

Klausur

Einführung in die Messtechnik

09. März 2018

- für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)
- für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit
Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)
- für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511161)
- für Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
(Prüfungsnummer 2511161)
- sonstige: _____

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Prüfungsraum: _____

**Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich
in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).**

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/17	/12	/17	/24	/15	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x)$ mit $y = u(v(x))$

dynamische Viskosität: $1 \text{ P (Poise)} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 0,1 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$

Druck, mech. Spannung: $1 \text{ Pa (Pascal)} = 1 \text{ N}/\text{m}^2 = 1 \text{ kg}/(\text{s}^2\cdot\text{m})$

1. Aufgabe:

Zur Messung der dynamischen Viskosität η von Flüssigkeiten kann das im Aufbau sehr einfache Rotationsviskosimeter nach COUETTE eingesetzt werden. Die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich dabei im Spalt zweier koaxialer Zylinder, von denen sich der innere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht und so durch die innere Reibung der Flüssigkeit ein Moment M auf den äußeren Zylinder überträgt. Das Moment wird auf den Torsionsfaden F übertragen, dessen Verdrehung auf einer Skala zur Anzeige gebracht wird (vgl. Abb. 1).

Die dynamische Viskosität ergibt sich hierbei gemäß folgendem Zusammenhang:

$$\eta = \frac{M}{4\pi \cdot H \cdot \omega} \cdot \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right)$$

Hierin sind:

- M Drehmoment
- H Höhe des inneren Zylinders
- R_i Radius des inneren Zylinders
- R_a Radius des äußeren Zylinders
- ω Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders

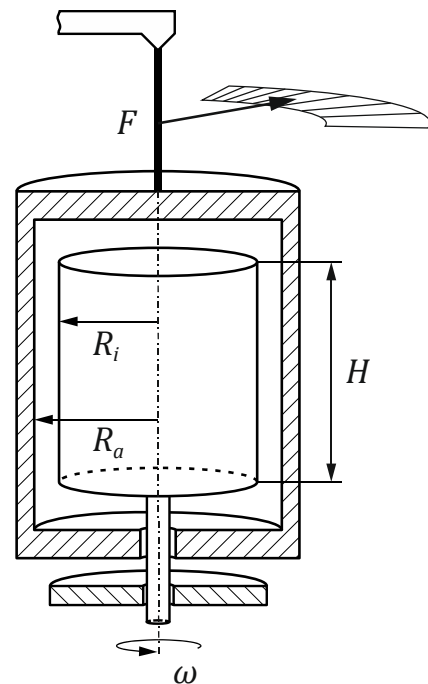


Abbildung 1.1: Prinzipskizze eines Rotationsviskosimeters nach COUETTE

Im Folgenden soll die dynamische Viskosität η auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen M , H , R_i , R_a und ω einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Der Radius R_a des äußeren Zylinders wird vom Hersteller mit $R_a = 55 \text{ mm} \pm 0,05 \text{ mm}$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ und sehr großem n angegeben.

Der Radius R_i des inneren Zylinders wird vom Hersteller mit $R_i = 50 \text{ mm}$ angegeben. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

Die Höhe H des inneren Zylinders wird vom Hersteller mit $H = 100 \text{ mm}$ angegeben. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

Die Winkelgeschwindigkeit ω wird mit $\omega = 20\pi/s$ gemessen. Die Unsicherheit der hierbei verwendeten Messeinrichtung wird vom Gerätehersteller mit $0,5\%$ des Anzeigewertes bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ angegeben.

Das Moment M wurde mit Hilfe der integrierten Skala neunmal gemessen. Dabei wurden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M / Ncm	43,74	43,80	43,91	44,13	44,33	44,40	44,81	44,90	45,20

Tabelle 1.1: Messwerte des Moments M

- a) Berechnen Sie die gesuchte dynamische Viskosität η und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Von Ihrem neuen Arbeitgeber werden Sie mit der Betreuung des Großkundengeschäfts beauftragt. Als Großkunden gelten in Ihrem Unternehmen solche Kunden, die pro Jahr jeweils für einen Umsatz von mindestens einer Million Euro sorgen. Aufgrund Ihrer Vorkenntnisse auf dem Gebiet der Finanzmathematik vermuten Sie, dass die Anzahl der Großkunden in Abhängigkeit vom jeweils erzielten Umsatz durch eine Pareto-Verteilung beschriebene werden könnte.

Die Pareto-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem rechtsseitig unendlichen Intervall $[x_{min}, \infty)$. Die Dichtefunktion $h(x)$ der Pareto-Verteilung für $x \geq x_{min}$ ist durch nachfolgende Gleichung (2.1) definiert:

$$h(x) = \frac{kx_{min}^k}{x^{k+1}} \quad (2.1)$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$, also die Stammfunktion obiger Dichtefunktion $h(x)$, ist ebenfalls als geschlossene Funktion darstellbar und gemäß nachfolgender Gleichung (2.2) definiert:

$$P(x) = 1 - \left(\frac{x_{min}}{x}\right)^k \quad (2.2)$$

Aus Ihrer Kundendatenbank haben Sie die Daten von $n = 214$ Großkunden entnommen. Zur weiteren Verarbeitung der Daten haben Sie die in Tabelle 2.1 aufgeführte, nach Umsatz klassierte Häufigkeitstabelle erstellt.

Umsatz / Millionen €	1 bis 2	> 2 bis 3	> 3 bis 4	> 4 bis 5	> 5 bis 6	> 6 bis 7	> 7 bis 8	> 8
Häufigkeit	138	29	19	6	6	4	2	10

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für den klassierten Umsatz Ihrer Großkunden

Der Parameter x_{min} als Mindestwert der Verteilung ergibt sich im vorliegenden Fall aus der gewählten Großkunden-Definition zu $x_{min} = 1 \cdot 10^6$. Den Parameter k wählen Sie auf der Grundlage von Erfahrungen aus ähnlichen Anwendungsfällen zu $k = 1,3$. Die Dichtefunktion $h(x)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ für eine Pareto-Verteilung mit $x_{min} = 1 \cdot 10^6$ und $k = 1,3$ sind in Abbildung 2.1 zur Veranschaulichung grafisch dargestellt.

- a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,1$ einer Pareto-Verteilung mit den Parametern $x_{min} = 1 \cdot 10^6$ und $k = 1,3$ genügt!

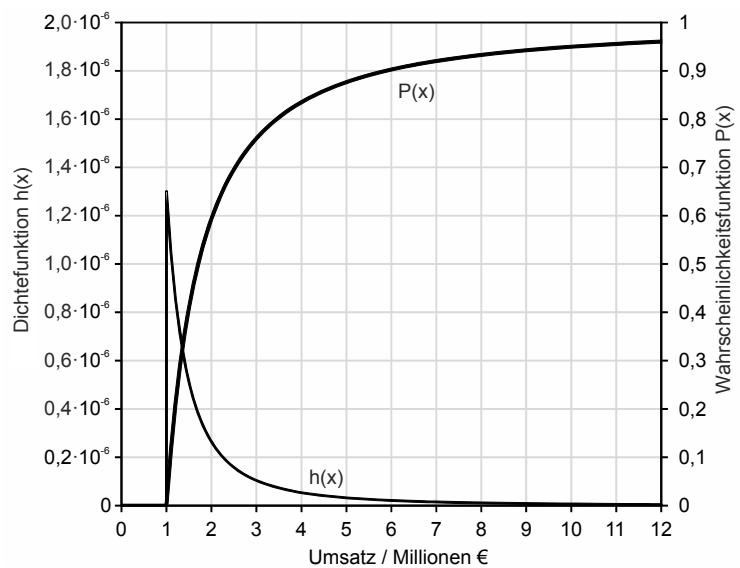


Abbildung 2.1: Dichtefunktion $h(x)$ und Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ einer Pareto-Verteilung mit den Parametern $x_{min} = 10^6$ und $k = 1,3$.

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl:* Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Schmierstoffen werden im Rahmen einer Warenausgangsprüfung Getriebeöle hinsichtlich ihrer dynamischen Viskosität untersucht. Hierzu wird aus den produzierten Gebinden eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ entnommen und die mittlere dynamische Viskosität η mittels eines Rotationsviskosimeters experimentell ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert der dynamischen Viskosität von $\bar{\eta} = 697 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ und eine Streuung von $S_{\eta} = 5 \text{ mPa}\cdot\text{s}$. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

- 3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der dynamischen Viskosität η für eine Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ beträgt für diesen Fall ungefähr:

- a) $\eta = 697 \text{ mPa}\cdot\text{s} \pm 2,24 \text{ mPa}\cdot\text{s}$; $P = 98\%$
- b) $\eta = 697 \text{ mPa}\cdot\text{s} \pm 2,30 \text{ mPa}\cdot\text{s}$; $P = 98\%$
- c) $\eta = 697 \text{ mPa}\cdot\text{s} \pm 2,47 \text{ mPa}\cdot\text{s}$; $P = 98\%$
- d) $\eta = 697 \text{ mPa}\cdot\text{s} \pm 2,60 \text{ mPa}\cdot\text{s}$; $P = 98\%$
- e) $\eta = 697 \text{ mPa}\cdot\text{s} \pm 2,84 \text{ mPa}\cdot\text{s}$; $P = 98\%$

(Fragetyp Einfachwahl)

- 3.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n , um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der dynamischen Viskosität auf maximal $\pm 2 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ abschätzen zu können, beträgt:

- a) 29
- b) 27
- c) 25
- d) 24
- e) 19

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Öl-Gebinde weisen dann eine dynamische Viskosität auf, die innerhalb des Intervalls von $695 \text{ mPa}\cdot\text{s} \leq \eta \leq 705 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ liegt?

- a) 29,0%
- b) 39,9%
- c) 60,1%
- d) 68,3%
- e) 71,0%

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert der dynamischen Viskosität η betrage $\mu_\eta = 700 \text{ mPa}\cdot\text{s}$. Welchen Wert dürfte die Standardabweichung σ_η der dynamischen Viskosität dann maximal annehmen, damit 99% der Öl-Gebinde eine dynamische Viskosität innerhalb des Intervalls von $695 \text{ mPa}\cdot\text{s} \leq \eta \leq 705 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ aufweisen?

- a) 1,618 mPa·s
- b) 1,747 mPa·s
- c) 1,940 mPa·s
- d) 2,149 mPa·s
- e) 3,900 mPa·s

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Zulieferer von Getrieben für die Automobilindustrie sind Sie am Einfluss der dynamischen Viskosität des verwendeten Getriebeöls auf den Wirkungsgrad der Getriebe interessiert. Konkret möchten Sie die Auswirkung zweier Getriebeöle A und B vergleichen. Sie führen daher an insgesamt 10 Getrieben unterschiedlicher Bauart eine Messung des Wirkungsgrades zunächst unter Verwendung von Öl A und anschließend unter Verwendung von Öl B durch. Auf diese Weise möchten Sie feststellen, ob – wie von Ihnen vermutet – Öl B zu einem signifikant höheren Wirkungsgrad führt, als Öl A.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

- a) t-Test für Erwartungswert
- b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben
- c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben
- d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

- a) einseitige Alternativhypothese
- b) zweiseitige Alternativhypothese

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand einer Stichprobe der dynamischen Viskosität η eines Schmiermittels möchten Sie einen t-Test für den Erwartungswert durchführen. Aus der erhobenen Stichprobe vom Umfang von $n = 25$ haben Sie Mittelwert und Streuung der dynamischen Viskosität η ermittelt zu $\bar{\eta} = 1,392 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ und $S_{\eta} = 0,007 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Der laut Spezifikation geforderte Erwartungswert der dynamischen Viskosität beträgt $\eta_{nenn} = 1,4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

- a) $-5,71$
- b) $-2,86$
- c) $-0,57$
- d) $+0,57$
- e) $+5,71$

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

- a) 23
- b) 24
- c) 25
- d) 48
- e) 49
- f) 50

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte anhand zweier verbundener Stichproben die Eigenschaften zweier Sorten Getriebeöl überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt jeweils $n = 12$. Ihre Nullhypothese lautet, dass kein Unterschied zwischen beiden Sorten besteht ($\mu_d = 0$). Sie wählen eine zweiseitige Alternativhypothese ($\mu_d \neq 0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,1$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = 1,64$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

- a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt
- b) Nullhypothese wird abgelehnt

(Fragetyp Einfachwahl)

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um intensive Größen handelt!

- a) Dichte
- b) dynamische Viskosität
- c) Länge
- d) elektrische Ladung
- e) Volumen
- f) elektrischer Widerstand
- g) Stoffmenge
- h) Temperatur

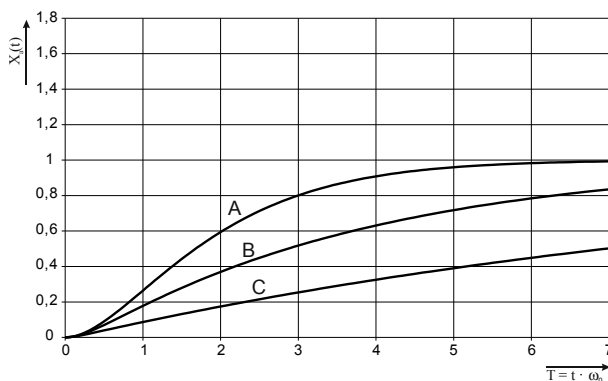
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

- a) $1 \text{ MN} - 100 \text{ kN} = 9 \cdot 10^5 \text{ N}$
- b) $1 \text{ TW} = 1 \cdot 10^6 \text{ MW}$
- c) $10 \text{ hPa} + 1000 \text{ Pa} = 1,1 \text{ kPa}$
- d) $100 \mu\text{g} - 0,1 \text{ mg} = 0 \text{ g}$
- e) $100 \text{ cm}^2 = 1 \text{ dm}^2$

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A , D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



- a) $D_A = 3; \quad D_B = 2; \quad D_C = 1$
- b) $D_A = 1; \quad D_B = 2; \quad D_C = 5$
- c) $D_A = 0,3; \quad D_B = 1; \quad D_C = 3$
- d) $D_A = 0,1; \quad D_B = 0,3; \quad D_C = 0,5$

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 4$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von $+5\text{ V}$ auf -10 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang ungefähr anliegen?

- a) $-4,45\text{ V}$
- b) $-17,8\text{ V}$
- c) $-22,2\text{ V}$
- d) $-32,6\text{ V}$
- e) $-37,8\text{ V}$

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 15 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $6 \leq \mu \leq 18$ bei $P = 98\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $9 \leq \mu \leq 15$ zu reduzieren!

- a) 22
- b) 30
- c) 35
- d) 45
- e) 60

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Bei dem Abtasttheorem nach Shannon handelt es sich hinsichtlich der verlustfreien Rekonstruktion der digitalisierten Daten um ein

- a) hinreichendes und notwendiges Kriterium.
- b) hinreichendes aber nicht notwendiges Kriterium.
- c) nicht hinreichendes aber notwendiges Kriterium.
- d) nicht hinreichendes und nicht notwendiges Kriterium.

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts kommt es infolge von Temperaturschwankungen im Messraum zu einer thermischen Längenänderung der Maßstäbe der inkrementalen Wegmesssysteme. Geben Sie an, um welche Art von Störeinfluss es sich handelt!

- a) superponierender äußerer Störeinfluss
- b) deformierender äußerer Störeinfluss
- c) innerer Störeinfluss
- d) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße
- e) Repräsentativitätsfehler

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -24 V bis $+24\text{ V}$ soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler $500\ \mu\text{V}$ beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

- a) 16 Bit
- b) 17 Bit
- c) 18 Bit
- d) 19 Bit
- e) 20 Bit

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die Studiendauer im Bachelorstudiengang Maschinenbau. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Studiendauer beträgt 7,8 Semester; der Modalwert der Studiendauer beträgt 8 Semester; der arithmetische Mittelwert der Studiendauer beträgt 8,3 Semester; der Quartilsabstand der Studiendauer beträgt 2,8 Semester; das dritte Quartil der Studiendauer liegt bei 9,3 Semestern. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

- a) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 8,3 Semester oder mehr.
- b) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 7,8 Semester oder weniger.
- c) Ein Viertel der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 6,5 Semester oder weniger.
- d) Die meisten Studierenden benötigen für ihr Studium 8 Semester.

(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!

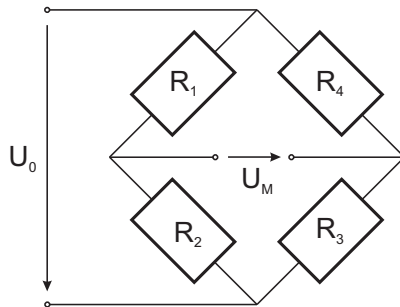
- a) Der Messschieber ist anfällig für das Auftreten eines Parallaxenfehlers, da bei ihm Antast- und Messlinie nicht fluchten.
- b) Der Nonius eines Messschiebers dient dazu, bei der Ablesung der Skala das Auftreten des Abbefehlers zu vermeiden.
- c) Bei der Bügelmessschraube stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher.
- d) Bei der Messuhr wird die Auslenkung des Messbolzens über ein Präzisionsgetriebe in eine Zeigerdrehung gewandelt.
- e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im engeren Sinne.

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über spezielle Verteilungsfunktionen zutreffend sind!

- a) Die Gaußsche Normalverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert μ und ihre Wendepunkte liegen bei $x = \mu \pm \sigma$.
- b) Die Gaußsche Normalverteilung beschreibt solche Prozesse gut, auf die eine große Zahl statistisch unabhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt.
- c) Die Binomialverteilung beschreibt den wahrscheinlichen Ausgang einer Folge gleichartiger Versuche, bei der es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt.
- d) Für eine sehr große Zahl von Versuchen ($n \rightarrow \infty$) nähert sich die Student'sche t-Verteilung der Gaußsche Normalverteilung an.
- e) Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung sind identisch.
- (Fragetyp Mehrfachwahl)*

18. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



- a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Wheatstone-Brücke.
- b) Die abgebildete Schaltung eignet sich zur Auswertung kleiner Widerstandsänderungen, z.B. bei der Verformungsmessung mit Dehnungsmessstreifen.
- c) Prinzipiell handelt es sich bei der abgebildeten Schaltung um die Parallelschaltung zweier Spannungsteiler.
- d) Eine Schaltung nach dem Prinzip der abgebildeten, bei welcher alle vier Widerstände veränderlich sind, bezeichnet man auch als Viertelbrücke.
- e) In einer Schaltung wie der abgebildeten, bei welcher alle vier Widerstände veränderlich sind, heben sich vorzeichen- und betragsgleiche Änderungen angrenzender Widerstände auf.
- (Fragetyp Mehrfachwahl)*

Kurzfragen:

19. Erläutern Sie den Begriff *Repräsentativitätsfehler* und nennen Sie ein Beispiel!
20. Erläutern Sie die drei Skalenniveaus *Nominalskala*, *Ordinalskala* und *Intervallskala*! Nennen Sie für jedes der drei Skalenniveaus jeweils ein Beispiel!
21. Geben Sie an, woran man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung sicher von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden kann!
22. Von der Qualitätssicherung eines Unternehmens wird mittels eines statistischen Tests überprüft, ob die produzierte Ware den geforderten Spezifikationen entspricht. Dabei wird als Nullhypothese angenommen, dass die Ware die Spezifikation erfüllt. Auf Anweisung des Managements wird die Irrtumswahrscheinlichkeit α für diesen Test von $\alpha = 0,05$ auf $\alpha = 0,01$ reduziert. In der Folge häufen sich die Beschwerden von Abnehmern, die bemängeln, dass der Anteil des Ausschusses an der gelieferten Ware zugenommen habe. Welche Erklärung haben Sie für dieses Phänomen?
23. Geben Sie an, welcher Punkt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden liegt!
24. Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von $100\text{ k}\Omega$ soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand $0,1\ \Omega$) und eines Spannungsmessgerät (Innenwiderstand $1\text{ M}\Omega$) indirekt gemessen werden.
 - a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!
 - b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!
25. Bei der Messung ohmscher Widerstände kann der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen durch Verwendung einer Vierleiterschaltung reduziert werden, bei welcher ein Spannungsmessgerät mittels zusätzlicher Messleitungen direkt am Widerstand angeschlossen wird. Erläutern Sie, weshalb hierdurch selbst dann der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen reduziert werden kann, wenn die zusätzlichen Messleitungen denselben Widerstand aufweisen, wie die eigentlichen Zuleitungen des Widerstandes!
26. Ordnen Sie nachfolgend genannte Analog-Digital-Umsetzer-Prinzipien aufsteigend nach der Anzahl der Takte, die sie für die Umsetzung im Mittel benötigen!
 - Wägeverfahren
 - Zählverfahren
 - Parallelverfahren
27. Eine bislang in Hamburg genutzte Balkenwaage mit kalibrierten Massestücken soll zukünftig in München eingesetzt werden. Geben Sie an, ob aufgrund der geänderten Erdbeschleunigung eine Neukalibrierung der Massestücke erforderlich ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Elementare statistische Maßzahlen

$$\text{Arithmetisches Mittel: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\text{Empirische Varianz: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$\text{Streuung: } S = +\sqrt{S^2}$$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j))^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten x_1, \dots, x_n

3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x -Wert x^* der y -Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f \right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n}} t_{n_{x_i}-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test**t-Test für Erwartungswert**

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad (\text{df} = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n-1, 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n-1, 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n_x + n_y - 2; 1 - \alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n_x + n_y - 2; 1 - \alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n_x + n_y - 2; 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2 -Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0 : X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten x_1, \dots, x_n aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

- Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i , so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe x_1, \dots, x_n enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
- Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
- Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten x_1, \dots, x_n abgeschätzt.
- Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i , mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
- Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
- Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
- Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:

- r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
- s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
- Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$

9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α , wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^* - s - 1; 1 - \alpha}^2$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1		3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2		1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3		1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4		1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5		1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6		1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7		1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8		1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9		1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10		1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11		1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12		1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13		1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14		1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15		1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16		1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17		1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18		1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19		1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20		1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21		1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22		1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23		1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24		1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25		1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26		1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27		1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28		1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29		1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30		1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40		1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50		1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60		1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70		1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80		1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90		1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100		1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200		1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞		1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

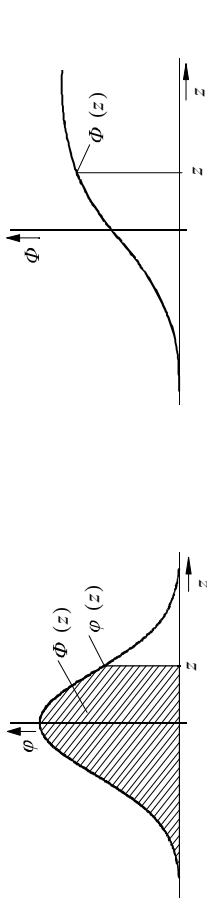
p-Quantile $\chi_{s,p}^2$ der χ^2 -Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1		2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2		4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3		6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4		7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5		9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6		10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7		12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8		13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9		14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10		16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11		17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12		18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13		19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14		21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15		22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16		23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17		24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18		26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19		27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20		28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21		29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22		30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23		32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24		33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25		34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26		35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27		36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28		37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29		39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30		40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40		51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50		63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60		74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70		85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80		96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90		107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100		118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Tabelle 1 Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,50000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1-1,350 \cdot 10^{-3}$	$1-2,326 \cdot 10^{-4}$	$1-3,167 \cdot 10^{-5}$	$1-3,398 \cdot 10^{-6}$	$1-2,867 \cdot 10^{-7}$	$1-9,866 \cdot 10^{-10}$	$1-1,280 \cdot 10^{-12}$	$1-6,221 \cdot 10^{-16}$	$1-1,129 \cdot 10^{-19}$	$1-7,620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99,5%	99,9%	99,95%	$\Phi(z)$
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,576	2,807	3,090	z