

Klausur

Einführung in die Messtechnik

23. Juli 2026

- ☐ Bachelor Maschinenbau
- ☐ Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau
- ☐ Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
- ☐ Bachelor Verkehrsingenieurwesen
- ☐ Bachelor Umweltingenieurwesen
- ☐ Bachelor Bauingenieurwesen
- ☐ Bachelor Sustainable Engineering of Products and Processes
- ☐ Bachelor Physik
- ☐ Kenntnisprüfung im Rahmen der Promotion
- ☐ sonstige: _____

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Prüfungsraum: _____

**Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich
in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).**

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/18	/12	/18	/24	/13	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches und Smartglasses. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird sowie die Sitzplatznummer einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabestellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabestellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit } y = u(v(x))$

Druck: $1 \text{ Pa (Pascal)} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}}$

Dynamische Viskosität: $1 \text{ Pa} \cdot \text{s (Pascalsekunde)} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}}$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n$

Einheitssprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung: $x_a(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \text{ für } t \geq 0$

1. Aufgabe:

Die Viskosität ist die Eigenschaft eines flüssigen oder gasförmigen Stoffes, der gegenseitigen Verschiebung benachbarter Schichten einen Widerstand (innere Reibung) entgegenzusetzen. Sie bestimmt u.a., welchen Strömungswiderstand bewegte Körper in einem Medium erfahren. Man unterscheidet dabei die dynamische und die kinematische Viskosität, die miteinander über die Dichte des betreffenden Stoffes zusammenhängen.

Die dynamische Viskosität η kann beispielsweise mit einem Fallkörperviskosimeter (vgl. Abbildung 1.1) bestimmt werden. Hierbei lässt man eine Kugel (Dichte ρ_K , Radius r_K) in einem mit der zu untersuchenden Flüssigkeit (Dichte ρ_F) gefüllten Gefäß frei fallen. Die Kugel wird im Schwerfeld der Erde mit der Fallbeschleunigung g beschleunigt, bis sich – bedingt durch die Flüssigkeitsreibung – eine stationäre Sinkgeschwindigkeit v_K einstellt. Die dynamische Viskosität η lässt sich für die beschriebene Anordnung, unter Hinzuziehung des Stokes'schen Gesetzes, durch folgenden Zusammenhang angeben:

$$\eta = \frac{2 \cdot r_K^2 \cdot g \cdot (\rho_K - \rho_F)}{9 \cdot v_K}$$

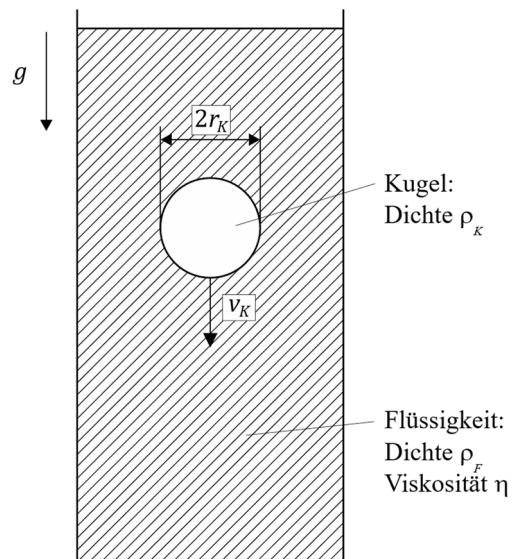


Abbildung 1.1: Fallkörperviskosimeter

Im Folgenden soll die dynamische Viskosität η auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen r_K , v_K , g , ρ_F und ρ_K einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Erdbeschleunigung g am Versuchsstandort wurde anhand von Datenbankwerten abgeschätzt und beträgt $g = 9,813 \text{ m/s}^2 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$ bei $P = 98\%$ und sehr großem Stichprobenumfang n_g .

Der Radius der verwendeten Prüfkugel wird vom Hersteller mit $r_K = 5 \text{ mm} \pm 0,005 \text{ mm}$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ und sehr großem Stichprobenumfang n_r angegeben. Die Dichte ρ_K der Kugel wird vom Hersteller mit $\rho_K = 8,0 \text{ kg/dm}^3$ angegeben und kann als exakt angesehen werden.

Die Dichte ρ_F der Flüssigkeit wurde im Vorfeld zu $\rho_F = 1,26 \text{ g/cm}^3 \pm 0,004 \text{ g/cm}^3$ bei $P = 95\%$ und einem Stichprobenumfang von $n_\rho = 8$ ermittelt.

Zur Messung der stationären Sinkgeschwindigkeit v_K kommt ein berührungslos wirkendes optisches Messverfahren zum Einsatz. Die Sinkgeschwindigkeit v_K wird in insgesamt $n_v = 6$ Wiederholungen gemessen. Dabei werden die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	1	2	3	4	5	6
$v_K / \text{mm/s}$	248,7	247,1	248,5	248,0	247,7	248,0

Tabelle 1.1: Messwerte der Sinkgeschwindigkeit v_K

- a) Berechnen Sie die gesuchte dynamische Viskosität η und geben Sie das vollständige Messergebnis in der Einheit $\text{mPa} \cdot \text{s}$ (Millipascalsekunde) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ an.

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Im Rahmen Ihres Praktikums in der IT-Abteilung eines großen Automobilherstellers sind Sie regelmäßig mit Beschwerden von Anwendern konfrontiert, die beanstanden, dass der ihnen am PC-Arbeitsplatz bereitgestellte Monitor mindestens einen Pixelfehler aufweist.

Aufgrund der großen Stückzahlen bezieht das Unternehmen die Monitore in Gebinden zu je 30 Stück. Um Daten für eine etwaige Reklamation gegenüber dem Lieferanten zu erhalten, werden Sie beauftragt, zu überprüfen, ob die Häufigkeit von Pixelfehlern innerhalb der Gebinde der zu erwartenden Binomialverteilung entspricht.

Gemäß Liefervereinbarung ist davon auszugehen, dass im Mittel jeder zwanzigste Monitor einen Pixelfehler aufweist. Insgesamt liegen Ihnen Daten von 100 Gebinden zu je 30 Monitoren vor. Die Anzahl der dabei pro Gebinde festgestellten Monitore mit Pixelfehlern sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Anzahl k der Monitore mit Pixelfehlern pro Gebinde	0	1	2	3	4	5
Häufigkeit	18	35	22	17	5	3

Tabelle 2.1: Ermittelte Anzahl k der Monitore mit Pixelfehlern pro Gebinde

Ihnen ist bekannt, dass das statistische Verhalten der Anzahl Monitore mit Pixelfehlern pro Gebinde durch eine Binomialverteilung beschrieben werden sollte. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n Monitoren je Gebinde in einem Gebinde insgesamt k Monitore mit Pixelfehlern auftreten beträgt demnach:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Hierin steht k für die Anzahl der Monitore mit Pixelfehlern pro Gebinde, also die möglichen Ergebnisklassen 0 bis n ; n steht für die Gesamtzahl der Monitore pro Gebinde; p steht für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein einzelner Monitor einen Pixelfehler aufweist, während q die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen fehlerfreien Monitor angibt (es gilt $p + q = 1$).

- a) Untersuchen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Ihren Daten festgestellte Häufigkeit von Monitoren mit Pixelfehlern je Gebinde auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ als zufällig angesehen werden kann, ob also die beobachtete Verteilung einer den Randbedingungen der Erhebung entsprechenden Binomialverteilung genügt!

Hinweis: Berechnung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ – gesprochen „n über k“ – siehe Formelsammlung auf Seite 2.

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.
- *Fragetyp Zuordnung:* Bei Fragen dieses Typs ist in der gegebenen Matrix von Termen jeder Zeile genau eine Spalte zuzuordnen. Bei Fragen dieses Typs erfolgt die Bewertung zeilenweise und es wird je Zeile nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Spalte zugeordnet wurde.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Kugelfallviskosimetern nach DIN 53015 werden Prüfkugeln im Rahmen einer Wareneingangsprüfung hinsichtlich ihres als normalverteilt angenommenen Durchmessers D überprüft. Hierzu wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 15$ entnommen und der Durchmesser D ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Durchmessers von $\bar{D} = 15,61$ mm und eine Streuung von $S_D = 0,03$ mm. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

- 3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ beträgt für diesen Fall rund:

- a) $D = 15,61 \text{ mm} \pm 0,013 \text{ mm}$; $P = 95\%$ ☐
- b) $D = 15,61 \text{ mm} \pm 0,014 \text{ mm}$; $P = 95\%$ ☐
- c) $D = 15,61 \text{ mm} \pm 0,015 \text{ mm}$; $P = 95\%$ ☐
- d) $D = 15,61 \text{ mm} \pm 0,016 \text{ mm}$; $P = 95\%$ ☐
- e) $D = 15,61 \text{ mm} \pm 0,017 \text{ mm}$; $P = 95\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

- 3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des Durchmessers $\sigma_D = 0,025$ mm betrage (Hinweis: Gilt nur für Aufgabenteil 3.2). Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n , um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers D auf maximal $\pm 0,01$ mm abschätzen zu können?

- a) 17 ☐
- b) 34 ☐
- c) 38 ☐
- d) 42 ☐
- e) 46 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Kugeln weisen dann einen Durchmesser auf, die außerhalb des Intervalls von $15,55 \text{ mm} \leq D \leq 15,65 \text{ mm}$ liegt?

- a) 2,3% ☐
- b) 6,3% ☐
- c) 11,4% ☐
- d) 88,6% ☐
- e) 93,7% ☐

(Frage typ Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert des Durchmessers betrage $\mu_D = 15,6 \text{ mm}$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_D des Durchmessers dann maximal aufweisen, damit 99% der Rohre eine Wanddicke innerhalb des Intervalls von $15,55 \text{ mm} \leq D \leq 15,65 \text{ mm}$ aufwiesen?

- a) 0,0155 mm ☐
- b) 0,0194 mm ☐
- c) 0,0215 mm ☐
- d) 0,0255 mm ☐
- e) 0,0304 mm ☐

(Frage typ Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Präzisionskugeln für Kugellager möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigungsanlage sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck stündlich eine Stichprobe aus der laufenden Produktion einer Fertigungsanlage A. Anhand der entnommenen Stichprobe wird der Erwartungswert μ_D des Durchmessers der gefertigten Kugeln abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob der so abgeschätzte Erwartungswert μ_D sich signifikant von dem durch die Spezifikation vorgegebenen Durchmesser unterscheidet.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

- a) t-Test für Erwartungswert ☐
- b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
- c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
- d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben ☐
- e) χ^2 -Test ☐

(Frage typ Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

- a) einseitige Alternativhypothese ☐
- b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Frage typ Einfachwahl)

5. Anhand der Stichproben des Durchmessers D zweier Chargen X und Y von Präzisionskugeln für Kalibrierkörper möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben durchführen. Aus den erhobenen Stichproben jeweils vom Umfang $n = 12$ haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Durchmesser ermittelt zu $\bar{D}_X = 24,998$ mm, $\bar{D}_Y = 25,001$ mm, $S_{D_X} = 0,0013$ mm und $S_{D_Y} = 0,0015$ mm.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

- a) $-0,20$ ☐
- b) $-0,44$ ☐
- c) $-5,24$ ☐
- d) $-7,40$ ☐
- e) $-7,42$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

- a) 10 ☐
- b) 11 ☐
- c) 12 ☐
- d) 22 ☐
- e) 23 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben die Eigenschaften zweier Fertigungslinien von Präzisionskugeln überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt jeweils $n = 15$. Ihre Nullhypothese lautet, dass zwischen beiden Fertigungslinien kein Unterschied besteht ($\mu_x = \mu_y$). Ihre Alternativhypothese lautet, dass die Fertigungslinie X signifikant größere Durchmesser fertigt als Fertigungslinie Y ($\mu_x > \mu_y$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,01$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = 2,61$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

- a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt ☐
- b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, welche der nachfolgend genannten physikalischen Konstanten zur Definition der Grundgrößen des Internationalen Einheitensystems (SI) herangezogen werden!

- a) Elementarladung ☐
- b) Fermi-Konstante ☐
- c) Wien-Konstante ☐
- d) Avogadro-Konstante ☐
- e) Elektrische Feldkonstante ☐
- f) Planck-Konstante ☐
- g) Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ☐
- h) Stefan-Boltzmann-Konstante ☐

(Frage typ Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

- a) $400 \mu\text{V} + 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 4 \text{ mV}$ ☐
- b) $3 \text{ MN} \cdot 20 \text{ cm} = 60 \text{ kNm}$ ☐
- c) $5 \text{ TW} - 500 \text{ GW} = 4,5 \cdot 10^9 \text{ W}$ ☐
- d) $10 \text{ dm}^2 + 1000 \text{ cm}^2 = 0,2 \text{ m}^2$ ☐
- e) $500 \text{ pF} + 0,5 \text{ nF} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ F}$ ☐

(Frage typ Mehrfachwahl)

9. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten $T = 0,5 \text{ s}$ und dem Übertragungsfaktor $K = 2$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von -12 V auf $+12 \text{ V}$ beaufschlagt. Geben Sie an, nach welcher Zeitdauer t am Ausgang des Systems eine Spannung von etwa 0 V anliegt! Hinweis: Formelsammlung auf Seite 2 beachten!

- a) $0,17 \text{ s}$ ☐
- b) $0,35 \text{ s}$ ☐
- c) $0,42 \text{ s}$ ☐
- d) $0,50 \text{ s}$ ☐
- e) $0,69 \text{ s}$ ☐

(Frage typ Einfachwahl)

10. Sie beobachten einen Fertigungsprozess, auf den eine große Zahl statistisch unabhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. Durch welche statistische Verteilung lässt sich aller Wahrscheinlichkeit nach die Gesamtabweichung des Prozesses in guter Näherung beschreiben?

- a) Gleichverteilung ☐
- b) Binomialverteilung ☐
- c) Hypergeometrische Verteilung ☐
- d) Normalverteilung ☐
- e) Poissonverteilung ☐

(Frage typ Einfachwahl)

11. Ordnen Sie die nachfolgend genannten Merkmalsausprägungen den zugehörigen Skalenniveaus zu!

	Nominalskala	Ordinalskala	Intervallskala	Verhältnisskala	Absolutskala
Bildungsabschluss	☐	☐	☐	☐	☐
Geburtsjahr	☐	☐	☐	☐	☐
Kinderzahl	☐	☐	☐	☐	☐
Konfession	☐	☐	☐	☐	☐

(Fragetyp Zuordnung)

12. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 20 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $-10 \leq \mu \leq 10$ bei $P = 95\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $-4 \leq \mu \leq 4$ zu reduzieren!

- a) 40 ☐
- b) 80 ☐
- c) 100 ☐
- d) 125 ☐
- e) 160 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts tritt infolge der Antastkraft eine elastische Verformung des Messobjekts auf. Geben Sie an, um welche Art von Störeinfluss es sich handelt!

- a) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
- a) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
- b) innerer Störeinfluss ☐
- c) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße ☐
- d) Repräsentativitätsfehler ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -5 V bis $+5\text{ V}$ soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler nicht mehr als $20\text{ }\mu\text{V}$ beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

- a) 8 Bit ☐
- b) 9 Bit ☐
- c) 18 Bit ☐
- d) 19 Bit ☐
- e) 20 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Geben sie an, wie viele Takte ein A/D-Umsetzer nach dem Wägeverfahren maximal für die Digitalisierung einer Messgröße mit 12 Bit Auflösung benötigt!

- a) 1 Takt ☐
- b) 12 Takte ☐
- c) $12^2 = 144$ Takte ☐
- d) $2^{12} = 4096$ Takte ☐

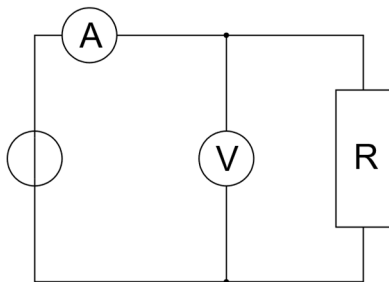
(Fragetyp Einfachwahl)

16. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die Studiendauer im Bachelorstudiengang Maschinenbau. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Studiendauer beträgt 8,2 Semester; der Modalwert der Studiendauer beträgt 8 Semester; der arithmetische Mittelwert der Studiendauer beträgt 9,4 Semester; der Quartilsabstand der Studiendauer beträgt 2,8 Semester; das dritte Quartil der Studiendauer liegt bei 8,9 Semestern. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

- a) Die Mehrheit der Studierenden benötigen für ihr Studium 7 Semester oder länger. ☐
- b) Die Spanne der Studiendauer beträgt 5,6 Semester. ☐
- c) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 8,2 Semester oder weniger. ☐
- d) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss zwischen 6,1 und 8,9 Semester. ☐
- e) Ein Viertel der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 8,9 Semester oder mehr. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



- a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Stromfehlerschaltung zur indirekten Widerstandsmessung. ☐
- b) Die indirekte Widerstandsmessung basiert auf der Anwendung des Ohmschen Gesetzes. ☐
- c) Die Schaltung ist für die Messung großer Widerstände besser geeignet als für die Messung kleiner Widerstände. ☐
- d) Die systematische Messabweichung der Schaltung ist umso größer, je kleiner der Innenwiderstand des Spannungsmessgeräts ist. ☐
- e) Die systematische Messabweichung der Schaltung ist umso größer, je größer der Innenwiderstand des Strommessgeräts ist. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Bei der Messung des Spannungsabfalls über einem Widerstand mittels eines Spannungsmessgerätes welches direkt an die Zuleitungen des Widerstandes angeschlossen wird kann es aufgrund des Widerstandes der Zuleitungen zu systematischen Messabweichungen kommen. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich dieser Messabweichungen zutreffend sind!

- a) Die systematischen Abweichungen entstehen dadurch, dass die widerstandsbehafteten Zuleitungen des Widerstandes von demselben Strom durchflossen werden, wie der Widerstand selbst. ☐
- b) Die durch den Widerstand der Zuleitungen verursachte systematische Messabweichung bewirkt, dass der gemessene Spannungsabfall größer ist, als der tatsächliche Spannungsabfall über dem Widerstand. ☐
- c) Bei der Spannungsmessung an kleinen Widerständen wirkt sich der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen stärker auf das Messergebnis aus, als bei der Messung an großen Widerständen. ☐
- d) Bei bekannten Leitungswiderständen kann die Abweichung rechnerisch korrigiert werden. ☐
- e) Sind die Leitungswiderstände nicht bekannt und können nicht vernachlässigt werden, kann der Einfluss der Leitungswiderstände durch Einsatz einer Vierleiterschaltung reduziert werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

19. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der interferometrischen Längenmessung zutreffend sind!

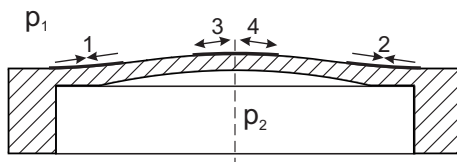
- a) Zur interferometrischen Längenmessung wird in der Regel ein Laserstrahl in zwei Teilstrahlen aufgespalten und über verschiedene Wege geführt. Der Referenzstrahl durchläuft einen festen Referenzarm, während der Messstrahl einen Messarm variabler Länge durchläuft. ☐
- b) Da die Phasenlage des Lichtes von der zurückgelegten Wegstrecke abhängig ist, ist im Allgemeinen eine Phasenverschiebung zwischen Mess- und Referenzstrahl festzustellen. ☐
- c) Die am Empfänger detektierbare Intensität variiert aufgrund von Interferenz in Abhängigkeit von der relativen Phasenlage von Mess- und Referenzstrahl. ☐
- d) Da der Messstrahl den Messarm hin und zurück durchläuft, entspricht die Periodenlänge des Ausgangssignals der doppelten Laserwellenlänge. ☐
- e) Bei der interferometrischen Längenmessung handelt es sich um ein absolutes Messverfahren, so dass eine vorübergehende Unterbrechung des Strahlverlaufs unproblematisch ist. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

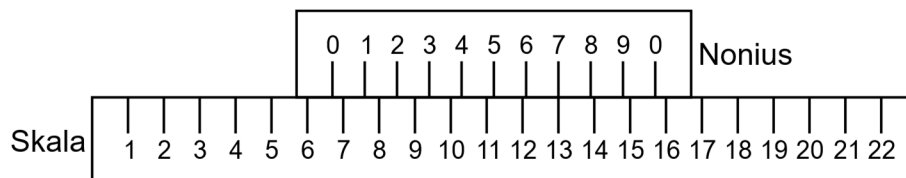
Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

Kurzfragen:

20. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten!
21. Grenzen Sie die Begriffe *Messwert* und *Messergebnis* gegeneinander ab!
22. Skizzieren Sie in einem gemeinsamen Diagramm für die drei nachfolgend genannten Fälle a) bis c) eines linearen Systems 2. Ordnung jeweils qualitativ die Sprungantwort! Achten Sie dabei auf eine eindeutige Zuordnung der Kurven zu den genannten Fällen!
- Die Dämpfung D ist deutlich größer als 1.
 - Die Dämpfung D ist gleich 1.
 - Die Dämpfung D ist deutlich kleiner als 1.
23. Geben Sie an, welcher Zusammenhang bei poissonverteilten Daten zwischen Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besteht!
24. Zur Messung des Verfahrweges einer Maschinenachse wird ein inkrementales Messsystem mit Glasmaßstab eingesetzt. Der Abstand zwischen der Wirklinie der Bearbeitung und dem Maßstab beträgt 250 mm. Geben Sie an, mit welchem systematischen Fehler man rechnen muss!
25. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine *hinreichende*, aber *nicht notwendige* Bedingung handelt!
26. Nachstehend sehen Sie die schematische Darstellung eines Druckaufnehmers in DMS-Technik. Die Positionen 1 bis 4 kennzeichnen die Lage der einzelnen Dehnmessstreifen. Erläutern Sie, weshalb es im Hinblick auf die messtechnische Erfassung der Widerstandsänderungen zweckmäßig ist, sowohl in Stauchungszonen (1 und 2) als auch in Dehnungszonen (3 und 4) Dehnmessstreifen zu applizieren!



27. Lesen Sie die auf untenstehender Abbildung dargestellte Skala mit Nonius ab und geben Sie das (einheitenlose) Ableseergebnis mit einer Auflösung von einer Nachkommastelle an!



Ende der Kurzfragen

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$

Streuung: $S = \sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j))^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \dots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall

5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x -Wert x^* der y -Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test**t-Test für Erwartungswert**

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist $|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n_x+n_y-2; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2 -Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0 : X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i , so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i , mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
 - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
 - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
 - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α , wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1, 1-\alpha}^2$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1		3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2		1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3		1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4		1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5		1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6		1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7		1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8		1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9		1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10		1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11		1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12		1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13		1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14		1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15		1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16		1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17		1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18		1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19		1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20		1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21		1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22		1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23		1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24		1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25		1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26		1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27		1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28		1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29		1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30		1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40		1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50		1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60		1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70		1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80		1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90		1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100		1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200		1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞		1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2 -Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1		2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2		4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3		6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4		7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5		9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6		10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7		12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8		13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9		14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10		16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11		17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12		18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13		19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14		21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15		22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16		23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17		24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18		26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19		27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20		28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21		29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22		30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23		32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24		33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25		34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26		35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27		36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28		37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29		39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30		40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40		51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50		63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60		74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70		85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80		96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90		107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100		118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

Tabelle 1

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt; \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$

Transformation: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1-1,350 \cdot 10^{-3}$	$1-2,326 \cdot 10^{-4}$	$1-3,167 \cdot 10^{-5}$	$1-3,398 \cdot 10^{-6}$	$1-2,867 \cdot 10^{-7}$	$1-9,866 \cdot 10^{-10}$	$1-1,280 \cdot 10^{-12}$	$1-6,221 \cdot 10^{-16}$	$1-1,129 \cdot 10^{-19}$	$1-7,620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	$\Phi(z)$
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,807	3,090	3,291	3,291	z