

Klausur

Einführung in die Messtechnik

24. Juli 2025

- ☐ Bachelor Maschinenbau
- ☐ Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau
- ☐ Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
- ☐ Bachelor Verkehrsingenieurwesen
- ☐ Bachelor Umweltingenieurwesen
- ☐ Bachelor Bauingenieurwesen
- ☐ Bachelor Sustainable Engineering of Products and Processes
- ☐ Bachelor Physik
- ☐ Kenntnisprüfung im Rahmen der Promotion
- ☐ sonstige: _____

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Prüfungsraum: _____

**Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich
in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).**

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/18	/13	/18	/24	/12	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird sowie die Sitzplatznummer einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit } y = u(v(x))$

Eulersche Zahl: $e = 2,718281828459045235 \dots$

Kraft: $1 \text{ N (Newton)} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

Dichte: $1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

1. Aufgabe:

Der Auftriebsbeiwert ist ein dimensionsloser Beiwert für den dynamischen Auftrieb eines von einem Fluid umströmten Körpers. Er ist eine wichtige Kenngröße zur Charakterisierung von Profilen in der Strömungslehre.

Die von einem umströmten Profil erzeugte Auftriebskraft F ist von der Profilfläche A , dem Staudruck q und dem Auftriebsbeiwert c_a abhängig. Der Staudruck q ist in adiabaten Gasen von der Gasdichte ρ und der Geschwindigkeit v der Anströmung abhängig (vgl. Abb. 1.1).

Dieser Zusammenhang kann genutzt werden, um den Auftriebsbeiwert eines Profils experimentell zu ermitteln. Der Auftriebsbeiwert c_a ergibt sich gemäß folgendem Zusammenhang:

$$c_a = \frac{2 \cdot F}{\rho \cdot A \cdot v^2}$$

Hierin ist F die von dem umströmten Profil erzeugte Auftriebskraft, ρ ist die Dichte des anströmenden Gases, A die Profilfläche und v die Geschwindigkeit des anströmenden Gases.

Im Folgenden soll der Auftriebsbeiwert c_a eines experimentellen Tragflächenprofils auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen F , ρ , A und v einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Dichte ρ der anströmenden Luft wurde unter Berücksichtigung von Informationen über Luftdruck, Temperatur und relative Luftfeuchtigkeit mittels eines Online-Rechners ermittelt. Eine durchgeführte Unsicherheitsanalyse liefert eine Dichte von $\rho = 1,185 \text{ kg/m}^3 \pm 0,01 \text{ kg/m}^3$ bei $P = 99\%$ und einem Stichprobenumfang von $n_p = 10$.

Die Geschwindigkeit v der anströmenden Luft wurde mittels eines Staurohrs gemessen. Unter Berücksichtigung der Unsicherheitsangaben des Herstellers beträgt die Strömungsgeschwindigkeit $v = 30 \text{ m/s} \pm 0,1 \text{ m/s}$ bei $P = 95\%$ und einem sehr großen Stichprobenumfang n_v .

Die Profilfläche A wurde mittels eines Maßstabs durch Messung der Länge und Tiefe des Profils ermittelt. Eine vorab durchgeführte Abweichungsförpflanzungsrechnung ergibt eine Profilfläche von $A = 1500 \text{ cm}^2 \pm 10 \text{ cm}^2$ bei $P = 99\%$ und einem Stichprobenumfang von $n_A = 5$.

Die von dem Profil erzeugte Auftriebskraft F wurde mittels eines in die Profilhalterung integrierten Kraftaufnehmers während der Versuchsdurchführung in $n_F = 8$ Wiederholungen ermittelt. Dabei ergaben sich die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
F / N	112,3	112,7	112,3	113,5	114,0	114,4	113,6	114,9

Tabelle 1.1: Messwerte der Kraft F

- a) Berechnen Sie den gesuchten dimensionslosen Auftriebsbeiwert c_a und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

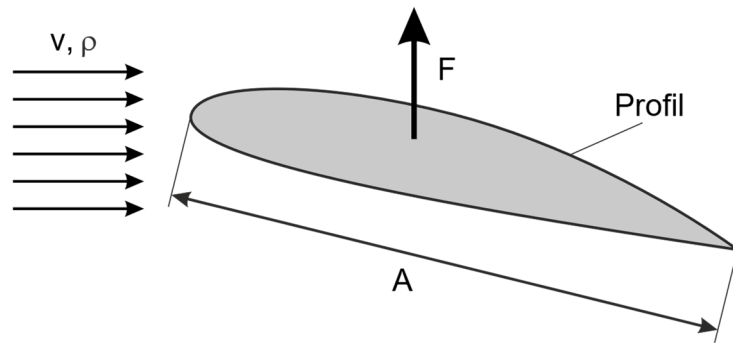


Abbildung 1.1: Bestimmung des c_a -Werts

2. Aufgabe:

Im Rahmen Ihres Praktikums bei einem Hersteller von Wechselrichtern für Photovoltaikanlagen sollen Sie das Ausfallverhalten eines bestimmten Typs von Leistungstransistoren untersuchen, der durch häufige Defekte auffällt.

Durch eine Recherche finden Sie heraus, dass die Lebensdauer von Bauteilen, sofern keine Alterungseffekte zu berücksichtigen sind, oftmals durch eine Exponentialverteilung beschrieben werden kann. Dies möchten Sie für die Ihnen vorliegenden Daten überprüfen.

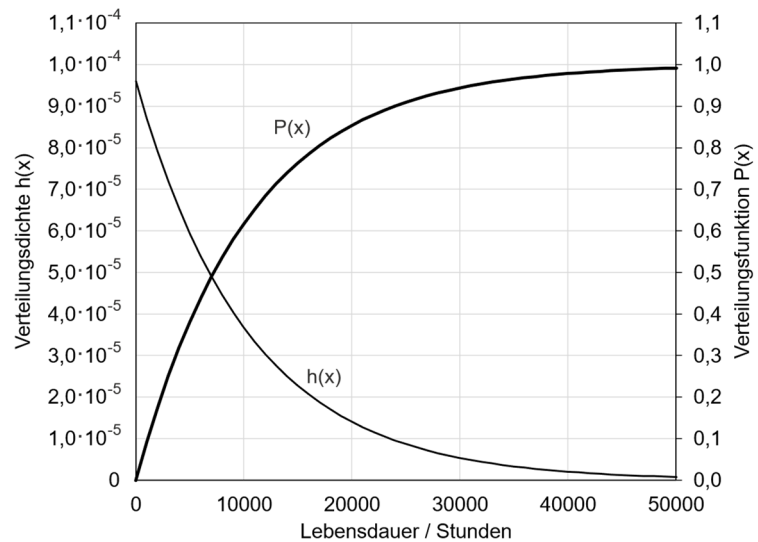


Abbildung 2.1: Dichtefunktion $h(x)$ und Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/h}$.

Die Exponentialverteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der nicht-negativen reellen Zahlen. Die Dichtefunktion $h(x)$ der Exponentialverteilung ist durch nachfolgende Gleichung (2.1) definiert:

$$h(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad (2.1)$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$, also die Stammfunktion obiger Dichtefunktion $h(x)$, ist ebenfalls als geschlossene Funktion darstellbar und gemäß nachfolgender Gleichung (2.2) definiert:

$$P(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \quad (2.2)$$

Anhand der Datenbank der Serviceabteilung haben Sie die Lebensdauer von $n = 500$ Leistungstransistoren ermittelt. Zur weiteren Verarbeitung der Daten haben Sie die in Tabelle 2.1 aufgeführte klassierte Häufigkeitstabelle erstellt.

Lebensdauer / Stunden	0 bis 5.000	> 5.000 bis 10.000	> 10.000 bis 15.000	> 15.000 bis 20.000	> 20.000 bis 25.000	> 25.000 bis 30.000	> 30.000 bis 35.000	> 35.000 bis 40.000	> 40.000 bis 45.000	> 45.000
Häufigkeit	187	124	76	38	29	19	11	8	4	4

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für die klassierte Lebensdauer von Leistungstransistoren

Der Parameter λ der bestpassenden Verteilung kann durch den Kehrwert der mittleren Lebensdauer abgeschätzt werden und ergibt sich für die von Ihnen aufgenommenen Daten zu $\lambda = 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/h}$. Die Dichtefunktion $h(x)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ für eine Exponentialverteilung mit $\lambda = 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/h}$ sind in Abbildung 2.1 grafisch dargestellt.

- a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/h}$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.
- *Fragetyp Zuordnung:* Bei Fragen dieses Typs ist in der gegebenen Matrix von Termen jeder Zeile genau eine Spalte zuzuordnen. Bei Fragen dieses Typs erfolgt die Bewertung zeilenweise und es wird je Zeile nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Spalte zugeordnet wurde.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Transistoren wird eine Charge von Bipolartransistoren des Typs BC547B einer Warenausgangskontrolle unterzogen, wobei insbesondere der Stromverstärkungsfaktor h_{FE} von Interesse ist. Hierzu wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 15$ entnommen und h_{FE} ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Stromverstärkungsfaktors von $\overline{h_{FE}} = 148,3$ und eine Streuung von $S_{h_{FE}} = 5,7$. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

- 3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Stromverstärkungsfaktors h_{FE} für eine Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ beträgt für diesen Fall rund:

- a) $h_{FE} = 148,3 \pm 2,42$; $P = 95\%$ ☐
- b) $h_{FE} = 148,3 \pm 2,59$; $P = 95\%$ ☐
- c) $h_{FE} = 148,3 \pm 2,88$; $P = 95\%$ ☐
- d) $h_{FE} = 148,3 \pm 3,16$; $P = 95\%$ ☐
- e) $h_{FE} = 148,3 \pm 3,86$; $P = 95\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

- 3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des Stromverstärkungsfaktors der Transistoren $\sigma_{h_{FE}} = 6$ betrage. Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n , um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Stromverstärkungsfaktors h_{FE} auf maximal ± 2 abschätzen zu können?

- a) 42 ☐
- b) 49 ☐
- c) 52 ☐
- d) 60 ☐
- e) 64 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Transistoren weisen dann einen Stromverstärkungsfaktors auf, der innerhalb des Intervalls von $140 \leq h_{FE} \leq 160$ liegt?

- a) 7,2% ☐
- b) 9,3% ☐
- c) 90,7% ☐
- d) 92,1% ☐
- e) 98,0% ☐

(Frage typ Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert des Stromverstärkungsfaktors betrage $\mu_{h_{FE}} = 150$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung $\sigma_{h_{FE}}$ des Stromverstärkungsfaktors dann maximal aufweisen, damit 95% der Transistoren einen Stromverstärkungsfaktor innerhalb des Intervalls von $145 \leq h_{FE} \leq 155$ aufwiesen?

- a) 1,97 ☐
- b) 2,32 ☐
- c) 2,55 ☐
- d) 3,04 ☐
- e) 3,42 ☐

(Frage typ Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Transistoren möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigungsanlage sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck stündlich eine Stichprobe aus der laufenden Produktion. Anhand der entnommenen Stichprobe wird jeweils der Erwartungswert $\mu_{h_{FE}}$ des Stromverstärkungsfaktors der Transistoren abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob der so abgeschätzte Erwartungswert sich signifikant von dem Nennwert des Stromverstärkungsfaktors $h_{FE_{nenn}} = 50$ unterscheidet, welcher gemäß Spezifikation gefordert ist.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

- a) t-Test für Erwartungswert ☐
- b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
- c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
- d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben ☐
- e) χ^2 -Test ☐

(Frage typ Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

- a) einseitige Alternativhypothese ☐
- b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Frage typ Einfachwahl)

5. Anhand von Stichproben des Stromverstärkungsfaktors von auf unterschiedlichen Anlagen gefertigten Transistoren möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben durchführen. Aus den erhobenen Stichproben jeweils vom Umfang $n = 20$ haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Stromverstärkungsfaktoren h_{FE_x} und h_{FE_y} ermittelt zu $\overline{h_{FE_x}} = 38,6$ und $S_{h_{FE_x}} = 0,7$ sowie $\overline{h_{FE_y}} = 40,1$ und $S_{h_{FE_y}} = 0,8$.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

- a) $-1,41$ ☐
- b) $-2,24$ ☐
- c) $-6,31$ ☐
- d) $-8,92$ ☐
- e) $-9,41$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

- a) 40 ☐
- b) 39 ☐
- c) 38 ☐
- d) 19 ☐
- e) 18 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert den Stromverstärkungsfaktor einer Charge von Transistoren überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 30$. Ihre Nullhypothese lautet, dass der Erwartungswert des Stromverstärkungsfaktors dem Referenzwert entspricht ($\mu_x = \mu_0$). Sie wählen die zweiseitige Alternativhypothese, dass der Erwartungswert des Stromverstärkungsfaktors von dem Referenzwert abweicht ($\mu_x \neq \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,01$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2,83$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

- a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt ☐
- b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um intensive Größen handelt!

- a) Temperatur ☐
- b) Volumen ☐
- c) Druck ☐
- d) Entropie ☐
- e) Brechungsindex ☐
- f) dynamische Viskosität ☐
- g) spezifische Wärmekapazität ☐
- h) Dichte ☐

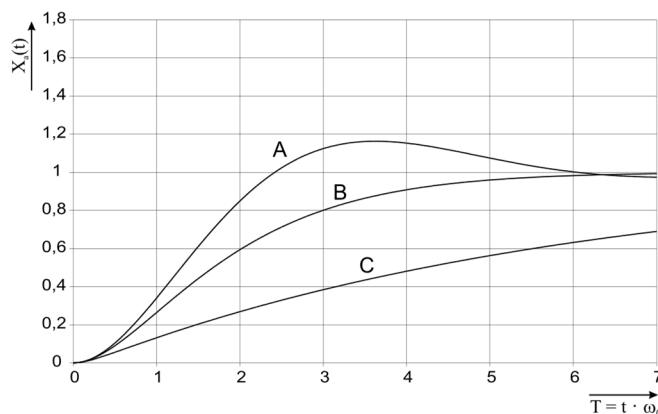
(Frage typ Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

- a) $100 \text{ MW} + 1 \text{ TW} = 1,1 \cdot 10^9 \text{ W}$ ☐
- b) $10 \text{ nF} - 100 \text{ pF} = 9,9 \cdot 10^{-9} \text{ F}$ ☐
- c) $970 \text{ hPa} + 1,3 \text{ kPa} = 0,1 \text{ MPa}$ ☐
- d) $1 \text{ mg} + 1000 \text{ } \mu\text{g} = 0,002 \text{ g}$ ☐
- e) $20 \text{ cm}^3 + 0,08 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ ☐

(Frage typ Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A , B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A , D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A , B und C qualitativ am besten beschreibt!



- a) $D_A = 5 ; D_B = 1 ; D_C = 0,3$ ☐
- b) $D_A = 1 ; D_B = 3 ; D_C = 5$ ☐
- c) $D_A = 0,5 ; D_B = 1 ; D_C = 3$ ☐
- d) $D_A = 0,1 ; D_B = 0,3 ; D_C = 0,5$ ☐

(Frage typ Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten $T = 2$ s und dem Übertragungsfaktor $K = 1$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von -3 V auf $+3$ V beaufschlagt. Geben Sie an, welche Spannung nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang des Systems ungefähr anliegen wird!

- a) $-2,4$ V ☐
- b) $-1,1$ V ☐
- c) $0,4$ V ☐
- d) $0,8$ V ☐
- e) $1,9$ V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Bei dem Abtasttheorem nach Shannon handelt es sich hinsichtlich der verlustfreien Rekonstruktion der digitalisierten Daten um ein

- a) hinreichendes und notwendiges Kriterium. ☐
- b) hinreichendes aber nicht notwendiges Kriterium. ☐
- c) nicht hinreichendes aber notwendiges Kriterium. ☐
- d) nicht hinreichendes und nicht notwendiges Kriterium. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 15 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $5 \leq \mu \leq 14$ bei $P = 95\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $8 \leq \mu \leq 11$ zu reduzieren!

- a) 135 ☐
- b) 90 ☐
- c) 60 ☐
- d) 45 ☐
- e) 30 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -15 V bis $+15$ V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler nicht mehr als $5 \mu\text{V}$ beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

- a) 20 Bit ☐
- b) 21 Bit ☐
- c) 22 Bit ☐
- d) 23 Bit ☐
- e) 24 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Ordnen Sie die nachfolgend genannten Merkmalsausprägungen den zugehörigen Skalenniveaus zu!

	Nominalskala	Ordinalskala	Intervallskala	Verhältnisskala	Absolutskala
Temperatur in Kelvin	☐	☐	☐	☐	☐
Energieeffizienzklasse	☐	☐	☐	☐	☐
Haarfarbe	☐	☐	☐	☐	☐
Einwohnerzahl	☐	☐	☐	☐	☐
Jahreszahl	☐	☐	☐	☐	☐

(Fragetyp Zuordnung)

15. Sie untersuchen anhand empirischer Daten das von Mobilfunknutzenden in Deutschland pro Monat verbrauchte Datenvolumen in Gigabyte (GB). Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median des Datenvolumens beträgt 8,4 GB; der Modalwert des Datenvolumens beträgt 7,3 GB; der arithmetische Mittelwert des Datenvolumens beträgt 9,3 GB; der Quartilsabstand des Datenvolumens beträgt 11,8 GB; das erste Quartil des Datenvolumens liegt bei 4,5 GB. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

- a) Ein Viertel der Mobilfunknutzenden benötigt 16,3 GB oder mehr. ☐
- b) Die Hälfte der Mobilfunknutzenden benötigt 8,4 GB oder mehr. ☐
- c) Die Hälfte der Mobilfunknutzenden benötigt 7,3 GB oder weniger. ☐
- d) Ein Viertel der Mobilfunknutzenden benötigt 4,5 GB oder weniger. ☐
- e) Die Hälfte der Mobilfunknutzenden benötigt zwischen 4,5 GB und 16,3 GB. ☐

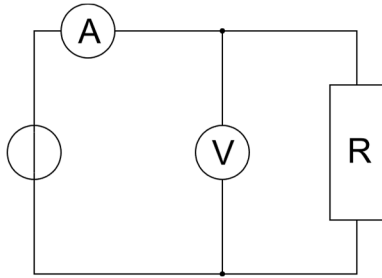
(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der Digitalisierung von Signalen zutreffend sind!

- a) Digitalisierung ist die Umwandlung eines zeit- und wertkontinuierlichen Analogsignals in ein zeit- und wertdiskretes Digitalsignal. ☐
- b) Bei der Abtastung wird das Signal zu festen Zeitpunkten mit konstanten zeitlichen Abständen abgetastet, die Zustände zwischen den Abtastpunkten werden nicht berücksichtigt. ☐
- c) Ist die Zeit zwischen zwei Abtastungen zu lang, ist die Dichte der Abtastpunkte zu gering und es tritt eine charakteristische Fehlmessung auf, der sogenannte „Aliasing-Fehler“. ☐
- d) Der zweite Schritt der Digitalisierung eines Signals ist die Quantisierung. Hierbei wird der kontinuierliche Wertebereich des Signals auf diskrete Werte abgebildet. ☐
- e) Der bei der Quantisierung auftretende Rundungsfehler beträgt maximal die Hälfte der Auflösung, mit der quantisiert wird. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



- a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Stromfehlerschaltung zur indirekten Widerstandsmessung. ☐
- b) Die indirekte Widerstandsmessung basiert auf der Anwendung des Ohmschen Gesetzes. ☐
- c) Die Schaltung ist für die Messung großer Widerstände besser geeignet als für die Messung kleiner Widerstände. ☐
- d) Die systematische Messabweichung der Schaltung ist umso größer, je kleiner der Innenwiderstand des Spannungsmessgeräts ist. ☐
- e) Die systematische Messabweichung der Schaltung könnte dadurch reduziert werden, dass das Strommessgerät mittels einer Vierleiterschaltung angeschlossen wird. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über inkrementale Wegmesssysteme zutreffend sind!

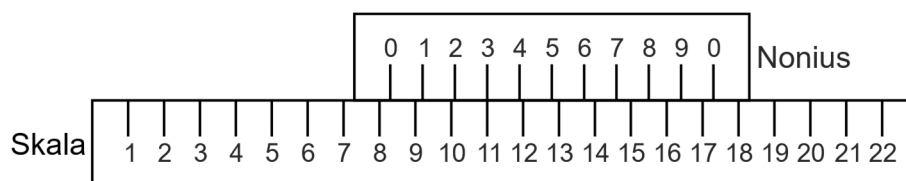
- a) Inkrementale Wegmesssysteme können basierend auf unterschiedlichen physikalischen Wirkprinzipien realisiert werden, wie z.B. optisch, elektrisch oder magnetisch. ☐
- b) Um bei einem inkrementalen Wegmesssystem Informationen über die Bewegungsrichtung zu gewinnen, werden in der Regel drei um jeweils 120° phasenverschobene Signale genutzt. ☐
- c) Wird bei einem inkrementalen Wegmesssystem die Signalauswertung nur kurzzeitig unterbrochen, bleibt die Information über die Absolutposition erhalten. ☐
- d) In digitalen Messschiebern kommen in der Regel optische inkrementale Wegmesssysteme zum Einsatz. ☐
- e) Bei inkrementalen Wegmesssystemen ist durch Interpolationstechniken oftmals eine Steigerung des Auflösungsvermögens über die Teilung der Maßverkörperung hinaus möglich. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

Kurzfragen:

19. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten!
20. Eine bislang in Hamburg genutzte Balkenwaage mit kalibrierten Massestücken soll zukünftig in München eingesetzt werden. Geben Sie an, ob aufgrund der geänderten Erdbeschleunigung eine Neukalibrierung der Massestücke erforderlich ist! Begründen Sie Ihre Antwort!
21. Geben Sie an, woran man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung sicher von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden kann!
22. Ordnen Sie die nachfolgenden Skalentypen aufsteigend nach ihrem Informationsgehalt! Intervallskala, Nominalskala, Ordinalskala
23. Bei der Beobachtung eines Zufallsprozesses stellen Sie fest, dass zwischen dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ der Zusammenhang $\sigma = \sqrt{\mu}$ besteht. Geben Sie an, um welchen Typ von Wahrscheinlichkeitsverteilung es sich wahrscheinlich handelt!
24. Bei der Durchführung eines statistischen Tests stellen Sie fest, dass wiederholt der Fall eintritt, dass die Nullhypothese infolge des Testresultats abgelehnt wird, obwohl weiterführende Untersuchungen zeigen, dass die Nullhypothese tatsächlich zutrifft. Geben Sie an, wie Sie das Signifikanzniveau α des Tests verändern würden, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung zu reduzieren! Begründen Sie Ihre Antwort!
25. Lesen Sie die auf untenstehender Abbildung dargestellte Skala mit Nonius ab und geben Sie das (einheitenlose) Ableseergebnis mit einer Auflösung von einer Nachkommastelle an!



26. Bei der Messung ohmscher Widerstände kann der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen durch Verwendung einer Vierleiterschaltung reduziert werden, bei welcher ein Spannungsmessgerät mittels zusätzlicher Messleitungen direkt am Widerstand angeschlossen wird. Erläutern Sie, weshalb hierdurch selbst dann der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen reduziert werden kann, wenn die zusätzlichen Messleitungen denselben Widerstand aufweisen, wie die eigentlichen Zuleitungen des Widerstandes!

Ende der Kurzfragen

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$

Streuung: $S = \sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j))^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \dots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall

5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x -Wert x^* der y -Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test**t-Test für Erwartungswert**

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist $|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n_x+n_y-2; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2 -Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0 : X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i , so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i , mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:

- r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
- s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
- Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$

9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α , wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1, 1-\alpha}^2$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1		3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2		1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3		1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4		1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5		1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6		1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7		1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8		1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9		1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10		1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11		1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12		1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13		1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14		1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15		1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16		1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17		1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18		1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19		1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20		1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21		1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22		1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23		1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24		1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25		1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26		1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27		1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28		1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29		1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30		1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40		1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50		1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60		1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70		1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80		1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90		1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100		1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200		1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞		1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2 -Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1		2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2		4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3		6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4		7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5		9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6		10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7		12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8		13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9		14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10		16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11		17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12		18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13		19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14		21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15		22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16		23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17		24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18		26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19		27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20		28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21		29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22		30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23		32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24		33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25		34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26		35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27		36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28		37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29		39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30		40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40		51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50		63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60		74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70		85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80		96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90		107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100		118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt; \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$

Transformation: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1-1,350 \cdot 10^{-3}$	$1-2,326 \cdot 10^{-4}$	$1-3,167 \cdot 10^{-5}$	$1-3,398 \cdot 10^{-6}$	$1-2,867 \cdot 10^{-7}$	$1-9,866 \cdot 10^{-10}$	$1-1,280 \cdot 10^{-12}$	$1-6,221 \cdot 10^{-16}$	$1-1,129 \cdot 10^{-19}$	$1-7,620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	$\Phi(z)$
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,807	3,090	3,291	3,291	z