

Klausur

Einführung in die Messtechnik

27. Juli 2020

- für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)
- für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)
- für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511161)
- für Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
(Prüfungsnummer 2511161)
- sonstige: _____

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Prüfungsraum: MEC Halle 1 **Sitzplatz:** _____

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/16	/12	/18	/24	/15	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird sowie die Sitzplatznummer einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabenstellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x)$ mit $y = u(v(x))$

Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$

Eulersche Zahl: $e = 2,718281828459045235 \dots$

Einheitssprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung: $x_a(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$ für $t \geq 0$

Frequenz: $1 \text{ Hz (Hertz)} = 1/\text{s}$

1. Aufgabe:

Ein Verfahren zur Volumendurchflussmessung von gasförmigen und flüssigen Medien stellt das Wirbelstraßenprinzip dar. Es beruht auf der Existenz einer periodischen Oszillation des Strömungsfeldes hinter einem umströmten Prallelement. Wird ein starrer Körper von einem Fluid umströmt, so bilden sich an seiner Rückseite diskrete Wirbel. Diese lösen sich mehr oder weniger regelmäßig vom Prallelement ab und schwimmen mit der Strömung fort. Bei geeigneten Prallelementen ist die Frequenz der Wirbelablösung in einem relativ weiten Reynolds-Zahl-Bereich der Strömungsgeschwindigkeit proportional und kann somit als Messeffekt zur Volumendurchflussmessung genutzt werden.

Das Verhältnis der Wirbelablösefrequenz f zur Strömungsgeschwindigkeit v wird unter Zuhilfenahme der charakteristischen Breite d des Prallelements durch die Strouhal-Zahl Sr beschrieben. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$v = \frac{f \cdot d}{Sr}$$

Im Folgenden soll die Strömungsgeschwindigkeit v auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen f , d und Sr einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Für die im vorliegenden Fall bestehenden Randbedingungen wird die dimensionslose Strouhal-Zahl Sr vom Hersteller des Prallelements mit $Sr = 0,21 \pm 0,002$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ angegeben.

Bei dem verwendeten Prallelement handelt es sich um ein Präzisionsdrehteil, dessen charakteristische Breite d vom Hersteller mit $d = 10 \text{ mm} \pm 0,003 \text{ mm}$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ und einem Stichprobenumfang von $n = 30$ angegeben wird.

Die Wirbelfrequenz f wurde mit Hilfe eines kapazitiven Drucksensors achtmal gemessen. Dabei wurden die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
f / Hz	881,0	880,4	884,7	881,3	882,1	883,4	879,8	883,9

Tabelle 1.1: Messwerte der Wirbelfrequenz f

- a) Berechnen Sie die gesuchte Strömungsgeschwindigkeit v und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

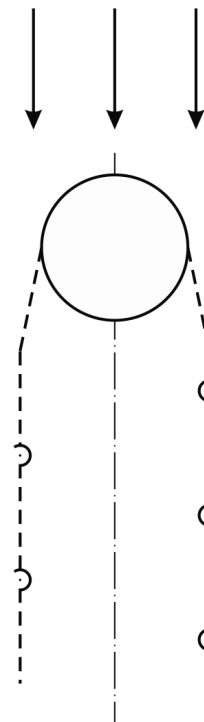


Abbildung 1.1: Wirbelbildung durch einen in der Strömung befindlichen Körper

2. Aufgabe:

Um Ihre Trefferquote bei Freiwürfen im Basketballspiel zu verbessern, trainieren Sie regelmäßig, innerhalb von einer Minute möglichst viele erfolgreiche Freiwürfe auszuführen. Nach näherer Betrachtung Ihrer Ergebnisse stellen Sie sich die Frage, ob die Anzahl der Treffer, die Sie jeweils innerhalb von einer Minute erzielen, möglicherweise durch eine Poisson-Verteilung beschrieben wird. Um diese Hypothese zu überprüfen, führen Sie eine experimentelle Untersuchung durch.

Hierzu führen Sie insgesamt $n = 100$ Durchläufe aus, in welchen Sie jeweils für die Dauer von einer Minute Freiwürfe ausführen und die pro Durchlauf jeweils erzielten Treffer protokollieren. In Tabelle 2.1 ist zusammengefasst, in wie vielen dieser n Durchläufe Sie jeweils 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 oder 10 und mehr Treffer erzielt haben.

Anzahl Treffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
Häufigkeit	5	12	19	18	15	16	8	5	1	1	0

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für Anzahl k der pro Minute erzielten Freiwurf-Treffer

Die Wahrscheinlichkeit P_λ dafür, dass bei einem Poisson-verteilten Prozess k Ereignisse registriert werden, ist durch folgenden Ausdruck definiert:

$$P_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Hierin steht k für die Anzahl der registrierten Ereignisse (im vorliegenden Fall also für die Anzahl der pro Minute erzielten Treffer), λ ist der Parameter der Poisson-Verteilung und e ist die Eulersche Zahl (Basis der natürlichen Exponentialfunktion).

Den Parameter λ haben Sie für die vorliegende Untersuchung anhand des für die Poisson-Verteilung geltenden Zusammenhangs $\mu = \lambda$ im Vorfeld anhand der in Tabelle 2.1 aufgeführten Daten zu $\lambda = 3,44$ abgeschätzt.

- a) Untersuchen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,1$ einer Poisson-Verteilung mit dem geschätzten Parameter $\lambda = 3,44$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Unter Verwendung eines Sensors nach dem Wirbelstraßenprinzip führen Sie eine Messreihe zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit in einem Rohr durch. Hierzu führen Sie nacheinander $n = 12$ Einzelmessungen der Strömungsgeschwindigkeit v durch. Aus Ihrer Messreihe ergibt sich ein Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit von $\bar{v} = 18,12$ m/s und eine Streuung von $S_v = 0,34$ m/s. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Strömungsgeschwindigkeit v für eine Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ beträgt für diesen Fall rund:

- a) $D = 18,12$ m/s \pm 0,176 m/s ; $P = 95\%$
- b) $D = 18,12$ m/s \pm 0,192 m/s ; $P = 95\%$
- c) $D = 18,12$ m/s \pm 0,214 m/s ; $P = 95\%$
- d) $D = 18,12$ m/s \pm 0,216 m/s ; $P = 95\%$
- e) $D = 18,12$ m/s \pm 0,243 m/s ; $P = 95\%$

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des Messprozesses $\sigma_v = 0,34$ m/s betrage. Wie groß ist dann der minimal erforderliche Messreihenumfang n , um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Strömungsgeschwindigkeit v auf maximal $\pm 0,15$ m/s abschätzen zu können?

- a) 28
- b) 35
- c) 38
- d) 42
- e) 45

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Einzelmessungen wird dann eine Strömungsgeschwindigkeit ermittelt, die außerhalb des Intervalls von $17,5 \text{ m/s} \leq v \leq 18,5 \text{ m/s}$ liegt?

- a) 9,8%
- b) 13,1%
- c) 16,6%
- d) 83,4%
- e) 90,3%

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert der Strömungsgeschwindigkeit v betrage $\mu_v = 18,12 \text{ m/s}$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_v der Strömungsgeschwindigkeit dann maximal annehmen, damit in 90% aller Einzelmessungen eine Strömungsgeschwindigkeit von $18,02 \text{ m/s} \leq v \leq 18,22 \text{ m/s}$ ermittelt wird?

- a) 0,0510 m/s
- b) 0,0608 m/s
- c) 0,0780 m/s
- d) 0,0904 m/s
- e) 0,1032 m/s

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Prallkörpern für die Durchflussmessung möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigungsanlage sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck regelmäßig eine Stichprobe aus der laufenden Produktion. Anhand der entnommenen Stichprobe wird der Erwartungswert des Durchmessers $D_{ist.neu}$ der momentan gefertigten zylindrischen Prallkörper abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob der so abgeschätzte Erwartungswert sich signifikant vom dem Erwartungswert $D_{ist.alt}$ unterscheidet, welcher an derselben Anlage bei der vorangegangenen Stichprobenentnahme ermittelt wurde.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

- a) t-Test für Erwartungswert
- b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben
- c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben
- d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben
- e) χ^2 -Test

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

- a) einseitige Alternativhypothese
- b) zweiseitige Alternativhypothese

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand einer Stichprobe des Durchmessers eines zylindrischen Drehteils möchten Sie einen t-Test für den Erwartungswert durchführen. Aus der erhobenen Stichprobe vom Umfang $n = 10$ haben Sie Mittelwert und Streuung des Durchmessers D ermittelt zu $\bar{D} = 13,98$ mm und $S_D = 0,008$ mm. Der gemäß Spezifikation geforderte Erwartungswert des Durchmessers beträgt $D_{nenn} = 14$ mm.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

- a) $-7,91$
- b) $-5,59$
- c) $-0,79$
- d) $0,79$
- e) $1,58$

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

- a) 8
- b) 9
- c) 10
- d) 18
- e) 19

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben die Eigenschaften zweier Fertigungslinien X und Y für Prallkörper überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt jeweils $n = 16$. Ihre Nullhypothese lautet, dass zwischen beiden Fertigungslinien kein Unterschied besteht ($\mu_x = \mu_y$). Ihre Alternativhypothese lautet, dass die auf Fertigungslinie X produzierten Prallkörper einen signifikant kleineren Durchmesser aufweisen als jene, die auf Fertigungslinie Y produziert wurden ($\mu_x < \mu_y$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,01$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2,61$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

- a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt
- b) Nullhypothese wird abgelehnt

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um extensive Grundgrößen des SI-Systems handelt!

- a) Leuchtdichte
- b) Länge
- c) elektrische Stromstärke
- d) elektrische Spannung
- e) Wärmemenge
- f) thermodynamische Temperatur
- g) molare Masse
- h) Zeit

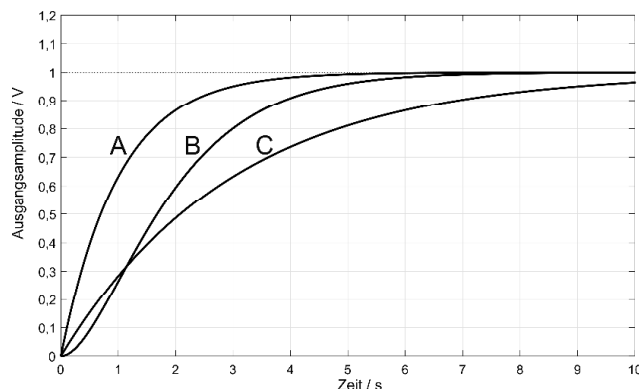
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

- a) $0,2 \text{ pm} + 30 \text{ nm} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ }\mu\text{m}$
- b) $1 \text{ MW} + 1000 \text{ kW} = 2 \cdot 10^6 \text{ W}$
- c) $989 \text{ hPa} + 0,11 \text{ MPa} = 100 \text{ kPa}$
- d) $10 \text{ mg} - 100 \text{ }\mu\text{g} = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ g}$
- e) $12 \text{ cm} + 2,8 \text{ dm} = 0,4 \text{ m}$

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit *A*, *B* und *C* bezeichneter – linearer Systeme dargestellt. Geben Sie für jedes der drei Systeme an, ob es sich um ein lineares Systeme 1. Ordnung oder um ein lineares Systeme 2. Ordnung handelt!



- a) A: 1. Ordnung, B: 1. Ordnung, C: 1. Ordnung
- b) A: 1. Ordnung, B: 1. Ordnung, C: 2. Ordnung
- c) A: 1. Ordnung, B: 2. Ordnung, C: 1. Ordnung
- d) A: 1. Ordnung, B: 2. Ordnung, C: 2. Ordnung
- e) A: 2. Ordnung, B: 1. Ordnung, C: 1. Ordnung
- f) A: 2. Ordnung, B: 1. Ordnung, C: 2. Ordnung
- g) A: 2. Ordnung, B: 2. Ordnung, C: 1. Ordnung
- h) A: 2. Ordnung, B: 2. Ordnung, C: 2. Ordnung

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 2$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von $+10\text{ V}$ auf -5 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = 2T$ am Ausgang ungefähr anliegen?
Hinweis: Formelsammlung auf Seite 2 beachten!

- a) $-5,94\text{ V}$
- b) $-2,97\text{ V}$
- c) $0,55\text{ V}$
- d) $1,1\text{ V}$
- e) $6,3\text{ V}$

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung unterhalb des dritten Perzentils liegen!

- a) 3%
- b) 30%
- c) 60%
- d) 75%
- e) 80%

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Sie führen ein Zufallsexperiment durch, bei welchem Sie aus einem Gefäß, welches mit jeweils 10 Kugeln der Farben rot, grün, blau, gelb und violett gefüllt ist pro Versuch jeweils nur eine einzelne Kugel entnehmen und diese im Anschluss zurücklegen. Durch welche statistische Verteilung lässt sich die bei einem derartigen Versuch zu beobachtende Auftretenswahrscheinlichkeit der fünf möglichen Farben beschreiben?

- a) Binomialverteilung
- b) Normalverteilung
- c) Diskrete Gleichverteilung
- d) Poissonverteilung
- e) Hypergeometrische Verteilung

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -24 V bis $+24\text{ V}$ soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler $50\text{ }\mu\text{V}$ beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

- a) 16 Bit
- b) 17 Bit
- c) 18 Bit
- d) 19 Bit
- e) 20 Bit

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die jährliche, selbst zurückgelegte Fahrstrecke in Deutschland ansässiger Autofahrer*innen. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Fahrstrecke beträgt 9800 km; der Modalwert der Fahrstrecke beträgt 9200 km; der arithmetische Mittelwert der Fahrstrecke beträgt 10300 km; der Quartilsabstand der Fahrstrecke beträgt 7800 km; das erste Quartil der Fahrstrecke liegt bei 6100 km. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!
- a) Die Hälfte der Autofahrer*innen fährt pro Jahr 9800 km oder mehr.
 - b) Ein Viertel der Autofahrer*innen fährt pro Jahr 13900 km oder mehr.
 - c) Ein Viertel der Autofahrer*innen fährt pro Jahr 6100 km oder weniger.
 - d) Die Hälfte der Autofahrer*innen fährt pro Jahr 10300 km oder mehr.
 - e) Die Spanne der jährlichen Fahrleistungen beträgt 15600 km.
- (Fragetyp Mehrfachwahl)*
15. Bei der Messung des Spannungsabfalls über einem Widerstand mittels eines Spannungsmessgerätes welches direkt an die Zuleitungen des Widerstandes angeschlossen wird kann es aufgrund des Widerstandes der Zuleitungen zu systematischen Messabweichungen kommen. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich dieser Messabweichungen zutreffend sind!
- a) Die systematischen Abweichungen entstehen dadurch, dass die widerstandsbehafteten Zuleitungen des Widerstandes von demselben Strom durchflossen werden, wie der Widerstand selbst.
 - b) Die durch den Widerstand der Zuleitungen verursachte systematische Messabweichung bewirkt, dass der gemessene Spannungsabfall geringer ist als der tatsächliche Spannungsabfall über dem Widerstand.
 - c) Bei der Spannungsmessung an großen Widerständen wirkt sich der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen stärker auf das Messergebnis aus als bei der Messung an kleinen Widerständen.
 - d) Bei bekannten Leitungswiderständen kann die Abweichung rechnerisch korrigiert werden.
 - e) Sind die Leitungswiderstände nicht bekannt und können nicht vernachlässigt werden, kann der Einfluss der Leitungswiderstände durch Einsatz einer Vierleiterschaltung reduziert werden.
- (Fragetyp Mehrfachwahl)*

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!

- a) Der Nonius eines Messschiebers stellt eine Hilfsteilung dar, welche dazu dient, die Ablesegenauigkeit zu erhöhen.
- b) Die Bügelmessschraube ist anfällig für das Auftreten eines Abbefehlers, da bei ihr Antast- und Messlinie nicht fluchten.
- c) Bei der Bügelmessschraube stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher.
- d) Bei der Messuhr wird die Auslenkung des Messbolzens über ein Präzisionsgetriebe in eine Zeigerdrehung gewandelt.
- e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im weiteren Sinne.

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über inkrementale Wegmesssysteme zutreffend sind!

- a) Inkrementale Wegmesssysteme können basierend auf unterschiedlichen physikalischen Wirkprinzipien realisiert werden, wie z.B. optisch, elektrisch oder magnetisch.
- b) Um bei einem inkrementalen Wegmesssystem Informationen über die Bewegungsrichtung zu gewinnen, werden in der Regel zwei um 90° phasenverschobene Signale genutzt.
- c) Wird bei einem inkrementalen Wegmesssystem die Signalauswertung auch nur kurzzeitig unterbrochen, geht die Information über die Absolutposition in der Regel verloren.
- d) Ein typisches Einsatzgebiet für kapazitive inkrementale Wegmesssysteme stellen digitale Messschieber dar.
- e) Bei inkrementalen Wegmesssystemen ist durch Interpolationstechniken oftmals eine Steigerung des Auflösungsvermögens über die Teilung der Maßverkörperung hinaus möglich.

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über Massenmessgeräte zutreffend sind!

- a) Die Messung einer Masse wird meist auf eine Kraftmessung zurückgeführt, da Masse und die durch die Masse ausgeübte Kraft über die Erdbeschleunigung miteinander verknüpft sind.
- b) Die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung wird hauptsächlich durch lokale Dichteunterschiede der Erde verursacht.
- c) Um die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung zu berücksichtigen, ist Deutschland in 4 Gebrauchszonen mit unterschiedlicher Erdbeschleunigung unterteilt.
- d) Im Unterschied zum *konventionellen Wägewert* wird beim *Wägewert* der Einfluss des Auftriebs im umgebenden Medium berücksichtigt.
- e) Während *Wägen* das Feststellen einer unbekanntten Masse bezeichnet, bezeichnet *Klassierwägen* das Herstellen einer bestimmten Masse.

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Kurzfragen:

19. Erläutern Sie, was unter der *Hysterese* eines Messgerätes zu verstehen ist!
20. Erläutern Sie, wodurch sich *nominalskalierte* Daten und *ordinalskalierte* Daten voneinander unterscheiden! Nennen Sie für beide Datentypen je ein Beispiel!
21. Bei der Beobachtung einer normalverteilten, dimensionslosen Zufallsgröße stellen Sie fest, dass 2,275% aller Einzelwerte kleiner als 80 sind und dass 0,135% aller Einzelwerte größer als 130 sind. Geben Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der zugrundeliegenden Verteilung an!
22. Benennen und erläutern Sie die beiden Arten von Fehlentscheidung, die bei statistischen Tests auftreten können!
23. Bei der Beobachtung eines Zufallsprozesses stellen Sie fest, dass zwischen dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ der Zusammenhang $\sigma = \sqrt{\mu}$ besteht. Um welche Art von Verteilungsfunktion handelt es sich aller Wahrscheinlichkeit nach?
24. Geben Sie an, welcher Punkt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden liegt!
25. Skizzieren Sie anhand eines Sinussignals exemplarisch, wie es durch Verletzung des Abtasttheorems nach Shannon zu einer fehlerhaften Rekonstruktion des Ursprungssignals kommen kann!
26. Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von 100 k Ω soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand 0,1 Ω) und eines Spannungsmessgeräts (Innenwiderstand 1 M Ω) indirekt gemessen werden.
 - a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!
 - b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!
27. Erläutern Sie den Aufbau und die Funktionsweise eines Thermoelements!

Ende der Kurzfragen

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j))^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten x_1, \dots, x_n
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall

5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x -Wert x^* der y -Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f \right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test**t-Test für Erwartungswert**

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist $|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n_x+n_y-2; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2 -Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0 : X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten x_1, \dots, x_n aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i , so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe x_1, \dots, x_n enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten x_1, \dots, x_n abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i , mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:

- r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
- s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
- Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$

9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α , wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1; 1-\alpha}^2$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1		3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2		1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3		1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4		1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5		1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6		1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7		1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8		1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9		1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10		1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11		1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12		1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13		1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14		1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15		1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16		1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17		1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18		1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19		1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20		1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21		1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22		1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23		1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24		1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25		1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26		1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27		1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28		1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29		1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30		1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40		1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50		1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60		1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70		1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80		1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90		1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100		1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200		1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞		1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi_{s,p}^2$ der χ^2 -Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1		2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2		4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3		6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4		7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5		9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6		10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7		12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8		13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9		14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10		16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11		17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12		18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13		19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14		21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15		22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16		23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17		24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18		26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19		27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20		28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21		29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22		30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23		32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24		33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25		34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26		35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27		36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28		37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29		39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30		40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40		51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50		63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60		74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70		85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80		96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90		107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100		118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

Tabelle 1

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt; \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,50000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1-1,350 \cdot 10^{-3}$	$1-2,326 \cdot 10^{-4}$	$1-3,167 \cdot 10^{-5}$	$1-3,398 \cdot 10^{-6}$	$1-2,867 \cdot 10^{-7}$	$1-9,866 \cdot 10^{-10}$	$1-1,280 \cdot 10^{-12}$	$1-6,221 \cdot 10^{-16}$	$1-1,129 \cdot 10^{-19}$	$1-7,620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	99,99%	z
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	3,291	z