Klausur

Statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

im Modul

BP 14 Statistik und Programmieren

27. März 2025

Name: ________________________________

Matrikel-Nr.: ____________________________

Prüfungsraum: ZI 24.1

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____
Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/17	/12	/17	/19	/5	/70

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x)$ mit $y = u\big(v(x)\big)$

Einheitssprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung: $x_a(t) = K\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)$ für $t \geq 0$

Volumen: $1\ \mathrm{L}\ (\text{Liter}) = 1\ \mathrm{dm}^3 = 10^3\ \mathrm{cm}^3 = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$

Stoffmenge: $1\ \mathrm{mol}\ (\text{Mol}) = 6{,}02214076 \cdot 10^{23}/N_A$

1. Aufgabe:

Die Photometrie ist optisches Verfahren, welches die Bestimmung der Konzentration einer gelösten Substanz anhand der Durchstrahlung mit Licht ermöglicht. Dabei nutzt man die Eigenschaft, dass bestimmte Moleküle Licht einer bestimmten Wellenlänge absorbieren. Abhängig vom Ausmaß der Lichtabsorption lässt sich auf die Konzentration der Substanz schließen. Hierdurch können beispielsweise Farbstoffe, Proteine oder andere Moleküle detektiert und ihre Konzentration quantitativ bestimmt werden.

Das Verhältnis zwischen Lichtabsorption und Konzentration folgt dem Lambert-Beer'schen Gesetz, welches umgestellt nach der Stoffmengenkonzentration c wie folgt lautet:

$$c = \frac{E_\lambda}{\varepsilon_\lambda \cdot d}$$

Hierin ist c die gesuchte Stoffmengenkonzentration, E_λ ist die Extinktion, also die Absorbanz des Materials für Licht der Wellenlänge λ, ε_λ ist der dekadische Extinktionskoeffizient bei der Wellenlänge λ und d ist die durchstrahlte Schichtdicke.

Im Folgenden soll die Stoffmengenkonzentration c des Farbstoffs Lycopin auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen E_λ, ε_λ und d einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Den Extinktionskoeffizienten ε_λ bei einer Wellenlänge von $\lambda = 502$ nm ermitteln Sie anhand einer Online-Materialdatenbank zu $\varepsilon_\lambda = 1{,}72 \cdot 10^5\ \mathrm{L/(mol \cdot cm)} \pm 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{L/(mol \cdot cm)}$ bei einer Aussagesicherheit von $P = 98\%$ und sehr großem Stichprobenumfang n_ε.

Die Schichtdicke d resultiert im vorliegenden Fall aus den Abmessungen der verwendeten Küvette und beträgt laut Hersteller $d = 10\ \mathrm{mm} \pm 0{,}01\ \mathrm{mm}$ bei $P = 99\%$ und sehr großem Stichprobenumfang n_d.

Die einheitenlose Extinktion E_λ bei einer Wellenlänge von $\lambda = 502$ nm messen Sie mittels eines Photometers in insgesamt $n_E = 7$ Wiederholungen. Dabei erhalten Sie die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte.

i	1	2	3	4	5	6	7
E_λ / 1	1,21	1,22	1,20	1,20	1,22	1,19	1,21

Tabelle 1.1: Messwerte der Extinktion E_λ

a) Berechnen Sie die gesuchte Stoffmengenkonzentration c und geben Sie das vollständige Messergebnis in der Einheit $\mathrm{mol/L}$ (Mol pro Liter) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Im Rahmen Ihres ehrenamtlichen politischen Engagements sind Sie auf die Aussage gestoßen, dass die Häufigkeit der Einwohnerzahlen deutscher Städte einer Pareto-Verteilung genügen soll. Die Pareto-Verteilung ist eine univariate stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die auf einem rechtsseitig unendlichen Intervall $[x_{min}, \infty)$ definiert ist. Für die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt (mit $x \geq x_{min}$), gilt:

$$P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{x_{min}}{x}\right)^k$$

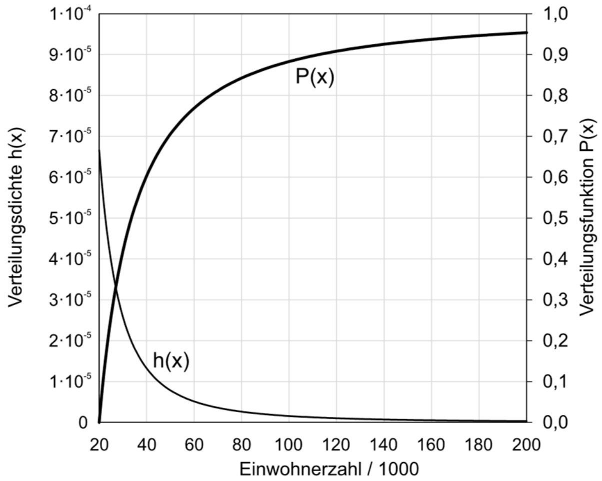


Abbildung 2.1: Pareto-Verteilung mit Parametern $x_{min} = 20.000$ *und* $k = 1,333$

Hierin steht x für einen beliebigen Wert innerhalb des Definitionsbereichs, im vorliegenden Fall also für die Einwohnerzahl, x_{min} ist die Untergrenze des Definitionsbereichs, im vorliegenden Fall also die gewählte Untergrenze der Einwohnerzahl der betrachteten Städte, und k ist ein Parameter der Pareto-Verteilung, welcher bestimmt, wie steil die Verteilung nach rechts abfällt.

Sie entschließen sich, die Hypothese anhand der deutschen Mittel- und Großstädte zu überprüfen. Als Mittelstadt gilt eine Ansiedlung mit mindestens 20.000 Einwohnern, woraus für Ihre Betrachtung ein Definitionsbereich von $[20.000, \infty)$ folgt. Einer Online-Datenbank haben Sie die amtlichen Einwohnerzahlen des Jahres 2023 der insgesamt $n = 705$ deutschen Mittel- und Großstädte entnommen und zu den in Tabelle 2.1 eingetragenen Klassen zusammengefasst.

Einwohnerzahl in Tausend	≥ 20 bis ≤ 30	> 30 bis ≤ 40	> 40 bis ≤ 50	> 50 bis ≤ 60	> 60 bis ≤ 70	> 70 bis ≤ 80	> 80 bis ≤ 90	> 90 bis ≤ 100	> 100
Häufigkeit	301	119	89	45	26	20	13	13	79

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten der klassierten Einwohnerzahlen deutscher Mittel- und Großstädte

Den Parameter k haben Sie im Vorfeld mittels Maximum-Likelihood-Methode anhand der empirischen Daten zu $k = 1,333$ abgeschätzt.

a) Untersuchen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ einer Pareto-Verteilung mit den Parametern $x_{min} = 20.000$ und $k = 1,333$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.
- *Fragetyp Zuordnung*: Bei Fragen dieses Typs ist in der gegebenen Matrix von Termen jeder Zeile genau eine Spalte zuzuordnen. Bei Fragen dieses Typs erfolgt die Bewertung zeilenweise und es wird je Zeile nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Spalte zugeordnet wurde.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Referenzlösungen für die Laboranalytik wird im Rahmen der Qualitätssicherung die Massenkonzentration einer Referenzlösung mit einer Nennkonzentration von $\beta_{nenn} = 100\,\mu g/ml$ überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 12$ entnommen und die Massenkonzentration β der Lösung ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert der Massenkonzentration von $\overline{\beta} = 99{,}96\,\mu g/ml$ und eine Streuung von $S_\beta = 0{,}05\,\mu g/ml$. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Massenkonzentration β für eine Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ beträgt für diesen Fall ungefähr:

a) $\beta = 99{,}96\,\mu g/ml \pm 0{,}0237\,\mu g/ml\,; P = 95\%$ ☐

b) $\beta = 99{,}96\,\mu g/ml \pm 0{,}0259\,\mu g/ml\,; P = 95\%$ ☐

c) $\beta = 99{,}96\,\mu g/ml \pm 0{,}0283\,\mu g/ml\,; P = 95\%$ ☐

d) $\beta = 99{,}96\,\mu g/ml \pm 0{,}0318\,\mu g/ml\,; P = 95\%$ ☐

e) $\beta = 99{,}96\,\mu g/ml \pm 0{,}0342\,\mu g/ml\,; P = 95\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung der Massenkonzentration der Lösung $\beta = 0{,}05\,\mu g/ml$ betrage. Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Massenkonzentration auf maximal $\pm\, 0{,}02\,\mu g/ml$ abschätzen zu können?

a) $n = 27$ ☐

b) $n = 34$ ☐

c) $n = 38$ ☐

d) $n = 42$ ☐

e) $n = 46$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Lösungen weisen dann eine Massenkonzentration innerhalb des Intervalls $99{,}9\ \mu g/ml \leq \beta \leq 100{,}1\ \mu g/ml$ auf?

a) $11{,}8\%$ ☐
b) $14{,}3\%$ ☐
c) $23{,}6\%$ ☐
d) $88{,}2\%$ ☐
e) $99{,}7\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert der Massenkonzentration betrage $\beta = 100\ \mu g/ml$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_β der Massenkonzentration dann maximal annehmen, damit 95% der Lösungen eine Massenkonzentration innerhalb des Intervalls von $99{,}95\ \mu g/ml \leq \beta \leq 100{,}05\ \mu g/ml$ aufwiesen?

a) $0{,}0194\ \mu g/ml$ ☐
b) $0{,}0215\ \mu g/ml$ ☐
c) $0{,}0255\ \mu g/ml$ ☐
d) $0{,}0304\ \mu g/ml$ ☐
e) $0{,}0460\ \mu g/ml$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Ein Hersteller von Zubehör für die Laboranalytik betreibt fünf nominell identische Anlagen zur Herstellung und Abfüllung einer Referenzlösung. Es soll überprüft werden, ob alle fünf Anlagen Lösungen mit übereinstimmendem Erwartungswert der Massenkonzentration produzieren oder ob Grund zu der Annahme besteht, dass mindesten eine Anlage Lösungen mit einem abweichenden Erwartungswert produziert. Hierzu wird in regelmäßigen Abständen aus jeder der fünf Anlagen jeweils eine Stichprobe vom Umfang $n = 8$ entnommen und die Massenkonzentration der Lösungen bestimmt. Die Standardabweichung der Massenkonzentration sei auf allen Anlagen näherungsweise identisch.

4.1. Welcher statistische Test ist am besten geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) einfache Varianzanalyse (ANOVA) ☐
e) Chi-Quadrat-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand von Stichproben der Massenkonzentration von auf unterschiedlichen Anlagen abgefüllten Lösungen möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben durchführen. Aus den erhobenen Stichproben jeweils vom Umfang $n = 15$ haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Massenkonzentrationen β_x und β_y ermittelt zu $\overline{\beta_x} = 49{,}96\ \mu g/ml$ und $S_{\beta_x} = 0{,}03\ \mu g/ml$ sowie $\overline{\beta_y} = 50{,}03\ \mu g/ml$ und $S_{\beta_y} = 0{,}03\ \mu g/ml$.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) $9{,}04$ ☐
b) $6{,}39$ ☐
c) $-1{,}28$ ☐
d) $-6{,}39$ ☐
e) $-9{,}04$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 13 ☐
b) 14 ☐
c) 28 ☐
d) 29 ☐
e) 30 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert die Massenkonzentration einer Referenzlösung überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 20$. Ihre Nullhypothese lautet, dass der Erwartungswert der Massenkonzentration dem Nennwert entspricht ($\mu_x = \mu_0$). Sie wählen die zweiseitige Alternativhypothese, dass der Erwartungswert der Massenkonzentration von dem Nennwert abweicht ($\mu_x \neq \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -1{,}84$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um extensive Größen handelt!

a) Dichte ☐
b) dynamische Viskosität ☐
c) Temperatur ☐
d) Stoffmengenkonzentration ☐
e) Masse ☐
f) Brechungsindex ☐
g) Zeit ☐
h) spezifische Wärmekapazität ☐

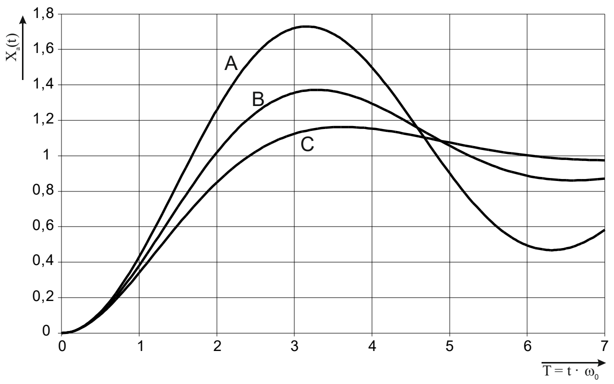
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $999{,}9\ \mathrm{W} + 100\ \mathrm{mW} = 1\ \mathrm{kW}$ ☐
b) $1\ \mathrm{nm} + 2000\ \mathrm{pm} = 3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{mm}$ ☐
c) $998\ \mathrm{hPa} + 0{,}1002\ \mathrm{kPa} = 2 \cdot 10^{5}\ \mathrm{Pa}$ ☐
d) $2\ \mathrm{MN} \cdot 30\ \mathrm{cm} = 6 \cdot 10^{5}\ \mathrm{Nm}$ ☐
e) $1\ \mathrm{mg} - 120\ \mu\mathrm{g} = 8{,}8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{g}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 0{,}1$; $D_B = 0{,}3$; $D_C = 0{,}5$ ☐
b) $D_A = 0{,}3$; $D_B = 1$; $D_C = 3$ ☐
c) $D_A = 1$; $D_B = 2$; $D_C = 5$ ☐
d) $D_A = 3$; $D_B = 2$; $D_C = 1$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 1$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von $-20\,\mathrm{V}$ auf $+20\,\mathrm{V}$ beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = 2T$ am Ausgang ungefähr anliegen? *Hinweis: Formelsammlung auf Seite 2 beachten!*

a) $-2{,}7\,\mathrm{V}$ ☐
b) $7{,}3\,\mathrm{V}$ ☐
c) $5{,}2\,\mathrm{V}$ ☐
d) $12{,}6\,\mathrm{V}$ ☐
e) $14{,}6\,\mathrm{V}$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. In Niedersachsen werden pro Jahr im Mittel 1,4 Blitzeinschläge pro Quadratkilometer registriert. Geben Sie an, durch welche statistische Verteilung sich die jeweils pro Quadratkilometer tatsächlich beobachtete Anzahl der Blitzeinschläge aller Wahrscheinlichkeit nach in guter Näherung beschreiben lässt!

a) Normalverteilung ☐
b) Poissonverteilung ☐
c) Binomialverteilung ☐
d) Gleichverteilung ☐
e) Weibullverteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung unterhalb des ersten Perzentils liegen!

a) 1% ☐
b) 10% ☐
c) 20% ☐
d) 25% ☐
e) 50% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 25 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $-6 \leq \mu \leq 6$ bei $P = 99\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $-2 \leq \mu \leq 2$ zu reduzieren!

a) 50 ☐
b) 75 ☐
c) 100 ☐
d) 125 ☐
e) 225 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Ordnen Sie die nachfolgend genannten Merkmalsausprägungen den zugehörigen Skalenniveaus zu!

	Nominalskala	Ordinalskala	Intervallskala	Verhältnisskala	Absolutskala
Temperatur in Grad Celsius	☐	☐	☐	☐	☐
Sternebewertung	☐	☐	☐	☐	☐
Studiengang	☐	☐	☐	☐	☐
Geschwindigkeit	☐	☐	☐	☐	☐

(Fragetyp Zuordnung)

15. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die Studiendauer im Bachelorstudiengang Biotechnologie. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Studiendauer beträgt 7,9 Semester; der Modalwert der Studiendauer beträgt 8 Semester; der arithmetische Mittelwert der Studiendauer beträgt 8,3 Semester; der Quartilsabstand der Studiendauer beträgt 1,9 Semester; das dritte Quartil der Studiendauer liegt bei 9,1 Semestern. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

a) Die meisten Studierenden benötigen für ihr Studium 7,9 Semester. ☐

b) Die Spanne der Studiendauer beträgt 3,8 Semester. ☐

c) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 8,3 Semester oder mehr. ☐

d) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss zwischen 7,2 und 9,1 Semester. ☐

e) Ein Viertel der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 9,8 Semester oder mehr. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über spezielle Verteilungsfunktionen zutreffend sind!

a) Die Gaußsche Normalverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert μ und ihre Wendepunkte liegen bei $x = \mu \pm \sigma$. ☐

b) Die Gaußsche Normalverteilung beschreibt solche Prozesse gut, auf die eine große Zahl statistisch unabhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. ☐

c) Für eine sehr große Zahl von Versuchen ($n \to \infty$) nähert sich die Student'sche t-Verteilung der Gaußsche Normalverteilung an. ☐

d) Die Binomialverteilung beschreibt den wahrscheinlichen Ausgang einer Folge gleichartiger Versuche, bei der es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt. ☐

e) Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung sind wertgleich. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

Kurzfragen:

17. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten!

18. Bei einer Prüfung haben die insgesamt 12 Teilnehmer*innen die in nachfolgender Tabelle zusammengefassten Noten erzielt:

*Teilnehmer*innen*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note	2	1	4	2	3	1	3	4	4	2	5	4

Geben Sie den Medianwert und den Modalwert sowie die Spannweite obiger Notenverteilung an!

19. Geben Sie an, woran man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung sicher von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden kann!

Ende der Kurzfragen

Leerseite

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2(1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \dots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:
$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$
4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert
$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$
zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist
$$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha} \;,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist
$$t_0 > t_{n-1;1-\alpha} \;,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist
$$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \;,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad (\mathrm{df} = 2\mathrm{n} - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \;,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \;,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\frac{\alpha}{2}} \;,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$
$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$
$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1,1-\alpha} \;,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1,1-\alpha} \;,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \;,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1,1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70	1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80	1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90	1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit *s* Freiheitsgraden

s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

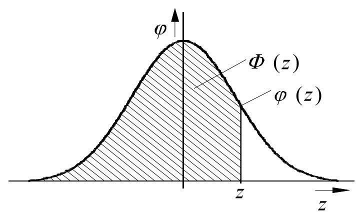
Tabelle 1

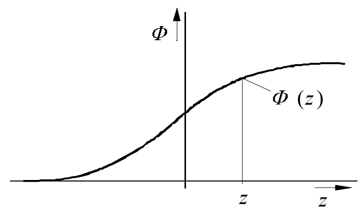
Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt\ ;\ \ \Phi(z)=1-\Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76)=0{,}776373$

z-Transformation: $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350\cdot10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326\cdot10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167\cdot10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398\cdot10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867\cdot10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866\cdot10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280\cdot10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221\cdot10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129\cdot10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z