

Klausur

Einführung in die Messtechnik

18. Juli 2024

- Bachelor Maschinenbau
- Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau
- Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
- Bachelor Verkehrsingenieurwesen
- Bachelor Umweltingenieurwesen
- Bachelor Bauingenieurwesen
- Bachelor Sustainable Engineering of Products and Processes
- Bachelor Physik
- Kenntnisprüfung im Rahmen der Promotion
- sonstige: _____

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Prüfungsraum: _____

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/17	/12	/18	/24	/14	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird sowie die Sitzplatznummer einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabestellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabestellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x)$ mit $y = u(v(x))$

Eulersche Zahl: $e = 2,718281828459045235 \dots$

Kraft: $1 \text{ N (Newton)} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

Druck: $1 \text{ Pa (Pascal)} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}} = 0,01 \text{ hPa (Hektopascal)}$

Einheitssprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung: $x_a(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$ für $t \geq 0$

1. Aufgabe:

Der Luftwiderstand ist definiert als die durch Reibung erzeugte Kraftkomponente F in Strömungsrichtung oder entgegen der Bewegungsrichtung eines Körpers. Die wirkende Kraft F hängt von der Querschnittsfläche A des Körpers,

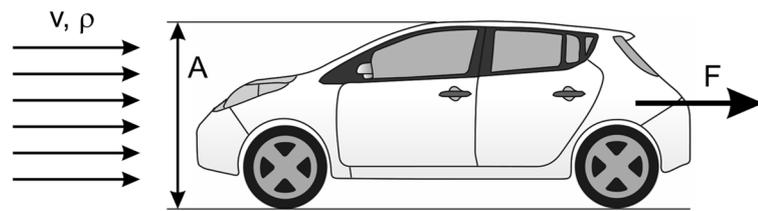


Abbildung 1.1: Bestimmung des c_w -Werts

dem dynamischen Druck p_d und dem Strömungswiderstandskoeffizienten c_w ab (vgl. Abb. 1.1). Der von der Strömungsgeschwindigkeit v und der Dichte ρ des Mediums abhängige dynamische Druck p_d kann mittels einer Drucksonde als Druckdifferenz zwischen Totaldruck p_{tot} und statischem Druck p_s ermittelt werden. Das beschriebene Prinzip kann genutzt werden, um den Strömungswiderstandskoeffizienten c_w eines Körpers gemäß folgendem Zusammenhang experimentell zu ermitteln:

$$c_w = \frac{F}{A \cdot (p_{tot} - p_s)}$$

Hierin ist F die auf den Körper wirkende Kraft, A die Querschnittsfläche des Körpers in Richtung der Anströmung, p_{tot} der Totaldruck und p_s der statische Druck des Mediums.

Im Folgenden soll der Strömungswiderstandskoeffizient c_w eines Personenkraftwagens auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen F , A , p_{tot} und p_s einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Querschnittsfläche A wird aus den Konstruktionsunterlagen des Fahrzeugs ermittelt und beträgt unter Berücksichtigung von Fertigungstoleranzen $A = 2,63 \text{ m}^2 \pm 0,01 \text{ m}^2$ bei $P = 98\%$ und sehr großem Stichprobenumfang n_A .

Der Totaldruck p_{tot} sowie der statische Druck p_s werden mittels einer Drucksonde nach Prandtl gemessen. Unter Berücksichtigung der vom Hersteller spezifizierten Messunsicherheit beträgt der Totaldruck $p_{tot} = 1013,06 \text{ hPa} \pm 0,1 \text{ hPa}$ bei $P = 95\%$ und der statische Druck der Luft beträgt $p_s = 1008,41 \text{ hPa} \pm 0,1 \text{ hPa}$ bei $P = 95\%$.

Die auf das Fahrzeug wirkende Kraft F wurde mittels in die Aufstandsfläche integrierter DMS-Kraftaufnehmer während der Versuchsdurchführung in $n_F = 8$ Wiederholungen ermittelt. Dabei ergaben sich die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
F / N	403,7	401,8	403,8	403,1	402,4	404,9	404,5	404,4

Tabelle 1.1: Messwerte der Kraft F

- a) Berechnen Sie den gesuchten dimensionslosen Strömungswiderstandskoeffizienten c_w und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Im Rahmen Ihres Praktikums in der Konstruktionsabteilung eines Herstellers von Nutzfahrzeug befassen Sie sich mit der Laufleistung von Lastkraftwagen (Lkw) bis zu deren Außerbetriebsetzung.

Auf der Grundlage früherer empirischer Untersuchungen wurde die Hypothese formuliert, dass die Laufleistung von Lkw durch eine Weibull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 10^{-6}$ und $k = 2,8$ beschrieben werden kann.

Die Weibull-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen. Bei geeigneter Wahl ihrer zwei Parameter ähnelt sie einer Normalverteilung, einer Exponentialverteilung oder anderen asymmetrischen Verteilungen. Die Dichtefunktion $h(x)$ der Weibull-Verteilung ist durch nachfolgende Gleichung (2.1) definiert:

$$h(x) = \lambda \cdot k \cdot (\lambda \cdot x)^{k-1} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)^k} \quad (2.1)$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$, also die Stammfunktion obiger Dichtefunktion $h(x)$, ist ebenfalls als geschlossene Funktion darstellbar und gemäß nachfolgender Gleichung (2.2) definiert:

$$P(x) = 1 - e^{-(\lambda \cdot x)^k} \quad (2.2)$$

Für den hier zu untersuchenden Fall einer Weibull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 10^{-6}$ und $k = 2,8$ sind die Dichtefunktion $h(x)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ in Abbildung 2.1 grafisch dargestellt.

Im Zuge Ihrer Datenerhebung haben Sie die Laufleistung von $n = 5000$ Lkw ermittelt. Zur weiteren Verarbeitung der Daten haben Sie das in Tabelle 2.1 aufgeführte Histogramm erstellt.

Laufleistung / Kilometer	0 bis $2 \cdot 10^5$	$> 2 \cdot 10^5$ bis $4 \cdot 10^5$	$> 4 \cdot 10^5$ bis $6 \cdot 10^5$	$> 6 \cdot 10^5$ bis $8 \cdot 10^5$	$> 8 \cdot 10^5$ bis $1 \cdot 10^6$	$> 1 \cdot 10^6$ bis $1,2 \cdot 10^6$	$> 1,2 \cdot 10^6$ bis $1,4 \cdot 10^6$	$> 1,4 \cdot 10^6$
Häufigkeit	67	294	724	1045	1037	908	514	411

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für die klassierte Laufleistung von Lastkraftwagen

- a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ einer Weibull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 10^{-6}$ und $k = 2,8$ genügt!

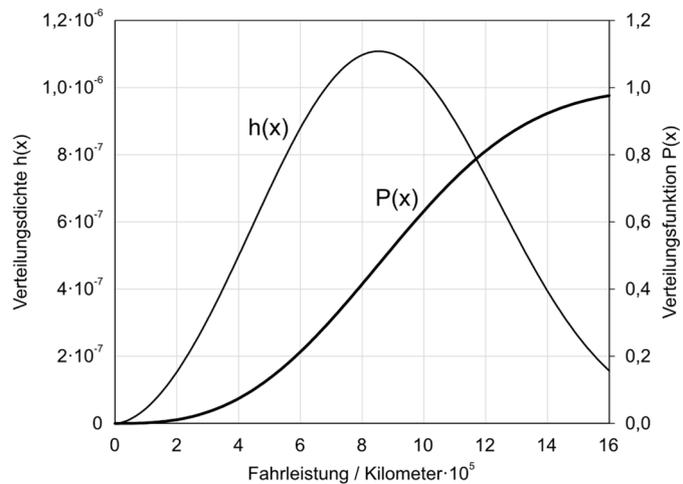


Abbildung 2.1: Dichtefunktion $h(x)$ und Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ einer Weibull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 10^{-6}$ und $k = 2,8$

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Staudrucksonden werden die gefertigten Sonden stichprobenartig in einem Referenzwindkanal hinsichtlich der mit ihnen gemessenen Windgeschwindigkeiten untersucht. Hierzu wird aus einer gefertigten Charge eine Stichprobe vom Umfang $n = 12$ entnommen und die angezeigte Windgeschwindigkeit v ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert der Windgeschwindigkeit von $\bar{v} = 27,78$ m/s und eine Streuung von $S_v = 0,03$ m/s. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

- 3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Windgeschwindigkeit v für eine Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ beträgt für diesen Fall rund:

- a) $v = 27,78$ m/s \pm 0,0142 m/s ; $P = 95\%$
- b) $v = 27,78$ m/s \pm 0,0156 m/s ; $P = 95\%$
- c) $v = 27,78$ m/s \pm 0,0170 m/s ; $P = 95\%$
- d) $v = 27,78$ m/s \pm 0,0189 m/s ; $P = 95\%$
- e) $v = 27,78$ m/s \pm 0,0191 m/s ; $P = 95\%$

(Fragetyp Einfachwahl)

- 3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung der mittels der Sonden gemessenen Windgeschwindigkeit $\sigma_v = 0,05$ m/s betrage. Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n , um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Windgeschwindigkeit v auf maximal $\pm 0,02$ m/s abschätzen zu können?

- a) 17
- b) 25
- c) 34
- d) 39
- e) 42

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Messungen weisen dann eine Windgeschwindigkeit auf, die innerhalb des Intervalls von $27,75 \text{ m/s} \leq v \leq 27,80 \text{ m/s}$ liegt?

- a) 9%
- b) 25%
- c) 41%
- d) 59%
- e) 91%

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert der Windgeschwindigkeitsmessungen betrage $\mu_v = 27,775 \text{ m/s}$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_v des Messprozesses dann maximal aufweisen, damit 98% der Messwerte innerhalb des Intervalls von $27,75 \text{ m/s} \leq v \leq 27,80 \text{ m/s}$ lägen?

- a) 0,0042 m/s
- b) 0,0097 m/s
- c) 0,0107 m/s
- d) 0,0122 m/s
- e) 0,0215 m/s

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Staudrucksonden möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigungsanlage sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck stündlich eine Stichprobe aus der laufenden Produktion. Anhand der entnommenen Stichprobe wird jeweils der Erwartungswert der mittels der Sonden gemessenen Windgeschwindigkeit μ_v abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob der so abgeschätzte Erwartungswert sich signifikant von dem Nennwert der Windgeschwindigkeit $v_{nenn} = 30 \text{ m/s}$ unterscheidet, welcher vom Referenzwindkanal bereitgestellt wird.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

- a) t-Test für Erwartungswert
- b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben
- c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben
- d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben
- e) χ^2 -Test

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

- a) einseitige Alternativhypothese
- b) zweiseitige Alternativhypothese

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand von Stichproben der Windgeschwindigkeitsmessungen von auf unterschiedlichen Anlagen gefertigten Staudrucksonden möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben durchführen. Aus den erhobenen Stichproben jeweils vom Umfang $n = 15$ haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Windgeschwindigkeiten v_x und v_y ermittelt zu $\bar{v}_x = 13,87$ m/s und $S_{v_x} = 0,04$ m/s sowie $\bar{v}_y = 13,94$ m/s und $S_{v_y} = 0,05$ m/s.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

- a) $-0,42$
- b) $-0,90$
- c) $-4,23$
- d) $-5,99$
- e) $-6,02$

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

- a) 14
- b) 15
- c) 28
- d) 29
- e) 30

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert die Eigenschaften einer Charge von Staudrucksonden überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 20$. Ihre Nullhypothese lautet, dass der Erwartungswert der Windgeschwindigkeitsmessung der Staudrucksonden dem Referenzwert entspricht ($\mu_x = \mu_0$). Sie wählen die zweiseitige Alternativhypothese, dass der Erwartungswert der Windgeschwindigkeit von dem Referenzwert abweicht ($\mu_x \neq \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,01$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2,74$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

- a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt
- b) Nullhypothese wird abgelehnt

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

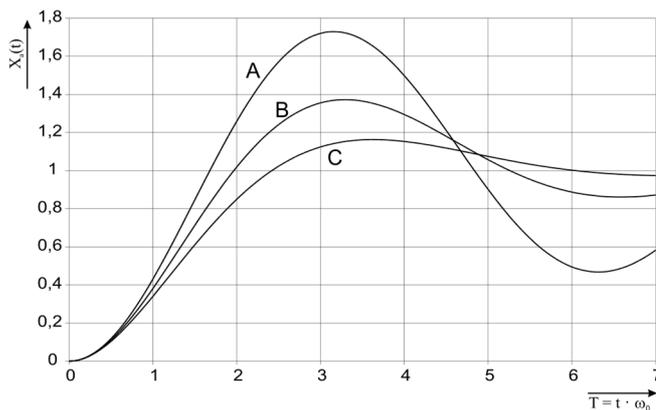
7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um intensive Zustandsgrößen handelt!

- a) Länge
 - b) Volumen
 - c) Temperatur
 - d) Stoffmenge
 - e) Dichte
 - f) dynamische Viskosität
 - g) elektrische Ladung
 - h) spezifischer elektrischer Widerstand
- (Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

- a) $100 \text{ cm}^3 + 0,1 \text{ dm}^3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$
 - b) $10 \text{ hPa} + 1 \text{ kPa} = 2 \cdot 10^3 \text{ Pa}$
 - c) $1 \cdot 10^5 \text{ mW} + 1 \cdot 10^{-4} \text{ MW} = 200 \text{ W}$
 - d) $1,4 \text{ } \mu\text{g} + 600 \text{ ng} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mg}$
 - e) $1 \cdot 10^4 \text{ g} \cdot 100 \text{ mm/s}^2 = 1 \text{ N}$
- (Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A , B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A , D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A , B und C qualitativ am besten beschreibt!



- a) $D_A = 5 ; D_B = \sqrt{2}/2 ; D_C = 0,3$
 - b) $D_A = 1 ; D_B = 3 ; D_C = 5$
 - c) $D_A = 0,5 ; D_B = 1 ; D_C = 3$
 - d) $D_A = 0,1 ; D_B = 0,3 ; D_C = 0,5$
- (Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten $T = 2$ s und dem Übertragungsfaktor $K = 1$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von -50 V auf $+50$ V beaufschlagt. Geben Sie an, nach welcher Zeitdauer t am Ausgang des Systems eine Spannung von etwa 30 V anliegt! *Hinweis: Formelsammlung auf Seite 2 beachten!*

- a) 0,45 s
- b) 1,40 s
- c) 1,61 s
- d) 2,77 s
- e) 3,22 s

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung unterhalb des dritten Dezils liegen!

- a) 75%
- b) 60%
- c) $33,3\bar{3}\%$
- d) 30%
- e) 3%

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 20 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $8 \leq \mu \leq 14$ bei $P = 95\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $10 \leq \mu \leq 12$ zu reduzieren!

- a) 40
- b) 60
- c) 80
- d) 120
- e) 180

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -230 V bis $+230$ V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler nicht mehr als 1 mV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

- a) 18 Bit
- b) 19 Bit
- c) 20 Bit
- d) 21 Bit
- e) 22 Bit

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Bei dem Abtasttheorem nach Shannon handelt es sich hinsichtlich der verlustfreien Rekonstruktion der digitalisierten Daten um ein
- a) hinreichendes und notwendiges Kriterium.
 - b) hinreichendes aber nicht notwendiges Kriterium.
 - c) nicht hinreichendes aber notwendiges Kriterium.
 - d) nicht hinreichendes und nicht notwendiges Kriterium.
- (Fragetyp Einfachwahl)
15. Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts kommt es infolge von Temperaturschwankungen im Messraum zu einer thermischen Längenänderung der Maßstäbe der inkrementalen Wegmesssysteme der Linearachsen. Geben Sie an, um welche Art von Störeinfluss es sich handelt!
- a) superponierender äußerer Störeinfluss
 - b) deformierender äußerer Störeinfluss
 - c) innerer Störeinfluss
 - d) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße
- (Fragetyp Einfachwahl)
16. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die Studiendauer im Bachelorstudiengang Maschinenbau. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Studiendauer beträgt 7,9 Semester; der Modalwert der Studiendauer beträgt 8 Semester; der arithmetische Mittelwert der Studiendauer beträgt 8,3 Semester; der Quartilsabstand der Studiendauer beträgt 1,9 Semester; das dritte Quartil der Studiendauer liegt bei 9,1 Semestern. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!
- a) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss zwischen 7,2 und 9,1 Semester.
 - b) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 8,3 Semester oder mehr.
 - c) Ein Viertel der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 9,1 Semester oder mehr.
 - d) Die meisten Studierenden benötigen für ihr Studium 7,9 Semester.
 - e) Die Spanne der Studiendauer beträgt 3,8 Semester.
- (Fragetyp Mehrfachwahl)
17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!
- a) Der Messschieber ist anfällig für das Auftreten des Abbefehlers, da bei ihm Antast- und Messlinie nicht fluchten.
 - b) Der Nonius eines Messschiebers dient dazu, bei der Ablesung der Skala das Auftreten eines Parallaxenfehlers zu vermeiden.
 - c) Bei der Bügelmessschraube stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher.
 - d) Bei der Messuhr wird die Auslenkung des Messbolzens über ein Präzisionsgetriebe in eine Zeigerdrehung gewandelt.
 - e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im weiteren Sinne.
- (Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Bei der Messung des Spannungsabfalls über einem Widerstand mittels eines Spannungsmessgerätes welches direkt an die Zuleitungen des Widerstandes angeschlossen wird kann es aufgrund des Widerstandes der Zuleitungen zu systematischen Messabweichungen kommen. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich dieser Messabweichungen zutreffend sind!

- a) Die systematischen Abweichungen entstehen dadurch, dass die widerstandsbehafteten Zuleitungen des Widerstandes von demselben Strom durchflossen werden, wie der Widerstand selbst.
- b) Die durch den Widerstand der Zuleitungen verursachte systematische Messabweichung bewirkt, dass der gemessene Spannungsabfall größer ist, als der tatsächliche Spannungsabfall über dem Widerstand.
- c) Bei der Spannungsmessung an kleinen Widerständen wirkt sich der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen stärker auf das Messergebnis aus, als bei der Messung an großen Widerständen.
- d) Bei bekannten Leitungswiderständen kann die Abweichung rechnerisch korrigiert werden.
- e) Sind die Leitungswiderstände nicht bekannt und können nicht vernachlässigt werden, kann der Einfluss der Leitungswiderstände durch Einsatz einer Vierleiterschaltung reduziert werden.

(Fragetyp Mehrfachwahl)

19. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über inkrementale Wegmesssysteme zutreffend sind!

- a) Inkrementale Wegmesssysteme können basierend auf unterschiedlichen physikalischen Wirkprinzipien realisiert werden, wie z.B. optisch, elektrisch oder magnetisch.
- b) Um bei einem inkrementalen Wegmesssystem Informationen über die Bewegungsrichtung zu gewinnen, werden in der Regel zwei um 180° phasenverschobene Signale genutzt.
- c) Wird bei einem inkrementalen Wegmesssystem die Signalauswertung nur kurzzeitig unterbrochen, bleibt die Information über die Absolutposition in der Regel erhalten.
- d) Ein typisches Einsatzgebiet für kapazitive inkrementale Wegmesssysteme stellen digitale Messschieber dar.
- e) Bei inkrementalen Wegmesssystemen ist durch Interpolationstechniken oftmals eine Steigerung des Auflösungsvermögens über die Teilung der Maßverkörperung hinaus möglich.

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

Kurzfragen:

20. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten!
21. Nennen Sie je ein Beispiel für a) *nominalskalierte*, b) *ordinalskalierte*, c) *intervallskalierte* Merkmale!
22. Geben Sie an, woran und wie man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung sicher von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden kann!
23. Skizzieren Sie eine Wheatstone-Brückenschaltung einschließlich Spannungsversorgung und Abgriff der Messspannung!
24. Geben Sie an, welcher Zusammenhang bei poissonverteilten Daten zwischen Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besteht!
25. Benennen und erläutern Sie die beiden Arten von Fehlentscheidung, die bei statistischen Tests auftreten können!
26. Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von $1\ \Omega$ soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand $0,1\ \Omega$) und eines Spannungsmessgeräts (Innenwiderstand $1\ M\Omega$) indirekt gemessen werden.
 - a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!
 - b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!
27. Eine bislang in Hamburg genutzte Balkenwaage mit kalibrierten Massestücken soll zukünftig in München eingesetzt werden. Geben Sie an, ob aufgrund der geänderten Erdbeschleunigung eine Neukalibrierung der Massestücke erforderlich ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Ende der Kurzfragen

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j))^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten x_1, \dots, x_n
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall

5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x -Wert x^* der y -Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f \right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test**t-Test für Erwartungswert**

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist $|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$,
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n_x+n_y-2; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} ,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2 -Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0 : X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten x_1, \dots, x_n aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i , so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe x_1, \dots, x_n enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten x_1, \dots, x_n abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i , mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:

- r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
- s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
- Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$

9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α , wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1; 1-\alpha}^2$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1		3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2		1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3		1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4		1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5		1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6		1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7		1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8		1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9		1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10		1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11		1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12		1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13		1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14		1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15		1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16		1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17		1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18		1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19		1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20		1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21		1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22		1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23		1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24		1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25		1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26		1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27		1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28		1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29		1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30		1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40		1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50		1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60		1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70		1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80		1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90		1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100		1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200		1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞		1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2 -Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1		2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2		4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3		6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4		7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5		9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6		10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7		12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8		13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9		14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10		16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11		17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12		18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13		19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14		21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15		22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16		23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17		24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18		26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19		27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20		28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21		29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22		30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23		32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24		33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25		34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26		35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27		36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28		37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29		39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30		40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40		51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50		63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60		74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70		85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80		96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90		107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100		118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

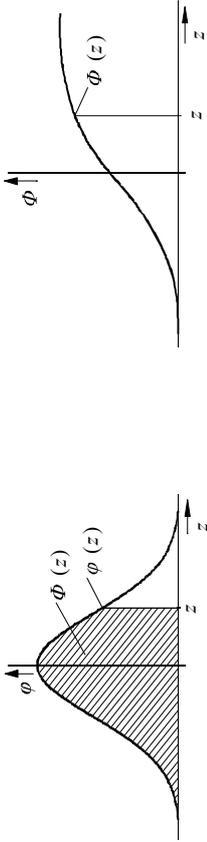
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

$$z\text{-Transformation: } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996920	0,997002	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1-1,350 \cdot 10^{-3}$	$1-2,326 \cdot 10^{-4}$	$1-3,167 \cdot 10^{-5}$	$1-3,398 \cdot 10^{-6}$	$1-2,867 \cdot 10^{-7}$	$1-9,866 \cdot 10^{-10}$	$1-1,280 \cdot 10^{-12}$	$1-6,221 \cdot 10^{-16}$	$1-1,129 \cdot 10^{-19}$	$1-7,620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	$\Phi(z)$
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,807	3,090	3,291	3,291	z