Klausur

Einführung in die Messtechnik

17. März 2017

☐ für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: ____

Matrikel-Nr.: __________________________________

Prüfungsraum: _________________________________

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/17	/12	/17,5	/21	/16,5	/84

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.

5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

Druck: 1 Pa (Pascal) = 1 N/m² = 1 kg/(s²·m)

Kreisfläche: $A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

1. Aufgabe:

Das meistverwendete Messverfahren auf dem Gebiet der Durchflussmessung ist das Wirkdruckverfahren. Bei diesem wird in eine durchströmte Rohrleitung ein Drosselelement eingebracht, welches den Strömungsquerschnitt verengt (vgl. Abb. 1). Hierdurch entsteht eine Druckdifferenz Δp, welche dem Quadrat des Durchflusses proportional ist.

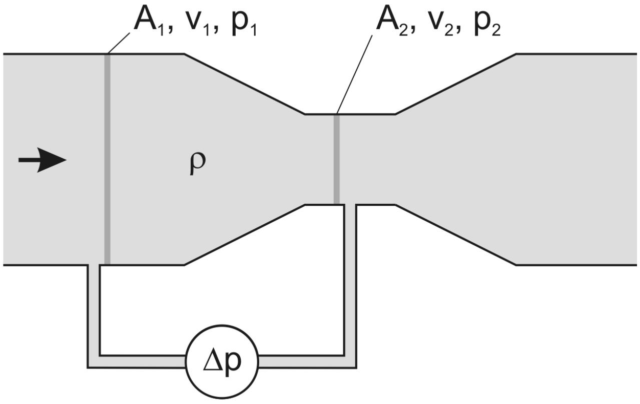


Abbildung 1.1: Prinzipskizze eines Wirkdruck-Durchflussaufnehmers

Für die in Abb. 1 skizzierte Anordnung mit den wirksamen kreisförmigen Querschnitten A_1 und A_2 lässt sich der Massendurchfluss Q_M durch folgenden Zusammenhang bestimmen:

$$Q_M = \beta \cdot A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot \rho \cdot \Delta p}$$

Hierin ist A_2 die freie Querschnittsfläche im Bereich der Drossel, β ist eine dimensionslose Durchflusszahl des Drosselelements, die vom Verhältnis der Querschnitte A_1 und A_2 sowie der Reynolds-Zahl abhängt, ρ ist die Dichte des Mediums und Δp die Druckdifferenz in Folge der Querschnittsverminderung.

Im Folgenden soll der Massendurchfluss Q_M auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen A_2, β, ρ und Δp einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die freie Querschnittsfläche A_2 wird durch eine kreisförmige Öffnung gebildet, deren Durchmesser vorab zu D_2 = 25 mm ± 0,05 mm bei P = 98% bestimmt wurde.

Die dimensionslose Durchflusszahl β des Drosselelements wird vom Hersteller mit β = 0,61 ± 0,002 bei P = 90% und einem Stichprobenumfang von n = 30 angegeben.

Die Dichte ρ des geförderten Mediums beträgt ρ = 0,789 g/cm³. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

Der Differenzdruck Δp wird während des Versuchs zehnmal gemessen. Dabei ergeben sich die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte:

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Δp / Pa	32041	32106	31857	31979	32250	31884	32006	31809	31998	31999

Tabelle 1.1: Messwerte des Differenzdrucks Δp

a) Berechnen Sie den gesuchten Massendurchfluss Q_M und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Im Rahmen Ihres Praktikums in der Marketingabteilung eines Automobilherstellers befassen Sie sich mit dem Konsumverhalten von Neuwagenkäufern.

Auf der Grundlage früherer empirischer Untersuchungen wurde die Hypothese formuliert, dass für Neufahrzeuge die Haltedauer durch den Erstkäufer durch eine Weibull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 0{,}2$ und $k = 2$ beschrieben werden kann.

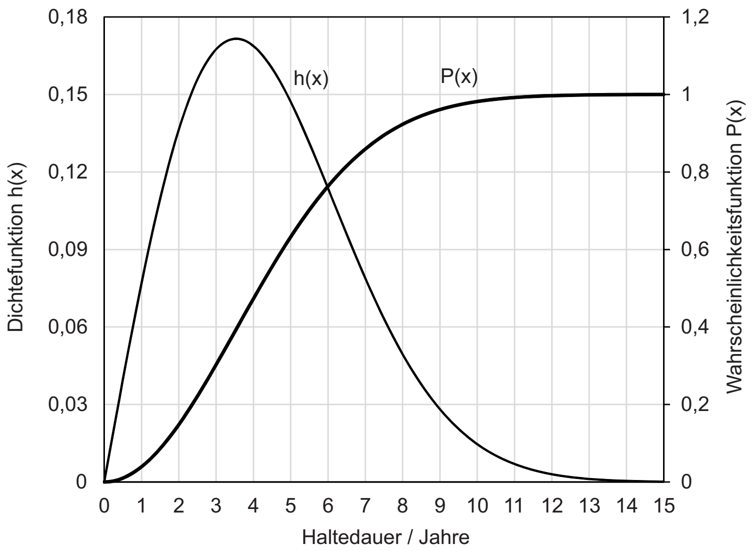


Abbildung 2.1: Dichtefunktion h(x) und Wahrscheinlichkeitsfunktion P(x) einer Weibull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 0{,}2$ und $k = 2$.

Die Weibull-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen. Bei geeigneter Wahl ihrer zwei Parameter ähnelt sie einer Normalverteilung, einer Exponentialverteilung oder anderen asymmetrischen Verteilungen. Die Dichtefunktion $h(x)$ der Weibull-Verteilung ist durch nachfolgende Gleichung (2.1) definiert:

$$h(x) = \lambda \cdot k \cdot (\lambda \cdot x)^{k-1} \cdot \mathrm{e}^{-(\lambda \cdot x)^k} \tag{2.1}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$, also die Stammfunktion obiger Dichtefunktion $h(x)$, ist ebenfalls als geschlossene Funktion darstellbar und gemäß nachfolgender Gleichung (2.2) definiert:

$$P(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda \cdot x)^k} \tag{2.2}$$

Für den hier zu untersuchenden Fall einer Weilbull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 0{,}2$ und $k = 2$ sind die Dichtefunktion $h(x)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ in Abbildung 2.1 grafisch dargestellt.

Im Zuge einer aktuellen Kundenbefragung haben Sie die Haltedauer von $n = 100$ Neuwagen erhoben. Zur weiteren Verarbeitung der Daten haben Sie das in Tabelle 2.1 aufgeführte Histogramm erstellt.

Haltedauer / Jahre	0 bis 1	> 1 bis 2	> 2 bis 3	> 3 bis 4	> 4 bis 5	> 5 bis 6	> 6 bis 7	> 7 bis 8	> 8 bis 9	> 9 bis 10	> 10
Häufigkeit	4	14	13	19	14	10	11	7	5	2	1

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für die klassierte Haltedauer von Neuwagen

a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ einer Weibull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 0{,}2$ und $k = 2$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Drosselblenden für die Durchflussmessung werden im Rahmen einer Warenausgangsprüfung Normblenden gemäß DIN EN ISO 5167 hinsichtlich des Durchmessers ihrer kreisförmigen Blendenöffnung untersucht. Hierzu wird aus einer gefertigten Charge eine Stichprobe vom Umfang $n = 30$ entnommen und der mittlere Durchmesser D mittels optischer Koordinatenmesstechnik experimentell ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Durchmessers von $\overline{D} = 29{,}98\ \text{mm}$ und eine Streuung von $S_D = 0{,}042\ \text{mm}$. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% beträgt für diesen Fall ungefähr:

a) D = 29,98 mm ± 0,211 mm; P = 99% ☐
b) D = 29,98 mm ± 0,200 mm; P = 99% ☐
c) D = 29,98 mm ± 0,021 mm; P = 99% ☐
d) D = 29,98 mm ± 0,019 mm; P = 99% ☐
e) D = 29,98 mm ± 0,013 mm; P = 99% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers auf maximal ± 0,025 mm abschätzen zu können, beträgt:

a) n = 9 ☐
b) n = 10 ☐
c) n = 11 ☐
d) n = 13 ☐
e) n = 14 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Drosselblenden weisen dann einen Durchmesser auf, der <u>innerhalb</u> des Intervalls von 29,9 mm ≤ D ≤ 30,1 mm liegt?

a) 2,1% ☐
b) 3,1% ☐
c) 51,3% ☐
d) 96,9% ☐
e) 99,8% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Durchflussmessgeräten betreiben Sie zwei voneinander unabhängige Fertigungslinien A und B. Aufgrund eines Anfangsverdachts möchten Sie anhand zweier entnommener Stichproben untersuchen, ob der Erwartungswert μ_{D_A} des Durchmessers D_A der auf Linie A gefertigten Blenden signifikant größer als der Erwartungswert μ_{D_B} des Durchmessers D_B der auf Linie B gefertigten Blenden ist. Die Standardabweichung σ kann dabei als in beiden Stichproben identisch angenommen werden.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei <u>un</u>abhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei <u>un</u>abhängigen Stichproben ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand zweier abhängiger Stichproben X und Y möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben durchführen. Aus den Stichproben, die jeweils einen Umfang von n = 15 aufweisen, haben Sie für die Messwerte x und y sowie für deren Differenz d Mittelwerte und Streuungen ermittelt zu $\bar{x} = 40{,}01$ mm, $\bar{y} = 39{,}98$ mm, $\bar{d} = 0{,}03$ mm, $S_x = 0{,}021$ mm, $S_y = 0{,}022$ mm und $S_d = 0{,}03$ mm.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) 0,183 ☐
b) 0,258 ☐
c) 3,820 ☐
d) 3,873 ☐
e) 5,477 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 5 auf der nächsten Seite

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 13 ☐
b) 14 ☐
c) 15 ☐
d) 28 ☐
e) 29 ☐
f) 30 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert anhand einer Stichprobe die Konformität einer Charge Drosselblenden überprüfen. Der Nennwert des Durchmessers der Blenden beträgt $D_{nenn} = 30$ mm. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 20$. Ihre Nullhypothese lautet, dass der Durchmesser der Blenden mit dem Nennwert übereinstimmt ($\mu_x = \mu_0$). Sie wählen eine zweiseitige Alternativhypothese ($\mu_x \neq \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -1{,}84$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

7. Die Frequenz f eines Schwingkreises sei abhängig von der Grundfrequenz f_0 bei der Referenztemperatur T_0 sowie der aktuell herrschenden Temperatur T. Die Frequenzänderung sei mit der Empfindlichkeit a_f linear von der Temperaturdifferenz $\Delta T = T - T_0$ abhängig. Die tatsächliche Frequenz f des Schwingkreises ergebe sich daher gemäß folgender Gleichung:

$$f = f_0 \cdot \left(1 + a_f \cdot \left(T - T_0\right)\right)$$

Mittels linearer Regression möchten Sie den Empfindlichkeitsfaktor a_f eines bestimmten Typs von Schwingkreis experimentell bestimmen. Hierzu nehmen Sie eine Messreihe auf, bei welcher in unterschiedlichen Betriebspunkten die Temperatur T als unabhängige Versuchsgröße vorgegeben wird und die Schwingfrequenz f jeweils als abhängige Größe gemessen wird.

7.1. Geben Sie alle der folgenden Zuordnungen von x- und y-Größe an, welche eine im Sinne der Versuchsbeschreibung korrekte Berechnung des Regressionskoeffizienten ermöglichen!

a) $y = \dfrac{f}{f_0} - 1$ und $x = T - T_0$ ☐

b) $y = \dfrac{f}{f_0} - 1 + T_0$ und $x = T$ ☐

c) $y = \dfrac{f - f_0}{f_0}$ und $x = T - T_0$ ☐

d) $y = f - f_0$ und $x = f_0 \cdot \left(T - T_0\right)$ ☐

e) $y = \dfrac{f - f_0}{T - T_0}$ und $x = f_0$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

8. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um intensive Grundgrößen des SI-Systems handelt!

a) Dichte ☐
b) dynamische Viskosität ☐
c) Länge ☐
d) Leuchtdichte ☐
e) molare Masse ☐
f) spezifischer elektrischer Widerstand ☐
g) Stoffmenge ☐
h) Temperatur ☐

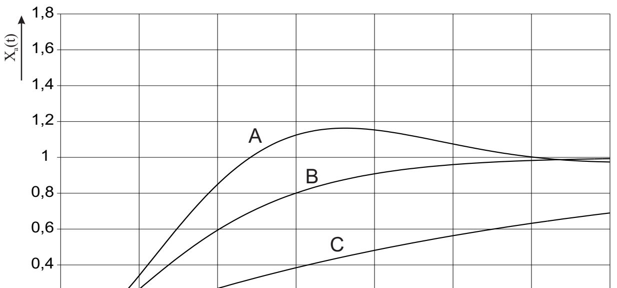
(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $100\ \text{GW} + 1 \cdot 10^6\ \text{W} = 101\ \text{GW}$ ☐
b) $1 \cdot 10^3\ \text{cm}^2 + 1\ \text{dm}^2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$ ☐
c) $1\ \text{hPa} = 0{,}1\ \text{kPa}$ ☐
d) $100\ \text{nF} = 0{,}1\ \mu\text{F}$ ☐
e) $100\ \text{pm} = 1 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

10. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 0{,}1$; $D_B = 0{,}3$; $D_C = 0{,}5$ ☐
b) $D_A = 0{,}5$; $D_B = 1$; $D_C = 3$ ☐
c) $D_A = 1$; $D_B = 3$; $D_C = 5$ ☐
d) $D_A = 5$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 0{,}3$ ☐

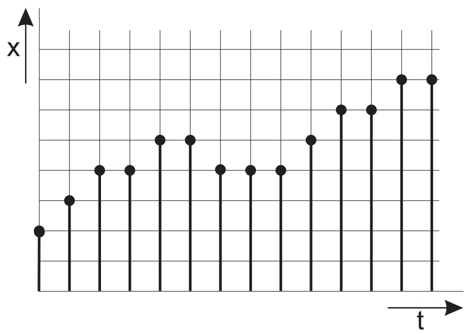
(Fragetyp Einfachwahl)

11. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 2$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von +5 V auf –5 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang ungefähr anliegen?

a) –7,6 V ☐
b) –6,3 V ☐
c) –2,6 V ☐
d) –1,3 V ☐
e) 3,15 V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Geben Sie an, von welcher Art das nachfolgend abgebildete Signal hinsichtlich seines Verhaltens in Zeit- sowie in Amplitudenrichtung ist!



a) amplitudenkontinuierlich und zeitkontinuierlich ☐
b) amplitudendiskret und zeitkontinuierlich ☐
c) amplitudenkontinuierlich und zeitdiskret ☐
d) amplitudendiskret und zeitdiskret ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 30 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $48 \leq \mu \leq 52$ bei $P = 95\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei einer Aussagesicherheit von $P = 98\%$ ebenfalls mit $48 \leq \mu \leq 52$ oder besser angeben zu können!

a) 22 ☐
b) 36 ☐
c) 42 ☐
d) 43 ☐
e) 44 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Sie beobachten einen Fertigungsprozess, auf den eine große Zahl statistisch unabhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. Durch welche statistische Verteilung lässt sich aller Wahrscheinlichkeit nach die Gesamtabweichung des Prozesses in guter Näherung beschreiben?

a) Gleichverteilung ☐
b) Binomialverteilung ☐
c) Hypergeometrische Verteilung ☐
d) Normalverteilung ☐
e) Poissonverteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von –24 V bis +24 V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler 0,5 mV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 5 Bit ☐
b) 11 Bit ☐
c) 15 Bit ☐
d) 16 Bit ☐
e) 17 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über statistische Tests korrekt sind!

a) Als Fehlentscheidung 2. Art bezeichnet man den Fall, dass als Ergebnis eines statistischen Tests die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl H_0 tatsächlich nicht zutrifft. ☐
b) Wird für einen statistischen Test ein Signifikanzniveau von 1% gewählt, bedeutet dies, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 1% eine Fehlentscheidung auftritt. ☐
c) Die Güte eines statistischen Tests lässt sich durch Reduzierung des Signifikanzniveaus erhöhen. ☐
d) Eine Messreihe, die zur Bildung einer Hypothese verwendet wurde, darf nicht für einen Test dieser Hypothese genutzt werden. ☐
e) In experimentellen Wissenschaften können statistische Tests dazu genutzt werden, Hypothesen abzusichern oder begründet zu verwerfen. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!

a) Der Messschieber ist anfällig für das Auftreten des Abbefehlers, da bei ihm Antast- und Messlinie nicht fluchten. ☐

b) Der Nonius eines Messschiebers dient dazu, bei der Ablesung der Skala das Auftreten eines Parallaxenfehlers zu vermeiden. ☐

c) Bei der Bügelmessschraube stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher. ☐

d) Bei der Messuhr wird die Auslenkung des Messbolzens über ein Präzisionsgetriebe in eine Zeigerdrehung gewandelt. ☐

e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im engeren Sinne. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Bei der Messung des Spannungsabfalls über einem Widerstand mittels eines Spannungsmessgerätes welches direkt an die Zuleitungen des Widerstandes angeschlossen wird kann es aufgrund des Widerstandes der Zuleitungen zu systematischen Messabweichungen kommen. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich dieser Messabweichungen zutreffend sind!

a) Die systematischen Abweichungen entstehen dadurch, dass die widerstandsbehafteten Zuleitungen des Widerstandes von demselben Strom durchflossen werden, wie der Widerstand selbst. ☐

b) Die durch den Widerstand der Zuleitungen verursachte systematische Messabweichung bewirkt, dass der gemessene Spannungsabfall größer ist, als der tatsächliche Spannungsabfall über dem Widerstand. ☐

c) Bei der Spannungsmessung an kleinen Widerständen wirkt sich der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen stärker auf das Messergebnis aus, als bei der Messung an großen Widerständen. ☐

d) Bei bekannten Leitungswiderständen kann die Abweichung rechnerisch korrigiert werden. ☐

e) Sind die Leitungswiderstände nicht bekannt und können nicht vernachlässigt werden, kann der Einfluss der Leitungswiderstände durch Einsatz einer Vierleiterschaltung reduziert werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Kurzfragen:

19. Erläutern Sie, wodurch sich *nominalskalierte* Daten und *ordinalskalierte* Daten unterscheiden! Nennen Sie für beide Datentypen je ein Beispiel!

20. Erläutern Sie die Begriffe *superponierender äußerer Störeinfluss* und *deformierender äußerer Störeinfluss* und grenzen Sie diese gegeneinander ab!

21. Erläutern Sie, was unter der *Hysterese* eines Messgerätes zu verstehen ist!

22. Grenzen Sie die Begriffe *Messwert* und *Messergebnis* gegeneinander ab!

23. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine *hinreichende*, aber *nicht notwendige* Bedingung handelt!

24. Skizzieren Sie anhand eines Sinussignals exemplarisch, wie es durch Verletzung des Abtasttheorems nach Shannon zu einer fehlerhaften Rekonstruktion des Ursprungssignals kommen kann!

25. Geben Sie an, welcher Zusammenhang bei poissonverteilten Daten zwischen Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besteht!

26. Geben Sie an, welcher Punkt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden liegt!

27. Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von 1 Ω soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand 1 Ω) und eines Spannungsmessgeräts (Innenwiderstand 1 MΩ) indirekt gemessen werden.

a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!

b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k\cdot\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x} + \frac{k\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2}\cdot S_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:
$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x},\quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$
4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert
$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$
zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}},\quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f\ ,\ f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i}\right)^2}\ ,\quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist
$$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}\ ,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist
$$t_0 > t_{n-1;1-\alpha}\ ,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist
$$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\ ,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \quad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \quad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.
Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,671	2,000	2,390	2,660
70	1,667	1,994	2,381	2,648
80	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,653	1,972	2,345	2,601
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

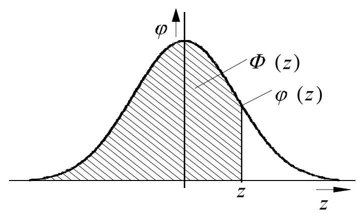
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

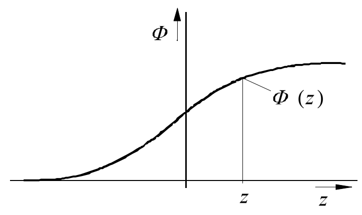
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt\ ;\ \ \Phi(z)=1-\Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76)=0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z