Klausur

Einführung in die Messtechnik

11. Februar 2020

☐ für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: ____

Matrikel-Nr.: __________________________________

Prüfungsraum: _________________________________

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____
Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/17	/11	/19,5	/25	/12,5	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 15 bis 19 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x)$ mit $y = u\big(v(x)\big)$

Einheitssprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung: $x_a(t) = K\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)$ für $t \geq 0$

Massenträgheitsmoment I: $[I] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$

1. Aufgabe:

Ein Ansatz zur dynamischen Kalibrierung von Drehmomentaufnehmern besteht darin, den zu charakterisierenden Aufnehmer in einen Wellenstrang einzubringen, welcher auf einer Seite mittels eines Rotationserregers angetrieben wird und an dessen anderer Seite ein Körper mit bekanntem Massenträgheitsmoment einer Änderung der Rotationsbewegung entgegenwirkt.

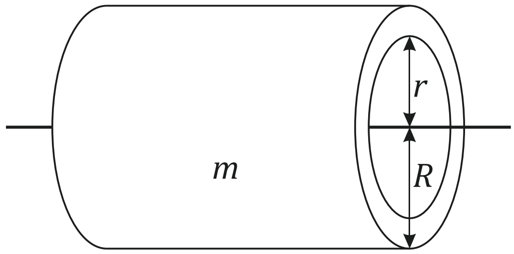


Abbildung 1.1: Hohlzylinder

Um auf diesem Wege eine rückführbare Kalibrierung zu ermöglichen, müssen alle im Wellenstrang vorhandenen Massenträgheitsmomente bekannt sein. Im nachfolgend betrachteten Fall seien die zu untersuchenden Verbindungselemente des Wellenstrangs als Hohlwellen ausgeführt, deren Geometrie der eines Hohlzylinders (vgl. Abbildung 1.1) entspricht.

Das Massenträgheitsmoment I eines Hohlzylinders, der um seine Symmetrieachse rotiert, ist durch folgenden Zusammenhang definiert:

$$I = m\frac{R^2 + r^2}{2}$$

Hierin ist m die Masse des Hohlzylinders, R ist der Außenradius und r der Innenradius des Hohlzylinders.

Im Folgenden soll das Massenträgheitsmoment I einer Hohlwelle auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen m, R und r einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Masse m der Hohlwelle wurde in einem Prüflabor auf einer Präzisionswaage ermittelt und beträgt laut Kalibrierschein $m = 1{,}486\ \mathrm{kg} \pm 0{,}002\ \mathrm{kg}$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ und einem Stichprobenumfang von $n_m = 10$.

Der Außenradius R wurde auf einem Formmessgerät ermittelt zu $R = 25{,}007\ \mathrm{mm} \pm 0{,}003\ \mathrm{mm}$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$.

Zur Bestimmung des Innenradius r kommt eine Innenmessschraube zum Einsatz. Hiermit wird der Innendurchmesser $d = 2r$ in insgesamt $n_d = 9$ Wiederholungen an unterschiedlichen Stellen der Innenkontur gemessen. Dabei werden die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte des Innendurchmessers d ermittelt.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d / mm	36,000	36,005	35,990	35,990	36,000	36,000	35,995	36,000	36,005

Tabelle 1.1: Messwerte des Innendurchmessers d

a) Berechnen Sie das gesuchte Massenträgheitsmoment I und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ an.

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Das Benfordsche Gesetz beschreibt eine Eigenschaft der Verteilung der Ziffernstrukturen von Zahlen in empirischen Datensätzen. Vereinfacht ausgedrückt besagt es, dass das Auftreten einer Ziffernsequenz bestimmter Länge an einer bestimmten Stelle einer Zahl umso wahrscheinlicher ist, je niedriger der zahlenmäßige Wert der Ziffernsequenz ist. Das Benfordsche Gesetz findet heutzutage vielfältige Anwendung bei der Aufdeckung von Datenmanipulationen, wie beispielsweise Betrug bei der Bilanzerstellung, Fälschung von Abrechnungen oder Datenfälschung in der Wissenschaft.

Ihr Arbeitgeber beauftragt Sie damit, die von einem Zulieferer bereitgestellten Messdaten auf Basis des Benfordschen Gesetzes auf Plausibilität zu prüfen. Konkret soll dabei im Folgenden die Auftretenswahrscheinlichkeit der ersten von Null verschiedenen Ziffer in der Dezimaldarstellung von Zahlen betrachtet werden. Für diesen Fall besagt das Benfordsche Gesetz, dass die Ziffer d mit $d \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ mit der durch folgenden Ausdruck definierten Wahrscheinlichkeit $p(d)$ auftritt:

$$p(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

Der von Ihnen zu untersuchende empirische Datensatz umfasst $n = 5000$ Messwerte in Form von Dezimalzahlen. Mittels rechnergestützter Auswertung ermitteln Sie daraus die in Tabelle 2.1 zusammengefassten Auftretenshäufigkeiten der Ziffer 1 bis 9 an erster Stelle der betrachteten Zahlenwerte.

Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	1473	843	682	464	418	361	269	239	251

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 an erster Stelle der Messwerte

a) Untersuchen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ der gemäß Benfordschem Gesetz für den oben dargestellten Anwendungsfall zu erwartenden Verteilung genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Hohlwellen für Antriebssysteme wird im Rahmen der Qualitätssicherung der Außendurchmesser der gefertigten Wellen überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 15$ entnommen und der Durchmesser D der Wellen ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Durchmessers von $\overline{D} = 30{,}04$ mm und eine Streuung von $S_D = 0{,}014$ mm. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% beträgt für diesen Fall rund:

a) $D = 30{,}04 \text{ mm} \pm 0{,}0042 \text{ mm}\,;\, \mathrm{P} = 99\%$ ☐

b) $D = 30{,}04 \text{ mm} \pm 0{,}0064 \text{ mm}\,;\, \mathrm{P} = 99\%$ ☐

c) $D = 30{,}04 \text{ mm} \pm 0{,}0084 \text{ mm}\,;\, \mathrm{P} = 99\%$ ☐

d) $D = 30{,}04 \text{ mm} \pm 0{,}0095 \text{ mm}\,;\, \mathrm{P} = 99\%$ ☐

e) $D = 30{,}04 \text{ mm} \pm 0{,}0108 \text{ mm}\,;\, \mathrm{P} = 99\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des Prozesses $\sigma_D = 0{,}014$ mm betrage. Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers D auf maximal $\pm\, 0{,}007$ mm abschätzen zu können?

a) 11 ☐

b) 13 ☐

c) 15 ☐

d) 16 ☐

e) 18 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Wellen weisen dann einen Durchmesser auf, der innerhalb des Intervalls von $30{,}01\text{ mm} \leq D \leq 30{,}05\text{ mm}$ liegt?

a) 23,9% ☐
b) 25,5% ☐
c) 74,5% ☐
d) 75,9% ☐
e) 77,7% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert des Durchmessers D betrage $\mu_D = 30{,}04$ mm. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_D des Durchmessers dann maximal annehmen, damit 95% der Wellen einen Durchmesser von $D \leq 30{,}05$ mm aufweisen?

a) 3,33 µm ☐
b) 5,00 µm ☐
c) 5,10 µm ☐
d) 6,08 µm ☐
e) 7,80 µm ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Hohlwellen möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigung sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck regelmäßig Stichproben aus der laufenden Produktion. Anhand der entnommenen Stichproben wird jeweils der Erwartungswert des Außendruchmessers D_{ist} der momentan gefertigten Wellen abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob der so abgeschätzte Erwartungswert sich signifikant vom vorgegebenen Sollwert D_{soll} unterscheidet.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben ☐
e) χ^2-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand einer Stichprobe des Durchmessers einer Hohlwelle möchten Sie einen t-Test für den Erwartungswert durchführen. Aus der erhobenen Stichprobe vom Umfang $n = 8$ haben Sie Mittelwert und Streuung des Durchmessers D ermittelt zu $\overline{D} = 42{,}01$ mm und $S_D = 0{,}01$ mm. Der laut Spezifikation geforderte Erwartungswert des Durchmessers beträgt $D_{nenn} = 42$ mm.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) $-2{,}83$ ☐
b) $-0{,}35$ ☐
c) $0{,}35$ ☐
d) $2{,}0$ ☐
e) $2{,}83$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 6 ☐
b) 7 ☐
c) 8 ☐
d) 14 ☐
e) 15 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert die Eigenschaften einer Fertigungslinie für Hohlwellen überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 15$. Ihre Nullhypothese lautet, dass die auf der Fertigungslinie produzierten Wellen der Spezifikation entsprechen ($\mu_x = \mu_0$). Sie wählen eine zweiseitige Alternativhypothese ($\mu_x \neq \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = 2{,}84$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

7. Die Änderung des elektrischen Widerstands ΔR eines mechanisch belasteten Dehnungsmessstreifens ist abhängig von der mechanischen Dehnung ε und dem Empfindlichkeitsfaktor k. Der Gesamtwiderstand R eines belasteten DMS setzt sich aus diesem dehnungsabhängigen Anteil ΔR und dem konstanten Grundwiderstand R_0 des unbelasteten DMS zusammen. Der Gesamtwiderstand R eines mechanisch belasteten DMS ergibt sich gemäß folgender Gleichung:

$$R = R_0 \cdot (1 + k \cdot \varepsilon)$$

Mittels linearer Regression möchten Sie den k-Faktor eines bestimmten Typs von Dehnungsmessstreifen experimentell bestimmen. Hierzu nehmen Sie eine Messreihe auf, bei welcher die Dehnungen ε als unabhängige Versuchsgröße vorgegeben werden und der elektrische Widerstand R jeweils als abhängige Größe bestimmt wird.

7.1. Geben Sie alle der folgenden Zuordnungen von x- und y-Größe an, welche eine im Sinne der Versuchsbeschreibung korrekte Berechnung des Regressionskoeffizienten ermöglichen!

a) $y = \frac{R}{R_0} - 1$ und $x = \varepsilon$ ☐

b) $y = \frac{R - R_0}{R_0}$ und $x = \varepsilon$ ☐

c) $y = R - R_0$ und $x = \varepsilon \cdot R_0$ ☐

d) $y = \frac{1}{\varepsilon}$ und $x = \frac{R_0}{R - R_0}$ ☐

e) $y = \frac{R - R_0}{\varepsilon \cdot R_0}$ und $x = 1$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

8. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um <u>extensive</u> Größen handelt!

a) dynamische Viskosität ☐
b) elektrische Ladung ☐
c) elektrischer Widerstand ☐
d) elektrische Spannung ☐
e) Länge ☐
f) Temperatur ☐
g) Wärmeleitfähigkeit ☐
h) Zeit ☐

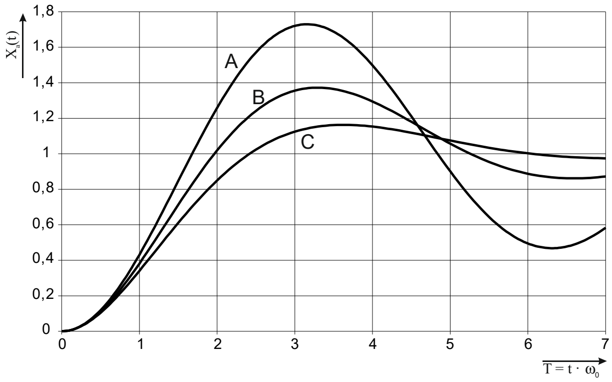
(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $998\ \mathrm{hPa} + 0{,}1002\ \mathrm{kPa} = 2{\cdot}10^5\ \mathrm{Pa}$ ☐
b) $1\ \mathrm{nm} = 1{\cdot}10^{-9}\ \mathrm{mm}$ ☐
c) $2\ \mathrm{MN} \cdot 30\ \mathrm{cm} = 6{\cdot}10^5\ \mathrm{Nm}$ ☐
d) $999{,}9\ \mathrm{W} + 100\ \mathrm{mW} = 1\ \mathrm{kW}$ ☐
e) $1\ \mathrm{mg} - 120\ \mu\mathrm{g} = 8{,}8{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{g}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

10. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 5$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 0{,}3$ ☐
b) $D_A = 1$; $D_B = 3$; $D_C = 5$ ☐
c) $D_A = 0{,}5$; $D_B = 1$; $D_C = 3$ ☐
d) $D_A = 0{,}1$; $D_B = 0{,}3$; $D_C = 0{,}5$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 1$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von -10 V auf $+10$ V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = 2T$ am Ausgang ungefähr anliegen? *Hinweis: Formelsammlung auf Seite 2 beachten!*

a) $-2{,}7$ V ☐
b) 0 V ☐
c) $2{,}6$ V ☐
d) $6{,}3$ V ☐
e) $7{,}3$ V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Sie beobachten einen Prozess, auf den eine große Zahl statistisch unabhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. Durch welche statistische Verteilung lässt sich aller Wahrscheinlichkeit nach die Gesamtabweichung des Prozesses in guter Näherung beschreiben?

a) Gleichverteilung ☐
b) Binomialverteilung ☐
c) Hypergeometrische Verteilung ☐
d) Normalverteilung ☐
e) Poissonverteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 20 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $-3 \leq \mu \leq 3$ bei $P = 95\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen durchgeführt werden müssten, um bei unverändertem Konfidenzintervall die Aussagesicherheit auf $P = 99\%$ zu erhöhen!

a) 22 ☐
b) 27 ☐
c) 29 ☐
d) 35 ☐
e) 40 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -5 V bis $+5$ V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler 20 µV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 15 Bit ☐
b) 16 Bit ☐
c) 17 Bit ☐
d) 18 Bit ☐
e) 19 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die Studiendauer im Bachelorstudiengang Maschinenbau. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Studiendauer beträgt 7,9 Semester; der Modalwert der Studiendauer beträgt 8 Semester; der arithmetische Mittelwert der Studiendauer beträgt 8,3 Semester; der Quartilsabstand der Studiendauer beträgt 1,9 Semester; das dritte Quartil der Studiendauer liegt bei 9,1 Semestern. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

a) Die meisten Studierenden benötigen für ihr Studium 7,9 Semester. ☐

b) Die Spanne der Studiendauer beträgt 3,8 Semester. ☐

c) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 8,3 Semester oder mehr. ☐

d) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss zwischen 7,2 und 9,1 Semester. ☐

e) Ein Viertel der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 9,8 Semester oder mehr. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über spezielle Verteilungsfunktionen zutreffend sind!

a) Die Gaußsche Normalverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert μ und ihre Wendepunkte liegen bei $x = \mu \pm 2\sigma$. ☐

b) Die Binomialverteilung beschreibt den wahrscheinlichen Ausgang einer Folge gleichartiger Versuche, bei der es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt. ☐

c) Die Poissonverteilung beschreibt selten auftretende Ereignisse. Sie wurde als Grenzfall der Binomialverteilung, für eine sehr große Zahl von Versuchen $(V \to \infty)$ und eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses $(p \to 0)$ hergeleitet. ☐

d) Für eine sehr große Zahl von Versuchen $(n \to \infty)$ nähert sich die Student'sche t-Verteilung der Gaußsche Normalverteilung an. ☐

e) Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung sind wertgleich. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über Massenmessgeräte zutreffend sind!

a) Die Messung einer Masse wird meist auf eine Kraftmessung zurückgeführt, da Masse und die durch die Masse ausgeübte Kraft über die Erdbeschleunigung miteinander verknüpft sind. ☐

b) Die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung wird zum größeren Teil durch die Rotation der Erde verursacht. ☐

c) Um die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung zu berücksichtigen, ist Deutschland in 4 Gebrauchszonen mit unterschiedlicher Erdbeschleunigung unterteilt. ☐

d) Im Unterschied zum *Wägewert* wird beim *konventionellen Wägewert* der Einfluss des Auftriebs im umgebenden Medium berücksichtigt. ☐

e) Während *Wägen* das Feststellen einer unbekannten Masse bezeichnet, bezeichnet man mit *Abwägen* das Herstellen einer bestimmten Masse. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Bei der Messung des Spannungsabfalls über einem Widerstand mittels eines Spannungsmessgerätes welches direkt an die Zuleitungen des Widerstandes angeschlossen wird kann es aufgrund des Widerstandes der Zuleitungen zu systematischen Messabweichungen kommen. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich dieser Messabweichungen zutreffend sind!

a) Die systematischen Abweichungen entstehen dadurch, dass die widerstandsbehafteten Zuleitungen des Widerstandes von demselben Strom durchflossen werden, wie der Widerstand selbst. ☐

b) Die durch den Widerstand der Zuleitungen verursachte systematische Messabweichung bewirkt, dass der gemessene Spannungsabfall kleiner ist, als der tatsächliche Spannungsabfall über dem Widerstand. ☐

c) Bei der Spannungsmessung an großen Widerständen wirkt sich der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen stärker auf das Messergebnis aus, als bei der Messung an kleinen Widerständen. ☐

d) Bei bekannten Leitungswiderständen kann die Abweichung rechnerisch korrigiert werden. ☐

e) Sind die Leitungswiderstände <u>nicht</u> bekannt und können <u>nicht</u> vernachlässigt werden, kann der Einfluss der Leitungswiderstände durch Einsatz einer Vierleiterschaltung reduziert werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

19. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der interferometrischen Längenmessung zutreffend sind!

a) Zur interferometrischen Längenmessung wird in der Regel ein Laserstrahl in zwei Teilstrahlen aufgespalten und über verschiedene Wege geführt. Der Referenzstrahl durchläuft einen festen Referenzarm, während der Messstrahl einen Messarm variabler Länge durchläuft. ☐

b) Da die Phasenlage des Lichtes von der zurückgelegten Wegstrecke abhängig ist, ist im Allgemeinen eine Phasenverschiebung zwischen Mess- und Referenzstrahl festzustellen. ☐

c) Die am Empfänger detektierbare Intensität variiert aufgrund von Interferenz in Abhängigkeit von der relativen Phasenlage von Mess- und Referenzstrahl. ☐

d) Da der Messstrahl den Messarm hin und zurück durchläuft, entspricht die Periodenlänge des Ausgangssignals der doppelten Laserwellenlänge. ☐

e) Bei der interferometrischen Längenmessung handelt es sich um ein inkrementelles Messverfahren, so dass selbst eine nur kurzzeitige Unterbrechung des Strahlverlaufs zum Abbruch der Messung führt. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

<u>Kurzfragen:</u>

20. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten und Einheitenzeichen!

21. Erläutern Sie, was unter der *Hysterese* eines Messgerätes zu verstehen ist!

22. Geben Sie an, woran man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung <u>sicher</u> von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden kann!

23. Bei der Durchführung eines statistischen Tests stellen Sie fest, dass wiederholt der Fall eintritt, dass die Nullhypothese infolge des Testresultats abgelehnt wird, obwohl weiterführende Untersuchungen zeigen, dass die Nullhypothese tatsächlich zutrifft. Wie würden Sie das Signifikanzniveau α des Tests verändern, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung zu reduzieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

24. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine *hinreichende*, aber *nicht notwendige* Bedingung handelt!

25. Für die indirekte Widerstandsmessung mittels Strom- und Spannungsmessgerät sind zwei unterschiedliche Schaltungsarten gebräuchlich.

a) Benennen und skizzieren Sie die beiden Schaltungsarten! Achten Sie dabei auf eine jeweils eindeutige Zuordnung von Benennung und Skizze!

b) Geben Sie an, welche der beiden Schaltungsarten für die Messung großer Widerstände geeigneter ist!

Ende der Kurzfragen

[Leerseite]

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y} + b\left(\bar{x} - x_j\right)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \dots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1-\alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1-\alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1-\alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\bigg|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. $H_0\colon \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1\colon \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. $H_0\colon \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1\colon \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. $H_0\colon \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1\colon \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad (\mathrm{df} = 2\mathrm{n} - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1,1-\alpha}^2$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70	1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80	1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90	1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

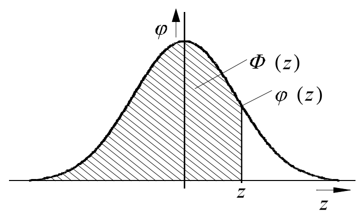
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

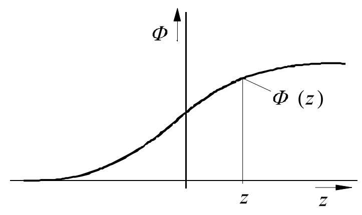
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z