Klausur

Einführung in die Messtechnik

27. Februar 2025

- ☐ Bachelor Maschinenbau
- ☐ Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau
- ☐ Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
- ☐ Bachelor Verkehrsingenieurwesen
- ☐ Bachelor Umweltingenieurwesen
- ☐ Bachelor Bauingenieurwesen
- ☐ Bachelor Sustainable Engineering of Products and Processes
- ☐ Bachelor Physik
- ☐ Kenntnisprüfung im Rahmen der Promotion
- ☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: ____

Matrikel-Nr.: __________________________________

Prüfungsraum: _________________________________

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/17	/12	/18	/25	/13	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird sowie die Sitzplatznummer einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u\big(v(x)\big)$

Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$

Eulersche Zahl: $\mathrm{e} = 2{,}718281828459045235 \ldots$

Kraft: $1\ \mathrm{N\ (Newton)} = 1\ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Dichte: $1 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 10^{-3} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

1. Aufgabe:

Eine gängige Methode zur Bestimmung der Dichte von Festkörpern stellt das sogenannte Auftriebsverfahren dar. Dieses basiert auf dem Archimedischen Prinzip, welches besagt, dass der statische Auftrieb eines Körpers in einem Medium genauso groß ist wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums.

Zur Durchführung dieser Methode wird zum einen die Gewichtskraft des Festkörpers in Luft ermittelt und zum anderen seine Gewichtskraft bei Eintauchen in eine Hilfsflüssigkeit. Bei Kenntnis der Dichten von Luft und Hilfsflüssigkeit kann die gesuchte Dichte des Festkörpers wie folgt berechnet werden.

$$\rho_K = \frac{F_L}{F_L - F_F} \cdot (\rho_F - \rho_L) + \rho_L$$

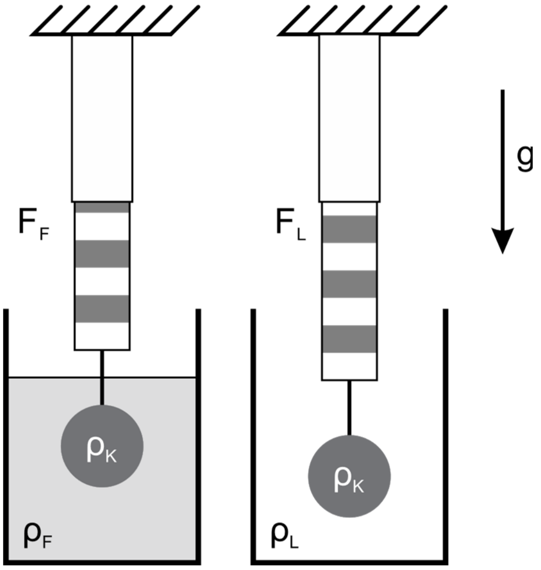


Abbildung 1.1: Auftriebsverfahren zur Dichtebestimmung eines Festkörpers

Hierin ist ρ_K die gesuchte Dichte des Festkörpers, ρ_L ist die Dichte der Luft, ρ_F ist die Dichte der Hilfsflüssigkeit, F_L ist die Gewichtskraft des Körpers in Luft und F_F ist die Gewichtskraft des Körpers in der Flüssigkeit.

Im Folgenden soll die Dichte des Festkörpers ρ_K auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen ρ_L, ρ_F, F_L und F_F einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Gewichtskräfte F_L und F_F werden jeweils mit einem Kraftaufnehmer auf DMS-Basis und zugehörigem Messverstärker ermittelt. Unter Berücksichtigung der Unsicherheitsangaben des Herstellers beträgt die Gewichtskraft bei Messung in Luft $F_L = 420$ mN $\pm\ 1$ mN bei $P = 99\%$ und bei Messung in der Hilfsflüssigkeit $F_F = 297$ mN $\pm\ 1$ mN bei $P = 99\%$.

Die von den Umgebungsbedingungen abhängige Dichte der Luft schätzen Sie anhand der Daten einer Wetterstation unter Nutzung eines Online-Rechners zu $\rho_L = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3} \pm 0{,}01\ \mathrm{kg/m^3}$ bei $P = 95\%$ und sehr großem Stichprobenumfang n_L.

Die temperaturabhängige Dichte der Hilfsflüssigkeit ρ_F haben Sie im Vorfeld mittels eines Aräometers in $n_F = 8$ Wiederholungen experimentell ermittelt. Dabei ergaben sich die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
ρ_F / $\mathrm{kg/m^3}$	789,9	789,6	791,6	788,4	790,1	789,5	789,3	792,0

Tabelle 1.1: Messwerte der Dichte der Hilfsflüssigkeit ρ_F

a) Berechnen Sie die gesuchte Dichte des Festkörpers ρ_K und geben Sie das vollständige Messergebnis in der Einheit $\mathrm{kg/m^3}$ mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Bei der Analyse Ihrer anhaltenden Verluste durch Fußballsportwetten sind Sie auf die Information gestoßen, dass die Anzahl der in einer Fußballliga im Laufe einer Saison pro Spiel erzielten Tore einer Poisson-Verteilung genügen soll.

Die Poisson-Verteilung ist eine diskrete, univariate Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit welcher die Anzahl von Ereignissen modelliert werden kann, die bei konstanter mittlerer Rate unabhängig voneinander in einem festen Zeitintervall oder räumlichen Gebiet eintreten. Die Poisson-Verteilung ist auf der Menge $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen einschließlich Null definiert.

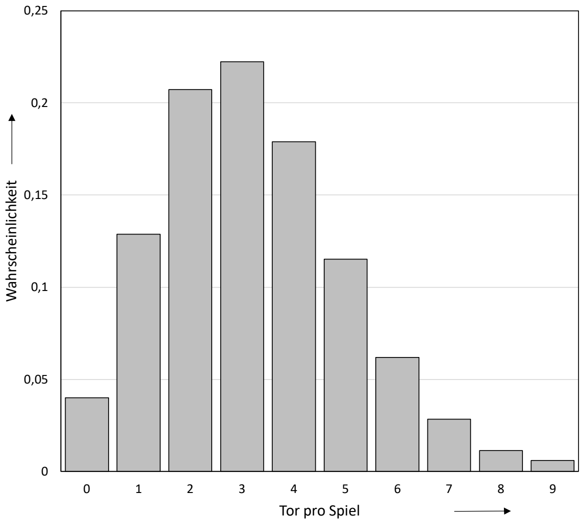


Abbildung 2.1: Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 3{,}219$

Die Wahrscheinlichkeit P_λ dafür, dass bei einem Poisson-verteilten Prozess k Ereignisse registriert werden, ist durch folgenden Ausdruck definiert:

$$P_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Hierin steht k für die Anzahl der registrierten Ereignisse (im vorliegenden Fall also für die Anzahl der pro Partie erzielten Tore), λ ist der Parameter der Poisson-Verteilung und e ist die Eulersche Zahl (Basis der natürlichen Exponentialfunktion).

Diese Hypothese möchten Sie anhand der Spielergebnisse der Fußball-Bundesliga aus der Saison 2023/24 überprüfen, welche in einer Online-Datenbank verfügbar sind. Sie stellen fest, dass in den insgesamt $n = 306$ Spielen der Saison in Summe $m = 985$ Tore gefallen sind. Die Häufigkeiten, mit welchen die jeweilige Toranzahl $k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ erzielt wurde sind in Tabelle 2.1 angegeben.

Anzahl Tore	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	13	32	70	65	60	32	24	7	2	1

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für Anzahl der Tore pro Partie

Der Parameter λ der Poisson-Verteilung kann durch den arithmetischen Mittelwert der Anzahl der Tore pro Partie abgeschätzt werden, wonach hier folglich gilt $\lambda = m/n$.

a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ einer Poisson-Verteilung genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.
- *Fragetyp Zuordnung*: Bei Fragen dieses Typs ist in der gegebenen Matrix von Termen jeder Zeile genau eine Spalte zuzuordnen. Bei Fragen dieses Typs erfolgt die Bewertung zeilenweise und es wird je Zeile nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Spalte zugeordnet wurde.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Tauchkörpern für die Dichtemessung von Flüssigkeiten gemäß DIN EN ISO 2811-2 wird im Zuge des Fertigungsprozesses das Volumen der Tauchkörper überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 10$ entnommen und das Volumen V ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Volumens von $\overline{V} = 24{,}98\ \mathrm{cm}^3$ und eine Streuung von $S_V = 0{,}025\ \mathrm{cm}^3$. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Volumens V für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% beträgt für diesen Fall rund:

a) $V = 24{,}98\ \mathrm{cm}^3 \pm 0{,}0162\ \mathrm{cm}^3; \mathrm{P} = 98\%$ ☐
b) $V = 24{,}98\ \mathrm{cm}^3 \pm 0{,}0184\ \mathrm{cm}^3; \mathrm{P} = 98\%$ ☐
c) $V = 24{,}98\ \mathrm{cm}^3 \pm 0{,}0190\ \mathrm{cm}^3; \mathrm{P} = 98\%$ ☐
d) $V = 24{,}98\ \mathrm{cm}^3 \pm 0{,}0219\ \mathrm{cm}^3; \mathrm{P} = 98\%$ ☐
e) $V = 24{,}98\ \mathrm{cm}^3 \pm 0{,}0223\ \mathrm{cm}^3; \mathrm{P} = 98\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des Volumens der Tauchkörper $\sigma_V = 0{,}025\ \mathrm{cm}^3$ betrage. Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Volumens V auf maximal $\pm\ 0{,}01\ \mathrm{cm}^3$ abschätzen zu können?

a) 34 ☐
b) 38 ☐
c) 42 ☐
d) 45 ☐
e) 46 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Tauchkörper weisen dann ein Volumen auf, das <u>innerhalb</u> des Intervalls von $24{,}95\ \mathrm{cm}^3 \leq V \leq 25{,}05\ \mathrm{cm}^3$ liegt?

a) $99{,}74\%$ ☐
b) $95{,}45\%$ ☐
c) $88{,}24\%$ ☐
d) $11{,}76\%$ ☐
e) $11{,}51\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert des Volumens betrage $\mu_V = 25\ \mathrm{cm}^3$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_V des Volumens dann maximal aufweisen, damit 95% Tauchkörper ein Volumen <u>innerhalb</u> des Intervalls von $24{,}98\ \mathrm{cm}^3 \leq V \leq 25{,}02\ \mathrm{cm}^3$ lägen?

a) $0{,}0102\ \mathrm{cm}^3$ ☐
b) $0{,}0121\ \mathrm{cm}^3$ ☐
c) $0{,}0204\ \mathrm{cm}^3$ ☐
d) $0{,}0243\ \mathrm{cm}^3$ ☐
e) $0{,}0284\ \mathrm{cm}^3$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Tauchkörpern möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigungsanlage sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck stündlich eine Stichprobe aus der laufenden Produktion. Anhand der entnommenen Stichprobe wird jeweils der Erwartungswert μ_V des Volumens der Tauchkörper abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob der so abgeschätzte Erwartungswert sich signifikant von dem Nennwert des Volumens $V_{nenn} = 100\ \mathrm{cm}^3$ unterscheidet, welcher gemäß Spezifikation gefordert ist.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei <u>un</u>abhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei <u>un</u>abhängigen Stichproben ☐
e) χ^2-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand von Stichproben des Volumens von auf unterschiedlichen Anlagen gefertigten Tauchkörpern möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben durchführen. Aus den erhobenen Stichproben jeweils vom Umfang $n = 12$ haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Volumina V_x und V_y ermittelt zu $\overline{V_x} = 49{,}97$ cm³ und $S_{V_x} = 0{,}02$ cm³ sowie $\overline{V_y} = 50{,}04$ cm³ und $S_{V_y} = 0{,}03$ cm³.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) $-4{,}98$ ☐
b) $-5{,}64$ ☐
c) $-6{,}73$ ☐
d) $-9{,}51$ ☐
e) $-9{,}70$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 10 ☐
b) 11 ☐
c) 21 ☐
d) 22 ☐
e) 23 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert das Volumen einer Charge von Tauchkörpern überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 20$. Ihre Nullhypothese lautet, dass der Erwartungswert des Volumens dem Referenzwert entspricht ($\mu_x = \mu_0$). Sie wählen die zweiseitige Alternativhypothese, dass der Erwartungswert des Volumens von dem Referenzwert abweicht ($\mu_x \neq \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2{,}41$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um extensive Zustandsgrößen handelt!

a) Länge ☐
b) Volumen ☐
c) Masse ☐
d) Stoffmenge ☐
e) Dichte ☐
f) dynamische Viskosität ☐
g) Wärmekapazität ☐
h) molare Masse ☐

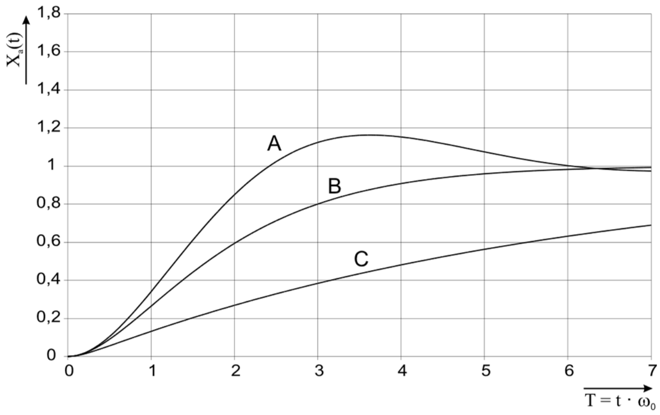
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $10\ \text{cm}^3 + 0{,}1\ \text{dm}^3 = 2{\cdot}10^{-4}\ \text{m}^3$ ☐
b) $1\ \text{PW} + 100\ \text{TW} = 1{,}1{\cdot}10^{12}\ \text{W}$ ☐
c) $989\ \text{hPa} + 1{,}1\ \text{kPa} = 0{,}1\ \text{MPa}$ ☐
d) $100\ \text{pF} + 1\ \text{nF} = 1{,}1{\cdot}10^{-9}\ \text{F}$ ☐
e) $20\ \text{mg} + 4000\ \mu\text{g} = 0{,}06\ \text{g}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 0{,}1$; $D_B = 0{,}3$; $D_C = 0{,}5$ ☐
b) $D_A = 0{,}5$; $D_B = 1$; $D_C = 3$ ☐
c) $D_A = 1$; $D_B = 3$; $D_C = 5$ ☐
d) $D_A = 5$; $D_B = 1$; $D_C = 0{,}3$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten $T = 2$ s und dem Übertragungsfaktor $K = 2$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von -5 V auf $+5$ V beaufschlagt. Geben Sie an, welche Spannung nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang des Systems ungefähr anliegen wird!

a) 6,3 V ☐
b) 3,2 V ☐
c) 2,8 V ☐
d) 2,6 V ☐
e) 1,3 V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung oberhalb des fünften Perzentils liegen!

a) 5% ☐
b) 20% ☐
c) 25% ☐
d) 80% ☐
e) 95% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 25 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $6 \leq \mu \leq 14$ bei $P = 95\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $8 \leq \mu \leq 12$ zu reduzieren!

a) 50 ☐
b) 60 ☐
c) 100 ☐
d) 125 ☐
e) 180 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -48 V bis $+48$ V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler nicht mehr als 1 mV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 15 Bit ☐
b) 16 Bit ☐
c) 17 Bit ☐
d) 18 Bit ☐
e) 20 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Ordnen Sie die nachfolgend genannten Merkmalsausprägungen den zugehörigen Skalenniveaus zu!

	Nominalskala	Ordinalskala	Intervallskala	Verhältnisskala	Absolutskala
Temperatur in Grad Celsius	☐	☐	☐	☐	☐
Sternebewertung	☐	☐	☐	☐	☐
Studiengang	☐	☐	☐	☐	☐
Stückzahl	☐	☐	☐	☐	☐
Geschwindigkeit	☐	☐	☐	☐	☐

(Fragetyp Zuordnung)

15. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über spezielle Verteilungsfunktionen zutreffend sind!

a) Die Gaußsche Normalverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert μ und ihre Wendepunkte liegen bei $x = \mu \pm \sigma$. ☐

b) Die Gaußsche Normalverteilung beschreibt solche Prozesse gut, auf die eine große Zahl statistisch <u>un</u>abhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. ☐

c) Die Binomialverteilung beschreibt den wahrscheinlichen Ausgang einer Folge gleichartiger Versuche, bei der es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt. ☐

d) Für eine sehr große Zahl von Versuchen ($n \to \infty$) und eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses ($p \to 0$) nähert sich die Binomialverteilung der Poissonverteilung an. ☐

e) Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung sind identisch. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über Massenmessgeräte zutreffend sind!

a) Die Messung einer Masse wird meist auf eine Kraftmessung zurückgeführt, da Masse und die durch die Masse ausgeübte Kraft über die Erdbeschleunigung miteinander verknüpft sind. ☐

b) Die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung wird hauptsächlich durch die Erdrotation und die damit verbundene, der Gravitation entgegen gesetzte Zentrifugalkraft verursacht. ☐

c) Um die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung zu berücksichtigen, ist Deutschland in 4 Gebrauchszonen mit unterschiedlicher Erdbeschleunigung unterteilt. ☐

d) Als *Wägen* wird das Herstellen einer bestimmten Masse bezeichnet. ☐

e) Als *Abwägen* wird das Feststellen einer unbekannten Masse bezeichnet. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!

a) Die Bügelmessschraube ist anfällig gegenüber dem Auftreten des Abbe-Fehlers, da bei ihr im Regelfall Antast- und Messlinie <u>nicht</u> fluchten. ☐

b) Der Nonius eines Messschiebers stellt eine Hilfsteilung dar, welche dazu dient, den Parallaxenfehler bei der Ablesung zu minimieren. ☐

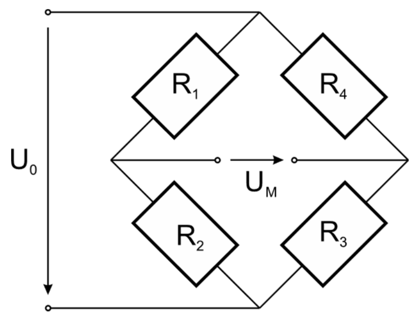
c) Bei einem Messschieber stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher. ☐

d) Bei der Messuhr wird die Auslenkung des Messbolzens über ein Präzisionsgetriebe in eine Zeigerdrehung gewandelt. ☐

e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im engeren Sinne. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Wheatstone-Brücke. ☐

b) Die abgebildete Schaltung eignet sich zur Auswertung kleiner Widerstandsänderungen, z.B. bei der Verformungsmessung mit Dehnungsmessstreifen. ☐

c) Prinzipiell handelt es sich bei der abgebildeten Schaltung um die Parallelschaltung zweier Spannungsteiler. ☐

d) Eine Schaltung nach dem Prinzip der abgebildeten, bei welcher alle vier Widerstände veränderlich sind, bezeichnet man auch als Viertelbrücke. ☐

e) Die dargestellte Brücke gilt als abgeglichen, wenn für die Widerstände gilt $R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4$. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

19. Mittels einer hochgenauen Waage bestimmen Sie unter normalen Laborbedingungen den Wägewert von jeweils einem Kilogramm Blei und einem Kilogramm Federn. Welche Aussage hinsichtlich der beiden Wägewerte ist zutreffend?

a) Die Wägewerte für Blei und Federn unterscheiden sich nicht. ☐

b) Der Wägewert für das Blei ist höher, als der Wägewert für die Federn. ☐

c) Der Wägewert für die Federn ist höher, als der Wägewert für das Blei. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

Kurzfragen:

20. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten!

21. Bei einer Prüfung haben die insgesamt 12 Teilnehmer*innen die in nachfolgender Tabelle zusammengefassten Noten erzielt:

*Teilnehmer*innen*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note	2	1	4	2	3	1	3	4	4	2	5	4

Geben Sie den Medianwert und den Modalwert sowie die Spannweite obiger Notenverteilung an!

22. Benennen und erläutern Sie die beiden Arten von Fehlentscheidung, die bei statistischen Tests auftreten können!

23. Geben Sie an, welche Überprüfung mit der einfachen Varianzanalyse (einfaktorielle ANOVA) vorgenommen werden kann!

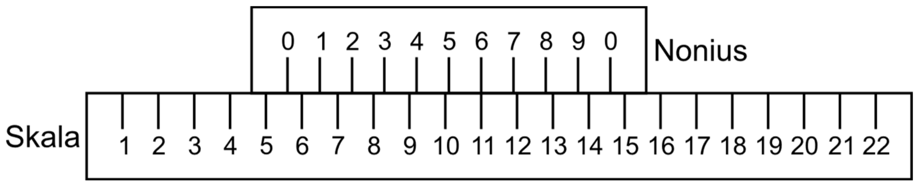
24. Geben Sie an, welcher Punkt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden liegt!

25. Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von 100 kΩ soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand 0,1 Ω) und eines Spannungsmessgeräts (Innenwiderstand 1 MΩ) indirekt gemessen werden.

a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!

b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!

26. Lesen Sie die auf untenstehender Abbildung dargestellte Skala mit Nonius ab und geben Sie das (einheitenlose) Ableseergebnis mit einer Auflösung von einer Nachkommastelle an!



27. Sie planen, ein Musiksignal zu digitalisieren und hierfür einen A/D-Umsetzer mit einer Abtastfrequenz von 44,1 kHz zu verwenden. Sie wissen, dass in dem analogen Musiksignal Frequenzanteile bis hinauf zu 80 kHz enthalten sind, deren Amplitude nicht vernachlässigbar ist. Ihnen ist bewusst, dass für diese hohen Frequenzanteile das Abtasttheorem nach Shannon verletzt wird. Ihr Kommilitone schlägt vor, die A/D-Umsetzung dennoch wie geplant vorzunehmen und argumentiert, dass Frequenzen von über 20 kHz für den Menschen ohnehin nicht hörbar seien und es daher keine Rolle spiele, wenn diese nicht korrekt digitalisiert werden. Geben Sie an, ob Sie dieser Argumentation folgen würden oder nicht! Begründen Sie Ihre Antwort!

Ende der Kurzfragen

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \dots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad (\mathrm{df} = 2\mathrm{n} - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1,1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70	1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80	1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90	1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit *s* Freiheitsgraden

s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

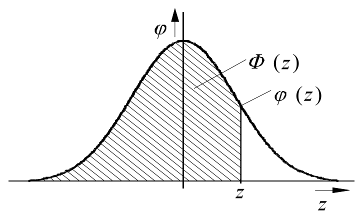
Tabelle 1

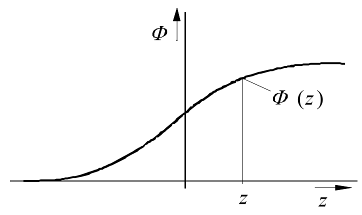
Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$

z-Transformation: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z