

Klausur

**Statistische Messdatenauswertung
für Biotechnologen**

im Modul

BP 14 Statistik und Programmieren

13. Februar 2026

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Prüfungsnummer (Zutreffendes bitte ankreuzen):

☐ 1601391

☐ 1601401

Prüfungsraum: BI 84.1

**Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich
in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).**

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/18	/13	/18	/19	/4	/72

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit } y = u(v(x))$

Eulersche Zahl: $e = 2,718281828459045235 \dots$

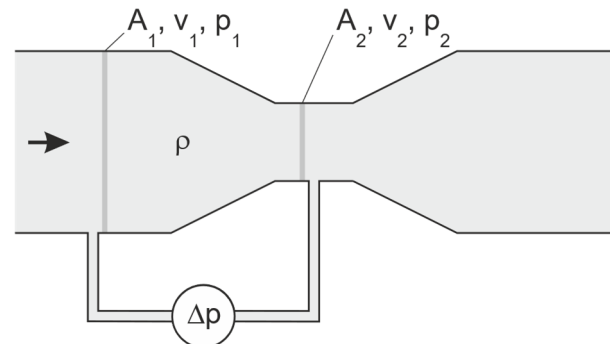
Kreisfläche: $A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

Druck: $1 \text{ Pa (Pascal)} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg/(s}^2 \cdot \text{m)}$

Einheitssprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung: $x_a(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \text{ für } t \geq 0$

1. Aufgabe:

Ein verbreitetes Verfahren zur Durchflussmessung ist das Wirkdruckverfahren. Bei diesem wird in eine durchströmte Rohrleitung ein Drosselement eingebracht, welches den Strömungsquerschnitt verengt (vgl. Abb. 1.1). Hierdurch entsteht eine Druckdifferenz Δp , welche dem Quadrat des Durchflusses proportional ist.



Für die in Abb. 1.1 skizzierte Anordnung mit den wirksamen kreisförmigen Querschnitten A_1 und A_2 lässt sich der Massendurchfluss Q_M durch folgenden Zusammenhang bestimmen:

Abbildung 1.1: Prinzipskizze eines Wirkdruck-Durchflussaufnehmers

$$Q_M = \beta \cdot A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot \rho \cdot \Delta p}$$

Hierin ist A_2 die freie Querschnittsfläche im Bereich der Drossel, β ist der dimensionslose Durchflusskoeffizient des Drosselements, der vom Verhältnis der Querschnitte A_1 und A_2 sowie der Reynolds-Zahl abhängt, ρ ist die Dichte des Mediums und Δp die Druckdifferenz in Folge der Querschnittsverminderung.

Im Folgenden soll der Massendurchfluss Q_M auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen A_2 , β , ρ und Δp einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die freie Querschnittsfläche A_2 wird durch eine kreisförmige Öffnung gebildet, deren Durchmesser vorab zu $D_2 = 20 \text{ mm} \pm 0,02 \text{ mm}$ bei $P = 95\%$ bestimmt wurde.

Der dimensionslose Durchflusskoeffizient β des Drosselements wird vom Hersteller mit $\beta = 0,94 \pm 0,003$ bei $P = 99\%$ und einem Stichprobenumfang von $n_\beta = 25$ angegeben.

Die Dichte ρ des geförderten Mediums beträgt $\rho = 1,08 \text{ g/cm}^3$. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

Der Differenzdruck Δp wird während des Versuchs in insgesamt $n_{\Delta p} = 8$ Einzelmessungen ermittelt. Die dabei erhaltenen Messwerte sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta p / \text{Pa}$	21690	21961	21731	21578	21817	21672	21881	21548

Tabelle 1.1: Messwerte des Differenzdrucks Δp

- a) Berechnen Sie den gesuchten Massendurchfluss Q_M und geben Sie das vollständige Messergebnis in der Einheit kg/s (Kilogramm pro Sekunde) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Die Single-Molecule-Enzymkinetik ist eine biophysikalische Methode, bei welcher die Aktivität, Konformationsänderungen und Reaktionsgeschwindigkeiten einzelner Enzymmoleküle in Echtzeit beobachtet werden. Werden mit dieser Methode aufeinanderfolgende katalytische Umsätze eines Enzyms gemessen, so ist zu erwarten, dass die beobachteten zeitlichen Abstände zweier aufeinanderfolgender Ereignisse einer Exponentialverteilung genügen.

Die Exponentialverteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der nicht-negativen reellen Zahlen. Die Dichtefunktion $h(x)$ der Exponentialverteilung ist durch nachfolgende Gleichung (2.1) definiert:

$$h(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad (2.1)$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$, also die Stammfunktion obiger Dichtefunktion $h(x)$, ist ebenfalls als geschlossene Funktion darstellbar und gemäß nachfolgender Gleichung (2.2) definiert:

$$P(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \quad (2.1)$$

Im Zuge Ihrer Versuchsdurchführung haben Sie $n = 500$ Zeitdauern zwischen jeweils aufeinanderfolgenden Ereignissen ermittelt. Zur weiteren Verarbeitung der Daten haben Sie die in Tabelle 2.1 aufgeführte klassierte Häufigkeitstabelle erstellt.

Zeitdauer / ms	0 bis 100	> 100 bis 200	> 200 bis 300	> 300 bis 400	> 400 bis 500	> 500 bis 600	> 600 bis 700	> 700 bis 800	> 800 bis 900	> 900
Häufigkeit	251	114	57	41	16	10	6	1	1	3

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für die klassierte Zeitdauer zwischen Molekülereignissen

Der Parameter λ der bestpassenden Verteilung kann durch den Kehrwert der mittleren Zeitdauer abgeschätzt werden und ergibt sich für die von Ihnen aufgenommenen Daten zu $\lambda = 0,00652 \frac{1}{\text{ms}}$. Die Dichtefunktion $h(x)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ für eine Exponentialverteilung mit $\lambda = 0,00652 \frac{1}{\text{ms}}$ sind zur Veranschaulichung in Abbildung 2.1 grafisch dargestellt.

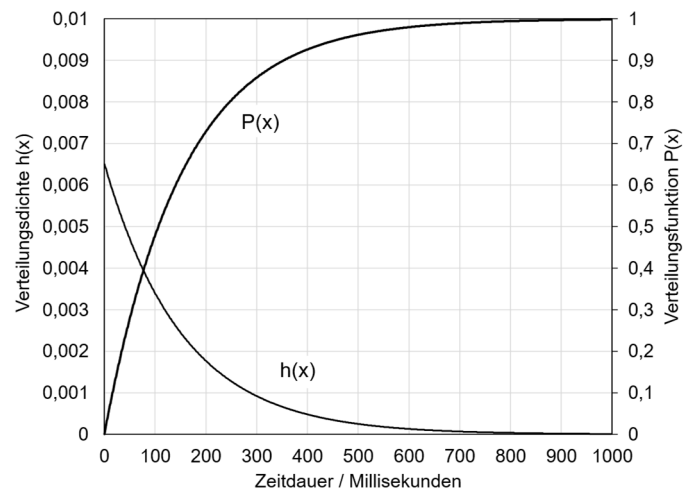


Abbildung 2.1: Dichtefunktion $h(x)$ und Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ einer Exponentialverteilung mit dem

Parameter $\lambda = 0,00652 \frac{1}{\text{ms}}$.

- a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ einer Exponentialverteilung mit dem aus den Messdaten abgeschätzten Parameter $\lambda = 0,00652 \frac{1}{\text{ms}}$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.
- *Fragetyp Zuordnung:* Bei Fragen dieses Typs ist in der gegebenen Matrix von Termen jeder Zeile genau eine Spalte zuzuordnen. Bei Fragen dieses Typs erfolgt die Bewertung zeilenweise und es wird je Zeile nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Spalte zugeordnet wurde.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Drosselblenden für die Durchflussmessung wird im Rahmen der Qualitätssicherung der Durchmesser der kreisförmigen Blendenöffnungen überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 15$ entnommen und der Durchmesser D der Drosselöffnungen ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Durchmessers von $\bar{D} = 24,99$ mm und eine Streuung von $S_D = 0,013$ mm. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

- 3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Drosselblendendurchmessers D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ beträgt für diesen Fall ungefähr:

- a) $D = 24,99 \text{ mm} \pm 0,00552 \text{ mm}$; $P = 99\%$ ☐
- b) $D = 24,99 \text{ mm} \pm 0,00591 \text{ mm}$; $P = 99\%$ ☐
- c) $D = 24,99 \text{ mm} \pm 0,00865 \text{ mm}$; $P = 99\%$ ☐
- d) $D = 24,99 \text{ mm} \pm 0,00881 \text{ mm}$; $P = 99\%$ ☐
- e) $D = 24,99 \text{ mm} \pm 0,00999 \text{ mm}$; $P = 99\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

- 3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des Drosselblendendurchmessers $D = 0,015$ mm betrage (Hinweis: Gilt nur für Aufgabenteil 3.2). Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n , um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Drosselblendendurchmessers auf maximal $\pm 0,005$ mm abschätzen zu können?

- a) $n = 17$ ☐
- b) $n = 25$ ☐
- c) $n = 26$ ☐
- d) $n = 35$ ☐
- e) $n = 38$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Drosselblenden weisen dann einen Durchmesser außerhalb des Intervalls $24,975 \text{ mm} \leq D \leq 25,025 \text{ mm}$ auf?

- a) 8,5% ☐
- b) 12,8% ☐
- c) 73,4% ☐
- d) 87,1% ☐
- e) 99,6% ☐

(Frage typ Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert des Drosselblendendurchmessers betrage $D = 25 \text{ mm}$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_D des Durchmessers dann maximal annehmen, damit 99% der Drosselblenden einen Durchmesser innerhalb des Intervalls von $24,975 \text{ mm} \leq D \leq 25,025$ aufwiesen?

- a) 0,0073 mm ☐
- b) 0,0084 mm ☐
- c) 0,0097 mm ☐
- d) 0,0107 mm ☐
- e) 0,0136 mm ☐

(Frage typ Einfachwahl)

4. Bei einem Hersteller von Küvetten für den Laborbedarf soll die Schichtdicke einer Charge von Küvetten stichprobenartig überprüft werden. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 25$ entnommen und mittels eines taktilen Messverfahrens die Schichtdicke der Küvetten ermittelt. Es soll überprüft werden, ob der Erwartungswert der Schichtdicke mit dem Sollmaß $D_{\text{Soll}} = 10 \text{ mm}$ übereinstimmt.

4.1. Welcher statistische Test ist am besten geeignet, die Frage zu beantworten?

- a) t-Test für Erwartungswert ☐
- b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
- c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
- d) einfache Varianzanalyse (ANOVA) ☐
- e) Chi-Quadrat-Test ☐

(Frage typ Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

- a) einseitige Alternativhypothese ☐
- b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Frage typ Einfachwahl)

5. Anhand von Stichproben der Schichtdicke von auf unterschiedlichen Anlagen hergestellten Küvetten möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben durchführen. Aus den erhobenen Stichproben jeweils vom Umfang $n = 12$ haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Schichtdicken D_x und D_y ermittelt zu $\overline{D}_x = 9,99$ mm und $S_{D_x} = 0,003$ mm sowie $\overline{D}_y = 10,01$ mm und $S_{D_y} = 0,003$ mm.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

- a) $-1,63$ ☐
- b) $-7,07$ ☐
- c) $-12,68$ ☐
- d) $-16,33$ ☐
- e) $-23,09$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

- a) 11 ☐
- b) 12 ☐
- c) 22 ☐
- d) 23 ☐
- e) 24 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben die Wirkung zweier Medikamente zur Gewichtsreduktion vergleichen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 15$. Ihre Nullhypothese lautet, dass die Wirkung der beiden Medikamente sich nicht unterscheidet ($\mu_d = 0$). Sie wählen die zweiseitige Alternativhypothese, dass die Wirkung der Medikamente sich unterscheidet ($\mu_d \neq 0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -3,14$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

- a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt ☐
- b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Größen es sich um intensive Größen handelt!

- a) Brechungsindex ☐
- b) Masse ☐
- c) Druck ☐
- d) spezifischer Widerstand ☐
- e) Zeit ☐
- f) dynamische Viskosität ☐
- g) Länge ☐
- h) Temperatur ☐

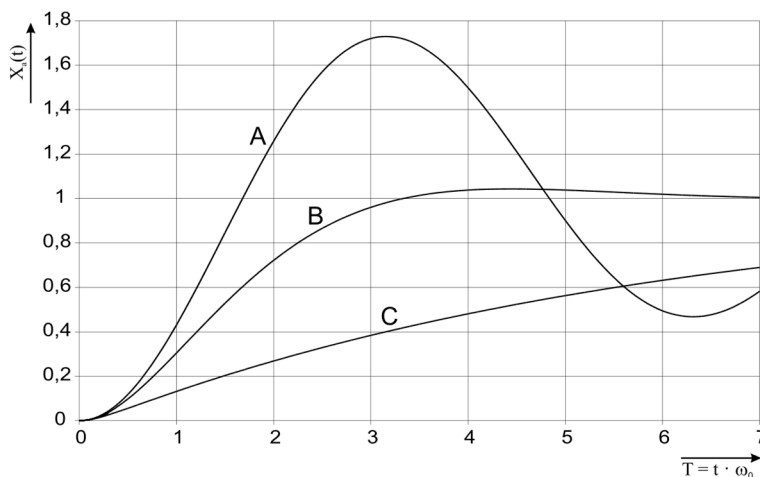
(Frage typ Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

- a) $970 \text{ hPa} + 103 \text{ kPa} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ☐
- b) $10 \text{ mg} + 100 \text{ } \mu\text{g} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ g}$ ☐
- c) $0,8 \text{ TW} + 2000 \text{ GW} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ W}$ ☐
- d) $50 \text{ pF} + 0,5 \text{ nF} = 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ F}$ ☐
- e) $5 \text{ MN} \cdot 2 \text{ cm} = 100 \text{ kNm}$ ☐

(Frage typ Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A , D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



- a) $D_A = 0,1$; $D_B = 0,3$; $D_C = 0,5$ ☐
- b) $D_A = 0,1$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 3$ ☐
- c) $D_A = 0,3$; $D_B = 1$; $D_C = 3$ ☐
- d) $D_A = 2$; $D_B = 1$; $D_C = 0,5$ ☐

(Frage typ Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten $T = 3$ s und dem Übertragungsfaktor $K = 2$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von -10 V auf $+10$ V beaufschlagt. Geben Sie an, nach welcher Zeitdauer t am Ausgang des Systems eine Spannung von etwa $+10$ V anliegt! *Hinweis: Formelsammlung auf Seite 2 beachten!*

- a) 1,39 s ☐
- b) 2,77 s ☐
- c) 3,57 s ☐
- d) 4,16 s ☐
- e) 5,48 s ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Sie beobachten einen Fertigungsprozess, auf den eine große Zahl statistisch unabhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. Durch welche statistische Verteilung lässt sich aller Wahrscheinlichkeit nach die Gesamtabweichung des Prozesses in guter Näherung beschreiben?

- a) Gleichverteilung ☐
- b) Binomialverteilung ☐
- c) Hypergeometrische Verteilung ☐
- d) Normalverteilung ☐
- e) Poissonverteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 30 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $-6 \leq \mu \leq 6$ bei $P = 95\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $-2 \leq \mu \leq 2$ zu reduzieren!

- a) 52 ☐
- b) 90 ☐
- c) 120 ☐
- d) 180 ☐
- e) 270 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Mittels einer hochgenauen Waage bestimmen Sie unter normalen Laborbedingungen den Wägewert von jeweils einem Kilogramm Blei und einem Kilogramm Federn. Welche Aussage hinsichtlich der beiden Wägewerte ist zutreffend?

- a) Die Wägewerte für Blei und Federn unterscheiden sich nicht. ☐
- b) Der Wägewert für das Blei ist höher, als der Wägewert für die Federn. ☐
- c) Der Wägewert für die Federn ist höher, als der Wägewert für das Blei. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Ordnen Sie die nachfolgend genannten Merkmalsausprägungen den zugehörigen Skalenniveaus zu!

	Nominalskala	Ordinalskala	Intervallskala	Verhältnisskala	Absolutskala
Familienstand	☐	☐	☐	☐	☐
Bildungsabschluss	☐	☐	☐	☐	☐
Körpergröße	☐	☐	☐	☐	☐
Intelligenzquotient	☐	☐	☐	☐	☐

(Fragetyp Zuordnung)

15. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die jährliche, selbst zurückgelegte Fahrstrecke in Deutschland ansässiger Autofahrer*innen. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Fahrstrecke beträgt 9800 km; der Modalwert der Fahrstrecke beträgt 9200 km; der arithmetische Mittelwert der Fahrstrecke beträgt 10300 km; der Quartilsabstand der Fahrstrecke beträgt 7800 km; das erste Quartil der Fahrstrecke liegt bei 6100 km. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

- a) Die Hälfte der Autofahrer*innen fährt pro Jahr 9800 km oder mehr. ☐
 - b) Ein Viertel der Autofahrer*innen fährt pro Jahr 13900 km oder mehr. ☐
 - c) Ein Viertel der Autofahrer*innen fährt pro Jahr 6100 km oder weniger. ☐
 - d) Die Hälfte der Autofahrer*innen fährt pro Jahr 10300 km oder mehr. ☐
 - e) Die Spanne der jährlichen Fahrleistungen beträgt 15600 km. ☐
- (Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über statistische Tests korrekt sind!

- a) In experimentellen Wissenschaften können statistische Tests dazu genutzt werden, Hypothesen abzusichern oder begründet zu verwerfen. ☐
- b) Eine Messreihe, die zur Bildung einer Hypothese verwendet wurde, darf nicht für einen Test dieser Hypothese genutzt werden. ☐
- c) Als Fehlentscheidung 2. Art bezeichnet man den Fall, dass als Ergebnis eines statistischen Tests die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl H_0 tatsächlich zutrifft. ☐
- d) Wird für einen statistischen Test ein Signifikanzniveau von 1% gewählt, bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit für die Vermeidung einer Fehlentscheidung 2. Art 99% beträgt. ☐
- e) Die Güte eines statistischen Tests kann durch Vergrößern des Stichprobenumfangs erhöht werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Kurzfragen:

17. Erläutern Sie den Begriff „direkte Messmethode im engeren Sinne“ und nennen Sie ein Beispiel.
18. Von der Qualitätssicherung eines Unternehmens wird mittels eines statistischen Tests überprüft, ob die produzierte Ware den geforderten Spezifikationen entspricht. Dabei wird als Nullhypothese angenommen, dass die Ware die Spezifikation erfüllt. Auf Anweisung des Managements wird die Irrtumswahrscheinlichkeit α für diesen Test von $\alpha = 0,05$ auf $\alpha = 0,01$ reduziert. In der Folge häufen sich die Beschwerden von Abnehmern, die bemängeln, dass der Anteil des Ausschusses an der gelieferten Ware zugenommen habe. Welche Erklärung haben Sie für dieses Phänomen?
19. Ein als ideal angenommenes Dreiecksignal mit einer Periodendauer von 10 ms werde mit einer Abtastrate von 1 kHz digitalisiert. Geben Sie an, ob in diesem Fall das Abtasttheorem nach Shannon erfüllt ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Ende der Kurzfragen

Leerseite

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$

Streuung: $S = \sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j))^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \dots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall

5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x -Wert x^* der y -Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test**t-Test für Erwartungswert**

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist $|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n_x+n_y-2; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2 -Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0 : X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i , so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i , mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
 - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
 - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
 - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α , wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1, 1-\alpha}^2$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1		3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2		1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3		1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4		1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5		1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6		1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7		1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8		1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9		1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10		1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11		1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12		1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13		1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14		1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15		1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16		1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17		1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18		1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19		1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20		1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21		1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22		1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23		1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24		1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25		1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26		1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27		1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28		1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29		1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30		1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40		1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50		1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60		1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70		1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80		1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90		1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100		1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200		1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞		1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2 -Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1		2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2		4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3		6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4		7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5		9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6		10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7		12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8		13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9		14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10		16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11		17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12		18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13		19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14		21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15		22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16		23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17		24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18		26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19		27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20		28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21		29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22		30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23		32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24		33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25		34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26		35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27		36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28		37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29		39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30		40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40		51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50		63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60		74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70		85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80		96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90		107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100		118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Tabelle 1 Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt; \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$

Transformation: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1-1,350 \cdot 10^{-3}$	$1-2,326 \cdot 10^{-4}$	$1-3,167 \cdot 10^{-5}$	$1-3,398 \cdot 10^{-6}$	$1-2,867 \cdot 10^{-7}$	$1-9,866 \cdot 10^{-10}$	$1-1,280 \cdot 10^{-12}$	$1-6,221 \cdot 10^{-16}$	$1-1,129 \cdot 10^{-19}$	$1-7,620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	$\Phi(z)$
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z