen von s , so ergibt sich

$$s^2 \cdot (0.04 \cdot A + 0.1 \cdot B + 0.4 \cdot C) + s \cdot (0.5 \cdot A + B + C) + A = 1.$$

Nun erhalten wir für $s = 0$ zunächst $A = 1$. Zudem erhalten wir für die beiden Alternativterme

$$\begin{aligned} 0.04 \cdot A + 0.1 \cdot B + 0.4 \cdot C &= 0 &\implies B &= -4 \cdot C - 0.4 \\ 0.5 \cdot A + B + C &= 0 &\implies C &= -B - 0.5. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$B = -4 \cdot (-B - 0.5) - 0.4 = 4 \cdot B + 2 - 0.4 \iff -3 \cdot B = 1.6 \iff B = -\frac{8}{15}$$

$$C = -B - 0.5 = \frac{8}{15} - 0.5 = \frac{1}{30}.$$

Folglich erhalten wir die Standardform

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s} + \frac{2.5 \cdot \left(-\frac{8}{15}\right)}{s + 2.5} + \frac{10 \cdot \frac{1}{30}}{s + 10} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{4}{3}}{s + 2.5} + \frac{\frac{1}{3}}{s + 10}$$

Über die Inverse Laplace Transformation mit $\mathcal{L}^{-1}(1/s) = 1$ und $\mathcal{L}^{-1}(1/(s+a)) = \exp(-at)$ erhalten wir für das System somit die Sprungantwort

$$y(t) = 1 - \frac{4}{3} \exp(-2.5t) + \frac{1}{3} \exp(-10t).$$

Für den geschlossenen Kreis erhalten wir aus der charakteristischen Funktion des Nenners

$$0 = s \cdot (0.4s + 1) \cdot (0.1s + 1) + 5 \cdot s = 0.04 \cdot s^2 + 0.5 \cdot s + 6$$

die komplexwertigen Pole

$$s_{1,2} = \frac{-0.5 \pm \sqrt{(-0.5)^2 - 4 \cdot 0.04 \cdot 6}}{2 \cdot 0.04} = \frac{-0.5}{0.08} \pm \frac{\sqrt{0.25 - 0.96}}{0.08} = -6.25 \pm \sqrt{\frac{-0.71}{0.0064}}.$$

Somit müssen wir bei der Zerlegung die Form

$$\hat{y}_g(s) = \frac{5}{s \cdot (0.04s^2 + 0.5s + 6)} = \frac{125}{s \cdot (s^2 + 12.5s + 150)} = \frac{A}{s} + \frac{B \cdot s + C}{s^2 + 12.5s + 150}.$$

wählen. Hier erhalten wir über den Koeffizientenabgleich

$$125 = A \cdot (s^2 + 12.5s + 150) + (B \cdot s + C) \cdot s$$

$$125 = s^2 \cdot (A + B) + s \cdot (12.5 \cdot A + C) + 150 \cdot A$$

direkt $A = 5/6$ und können weiter einsetzen

$$0 = A + B = \frac{5}{6} + B \implies B = -\frac{5}{6}$$

$$0 = 12.5 \cdot A + C = 12.5 \cdot \frac{5}{6} + C \implies C = -\frac{125}{12}.$$

Wir erhalten die Standardform

$$\hat{y}_g(s) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{s} - \frac{5}{6} \cdot \frac{s}{s^2 + 12.5s + 150} - \frac{125}{12} \cdot \frac{1}{s^2 + 12.5s + 150}.$$

Nun nutzen wir die Pole $s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ in den inversen Laplace Transformationen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) &= 1 \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}\right) &= \exp(-\alpha t) \cdot \cos(\omega t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}\right) &= \exp(-\alpha t) \cdot \sin(\omega t)\end{aligned}$$

mit $\alpha = -6.25$ und $\omega \approx 10.53$ und erhalten wir für das System somit die Sprungantwort

$$y_g(t) = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} \cdot \exp(-6.25t) \cdot \cos(10.53t) - \frac{125}{12} \cdot \exp(-6.25t) \cdot \sin(10.53t)$$

Zeichnen wir beide Lösungen gegeneinander wie in Abbildung 4.6 gezeigt, so erhalten wir das (unerwartete) Resultat, dass das System an sich stabiles Verhalten und Konvergenz gegen die Sprunghöhe zeigt. Der geschlossene Kreis hingegen ist zwar stabil, konvergiert jedoch gegen $5/6$.

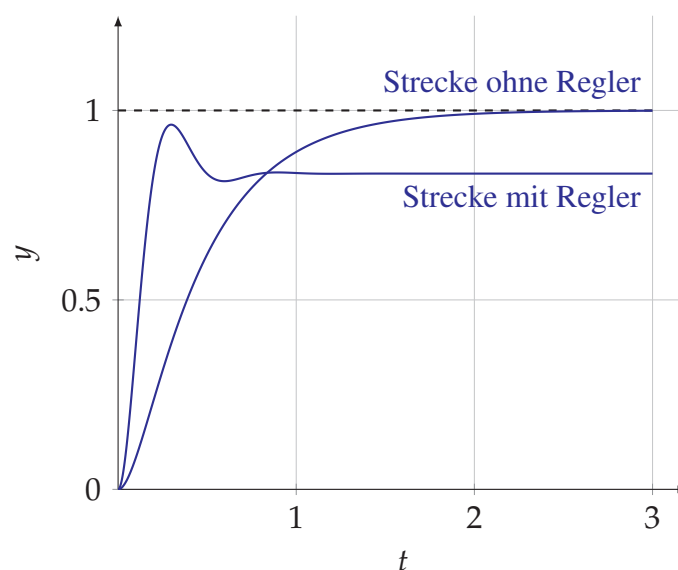


Abbildung 4.6.: Sprungantwort des PT₂-Systems mit P-Regler

Wir können also nicht erwarten, dass eine Regleraufschaltung zu gleichem Zeitverhalten führt. Physikalisch bedeutet dies, dass eine Straßenanregung, z.B. ein Schlagloch, nicht 1:1 auf das Chassis übertragen wird. Stattdessen wird die Anregung gedämpft, es bleibt aber eine stationäre Abweichung, d.h. die Federungen erreichen nicht die volle Eingangsänderung. Für eine Komfortregelung ist dies eine wünschenswerte Charakteristik.

4.1.2. Störungsverhalten

Wenn wir nun Störungen in unsere Betrachtung integrieren, so erhalten wir die Übertragungsfunktion Abbildung 4.1

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) = & G_F(s) \cdot \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s))} \cdot \hat{w}(s) \\ & + \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)} \cdot \hat{d}_1(s) \\ & + \frac{1}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)} \cdot \hat{d}_2(s).\end{aligned}$$

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

Definition 4.6 (Führungs- und Störübertragungsfunktionen).

Für einen allgemeinen Regelkreis nach Abbildung 4.1 mit Störungen $\hat{d}_1$ und $\hat{d}_2$ nennen wir

- die Übertragungsfunktion von Referenzsignal $\hat{w}(s)$ auf das Ausgangssignal $\hat{y}(s)$

$$G_w(s) = G_F(s) \cdot \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s))} \quad (4.3)$$

Führungsübertragungsfunktion,

- die Übertragungsfunktion von Störsignal $\hat{d}_2(s)$ auf das Ausgangssignal $\hat{y}(s)$

$$G_{d_2}(s) = \frac{1}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)} \quad (4.4)$$

sowie von Störsignal $\hat{d}_1(s)$ auf das Ausgangssignal $\hat{y}(s)$

$$G_{d_1}(s) = G_S(s) \cdot G_{d_2}(s) \quad (4.5)$$

Störungsübertragungsfunktionen.

Nun wollen wir uns ansehen, was die Störgrößenaufschaltung bei unserem Viertelfahrzeug be-

wirken würde.

Aufgabe 4.7 (Viertelfahrzeug mit P-Regler und Störgrößenaufschaltung)

Betrachte das Viertelfahrzeug aus Aufgabe 4.5. Bestimme die Antworten des PT_2 -Systems und der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises bei Sprüngen in $\hat{d}_1(s)$, $\hat{d}_2(s)$.

Lösung zu Aufgabe 4.7: Für die Übertragungsfunktion $G_S(s)$ ändert sich im Störungsfall $\hat{d}_1(s) = \eta(t)$ nichts. Hier kommt zum Tragen, dass die Anregung zuvor durch den Sprung in $\hat{w}(s)$ in gleicher Höhe angelegt wurde.

Für das P-geregelte System erhalten wir nach analoger obiger Rechnung

$$y_g(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \exp(-6.25t) \cdot \cos(10.53t) - \frac{25}{12} \cdot \exp(-6.25t) \cdot \sin(10.53t)$$

Im Fall $\hat{d}_2(s) = \eta(t)$ wirkt keine Anregung auf das System $G_S(s)$, wodurch dies bei Null verbleibt. Die Störung in der Sensorik überträgt sich somit direkt auf den Ausgang und ergibt $y(t) = \eta(t)$.

Im P-geregelten Fall sehen wir nun, dass die Anregung $\hat{d}_2(s) = \eta(t)$ durch die negative Rückkopplung negativ auf den geschlossenen Kreis wirkt. Daher ergibt sich die Sprungantwort

$$y_g(t) = 1 - \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6} \cdot \exp(-6.25t) \cdot \cos(10.53t) - \frac{125}{12} \cdot \exp(-6.25t) \cdot \sin(10.53t) \right).$$

Für unser Beispiel des rückgeführten PT_2 -Systems erhalten wir die Störungsübertragungen für Störgrößen $\hat{d}_1(s) = \mathcal{L}(\eta(t))$ bzw. $\hat{d}_2(s) = \mathcal{L}(\eta(t))$ aus den Abbildungen 4.7.

Hier erkennen wir, dass der Regler im Fall der Störgrößenaufschaltung $\hat{d}_1(s) = \mathcal{L}(\eta(t))$ eine weniger starke Reaktion hervorruft, d.h. der Stellgliedfehler, also eine fehlerhafter Eingriff, wird durch die Regelung abgemildert. Auch hier führt die Regelung aber dazu, dass eine konstante Abweichung des geschlossenen Kreises bleibt.

In Fall $\hat{d}_2(s) = \mathcal{L}(\eta(t))$ reagiert der Regler auf eine fehlerhafte Messgliedausgabe. Auch hier wird die Abweichung nicht zu Null geregelt.

4.2. Anforderungen

Wie wir am Beispiel des Viertelfahrzeugs aus Aufgabe 4.1 gesehen haben, hat die Wahl des Regler Einfluss auf das Verhalten des geschlossenen Kreises. Hierbei müssen wir beachten, dass

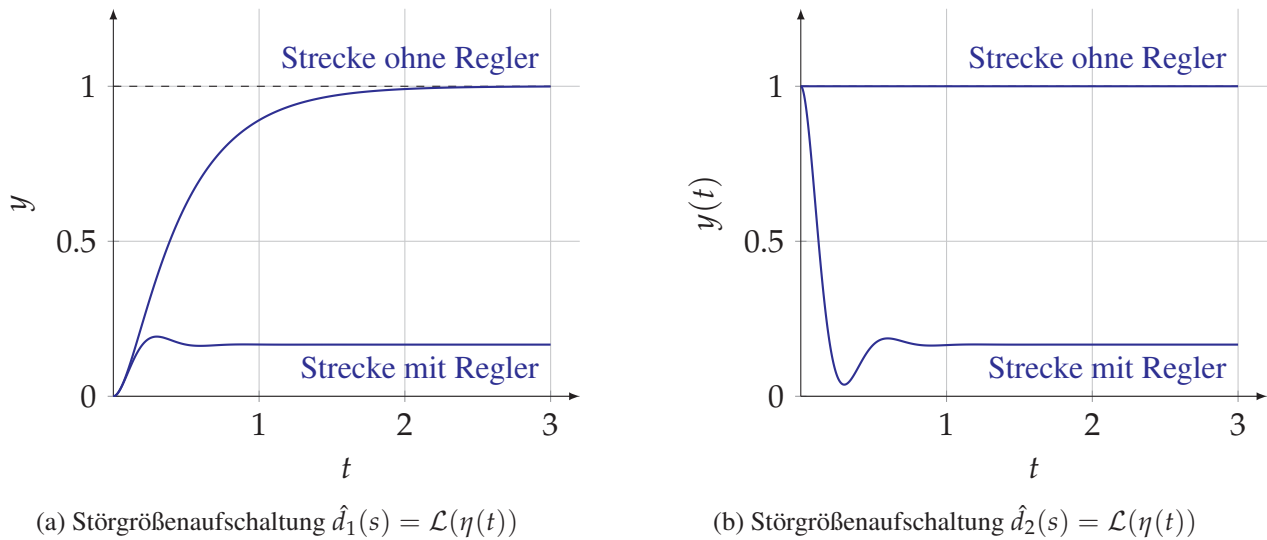


Abbildung 4.7.: Sprungantwort des PT₂-Systems mit P-Regler mit Störgrößenaufschaltungen

aus der Stabilität des Systems $G_S(s)$ nicht direkt die Stabilität des geschlossenen Kreises $G_g(s)$ folgt. Ein Regler kann dazu genutzt werden, um ein instabiles System $G_S(s)$ stabil zu machen, es kann aber auch dazu führen, dass der geschlossene Kreis $G_g(s)$ instabil ist, obwohl das System stabil ist.

Üblicherweise werden folgende Anforderungen an einen Regelkreis gestellt:

Definition 4.8 (Anforderung Führungsgrößenverhalten).

Ein allgemeiner Regelkreis nach Abbildung 4.1 mit Störungen $\hat{d}_1$ und $\hat{d}_2$ zeigt gutes Führungsgrößenverhalten, wenn

$$|G_w(i\omega)| \approx 1 \quad (4.6)$$

im Frequenzbereich $\omega = 0, \dots, \omega_g$ mit möglichst hoher Grenzfrequenz ω_g gilt, wobei für Frequenzen $\omega > \omega_g$ der Betrag $|G_w(i\omega)| \approx 0$ erfüllen soll.

Physikalisch bedeutet gutes Führungsgrößenverhalten, dass sich Eingangssignale (fast) ohne Änderungen auf Ausgangssignale im gewünschten Frequenzbereich übertragen. Sofern keine Störungen vorliegen, dann ein derartiges Folgeverhalten bei stabilen System $G_S(s)$ auch durch eine geeignete Steuerung erreicht werden. Kommen weitere Anforderungen hinzu oder ist das System $G_S(s)$ nicht stabil, so wird jedoch ein Regler gebraucht.

Definition 4.9 (Anforderung Störverhalten).

Ein allgemeiner Regelkreis nach Abbildung 4.1 mit Störungen $\hat{d}_1$ und $\hat{d}_2$ weist gutes Störverhalten auf, wenn

$$\left| G_{d_j}(i\omega) \right| \approx 0, j \in \{1, 2\} \quad (4.7)$$

im Frequenzbereich $\omega = 0, \dots, \omega_g$ mit möglichst hoher Grenzfrequenz ω_g , wobei $|G_w(i\omega)| \approx 0$ für $\omega > \omega_g$ gelten soll.

Da Störungen in der Regel nicht messbar sind bzw. nicht gemessen werden, stellt gutes Störverhalten die klassische Regelungsaufgabe dar.

Die letzte Anforderung befasst sich mit Parameteränderungen. In der Praxis treten diese etwa durch Verschleiß oder Tausch von Komponenten auf.

Definition 4.10 (Anforderung Robustheit).

Werden die Parameter eines allgemeinen Regelkreis nach Abbildung 4.1 mit Störungen $\hat{d}_1$ und $\hat{d}_2$ geändert, so spricht man von guter Robustheitsverhalten, wenn Führungsgrößenverhalten und Störverhalten trotz Änderung der Parameter erhalten bleiben.

Um die letzte Bedingung zu erfüllen, wird der Regler mit Reserven konstruiert, so dass kleinere Parameteränderungen der Strecke toleriert werden können. Wir müssen beachten, dass diese Reserve immer auf Kosten von Geschwindigkeit von Reaktionen auf Störungen geht.

4.3. Beurteilungskriterien

Für die Sprungantworten gibt es mehrere graphische Metriken, die zur Quantifizierung der Anforderungserfüllung einer Regelung herangezogen werden können. Die vielleicht einfachste Metrik befasst sich mit der Länge des Einschwingprozesses des geschlossenen Kreises. Hierzu benötigen wir noch eine Vorbedingung, die sogenannten *stationäre Genauigkeit*.

Definition 4.11 (Stationäre Genauigkeit).

Für eine Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir

$$\varepsilon_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - w(t)) \quad (4.8)$$

stationäre Genauigkeit.

Die Grenzwertbildung in Gleichung (4.8) führt dazu, dass dies die Abweichung im eingeschwungenen Zustand darstellt. Damit ist die stationäre Genauigkeit ein Kriterium, welches anzeigt, ob ein System dauerhaft am Sollwert bleibt oder dauerhaft diesen nicht erreichen wird.

Aufgabe 4.12 (Stationäre Genauigkeit für das geregelte Viertelfahrzeug)

Bestimme die stationäre Genauigkeit für das Viertelfahrzeug aus Aufgabe 4.5.

Lösung zu Aufgabe 4.12: Aus der Sprungantwort erhalten wir direkt

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}.$$

Die stationäre Genauigkeit gibt uns nun die Möglichkeit zu ermitteln, wie lange es dauert, bis die Sprungantwort in eine vordefinierte Umgebung des Sollwertes eintaucht und diese nicht wieder verlässt. Hier sprechen wir von der sogenannten *Ausregelzeit*.

Definition 4.13 (Ausregelzeit).

Gegeben sei die Sprungantwort $y(t)$ eines geschlossenen Kreises sowie eine Schranke $\varepsilon > 0$. Dann nennen wir den Zeitpunkt t_{ε} *Ausregelzeit*, wenn

$$t_{\varepsilon} = \{\tau \in \mathcal{T} \mid |y(t) - y^*| \leq \varepsilon \forall t \geq \tau\}. \quad (4.9)$$

gilt, d.h. ab dem die Regelabweichung kleiner als $\pm\varepsilon$ um einen Sollwert y^* ist.

Abbildung 4.8 veranschaulicht die Ausregelzeit für den Sollwert 1 mit Schranke $\varepsilon = \pm 0.05$.

In der Praxis sind für die Regelabweichung Werte im Bereich $\pm 3\%$ bis $\pm 5\%$ üblich.

Ein weiteres Charakteristikum ist die sogenannte *maximale Überschwingweite*. Sie veranschaulicht, inwieweit die Sprungantwort über das gesetzte Ziel des Sollwertes überschießt um sich anschließend einzupendeln.

Definition 4.14 (Maximal Überschwingweite).

Für eine Sprungantwort $y(t)$ und gegebenen Sollwert y^* nennen wir

$$\varepsilon_{\max} := \max \{|y(t) - y^*| \mid t \geq \underline{t}\} \quad (4.10)$$

die *maximale Überschwingweite*, wobei $\underline{t} = \min \{t \mid y(t) = y^*\}$ die minimale Durchtrittszeit durch den Sollwert ist.

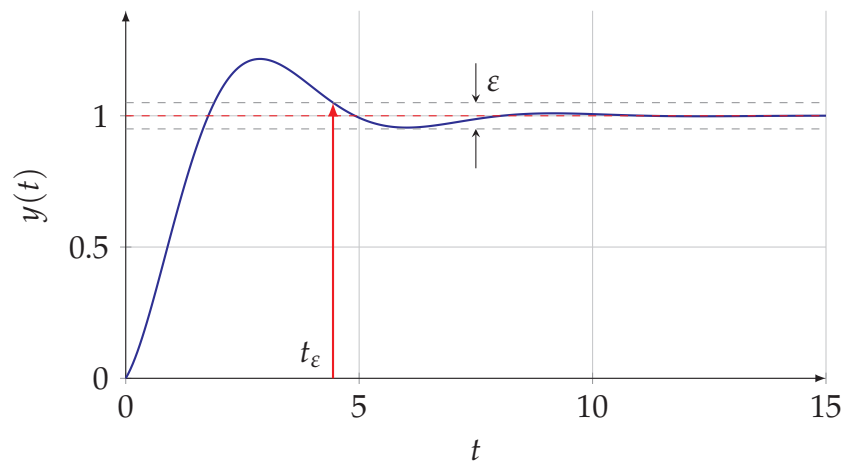


Abbildung 4.8.: Schemazeichnung der Ausregelzeit

Abbildung 4.9 veranschaulicht die maximale Überschwingweite für den Sollwert 1 mit Schranke $\varepsilon = \pm 0.05$.

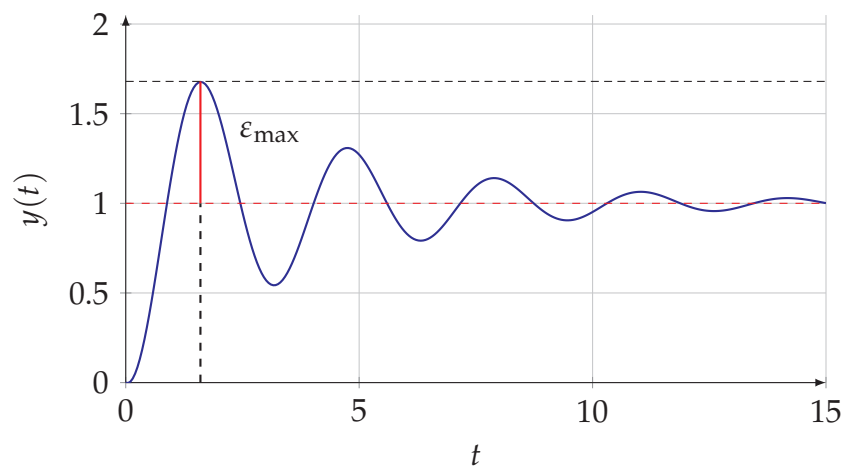


Abbildung 4.9.: Schematische Darstellung der maximalen Überschwingweite

Die Überschwingweite ist im Kontext von Stabilität eine sehr wichtige Größe. Insbesondere ist es möglich, dass durch aufeinander folgende Anregungen das Überschwingen verstärkt wird, d.h. wenn die Zeitpunkte des maximalen Überschwingens mit den Anregezeitpunkten übereinstimmen. Daher kann als Ziel gesetzt werden, dass ein Überschwingen generell zu vermeiden ist. Ist dies der Fall, so kann eine derartige Anregung nicht erfolgen.

Zuletzt wollen wir noch die sogenannte *Regelfläche* einführen. Im Unterschied zur stationären Genauigkeit, die die absolute Abweichung darstellt, ist die Regelfläche ein Maß über die Zeit hinweg, d.h. sie veranschaulicht die Ansammlung des gesamten Fehlverhaltens des Systems während des Einschwingens.

Definition 4.15 (Regelfläche).

Für eine Sprungantwort $y(t)$ und gegebenen Sollwert y^* stellt

$$\varepsilon_f := \int_0^{\infty} (y(t) - y^*)^j dt \quad (4.11)$$

für $j = 1$ die *lineare Regelfläche* und für $j = 2$ die *quadratische Regelfläche* dar.

Beachte, dass die lineare Regelfläche nur sinnvoll angewandt werden kann, wenn kein Überschwingen auftritt. Im Fall des Überschwingens fließen die Flächen oberhalb des Sollwerts negativ in die lineare Regelfläche ein, so dass sich Flächen gegenseitig kompensieren könnten. Abbildung 4.10 stellt dies exemplarisch dar.

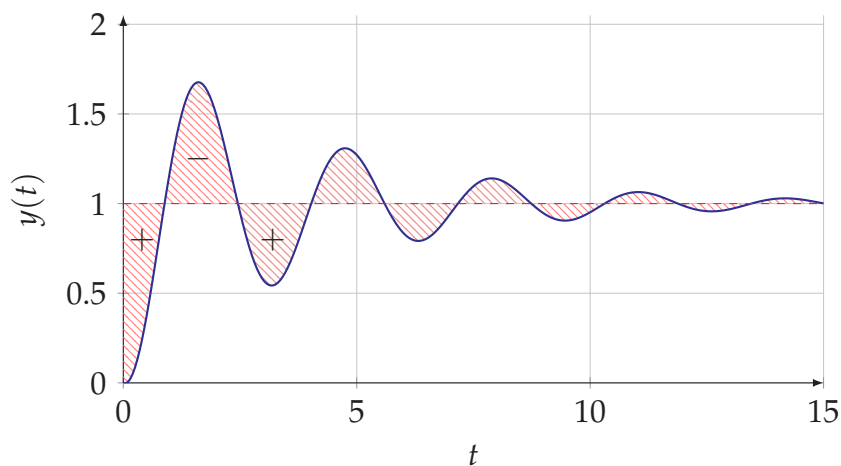


Abbildung 4.10.: Schemazeichnung der Regelfläche

Beachte, dass die Beurteilungskriterien jeweils getrennt für Führungs- und Störverhalten angegeben werden können.

Tabelle 4.1.: Ziele und Eigenschaften der Themenblöcke im Regelkreis

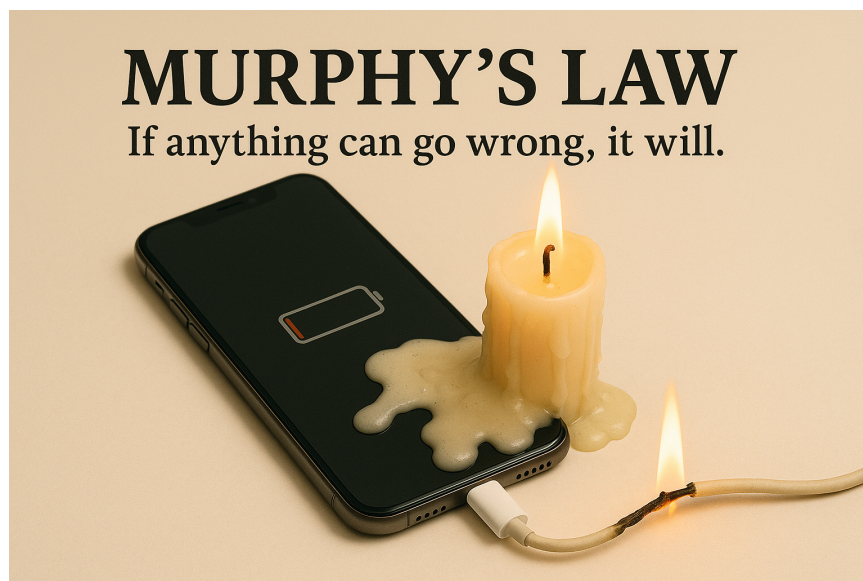
Themenbereich	Ziele	Eigenschaften
Führungsverhalten	Konsequenzen der Regleraufschaltung	Ausgangsänderungen qualitativ wie quantitativ
wird auf der nächsten Seite fortgesetzt		

Tabelle 4.1 – fortgesetzt von der vorherigen Seite

Themenbereich	Ziele	Eigenschaften
Störverhalten	Integration von Störungen in Stell- und Messglied	Analogie zu Führungsverhalten
Anforderungen	Charakterisierung von Eigenschaften	Führungs-/Störverhalten und Robustheit
Beurteilungskriterien	Bewertung von Eigenschaften	Graphisch oder rechnerisch aus Zeitbereich

KAPITEL 5

STABILITÄT UND STABILITÄTSKRITERIEN



Generiert mit chatgpt.com

Anything that can go wrong will go wrong.

Edward A. Murphy Jr.

Im vorliegenden Kapitel wollen wir uns mit der Eigenschaft der Stabilität genauer beschäftigen und insbesondere den Zusammenhang zwischen Stabilität im Zeitbereich aus Kapitel 2 zur Darstellung im Frequenzbereich aus Kapitel 3 herstellen. Dazu fokussieren wir uns auf den SISO Fall

eines LTI Systems $\Sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit nur einem Eingang $u(t)$ und einem Ausgang $y(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) + b \cdot u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.1a)$$

$$y(t) = c^\top \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot u(t) \quad (5.1b)$$

mit Arbeitspunkt x^* . Dieser Fokus kommt nicht von ungefähr, sondern die Einführung von SISO Systemen in Definition 3.10 bildete die Basis unserer Frequenzganguntersuchung in Kapitel 3.

Bemerkung 5.1

Beachte, dass in diesem System der Zustand $\mathbf{x}(t)$ mehrdimensional sein kann, aber nicht muss. Daher sind A eine Matrix und b, c zwei Vektoren, wohingegen d ein Skalar darstellt.

Weiter limitieren wir uns bei Regelungen auf den Fall einer linearen Regelung

$$u(\mathbf{x}(t)) = F \cdot \mathbf{x}(t) \quad (5.2)$$

mit Matrix $F \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$.

Abstrakt gesprochen spricht man von Stabilität, wenn ein System auf eine beschränkte Anregung mit einer beschränkten Bewegung reagiert. Bei einer Anregung zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ heißt eine beschränkte Bewegung, dass das Ausgangssignal $y(t)$ für alle $t > 0$ endlich bleibt.

Bei der Anregung selbst müssen wir zwischen zwei (eigentlich drei) Fällen unterscheiden, bei denen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$

1. eine Auslenkung $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}^*$ vorliegt oder
2. das System in Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^*$ ist, aber durch
 - ein Eingangssignal $u(t) \neq 0$ bzw.
 - ein Störungssignal $d_1(t) \neq 0$ oder $d_2(t) \neq 0$

eine Anregung auf das System wirkt. Im Fall 1 verstehen wir unter Stabilität, dass das System in einen Arbeitspunkt x^* übergeht. In Fall 2 hingegen erwarten wir, dass das Ausgangssignal $y(t)$ beschränkt bleibt. Beide Fälle wollen wir im Folgenden behandeln und entsprechende Kriterien zum Nachweis der Stabilitätseigenschaften herleiten.

5.1. Stabilität im Zeitbereich

Im Fall des Zeitbereichs wollen wir wieder auf unser PT₂ Beispiel aus Aufgabe 4.1 zurückgreifen. Um weitere Fälle abdecken zu können, wählen wir nun die allgemeine Form des PT₂.

Aufgabe 5.2 (Feder-Masse-Dämpfer System als PT₂)

Gegeben sei ein Feder-Masse-Dämpfer System analog zu Aufgabe 4.1 mit allgemeiner Modellierung

$$G_S(s) = \frac{K_P}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}.$$

Berechne die Koeffizienten Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfung ζ für die Übertragungsform

$$G_S(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2}.$$

Bestimme aus der Übertragungsform die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform.

Lösung zu Aufgabe 5.2: Es gilt

$$\begin{aligned} G_S(s) &= \frac{K_P}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} = \frac{K_P}{T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1} \\ &= \frac{K_P}{T_1 \cdot T_2} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} \cdot s + \frac{1}{T_1 \cdot T_2}}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\omega_0^2 = \frac{1}{T_1 \cdot T_2} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{T_1 + T_2}{2 \cdot \sqrt{T_1 \cdot T_2}}.$$

Da $s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2$ die charakteristische Funktion des Nenners darstellt, erhalten wir aus der Regelungsnormalform (2.13) von Theorem 2.15 $a_0 = -\omega_0^2$, $a_1 = -2\zeta\omega_0$ und $b_0 = -K_P\omega_0^2$. Es gilt also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K_P\omega_0^2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -K_P\omega_0^2 \end{pmatrix} \cdot u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

als Darstellung im Zeitbereich.

Für derartige Systeme können wir auf unsere Definition 1.18 aus dem Zeitbereich zurückgreifen und erhalten

Definition 5.3 (Stabilität und Kontrollierbarkeit).

Für ein System (5.1) nennen wir $\mathbf{x}^*$

- *starken* oder *robust stabilen* Arbeitspunkt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Eingänge $u(\cdot)$ gilt

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (5.4)$$

- *stark* oder *robust asymptotisch stabilen* Arbeitspunkt, wenn er stabil ist und ein $r > 0$ existiert, so dass für alle Eingänge $u(\cdot)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0 \quad (5.5)$$

gilt für alle Anfangswerte $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq r$. Kann zudem r beliebig gewählt werden, dann nennen wir den Arbeitspunkt *global stark* oder *global robust asymptotisch stabil*.

- *schwach stabiler* oder *kontrollierbarer* Arbeitspunkt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x}_0$ ein Eingang $u(\cdot)$ existiert mit

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (5.6)$$

- *schwach asymptotisch stabiler* oder *asymptotisch kontrollierbarer* Arbeitspunkt, wenn er schwach stabil ist und zusätzlich ein $r > 0$ existiert, so dass gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0 \quad \forall \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| \leq r. \quad (5.7)$$

Ist r beliebig wählbar, dann heißt der Arbeitspunkt *global asymptotisch stabil*.

Beachte, dass wir uns im Fall einer Regelung (5.2) in unserer Systemdynamik (5.1) limitieren können, denn hier ist $u(\cdot)$ keine Funktion der Zeit, sondern des Zustandes, wodurch wir

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{A} \cdot \mathbf{x}(t) = (A + b \cdot F) \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.8a)$$

$$y(t) = c^\top \cdot \mathbf{x}(t) \quad (5.8b)$$

erhalten.

Bemerkung 5.4

Durch die feste Wahl des Eingangs $u(\cdot)$ entfallen die „schwachen Fälle“ in Definition 5.3.

Der Vorteil des geschlossenen Kreises ist nun, dass wir direkt die Jordansche Normalform aus Theorem 2.14 anwenden können, um ein Kriterium für Stabilität im Zeitbereich zu erhalten:

Korollar 5.5 (Kriterium für Stabilität im Zeitbereich)

Ein geregeltes SISO System (5.8) ist stabil genau dann, wenn die Jordan-Normalform eine Diagonalmatrix bildet (die Jordanblöcke also Blocklänge 1 aufweisen) und zusätzlich alle Eigenwerte λ_j die Bedingung

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n_x \quad (5.9)$$

erfüllen. Das System ist asymptotisch stabil genau dann, wenn

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad j = 1, \dots, n_x \quad (5.10)$$

gilt.

Beweis. Nach Theorem 2.14 existiert die Jordansche Normalform für jedes LTI System und die Transitionsmatrix zu einem Jordanblock ist durch (2.12)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_j t) & t \exp(\lambda_j t) & \dots & \frac{t^k}{k!} \exp(\lambda_j t) \\ 0 & \exp(\lambda_j t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \exp(\lambda_j t) \\ 0 & \dots & 0 & \exp(\lambda_j t) \end{pmatrix}$$

gegeben. Nehmen wir nun an, dass das System stabil ist und dennoch ein Block der Länge > 1 existiert, so muss ein in t -linearer Term auftauchen. Da dieser wegen $\exp(\lambda_j t) > 0$ streng monoton wächst, ist die Lösung des Systems nicht beschränkt und wir erhalten einen Widerspruch. Folglich muss für Stabilität eine Diagonalform vorliegen. Um Stabilität zu erhalten, muss der Ausgang beschränkt bleiben. Im Umkehrschluss muss daher der Potenzfaktor in $\exp(\lambda_j t)$ die Ungleichung $\exp(\lambda_j t) \leq 1$ erfüllen. Daraus folgt (5.9). Für Konvergenz muss $\exp(\lambda_j t) < 1$ und somit (5.10) gelten. $\square$

Aufgabe 5.6 (Feder-Masse-Dämpfer System mit verschiedenen Dämpfungen)

Betrachte das Feder-Masse-Dämpfer System aus Aufgabe 5.2. Skizziere die unkontrollierten Lösungen mit $u(t) \equiv 0$ im Zeitbereich für die Werte $\omega_0 = 1$ und $\zeta \in \{-0.3, 0, 0.3, 1, 1.5\}$. Untersuche das System auf Stabilität.

Lösung zu Aufgabe 5.6: Ausgehend von der Darstellung des Systems in Regelungsnormform

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -K_P\omega_0^2 \end{pmatrix} \cdot u(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

mit $u(t) = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Eigenwerte über das charakteristische Polynom aus

$$\det(\lambda \text{Id} - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \omega_0^2 & \lambda + 2\zeta\omega_0 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{(2\zeta\omega_0)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Somit erhalten wir drei verschiedene Jordansche Normalformen in Abhängigkeit von ζ :

1. Für $\zeta > 1$ gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$. Daher ist das System asymptotisch stabil.

2. Für $\zeta = 1$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0$ und wir erhalten einen Jordanblock der Länge 2

$$J = \begin{pmatrix} \omega_0 & 1 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$. Daher ist das System asymptotisch stabil.

3. Für $\zeta < 1$ sind die Eigenwerte komplexwertig und wir erhalten

$$J = \begin{pmatrix} -\zeta\omega_0 & \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ -\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} & -\zeta\omega_0 \end{pmatrix}$$

mit komplex konjugiertem Paar, deren Realteile $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = -\zeta\omega_0 < 0$ erfüllen. Das System ist als für $\zeta \in]0, 1[$ asymptotisch stabil, für $\zeta = 0$ stabil, und für $\zeta < 0$ instabil.

Wir erhalten die Lösungen in Abbildung 5.1.

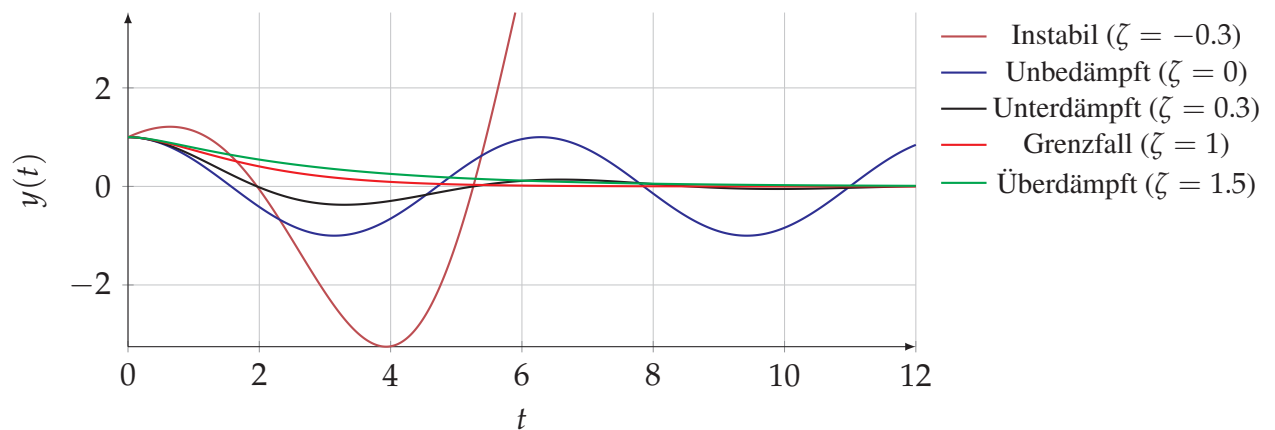


Abbildung 5.1.: Lösung des PT₂ für verschiedene Dämpfungen ζ

Beachte, dass das genannte Beispiel kein geregeltes System gewesen ist. Da wir den Eingang auf Null $u(t) \equiv 0$ gesetzt haben, ist dies aber äquivalent zu $F = 0$ und das Vorgehen bei Auslenkung $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}^*$ damit identisch.

Unser nächstes Ziel ist es, die Aussagen im Zeitbereich durch Rechnungen im Frequenzbereich zu ersetzen. Hierzu stellen wir auf das sogenannte E/A Verhalten ab.

5.2. E/A Stabilität

Im Unterschied zum vorherigen Abschnitt wollen wir nun den angeregten Fall durch eine Eingabe analysieren. Das heißt insbesondere, dass wir uns nur den erzwungenen Anteil genauer ansehen werden. Hierzu wiederholen wir Gleichung (3.3) im SISO Kontext

$$\hat{y}(s) = \underbrace{C \cdot (s \cdot \text{Id} - A)^{-1} \cdot \mathbf{x}_0}_{\text{homogener Anteil}} + \underbrace{\left(c \cdot (s \cdot \text{Id} - A)^{-1} \cdot b \right) \cdot \hat{u}(s)}_{\text{inhomogener Anteil}} \quad (5.13)$$

und setzen nun $\mathbf{x}_0 = 0$.

Bemerkung 5.7

Der homogene Anteil wird für $\mathbf{x}_0 = 0$ zu Null. Dies gilt insbesondere auch für alle autonomen Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t).$$

Beachte, dass der Arbeitspunkt $\mathbf{x}^*$ eines autonomen Systems mit invertierbarer Matrix A immer $\mathbf{x}^* = 0$ erfüllt. Ist A nicht invertierbar, so existieren unendlich viele Arbeitspunkte.

In Definition 3.15 hatten wir dann das sogenannte E/A Verhalten eines Systems eingeführt:

Definition 5.8 (E/A Verhalten).

Für ein System mit Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und Anfangswert $\mathbf{x}_0 = 0$ nennen wir

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}. \quad (5.14)$$

das *Eingangs-/Ausgangsverhalten* bzw. *E/A Verhalten*.

Nun wollen wir Definition 5.3 zur Stabilität und Kontrollierbarkeit nutzen, um dies im E/A Sinn zu deuten. Da wir uns auf den erzwungenen Anteil konzentrieren, kommen also nur Eingangssignale zur Anregung in Frage. Um dies zu symbolisieren, definieren wir

Definition 5.9 (E/A Stabilität).

Ein System (5.1) heißt *Eingangs-Ausgangs-stabil* (E/A stabil), wenn für $\mathbf{x}_0 = 0$ gilt

$$|u(t)| < u_{\max} \quad \forall t > 0 \quad \implies \quad |y(t)| < y_{\max} \quad \forall t > 0. \quad (5.15)$$

Beachte, dass Definition 5.9 im Zeitbereich angegeben ist, wohingegen das E/A Verhalten im Frequenzbereich angesiedelt ist. Für die LTI Übertragungsfunktion wissen wir aus Theorem 3.5, dass dies der Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \underbrace{\Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0}_{=0} + \int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot b \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= c \cdot \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

mit Transitionsfunktion $\Phi(t)$ entspricht. Somit ist ein System E/A stabil, wenn

$$\mathbf{y}(t) = c \cdot \int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot b \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

d.h. das Integral der Transitionsfunktion muss beschränkt bleiben. Es gilt also trivialerweise

Korollar 5.10 (Kriterium für E/A Stabilität)

Ein System (5.1) ist E/A stabil genau dann, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi(t) dt < \infty \quad (5.16)$$

erfüllt ist.

Beweis. Siehe Herleitung. □

Dies bedeutet, dass das Integral der Transitionsfunktion über die Zeit hinweg verschwinden muss. Physikalisch bedeutet dies, dass die durch das Eingangssignal entstandene Anregung durch die Dynamik des Systems zu Null zurückgeführt wird, d.h. die zugeführte Energie abgebaut wird. In mechanischen Systemen ist dies typischerweise durch Reibung der Fall. In aktiv geregelten Systemen hingegen sorgt ein Stelleingriff dafür, dass dies geschieht.

Wir nutzen nun unser Beispielsystem und führen eine aktive Regelung ein, um eine Auslenkung schneller zu Null zu führen.

Aufgabe 5.11 (Feder-Masse-Dämpfer System mit Rückführung)

Betrachte wieder das Feder-Masse-Dämpfer System aus Aufgabe 5.2 und schalte nun ein P-Glied mit $K_{P2} = 1$ auf. Skizziere die Lösungen im Zeitbereich für die Werte $\omega_0 = 1$ und $\zeta \in \{-0.3, 0, 0.3, 1, 1.5\}$.

Lösung zu Aufgabe 5.11: Aus der Darstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -K_P\omega_0^2 \end{pmatrix} \cdot u(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

erhalten wir für den geschlossenen Kreis mit $u(t) = K_{P2}y(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - K_P\omega_0^2 K_{P2} & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$$

als Darstellung im Zeitbereich.

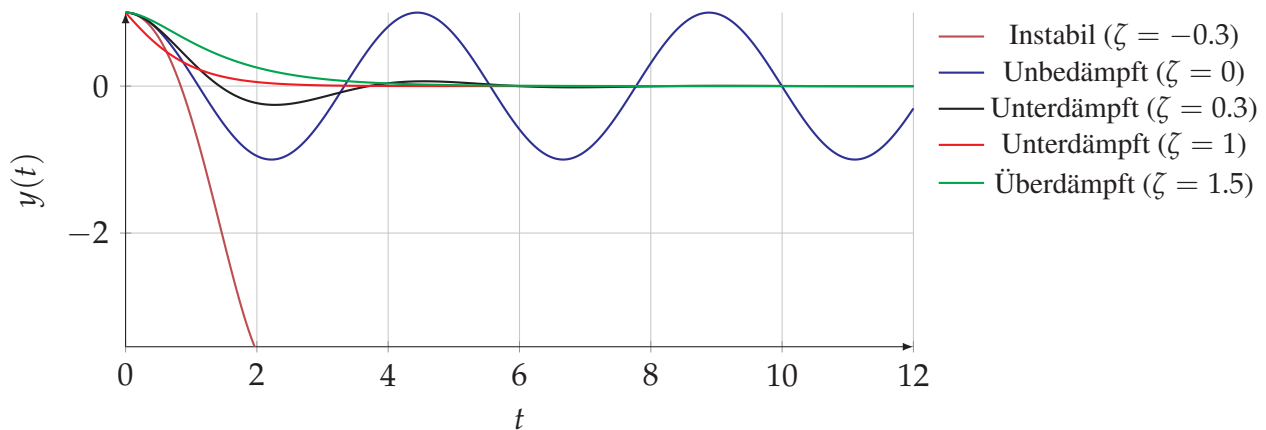


Abbildung 5.2.: Lösung des PT_2 mit P-Glied für verschiedene Dämpfungen ζ

Wir können anhand des Beispiels feststellen, dass wir durch das P-Glied das Verhalten etwas verändert haben. Insbesondere haben wir die Eigenwerte der Matrix $\bar{A}$ verschoben, wodurch der Fall $\zeta = 1$ nicht länger kritisch ist. Dies wollen wir nun formaler angehen und nutzen zunächst einmal Korollar 5.10, um von Stabilität im Zeitbereich auf E/A Stabilität zu schließen.

Theorem 5.12 (Kriterium für E/A Stabilität).

Ein System (5.1) ist E/A stabil genau dann, wenn sämtliche Pole s_j der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$

$$\operatorname{Re}(s_j) < 0 \tag{5.19}$$

erfüllen.

Beweis. Aufgrund der Partialbruchzerlegung erhalten wir entweder reellwertige oder komplex konjugierte Pole. Da dies in der inversen Laplacetransformation Exponentialtermen mit den Realteilen der Polstellen als Potentialfaktor entspricht (vgl. Tabelle 3.2), gilt (5.16) genau dann, wenn $\operatorname{Re}(s_j) < 0$ für alle Pole s_j erfüllt ist. $\square$

Dies können wir an unserem laufenden Beispiel wieder genauer betrachten:

Aufgabe 5.13 (Feder-Masse-Dämpfer System in E/A Stabilität)

Betrachte wieder das Feder-Masse-Dämpfer System aus Aufgabe 5.11. Berechne die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises sowie dessen Pole.

Lösung zu Aufgabe 5.13: Mit der P-Glied Aufschaltung erhalten wir aus

$$G_S(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2}$$

den geschlossenen Kreis

$$G_g(s) := \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s))} = \frac{\frac{K_{P2}\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2}}{1 + \frac{K_{P2}\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2}}$$

Somit erhalten wir

$$G_g(s) := \frac{K_{P2}\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2 + K_{P2}\omega_0^2}$$

mit Polen

$$s_{1,2} = \frac{-2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \pm \sqrt{(2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta)^2 - 4\omega_0^2(1 + K_{P2})}}{2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - (1 + K_{P2})}.$$

Hieraus erhalten wir, dass das kritische Verhalten nun für $\zeta^2 = \sqrt{1 + K_{P2}}$ auftritt. Der Realteil wurde nicht verändert.

Bevor wir uns um eine vereinfachte Berechnung dieses Verhalten kümmern, können wir abschließend folgende wichtige Übertragung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich festhalten:

Theorem 5.14 (Zustandsstabilität und E/A Stabilität).

Ist ein System (5.1) asymptotisch stabil, so ist es auch E/A stabil.

Beweis. Wenn das System asymptotisch stabil ist, so folgt nach Definition 5.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0.$$

Da $\mathbf{x}^* = 0$ ist, folgt auch $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$. Folglich existiert das Integral in (5.16) und das System ist E/A stabil für $u(t) \neq 0$. $\square$

Bemerkung 5.15

Beachte, dass die Umkehrung nicht unbedingt gelten muss. Dies ist nur dann der Fall, wenn alle Eigenvorgänge in der Transitionsmatrix abgebildet werden.

Wie wir gesehen haben, hat das E/A Verhalten eine direkte Verbindung zum charakteristischen Polynom. Dies wollen wir nun ausnutzen, um einfache Stabilitätskriterien auch für komplexere Systeme herzuleiten.

5.3. Hurwitz Kriterium

Die Idee des sogenannten *Hurwitz Kriteriums* basiert auf folgender Beobachtung aus dem vorangegangenen Abschnitt: Stabilität eines Systems hängt von den Eigenwerten λ_j der Systemmatrix $\overline{A}$ ab bzw. von den Polen s_j der Übertragungsfunktion $G_g(s)$. Genauer gesagt, von den jeweiligen Realteilen.

Beide Bedingungen sind Nullstellen eines Polynoms – des charakteristischen Polynoms –, deren genaue Werte aber nicht relevant sind, sondern nur die Tatsache eines negativen Realteils ausschlaggebend ist. Daher ist unser Ziel „nur“ zu entscheiden, ob sämtliche Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5.20)$$

negativen Realteil aufweisen. Dabei wollen wir die Nullstellen aber nicht berechnen.

Bemerkung 5.16

Wir erhalten Gleichung (5.20) einerseits durch die Berechnung $\det(\lambda Id - \overline{A}) = 0$ im Zeitbereich oder aus $N(s) = 0$ des Nennerpolynoms im Frequenzbereich.

Hierfür hat Hurwitz ein Kriterium aufgestellt, das auf der sogenannten *Hurwitz Matrix* basiert:

Definition 5.17 (Hurwitz Matrix).

Für ein gegebenes charakteristisches Polynom der Form (5.20)

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

bezeichne

$$H := \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

die *Hurwitz Matrix*.

Die Hurwitz Matrix ist damit eine $(n \times n)$ Matrix. Der Hauptzweck, den Hurwitz hiermit verfolgte, ist die Identifikation von Vorzeichenwechseln, die gleichbedeutend mit instabilen Polen sind. Hierzu gilt folgendes Theorem (siehe [4]):

Theorem 5.18 (Hurwitz Kriterium).

Gegeben sei ein charakteristisches Polynom (5.20)

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Alle Nullstellen des Polynoms haben negativen Realteil genau dann, wenn

- die Koeffizienten a_j für alle $j = 1, \dots, n$ positiv sind und
- die n Hauptabschnittsdeterminanten D_j der Hurwitz Matrix H positiv definit sind.

Die Hauptabschnittsdeterminanten bezeichnen dabei die Determinanten der quadratischen Submatrizen in der Hurwitz Matrix H startend in der linken oberen Ecke, d.h.

$$D_1 = a_1$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \\
 &\vdots \\
 D_n &= \det(H)
 \end{aligned}$$

Nun wollen wir dieses Kriterium auf unser Beispielsystem anwenden.

Aufgabe 5.19 (Hurwitz Kriterium für Feder-Masse-Dämpfer System mit Rückführung)

Betrachte wieder das Feder-Masse-Dämpfer System aus Aufgabe 5.11 mit P-Glied. Werte das Hurwitz Kriterium aus.

Lösung zu Aufgabe 5.19: Aus der Transferfunktion des geschlossenen Kreises

$$G_g(s) := \frac{K_{P2}\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2(1 + K_{P2})}$$

erhalten wir das charakteristische Polynom

$$s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2(1 + K_{P2}) = 0.$$

Damit erhalten wir $a_0 = \omega_0^2(1 + K_{P2})$, $a_1 = 2\omega_0\zeta$ und $a_2 = 1$. Folglich ergibt sich die Hurwitz Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2\omega_0\zeta & 0 \\ \omega_0^2(1 + K_{P2}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$D_1 = 2\omega_0\zeta > 0$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2\omega_0\zeta & 0 \\ \omega_0^2(1 + K_{P2}) & 1 \end{pmatrix} = 2\omega_0\zeta \cdot 1 - \omega_0^2(1 + K_{P2}) \cdot 0 = 2\omega_0\zeta > 0.$$

Somit ist das Hurwitz Kriterium erfüllt. Da dadurch alle Nullstellen negativen Realteil haben, ist das System E/A stabil und auch asymptotisch stabil.

Bemerkung 5.20

Beachte, dass das Hurwitz Kriterium nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Ist also eine der Bedingungen nicht erfüllt, so ist das System instabil. Ist das Hurwitz Kriterium nicht erfüllt, dann können wir anhand der Vorzeichenwechsel der Folge

$$a_1, D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \dots$$

die Anzahl der instabilen Eigenvorgänge bzw. Exponentialfunktionen mit positivem Exponenten abzählen.

Wie wir am Rechenablauf feststellen können, wird das Verfahren für sehr große Hurwitz Matrizen sehr aufwändig und damit unpraktisch. Diesen Umstand wollen wir als Nächstes adressieren.

5.4. Routh Kriterium

Das sogenannten *Routh Kriterium* wurde für Systeme entwickelt, die einen hohen Polynomgrad aufweisen. Dies ist in der Praxis typischerweise dann gegeben, wenn viele Basiselemente miteinander gekoppelt, insbesondere in Reihe oder im Kreis geschaltet werden. Die Äquivalenzaussage, die wir beim Routh Kriterium selbst nutzen werden, wirkt dabei zunächst sehr sperrig [9]:

Theorem 5.21 (Routh Äquivalenz).

Ein charakteristisches Polynom (5.20) mit Grad $n \geq 1$

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (5.22)$$

weist genau dann keine Nullstellen mit nichtnegativem Realteil auf, wenn

- der Koeffizient $a_{n-1} \neq 0$ ist,
- die Koeffizienten a_n und a_{n-1} dasselbe Vorzeichen aufweisen, und
- das Polynom

$$R(s) = N(s) - \frac{a_n}{a_{n-1}} (a_{n-1} s^n + a_{n-3} s^{n-2} + \dots) \quad (5.23)$$

keine Nullstellen mit nichtnegativem Realteil besitzt.

Wenn wir uns das Kriterium genau ansehen, so ersetzen wir hier die Nullstellensuche bei einem

Polynom $N(s)$ durch die Nullstellensuche bei einem anderen Polynom $R(s)$. Einzig der Polynomgrad von $R(s)$ ist im Vergleich zu $N(s)$ um 1 reduziert. Somit müssen wir das Kriterium iterativ $n - 1$ mal anwenden, um das System auf Stabilität zu prüfen.

Um dies zu vereinfachen, setzen wir $r_{11} := \frac{a_n}{a_{n-1}}$ und verwenden wir die Aufteilung

$$\begin{aligned} N(s) &= \left(a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + a_4 s^4 + \dots \right) \\ &\quad + \left(a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + a_5 s^5 + \dots \right) \\ R(s) &= \left(a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + a_5 s^5 + \dots \right) \\ &\quad + (a_{n-2} - r_{11} a_{n-3}) s^{n-2} + (a_{n-4} - r_{11} a_{n-5}) s^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten können wir auch tabellarisch darstellen und erhalten

Tabelle 5.1.: Koeffizientenaufteilung des Routh Schemas

Polynom	Koeffizienten			
$N(s)$	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
$R(s)$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
	$a_{n-2} - r_{11} a_{n-3}$	$a_{n-4} - r_{11} a_{n-5}$	$a_{n-6} - r_{11} a_{n-7}$	$\dots$

Auf Basis dieser Darstellung können wir nun die nächste Iteration des Routh Schemas erstellen. Wir nutzen dabei, dass die zweite Zeile des Ausgangspolynoms (in Tabelle 5.1 ist dies $N(s)$) gleich der ersten Zeile des abgeleiteten Polynoms (entspricht $R(s)$ in Tabelle 5.1) ist. Dies ergibt im zweiten Iterationsschritt Tabelle 5.2.

Tabelle 5.2.: Zweite Iteration des Routh Schemas

Polynom	Koeffizienten		
$N(s)$		a_n	$a_{n-2} \quad \dots$
wird auf der nächsten Seite fortgesetzt			

Tabelle 5.2 – fortgesetzt von der vorherigen Seite

Polynom	Koeffizienten			
		a_{n-1}	a_{n-3}	$\dots$
$R_1(s)$		a_{n-1}	a_{n-3}	$\dots$
	$r_{11} := \frac{a_n}{a_{n-1}}$	$r_{12} := a_{n-2} - r_{11}a_{n-3}$	$r_{13} := a_{n-4} - r_{11}a_{n-5}$	$\dots$
$R_2(s)$		r_{12}	r_{13}	$\dots$
	$r_{21} := \frac{a_{n-1}}{r_{12}}$	$r_{22} := a_{n-3} - r_{21}r_{13}$	$r_{23} := a_{n-5} - r_{21}r_{14}$	$\dots$

Nun können wir die redundanten Zeilen entfernen, d.h. die jeweils ersten Zeile je Polynom.

Tabelle 5.3.: Kondensierte Tabelle des Routh Schemas

Polynom		Koeffizienten		
$N(s)$		$r_{-12} := a_n$	$r_{-13} := a_{n-2}$	$\dots$
		$r_{02} := a_{n-1}$	$r_{03} := a_{n-3}$	$\dots$
$R_1(s)$	$r_{11} := \frac{a_n}{a_{n-1}}$	$r_{12} := r_{-13} - r_{11}r_{03}$	$r_{13} := r_{-14} - r_{11}r_{04}$	$\dots$
$R_2(s)$	$r_{21} := \frac{a_{n-1}}{r_{12}}$	$r_{22} := r_{03} - r_{21}r_{13}$	$r_{23} := r_{04} - r_{21}r_{14}$	$\dots$
$R_3(s)$	$r_{31} := \frac{r_{12}}{r_{22}}$	$r_{32} := r_{13} - r_{31}r_{23}$	$r_{33} := r_{14} - r_{31}r_{24}$	$\dots$

An Tabelle 5.3 können wir folgende Rechenregeln erkennen:

$$r_{j1} := \frac{r_{(j-2)2}}{r_{(j-1)2}}$$

$$r_{jk} := r_{(j-2)(k+1)} - r_{j1}r_{(j-1)(k+1)}, \quad \text{für } k > 1$$

Somit können wir die Routh Parameter jeweils aus den beiden vorangegangenen Zeilen berechnen. Die Berechnung endet, wenn die beiden letzten Zeilen je nur ein Element enthalten, dass nicht Null ist.

Aufgabe 5.22 (Routh Kriterium für Feder-Masse-Dämpfer System mit Rückführung)

Führe für das Feder-Masse-Dämpfer System aus Aufgabe 5.11 mit P-Glied das Routh Schema durch

Lösung zu Aufgabe 5.22: Ausgehend von der Transferfunktion des geschlossenen Kreises

$$G_g(s) := \frac{K_{P2}\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2 (1 + K_{P2})}$$

ergibt sich das charakteristische Polynom

$$N(s) := s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2 (1 + K_{P2})$$

Nun können wir in das Routh Schema einsetzen und erhalten Tabelle 5.4.

Tabelle 5.4.: Routh Schemas für Feder-Masse-Dämpfer System mit P-Glied

Polynom		Koeffizienten		
$N(s)$		1	$\omega_0^2 (1 + K_{P2})$	0
		$2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta$	0	0
$R_1(s)$	$\frac{1}{2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta}$	$\omega_0^2 (1 + K_{P2}) - \frac{1}{2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta} \cdot 0$	$0 - \frac{1}{2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta} \cdot 0 = 0$	0

Zentrale Folgerung aus dem Rechenschema aus Tabelle 5.3 und Theorem 5.21 ist nun folgende Aussage zu Stabilität eines Systems

Theorem 5.23 (Routh Stabilitätskriterium).

Die Nullstellen eines charakteristischen Polynoms (5.20)

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

haben genau dann negativen Realteil, wenn

- sowohl die Koeffizienten $a_j > 0$ für alle $j = 0, \dots, n$ erfüllen als auch
- die Koeffizienten $r_{j2} > 0$ für alle j des Routh Schemas erfüllen.

Beweis. Folgt aus Herleitung des Routh Schemas. □

Bemerkung 5.24

Beachte, dass analog zum Hurwitz Kriterium auch das Routh Kriterium nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Daher ist das System instabil, sobald auch nur eine der Bedingungen nicht erfüllt ist.

Sowohl das Hurwitz wie auch das Routh Kriterium können also eingesetzt werden, um die Stabilität einer Übertragungsfunktion zu bewerten. Dabei ist es jeweils irrelevant, ob die Übertragungsfunktion einen offenen oder einen geschlossenen Kreis darstellt. Der Zusammenhang zwischen offenen und geschlossenem Kreis wird daraus nicht deutlich. Genau dies wollen wir im Folgenden mit dem Nyquist Kriterium adressieren.

5.5. Nyquist Kriterium

Das sogenannte *Nyquist Kriterium* ist ein Verfahren, mit dem wir

- die Stabilität der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises
- auf Basis des offenen Kreises

bestimmen. Das Nyquist Kriterium adressiert damit die Frage, welche Eigenschaften ein System mit Übertragungsfunktion $G_S(s)$ aufweisen muss, damit der geschlossene Kreis E/A stabil ist. Um die Frage umfassend zu beantworten, nutzen wir die erweiterte Betrachtung mit Störungen aus Abschnitt 4.1. Der geschlossene Kreis ist durch Abbildung 5.3 gegeben.

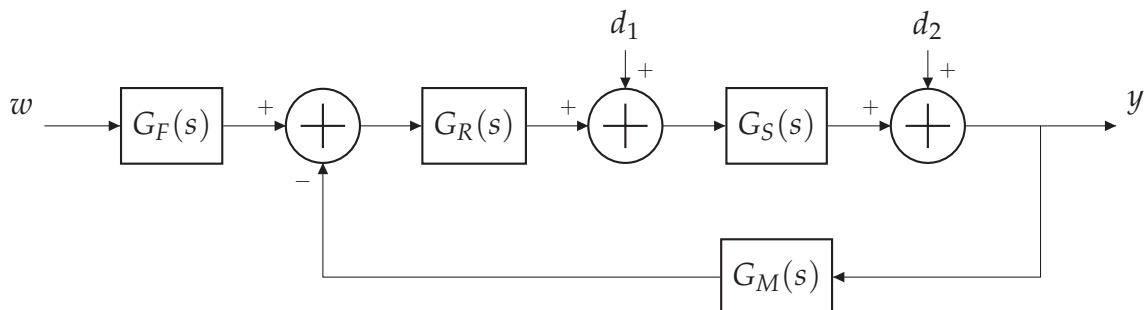


Abbildung 5.3.: Blockschaltbild geschlossener Kreis mit Störungen

Aus der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises mit Führungs- und Störungsverhalten

(vgl. Definition 4.6)

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) = & G_F(s) \cdot \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s))} \cdot \hat{w}(s) \\ & + \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)} \cdot \hat{d}_1(s) \\ & + \frac{1}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)} \cdot \hat{d}_2(s).\end{aligned}$$

können wir direkt ableiten, dass alle Übertragungsfunktionen von Referenz $\hat{w}(s)$ sowie Störungen $\hat{d}_1(s)$, $\hat{d}_2(s)$ auf den Ausgang $\hat{y}(s)$ dasselbe Nennerpolynom

$$F(s) = 1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s) = 1 + G_0(s)$$

aufweisen. Diese Polynom wird auch als *Rückführdifferenzfunktion* bezeichnet.

Definition 5.25 (Rückführdifferenzfunktion).

Für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises aus Abbildung 5.3 bezeichnen wir

$$F(s) = 1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s) = 1 + G_0(s) \quad (5.24)$$

als *Rückführdifferenzfunktion*.

Da die Rückführdifferenzfunktion sowohl im Führungs- wie im Störverhalten identisch ist, können wir direkt folgern:

Korollar 5.26 (Polstellen der Führungs- und Störübertragungsfunktionen)

Für einen gegebenen geschlossenen Kreis mit Störungen nach Abbildung 5.3 weisen die Führungsübertragungsfunktion $G_w(s)$ und die Störungsübertragungsfunktionen $G_{d_1}(s)$ und $G_{d_2}(s)$ identische Polstellen auf.

Beweis. Folgt aus Aufteilung der Übertragungsfunktionen in Definition 4.6. □

Nach Theorem 5.12 ist der geschlossene Kreis somit E/A stabil für alle Führungsgrößen $\hat{w}(s)$ und alle Störungen $\hat{d}_1(s)$, $\hat{d}_2(s)$, wenn alle Pole s_j die Bedingung

$$\operatorname{Re}(s_j) < 0$$

erfüllen. Das könnten wir durch das Hurwitz oder Routh Kriterium nachweisen. Hier ist wichtig zu beachten, dass die pure Gleichheit der Rückführdifferenzfunktion $F(s)$ noch nicht bedeutet,

dass der geschlossene Kreis automatisch sowohl in Führung- wie Störgröße stabil ist. Zur Veranschaulichung nutzen wir folgendes Beispiel:

Aufgabe 5.27 (Exothermer Reaktor)

Gegeben sei ein Reaktor mit exothermer Reaktion

$$G_S(s) = \frac{1}{s-3}$$

mit aufgeschaltetem Regler

$$G_R(s) = \frac{s-3}{s+5}.$$

Untersuche den geschlossenen Kreis auf Stabilität hinsichtlich Führungsgröße $\hat{w}(s)$ sowie Störung $\hat{d}_1(s)$.

Lösung zu Aufgabe 5.27: Die Strecke $G_S(s)$ weist die Polstelle $s = 3 > 0$ auf und ist damit instabil, es kann somit zu einem Wärmelauf kommen. Mit Aufschaltung des Reglers $G_R(s)$ erhalten wir das Führungsverhalten

$$\begin{aligned} G_w(s) &= \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s))} \\ &= \frac{\frac{s-3}{s+5} \cdot \frac{1}{s-3}}{1 + \frac{s-3}{s+5} \cdot \frac{1}{s-3}} = \frac{\frac{1}{s+5}}{1 + \frac{1}{s+5}} = \frac{\frac{1}{s+5}}{\frac{s+6}{s+5}} = \frac{1}{s+6} \end{aligned}$$

mit charakteristischem Polynom $s + 6 = 0$ und einziger Polstelle $s = -6$. Das Führungsverhalten ist somit stabil.

Für das Störverhalten gilt hingegen

$$\begin{aligned} G_{d_1}(s) &= \frac{G_S(s)}{(1 + G_R(s) \cdot G_S(s))} \\ &= \frac{\frac{1}{s-3}}{1 + \frac{s-3}{s+5} \cdot \frac{1}{s-3}} = \frac{\frac{1}{s-3}}{\frac{s+6}{s+5}} = \frac{s+5}{(s-3) \cdot (s+6)} = \frac{s+5}{s^2 + 3s - 18} \end{aligned}$$

mit charakteristischem Polynom $s^2 + 3s - 18 = 0$ und den Polstellen $s_1 = -6$ und $s_2 = 3$. Das Störungsverhalten ist somit instabil.

Ein derartiges Verhalten kann auftreten, wenn der offene Kreis instabile Pole aufweist, die durch instabile Nullstellen des Reglers gekürzt werden.

Bemerkung 5.28

Die Existenz von instabilen Nullstellen der Rückführung, die zum Kürzen von instabilen Polen der Strecke führt, ist eine Eigenschaft, die wir bei der Konstruktion der Rückführung beachten und vermeiden müssen.

Man spricht hier von sogenannter *I-Stabilität*, die über Stabilität hinausgeht:

Definition 5.29 (I-Stabilität).

Wir nennen einen geschlossenen Kreis *I-stabil* wenn alle Übertragungsfunktionen des Führungs- und Störverhaltens $G_w(s)$, $G_{d1}(s)$, $G_{d1}(s)$ stabil sind.

Dem expliziten Nachprüfen der Stabilität dieser Übertragungsfunktionen wollen wir nun explizit nicht folgen, sondern widmen uns der Rückführdifferenzfunktion

$$F(s) = 1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s) = 1 + G_0(s) = 1 + \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{N(s) + Z(s)}{N(s)}$$

selbst. Für $F(s)$ gilt, dass die Nullstellen von $F(s)$ die Pole des Regelkreises und die Nullstellen von $N(s)$ die Pole des offenen Kreises sind. Hierfür kann man folgenden Zusammenhang zeigen [8].

Theorem 5.30 (Hsu-Chen Theorem).

Für die Rückführdifferenzfunktion $F(s)$ der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises aus Abbildung 5.3 eines nicht sprungfähigen Systems gilt in Pol-Nullstellenform (Definition 3.34)

$$F(s) = k \frac{\prod_{j=1}^n (s - \bar{s}_j)}{\prod_{j=1}^n (s - s_j)}, \quad (5.25)$$

wobei $\bar{s}_j$ die Pole des geschlossenen Kreises und s_j die Pole des offenen Kreises bezeichnen. Weiter bezeichne n^+ die Anzahl der Pole des offenen Kreises mit positiven Realteil, und $\bar{n}^+$ die Anzahl der Pole des geschlossenen Kreises mit positiven Realteil.

Abstrakt bildet die Rückführdifferenzfunktion also den Quotienten aus dem charakterischen Polynom des geschlossenen und offenen Kreises.

Bemerkung 5.31

Wie bei der inneren Stabilität sollte $s_j \neq \bar{s}_k$ gelten, da sich diese sonst kürzen. Beachte ebenso, dass die genannte Gleichheit nur bei nicht sprungfähigen Systemen gilt, also

$$\text{grad}(Z(s)) < \text{grad}(N(s))$$

gilt (vergleiche Theorem 3.13).

Aufbauend aus Theorem 5.30 generieren wir nun eine sogenannte *Nyquistkurve* $\mathcal{D}$ als Halbkreis mit Radius R , der so gewählt wird, dass sie alle Pole in der rechten komplexen Halbebene umfasst. Die Nyquistkurve setzt sich dann zusammen aus

- der Strecke von $s = i \cdot 0$ bis $s = i \cdot R$,
- dem Halbkreis im Uhrzeigersinn bis $s = -i \cdot R$, und
- der Strecke von $s = -i \cdot R$ bis $s = i \cdot 0$.

In Abbildung 5.4 ist dies schematisch dargestellt.

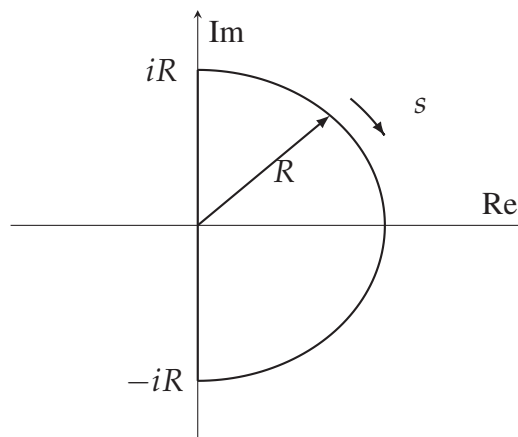


Abbildung 5.4.: Nyquistkurve $\mathcal{D}$

Alle auf $\mathcal{D}$ liegenden Punkte bilden den Definitionsbereich, welche nun mittels der Rückführdifferenzfunktion $F(s)$ abgebildet und in der komplexen Ebene dargestellt werden. Für die Darstellung können wir bestimmte Regionen einfach abbilden:

Korollar 5.32

Für eine gegebene Rückführdifferenzfunktion $F(s)$ eines nicht sprungfähigen Systems $G_S(s)$ werden die Punkte s mit $|s| = R$ für hinreichend großes R auf $F(s) = 1$ bzw. $G_S(s) = 0$ abgebildet.

Beweis. Folgt aus Pol-Nullstellen-Form (5.25) für hinreichend großes R . $\square$

Dann erhalten wir das Nyquist Diagramm aus der Ortskurve (vergleiche Definition 3.30). Hierbei stellen wir Betrag und Phase wie in Theorem 3.16 eingeführt

$$|G(s)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(G(s)))^2 + (\operatorname{Im}(G(s)))^2} \quad (5.26)$$

$$\phi_G(s) = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(G(s))}{\operatorname{Re}(G(s))} \right). \quad (5.27)$$

für die Frequenzen $s \in \mathcal{D}$ dar. Dann gilt folgender Zusammenhang [7]:

Theorem 5.33 (Nyquist Kriterium).

Gegeben sei die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $G_g(s)$ aus Abbildung 5.3 mit Rückführdifferenzfunktion $F(s) = 1 + G_0(s)$. Dann ist der geschlossene Kreis genau dann E/A stabil, wenn die Ortskurve

$$F(\mathcal{D}) = \{x \in \mathbb{C} \mid x = F(s), s \in \mathcal{D}\} \quad (5.28)$$

den Ursprung $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt.

Im Fall eines nicht-sprungfähigen Systems können wir eine entsprechend eingeschränkte, aber handlicher Version auf der Transferfunktion $G_0(s)$ aufbauen. Hier gilt:

Theorem 5.34 (Nyquist Kriterium für nicht-sprungfähige Systeme).

Für einen gegebenen offenen Kreis mit Übertragungsfunktion $G_0(s)$ ist der geschlossene Kreis genau dann E/A stabil, wenn die Ortskurve $F(i\omega)$ für $\omega \in]-\infty, \infty[$ den Punkt $-1 + i0$ der komplexen Ebene $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt.

Beweis. Folgt direkt aus dem Shift von -1 von $F(s)$ zu $G_0(s)$. $\square$

Auch dieses Ergebnis können wir weiter vereinfachen, sofern der offene Kreis bereits stabil ist. Hierfür gilt:

Theorem 5.35 (Nyquist Kriterium für stabilen offenen Kreis).

Aus einem stabilen offenen Kreis mit Übertragungsfunktion $G_0(s)$ folgt E/A Stabilität des geschlossenen Kreis genau dann, wenn die Ortskurve $F(i\omega)$ für $\omega \in]-\infty, \infty[$ den Punkt $-1 + i0$ der komplexen Ebene nicht umschließt.

Beweis. Folgt direkt auf Theorem 5.34 mit $n^+ = 0$. $\square$

Wir wollen nun das Nyquist Kriterium auf unser bekanntes Feder-Masse-Dämpfer System anwenden

Aufgabe 5.36 (Nyquist Kriterium für Feder-Masse-Dämpfer System mit Rückführung)

Betrachte wieder das Feder-Masse-Dämpfer System aus Aufgabe 5.11 mit P-Glied. Werte das Nyquist Kriterium aus. Ist eine Verstärkung für das P-Glied wählbar, so dass der geschlossene Kreis instabil wird?

Lösung zu Aufgabe 5.36: Aus der Übertragungsfunktion des Systems

$$G_S(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2}.$$

zusammen mit dem P-Regler

$$G_R(s) = K_{P2}$$

ergibt

$$G_0(s) = \frac{K_{P2} \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \cdot s + \omega_0^2}.$$

Wir erhalten den Betrag

$$|G_0(i\omega)| = \frac{K_{P2} \cdot \omega_0^2}{\sqrt{(\omega - \omega_0^2)^2 + (2\omega_0 \cdot \zeta \cdot \omega)^2}}$$

und Phase

$$\phi_{G_0}(i\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\omega_0 \cdot \zeta \cdot \omega}{\omega - \omega_0^2} \right).$$

Die Ortskurven für mehrere Parameter $K_P \in \{0.5, 1, 2, 3\}$ sind in Abbildung 5.5 skizziert. Keine der Ortskurven umschließt den Punkt $-1 + i0$.

Da die Verstärkung K_{P2} nur auf den Betrag wirkt und die Phase nie die negative reelle Achse schneidet, kann keine Verstärkung existieren, für die der Punkt $-1 + i0$ umschlossen und das System damit instabil wird.

Die Zusatzinformation, die wir nun aus dem Nyquist Kriterium erhalten, ist neben der Veranschaulichung als Graphik insbesondere die Aussage, ob und bei welchen gewählten Parameter-

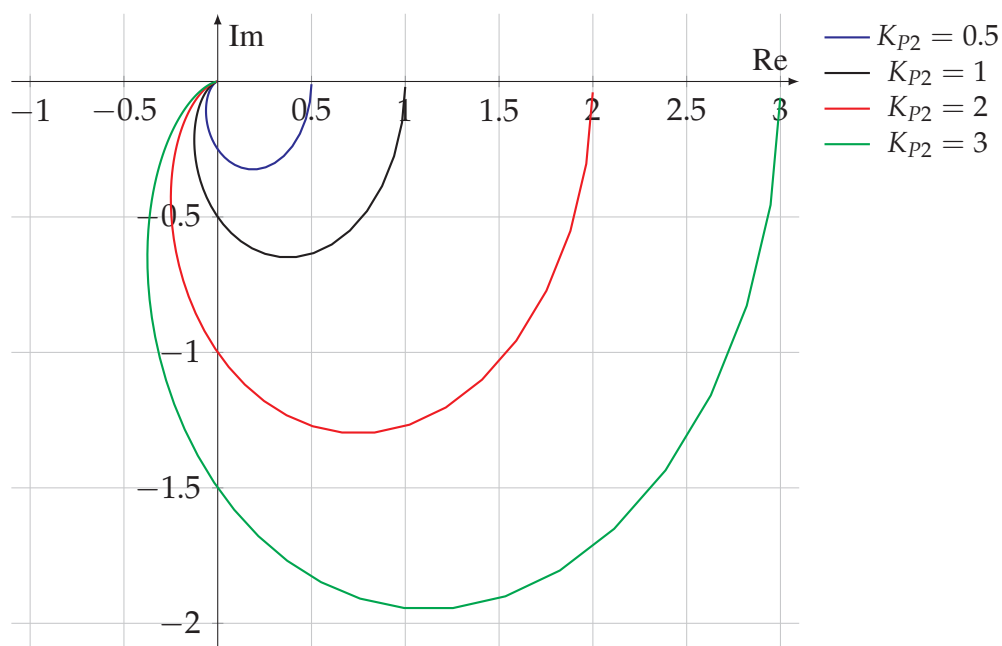


Abbildung 5.5.: Nyquistkurven für Feder-Masse-Dämpfer System

werten ein Regelkreis instabil ist. Wie die Beispielaufgabe 5.36 zeigt, können dabei auch allgemeingültige Aussagen abgeleitet werden. Dabei sind wir nicht auf P-Glieder beschränkt, sondern können jedwede Kombination aus Basiselemente und deren Parametern benutzen. Mit zunehmender Anzahl an Parametern wird das Verfahren allerdings entsprechend komplex.

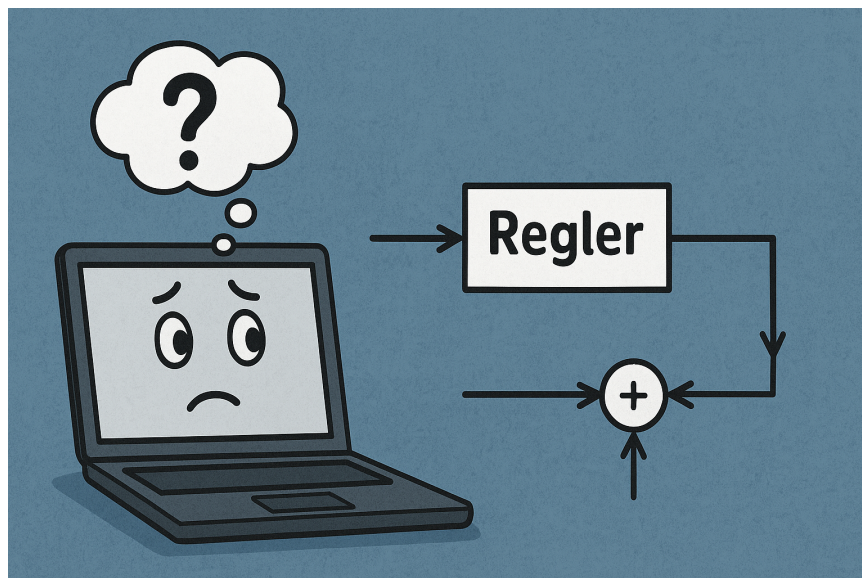
Abschließend fasst Tabelle 5.5 die Stabilitätskriterien zusammen.

Tabelle 5.5.: Ziele und Eigenschaften der Stabilitätskriterien für Regelkreise

Kriterium	Ziele	Eigenschaften
Zustandsstabilität	Betrachtet Zustände	Auswertung im Zeitbereich
E/A Stabilität	Bildet Eingang auf Ausgang	Übergang Zeit-/Frequenzbereich
Hurwitz	Fokussiert auf Realteile der Pole	Berechnet per Determinante
Routh	Fokussiert auf Realteile der Pole	Berechnet Polstellen iterativ
Nyquist	Stellt Ortskurve dar Basiert auf offenem Kreis	Graphische Veranschaulichung Adressiert Systemeigenschaften

KAPITEL 6

REGLERENTWURF



Generiert mit chatgpt.com

In theory, there is no difference between theory and practice. In practice, there is.

Benjamin Brewster

6.1. Reglerstruktur

Wir wollen uns nun mit dem Entwurf von Reglern auseinandersetzen. Hierfür nutzen wir die in Abschnitt 3.4 eingeführte Klassifikation vom Element zur Strukturierung. Die sogenannte *Reglerstruktur* definiert die Art des verwandten Reglergesetzes und stellt eine Übertragungsfunktion

dar. Wie in den vorangegangenen Kapiteln können wir Eigenschaften der Regler-Übertragungsfunktion im Frequenzgang bzw. im Zeitbereich analysieren. Wir führen hier zunächst den allgemeinen PID Regler ein:

Definition 6.1 (PID Regler).

Wir nennen die Übertragungsfunktion $G_{\text{PID}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$G_{\text{PID}}(s) := K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s \right) \quad (6.1)$$

PID Regler mit Proportionalkonstante K_P , Integrierzeitkonstante K_I und Differenzierverstärkung K_D . Dabei wird $T_I = \frac{K_P}{K_I}$ *Nachstellzeit* und $T_D = \frac{K_D}{K_P}$ *Vorhaltezeit* genannt.

Die Terme Nachstellzeit und Vorhaltezeit müssen wir dabei für den Regler als ein zu betrachtendes System interpretieren, d.h. für die Übertragungsfunktion $G_{\text{PID}}(s)$. Dann beschreibt die Nachstellzeit die Zeit, die das System nach einer Störung bzw. Änderung der Führungsgröße benötigt, um wieder in einen stabilen, stationären Zustand zu gelangen. Die Vorhaltezeit T_D hingegen beschreibt den Zeitbereich direkt nach einer Störung bzw. Änderung der Führungsgröße, bevor es zu einer Reaktion am Ausgang kommt.

Bemerkung 6.2

In der Literatur wird zwischen Nachstellzeit und Ausregelzeit (vgl. Abschnitt 4.3) unterschieden. Die Nachstellzeit ist durch die lineare Approximation $T_I = \frac{K_P}{K_I}$ entlang der Steigung im Frequenzbereich gegeben, wohingegen die Ausregelzeit t_ε durch den Eintritt in die Umgebung des Arbeitspunkts im Zeitbereich definiert ist.

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich erhält man folgenden Ausdruck des PID Reglers:

Definition 6.3 (PID Regler Zeitbereich).

Für eine Regelabweichung $e(t)$ ist der PID Regler (6.1) durch

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_P \cdot T_D \frac{de(t)}{dt} \quad (6.2)$$

im Zeitbereich gegeben.

Der PID Regler setzt sich aus den drei Elemente des P-, I- und D-Glieds additiv zusammen und weist damit alle deren Eigenschaften auf. Diese wollen wir hier aus Abschnitt 3.4 kurz wiederholen:

- P-Glied: Dieser Anteil zielt darauf ab, proportional zur Abweichung die Stellgröße zu gestalten. D.h. je größer die Abweichung ist, desto größer wird die Stellgröße. Mit dem P-Glied kann eine große Abweichung schnell reduziert werden. Wie wir in den vorangegangenen Beispielen aber gesehen haben, wird die Abweichung nicht immer zu Null geführt.
- I-Glied: Um eine dauerhafte Abweichung zu verhindern, kann das I-Glied genutzt werden. Durch das I-Glied wird die Stellgröße solange verändert, wie eine Abweichung auftritt. D.h. insbesondere, dass das I-Glied die Stellgröße genau dann nicht verändert, wenn $e(t) = 0$ gilt.
- D-Glied: Der letzte Anteil zielt auf die Geschwindigkeit einer Abweichung statt deren Wert ab. Das D-Glied reagiert proportional zu Abweichungsänderung, d.h. ändert sich die Abweichung stark, so wird die Stellgröße stark geändert. Beachte, dass dies auch dann gilt, wenn die Abweichung noch sehr klein ist. Das D-Glied reagiert somit z.B. bereits bei Sensorfehlern, was zu ungewolltem Verhalten führen kann und berücksichtigt werden muss.

Durch Nullsetzen einzelner Parameterwerte im PID Regler können wir Spezialfälle generieren. Dies ist für die industrielle Praxis wichtig, da wir dort (quasi) ausschließlich PID Regler verbauen und durch Parametrierung auf die Anwendung anpassen. Wichtige Fälle sind

$$G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} \right) \quad \text{PI Regler} \quad (6.3)$$

$$G_{PD}(s) = K_P + K_D \cdot s = K_P (1 + T_D \cdot s) \quad \text{PD Regler} \quad (6.4)$$

$$G_P(s) = K_P \quad \text{P Regler} \quad (6.5)$$

$$G_I(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{K_P}{T_I \cdot s} \quad \text{I Regler} \quad (6.6)$$

Bemerkung 6.4

Beachte, dass physikalisch ein reines D-Glied nicht realisierbar ist (vergleiche komplexere Glieder in Abschnitt 3.4). In der Praxis wird daher ein DT_1 -Glied

$$G_{DT_1}(s) = K_P \cdot \frac{T_D \cdot s}{T_1 \cdot s + 1}$$

mit Zeitkonstante $T_1 \ll T_D$ zur Erstellung eines PT_1 -Glied genutzt.

Aus den Eigenschaften der Elemente des PID Reglers können wir direkt Richtlinien für die Wahl der Reglerstruktur ableiten. Die Struktur hängt dabei von

1. Güteanforderungen an den geschlossenen Kreis, und

2. Eigenschaften des zu regelnden Systems ab.

Daher beschränken sich die Richtlinien auf die Struktur und wir orientieren uns an den bereits bekannten Fehlerbildern aus Abschnitt 4.3 der stationären Genauigkeit, der Ausregelzeit und der Regelfläche.

- Um stationäre Genauigkeit zu erhalten, muss entweder das System selbst oder der Regler einen I-Anteil aufweisen.
- I-Glieder reagieren langsam und nicht sprungförmig. Soll eine Abweichung schnell kompensiert werden, so muss das I-Glied durch ein P- oder D-Glied ergänzt werden.
- P- und D-Glieder reagieren sehr schnell auf Änderungen in der Abweichung. Daher können diese Glieder zu Instabilität des geschlossenen Kreises führen, was insbesondere für das D-Glied gilt. Da das D-Glied hochfrequente Änderungen sehr stark verstärkt, sollten wir diesen nur dann einsetzen, wenn Messgrößen gut gefiltert sind.

Aus dem zu regelnden System heraus können wir dessen Eigenschaften zusätzlich durch Korrekturen ändern. Hierfür definieren wir:

Definition 6.5 (Korrekturglied).

Wir nennen die Übertragungsfunktion

$$G_{P\uparrow}(s) = \frac{T_D \cdot s + 1}{T \cdot s + 1}, \quad T < T_D \quad (6.7)$$

$$G_{P\downarrow}(s) = \frac{T_D \cdot s + 1}{T \cdot s + 1}, \quad T > T_D \quad (6.8)$$

phasenanhebendes bzw. phasenabsenkendes Korrekturglied.

Die Korrekturglieder sorgen im Bodediagramm dafür, dass die Phase zwischen den Frequenzen $1/K_D$ und $1/T$ angehoben bzw. abgesenkt wird. Die Phasenabsenkung wirkt wie in Abbildung 6.1 gezeigt wie ein differenzierendes Glied in diesem Bereich, die Phasenanhebung wie ein integrierendes Glied.

Auf Basis des Bode Diagramms können wir für diese Glieder folgern:

- Phasenanhebende Korrekturglieder wirken differenzierend, weisen jedoch bei hohen Frequenzen keine unendlich große Verstärkung wie D-Glieder auf. Eine Reaktion des Systems kann damit in bestimmten Frequenzbereichen beschleunigt werden.
- Phasenabsenkende Korrekturglieder wirken integrierend, weisen jedoch bei niedrigen Frequenzen keine große Verstärkung wie I-Glieder auf. Eine dauerhafte Abweichung ist also nicht kompensierbar, aber in bestimmten Frequenzbereichen verbesserbar.

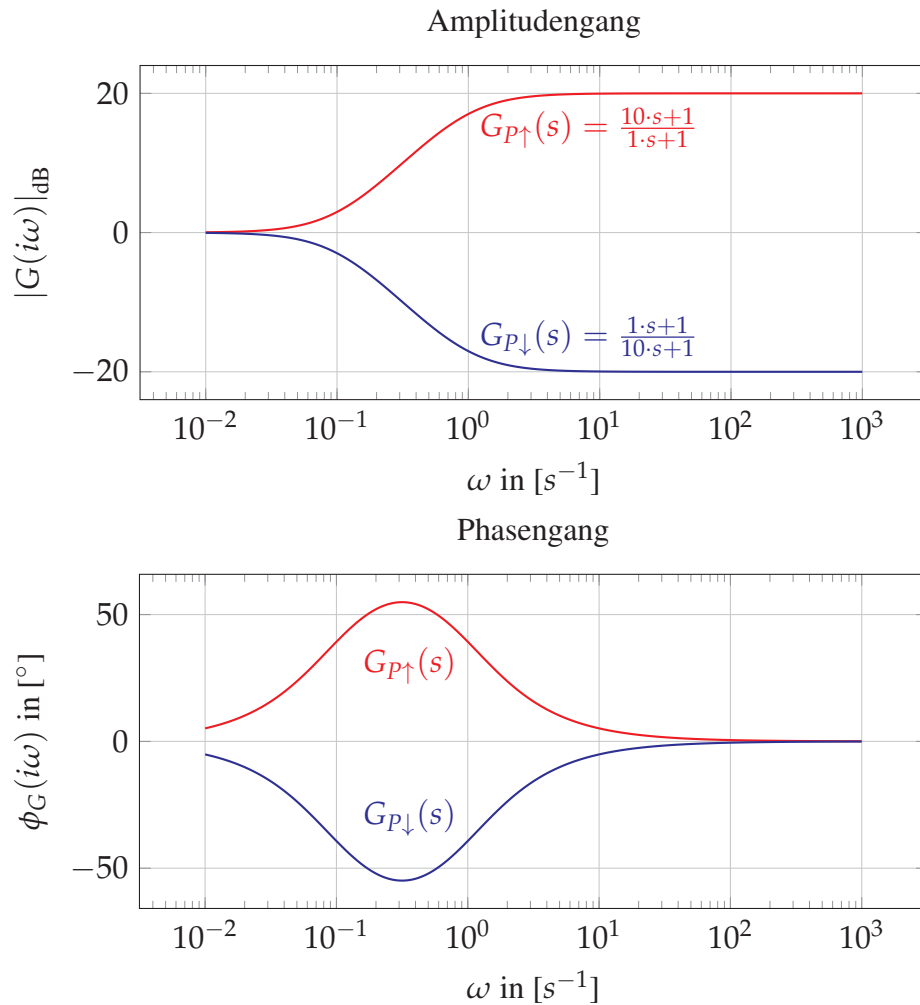


Abbildung 6.1.: Bode Diagramm für phasenanhebende/-absenkende Korrekturglieder

Daraus ergeben sich die Richtlinien:

Korollar 6.6 (Richtlinien für Reglerentwurf)

Gegeben sei ein System $G_S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und ein Regler $G_R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. **Stationäre Genauigkeit:** Wenn das System keinen I-Anteil aufweist, so muss ein I-Glied in den Regler aufgenommen werden.
2. **Ausregelzeit:** Wenn eine Abweichung im gesamten Frequenzbereich schnell kompensiert werden soll, so muss ein P- oder D-Glied in den Regler aufgenommen werden. Soll nur ein bestimmter Frequenzbereich beschleunigt werden, so kann ein phasenanhebendes Korrekturglied genutzt werden.

3. **Regelfläche:** Soll ein D-Glied aufgenommen werden, so muss ein PT_n Glied zur Filterung aufgenommen werden.
4. **Maximale Überschwingweite:** Sollen für bestimmte Frequenzen überschwingende Lösungen bzw. große Phasenverschiebungen/Instabilität durch ein I-Glied vermieden werden, so kann ein phasenabsenkenden Korrekturglied genutzt werden.

Bemerkung 6.7

In der Literatur spricht man bei Systemen mit bzw. ohne I-Anteil von Systemen ohne bzw. mit Ausgleich. Hat das System proportionales Verhalten, so sehen wir bei endlicher Eingangsänderung eine endliche Ausgangsänderung (System mit Ausgleich). Enthält das System einen I-Anteil, so beobachten wir bei endlicher Eingangsänderung eine unbegrenzt steigende/fallende Ausgangsänderung (System ohne Ausgleich).

In den vergangenen Jahren hat sich die Arbeit beim Reglerentwurf grundlegend geändert. So werden heute bereits standardmäßig die Anteile

- numerische und analytische Bestimmung von Lösungen des offenen / geschlossenen Kreises,
- Verwaltung und Strukturierung von Eingangs- und Ausgangsdaten sowie
- Visualisierung von Ergebnisse

durch Computerprogramme erledigt. Die Arbeit wird sich noch weiter verändern, da es bereits möglich ist

- Abtastungen zur Struktursuche sowie
- Optimierungsverfahren für die Parameterbestimmung

automatisiert einzusetzen. Während all diese Methoden einen quantifizierbaren Fehler aufweisen, sind sie jedoch auf bestimmte Problemklassen eingeschränkt. KI Methoden bzw. Methoden des maschinellen Lernens erlauben eine Vergrößerung dieser Klassen, aktuell sind Ergebnisse nicht bewiesen nachvollziehbar.

Im Folgenden gehen wir auf die drei Hauptklassen des Reglerentwurfs ein, wobei wir uns auf den SISO Fall beschränken werden.

Verweis: Der Reglerentwurf im MIMO Fall sowie für digitale Systeme ist Teil der Veranstaltung Regelungstechnik 2 (Control Engineering 2), die numerische Auslegung wird in der Regelungstechnik 3 (Modern Control Systems) behandelt.

6.2. Experimentelle Auslegung – Wendetangenten

In der experimentellen Auslegung können unterschiedliche Herangehensweise genutzt werden, die aber alle auf der sogenannten *Wendetangente* beruhen. Dabei wird keinerlei Kenntnis der Übertragungsfunktion des Systems $G_S(s)$ vorausgesetzt.

Was verstehen wir nun unter einer Wendetangente? Abbildung 6.2 veranschaulicht dies graphisch.

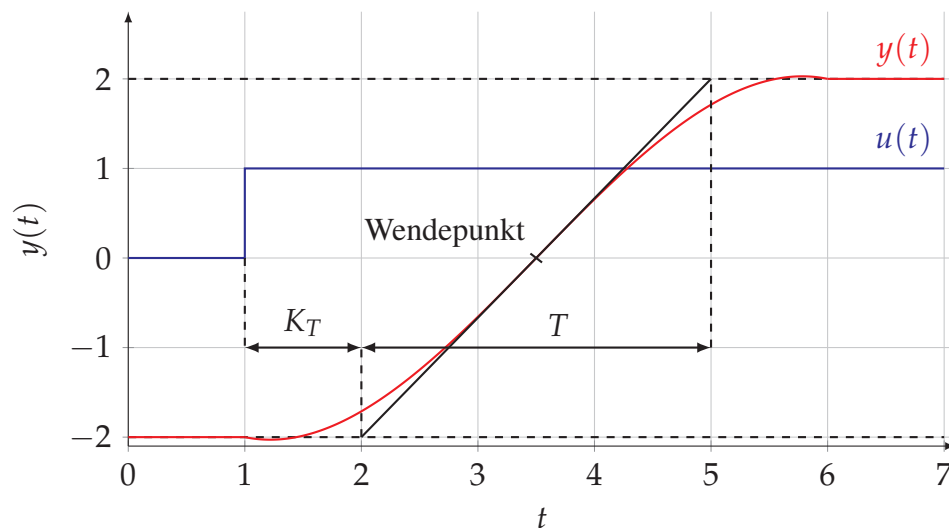


Abbildung 6.2.: Wendetangente einer Systemantwort

Zur Erstellung der Wendetangente nutzen wir das System $G_S(s)$, für das wir einen Regler $G_R(s)$ entwerfen sollen. An unser System legen wir nun einen Sprungeingang $u(t)$ an und messen den Ausgang $y(t)$.

Definition 6.8 (Wendetangente).

Für ein System $G_S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei die zu einem Eingangssignal $u(t)$ gehörige Messung durch $y(t)$ gegeben. Dann bestimmt der Punkt der maximalen Steigung von $y(t)$ den Wendepunkt des Ausgangs. Weiter bezeichne

- K_T die Totzeit zwischen Eingangs- und Ausgangsänderung,
- $K_P = \frac{\max y(t) - \min y(t)}{\max u(t) - \min u(t)}$ die Steigung der Wendetangente, und

- T die Approximationszeitkonstante zwischen den Schnittpunkten von Wendetangente und den Grenzen des Ausgangssignals.

Dies wollen wir nun nutzen, um einen Regler experimentell auszulegen.

6.2.1. Ziegler-Nichols Methode

Das Verfahren von Ziegler-Nichols baut auf den Wendetangenten auf. Zur Standardisierung nutzen wir hierbei statt einem beliebigen Eingangssprung einen Einheitssprung und gehen zudem davon aus, dass das System vorher in Ruhelage 0 ist. Weiter geht das Verfahren davon aus, dass wir das Ausgangssignal durch ein PT_1T_t wie in Abbildung 6.3 gezeigt approximieren können

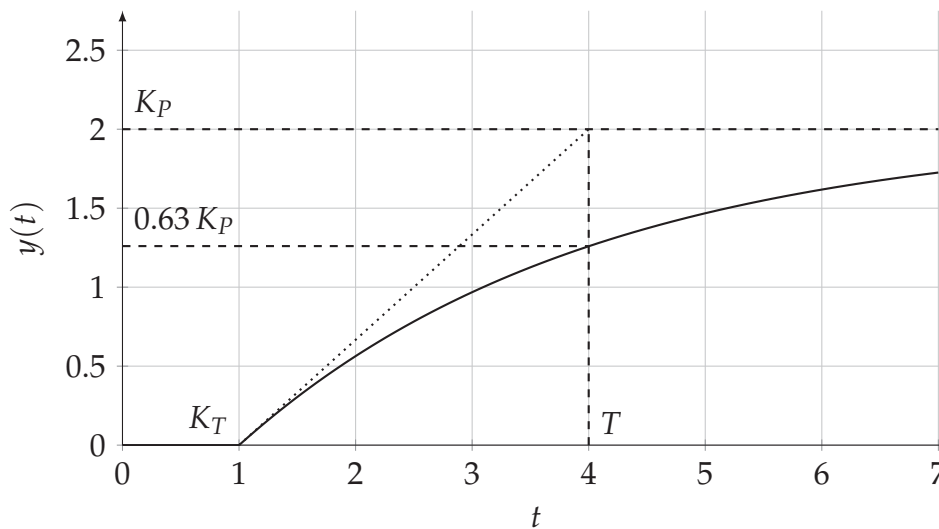


Abbildung 6.3.: Approximation einer Übertragungsfunktion durch PT_1T_t

Wir erhalten hieraus folgende Definition:

Definition 6.9 (PT_1T_t Approximation der Sprungantwort).

Für ein gegebenes System $G_S(s)$ in Ruhelage $y(0) = 0$ nennen wir

$$G_S(s) \approx \frac{K_P}{T \cdot s + 1} \cdot \exp(-K_T \cdot s) \quad (6.9)$$

PT_1T_t Approximation der Sprungantwort.

Aufbauend auf den in der Messung erhaltenen Größen der statischen Verstärkung K_P , der Totzeit K_T und der Zeitkonstanten T können wir die in Tabelle 6.1 gezeigte empirische Berechnung der Reglerparameter nutzen. Hierbei sollte $K_T < 0.5T$ gelten.

Tabelle 6.1.: Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols offener Kreis

Regler	K_P	K_I	K_D
P	$\frac{1}{K_P} \cdot \frac{T}{K_T}$	0	0
PI	$\frac{0.9}{K_P} \cdot \frac{T}{K_T}$	$3.33 \cdot K_T$	0
PID	$\frac{1.2}{K_P} \cdot \frac{T}{K_T}$	$2 \cdot K_T$	$0.5 \cdot K_T$

Für diese Entwurfsgrößen gilt:

Theorem 6.10 (Ziegler-Nichols offener Entwurf).

Ist der offene Kreis durch eine PT_1T_t Approximation (6.9) hinreichend gut dargestellt, so liefern die in Tabelle 6.1 enthaltenen Werte asymptotisch stabiles Verhalten des geschlossenen Kreises. Im Fall des offenen Kreises ohne I-Anteil degradiert der P-Regler zu stabilem Verhalten.

Die Werte aus Tabelle 6.1 sind empirisch und so festgelegt, dass der geschlossene Kreis zwar Überschwingen zeigt aber sich schnell einschwingt.

Aufgabe 6.11 (Heizungsregelung)

Gegeben sei ein Heizungskessel einer Bierbrauanlage mit Temperaturmessung aus Auslass, die durch ein PT_1T_t mit

$$G_S(s) \approx \frac{K_P}{T \cdot s + 1} \cdot \exp(-K_T \cdot s) = \frac{1.4}{126 \cdot s + 1} \cdot \exp(-10.8 \cdot s)$$

approximiert wird. Entwerfe nach Ziegler-Nichols Regler und interpretiere die Ergebnisse.

Lösung zu Aufgabe 6.11: Für den P-/PI-/PID-Regler erhalten wir

$$\begin{aligned} G_R(s) &= \frac{1}{1.4} \cdot \frac{126}{10.8} = 8.33 \\ G_R(s) &= \frac{0.9}{1.4} \cdot \frac{126}{10.8} + \frac{3.33 \cdot 10.8}{s} = 7.5 + \frac{36}{s} \\ G_R(s) &= \frac{1.2}{1.4} \cdot \frac{126}{10.8} + \frac{2 \cdot 10.8}{s} + 0.5 \cdot 10.8 \cdot s = 10 + \frac{21.6}{s} + 5.4 \cdot s \end{aligned}$$

Als Sprungantwort erhalten wir die Lösungsverläufe aus Abbildung 6.4. Da das System G_S keinen I-Anteil aufweist, war zu erwarten, dass der P-Regler eine stationäre Ungenauigkeit aufweist. Diese wird durch den PI und PID-Regler behoben. Der PID-Regler zeigt zudem eine schnellere Ausregelzeit mit leicht niedrigerer maximaler Überschwingweite.

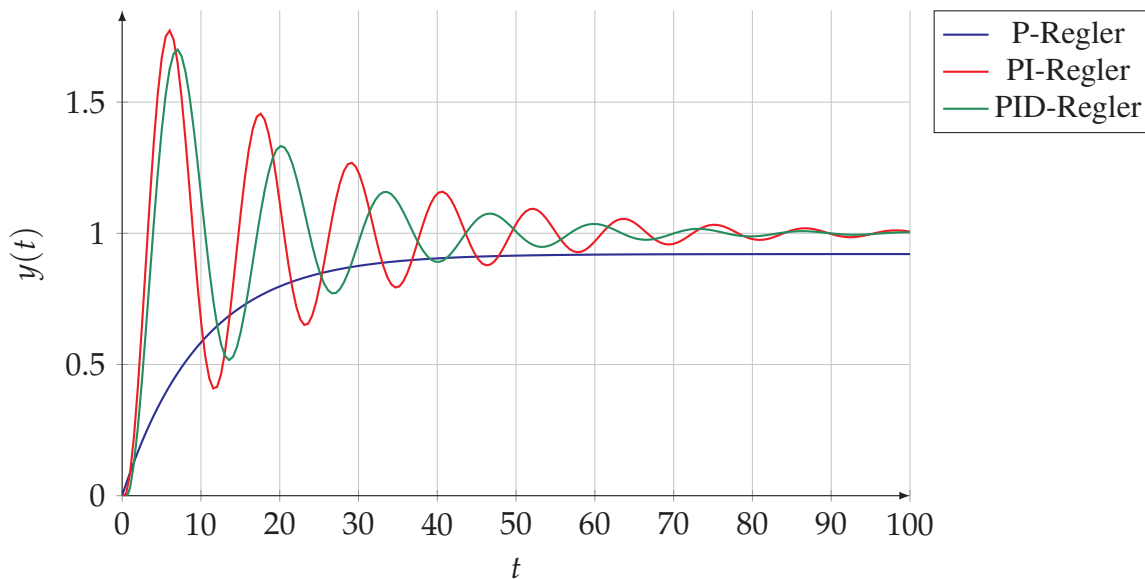


Abbildung 6.4.: Lösungsverlauf für verschiedene Regler nach Ziegler-Nichols

Nun könnten wir aufbauend auf dem ersten Entwurf des Reglers die Parameter anpassen, um bestimmte Beurteilungskriterien besser zu erfüllen.

Alternativ zum Aufbau auf dem offenen Kreis, also rein der Übertragungsfunktion $G_S(s)$, können wir den Reglerentwurf auch auf dem geschlossenen Kreis aufbauen. Hierzu erinnern wir uns an unser Beispiel des E/A-stabilen Feder-Masse-Dämpfer Systems aus Aufgabe 5.13.

Aufgabe 6.12 (Feder-Masse-Dämpfer System in E/A Stabilität)

Bestimme für das Feder-Masse-Dämpfer System aus Aufgabe 5.11 mit P-Regler die Verstärkung K_{P2} , für die das geregelte System rein imaginäre Pole aufweist (also BIBO stabil ist, jedoch nicht asymptotisch stabil).

Lösung zu Aufgabe 6.12: Aus der Lösung von Aufgabe 5.13 erhalten wir die Pole

$$s_{1,2} = \frac{-2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta \pm \sqrt{(2 \cdot \omega_0 \cdot \zeta)^2 - 4\omega_0^2(1 + K_{P2})}}{2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - (1 + K_{P2})}.$$

Diese sind rein imaginär genau dann, wenn $\zeta^2 = 1 + K_{P2}$ auftritt.

Der in Aufgabe 6.12 betrachtete Fall wird auch als *kritischer Fall* bezeichnet. Als Resultat erhalten wir, dass der geschlossene Kreis wie in Abbildung 6.5 gezeigt schwingt.

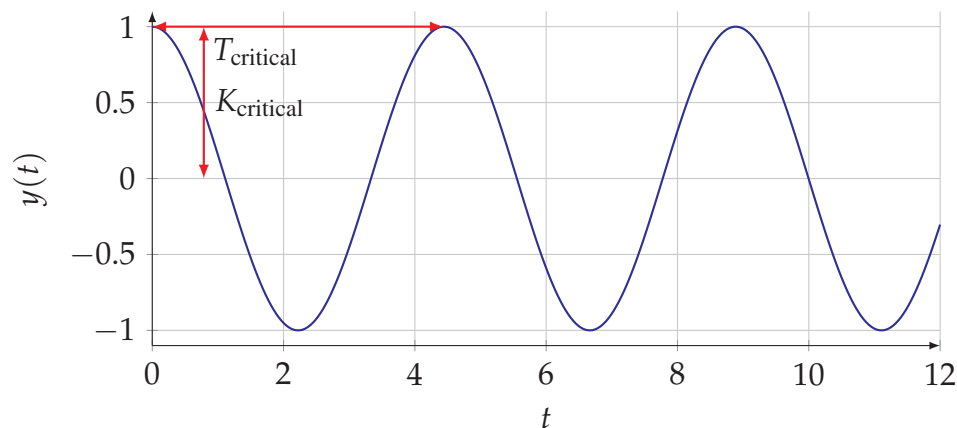


Abbildung 6.5.: Kritischer Fall eines PT₂ mit P-Glied

Für diesen kritischen Fall erhalten wir Informationen zur kritischen Verstärkung sowie der zugehörigen Periodenlänge, die über die PT₁T_t Approximation der Sprungantwort hinausgehen.

Definition 6.13 (Kritische Verstärkung/Periodenlänge).

Für ein System $G_S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit P-Regler $G_R(s)$ bezeichnen wir

- K_{critical} als kritische Verstärkung und
- T_{critical} als kritische Periodenlänge

wenn das geregelte System schwingt und BIBO stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

Bemerkung 6.14

Beachte, dass in der Praxis die Übertragungsfunktion des Systems $G_S(s)$ nicht gegeben sein muss. Stattdessen können wir sukzessive den Reglerparameter K_P erhöhen, bis das System in Schwingung gerät. Dies sollte nur für solche Systeme umgesetzt werden, die gefahrlos in den kritischen Bereich gebracht werden können.

Analog zum offenen Kreis können wir den Entwurf wie folgt umsetzen:

Theorem 6.15 (Ziegler-Nichols geschlossener Entwurf).

Sind kritische Verstärkung $K_{critical}$ und Periodenlänge $T_{critical}$ für einen geschlossenen Kreis mit P-Regler bestimmt, so liefern die in Tabelle 6.2 enthaltenen Werte asymptotisch stabiles Verhalten des geschlossenen Kreises. Im Fall des offenen Kreises ohne I-Anteil degradiert der P-Regler zu stabilem Verhalten.

Beachte, dass Theorem 6.15 NICHT voraussetzt, dass die Übertragungsfunktion des Systems $G_S(s)$ oder des geschlossenen Kreises bekannt sein muss.

Tabelle 6.2.: Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols geschlossener Kreis

Regler	K_P	K_I	K_D
P	$0.5 \cdot K_{critical}$	0	0
PI	$0.45 \cdot K_{critical}$	$0.85 \cdot T_{critical}$	0
PID	$0.6 \cdot K_{critical}$	$0.5 \cdot T_{critical}$	$0.12 \cdot T_{critical}$

6.2.2. Cohen-Coon Methode

Alternativ zu Ziegler-Nichols kann auch die Cohen-Coon Methode angewandt werden. Der Ansatz beider Verfahren ist identisch für Systeme, die durch ein $PT_1 T_t$ Glied approximiert werden können. Im Gegensatz zu Ziegler-Nichols toleriert die Cohen-Coon Methode auch größere Totzeiten bis zu $K_T < 2T$.

Tabelle 6.3.: Reglereinstellung nach Cohen-Coon

Regler	K_P	K_I	K_D
P	$\frac{1}{K_P} \cdot \frac{T}{K_T} \cdot \left(1 + \frac{K_T}{3T}\right)$	0	0
PI	$\frac{0.9}{K_P} \cdot \frac{T}{K_T} \cdot \left(0.9 + \frac{K_T}{12T}\right)$	$K_T \cdot \frac{30+3 \cdot \frac{K_T}{T}}{9+20 \cdot \frac{K_T}{T}}$	0
wird auf der nächsten Seite fortgesetzt			

Tabelle 6.3 – fortgesetzt von der vorherigen Seite

Regler	K_P	K_I	K_D
PID	$\frac{1,2}{K_P} \cdot \frac{T}{K_T} \cdot \left(1,35 + \frac{K_T}{15T}\right)$	$K_T \cdot \frac{32+6 \cdot \frac{K_T}{T}}{13+8 \cdot \frac{K_T}{T}}$	$K_T \cdot \frac{4}{11+2 \cdot \frac{K_T}{T}}$

Die Anwendungsgebiete der beiden empirischen Reglerentwürfe unterscheiden sich auf Basis der Totzeiten. Durch die Voraussetzung geringer Totzeit ist die Ziegler-Nichols Methode bei mechatronischen Systemen weit verbreitet, wohingegen Cohen-Coon bei verfahrenstechnischen Anwendungen eingesetzt wird.

Bemerkung 6.16

Beachte, dass der Entwurf nach Cohen-Coon aggressiver in seinen P- und D-Anteilen ist. Daher ist dieser Ansatz auch anfälliger gegenüber Rauschen in Messwerten, was potentiell zu Instabilität führt.

Appendices

ANHANG A

VORLAGEN

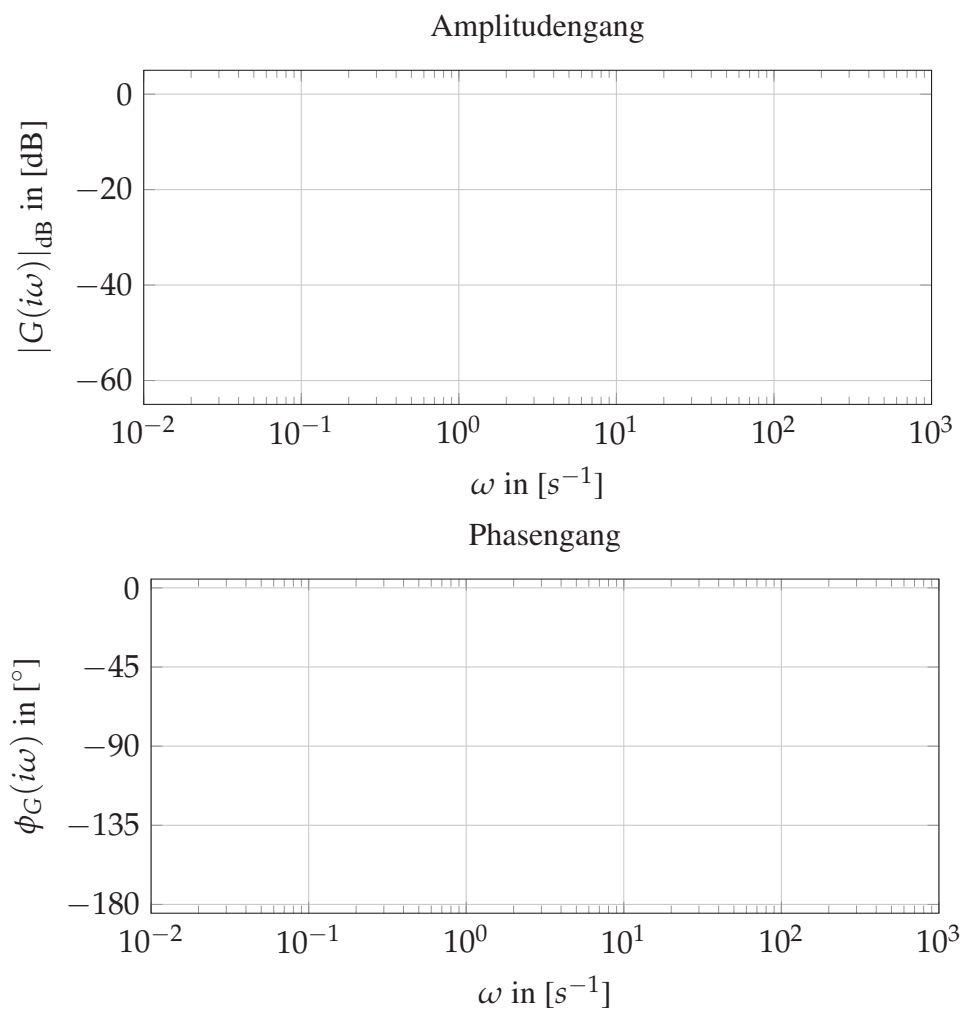


Abbildung A.1.: Vorlage Bode Diagramm in [dB]

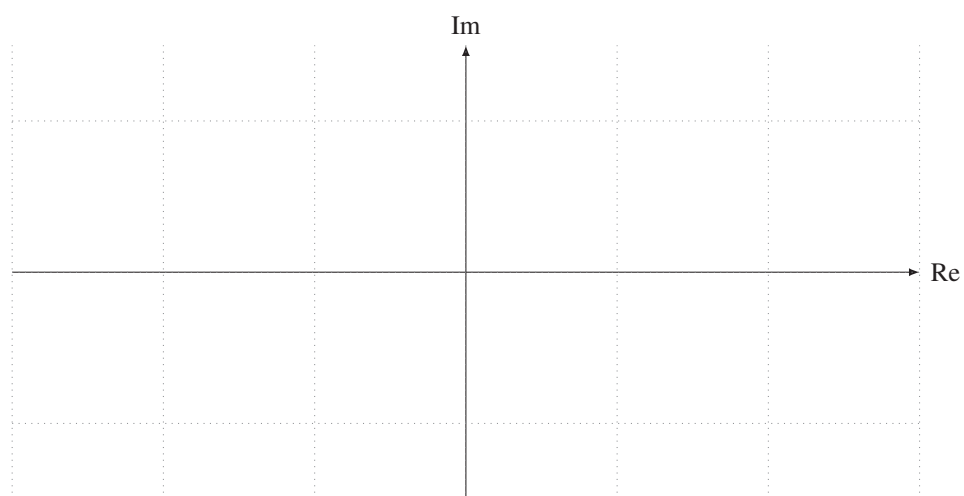


Abbildung A.2.: Vorlage Ortskurve

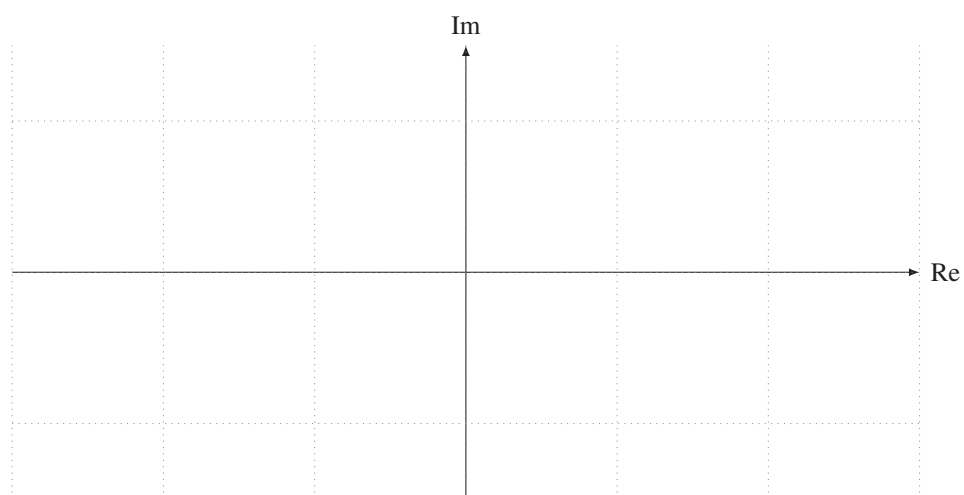


Abbildung A.3.: Vorlage Pol-Nullstellen Diagramm

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN IEC 60050-351 Internationales Elektrotechnisches Wörterbuch Teil 351: Leittechnik (IEC 60050-351:2014-09)*. Beuth, 2014. <http://dx.doi.org/10.31030/2159569>
- [2] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. 13. überarbeitete Auflage. VDE-Verlag, 2022
- [3] FORSTER, Otto: *Analysis 2*. Vieweg+Teubner, 2010. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8103-8_12
- [4] HURWITZ, A.: Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt. In: *Mathematische Annalen* 46, No. 2, pp. 273–284. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01446812>
- [5] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 11. überarbeitete und ergänzte Auflage. Springer, 2016
- [6] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 9. überarbeitete Auflage. Springer, 2016
- [7] NYQUIST, H.: Regeneration theory. In: *The Bell System Technical Journal* 11 (1932), No. 1, pp. 126–147. <http://dx.doi.org/10.1002/j.1538-7305.1932.tb02344.x>
- [8] PORTER, B.: Simple proof of the Hsu-Chen theorem. In: *Electronics Letters* 7 (1971), pp. 163–164. <http://dx.doi.org/10.1049/el:19710107>
- [9] ROUTH, A.: MacMillan and Co.
- [10] SPOERL, Heinrich: *Die Feuerzangenbowle: Eine Lausbüberei in der Kleinstadt*. Albert Langen / Georg Müller Verlag, 1933

- [11] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik I*. Vieweg / Teubner, 2007
- [12] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik II*. Vieweg / Teubner, 2007

Jürgen Pannek
Institut für Intermodale Transport- und Logistiksysteme
Hermann-Blenck-Str. 42
38108 Braunschweig

Im Sommersemester 2025 habe ich die Veranstaltung *Regelungstechnik 1 (Control Engineering 1)* an der Technischen Universität Braunschweig gehalten. Zur Strukturierung der Veranstaltung sowie zur Unterstützung der Studierenden beim Erlernen der Inhalte habe ich diese Unterlagen erstellt. Das Ziel der Veranstaltungsunterlagen ist es, den Studierenden eine kompakte Darstellung der Inhalte mitzugeben.