Klausur

Einführung in die Messtechnik

05. März 2026

- ☐ Bachelor Maschinenbau
- ☐ Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau
- ☐ Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
- ☐ Bachelor Verkehrsingenieurwesen
- ☐ Bachelor Umweltingenieurwesen
- ☐ Bachelor Bauingenieurwesen
- ☐ Bachelor Sustainable Engineering of Products and Processes
- ☐ Bachelor Physik
- ☐ Kenntnisprüfung im Rahmen der Promotion
- ☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: ____

Matrikel-Nr.: __________________________________

Prüfungsraum: _________________________________

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/18	/13	/18	/24	/12	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches und Smartglasses. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird sowie die Sitzplatznummer einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x)$ mit $y = u\big(v(x)\big)$

Druck: $1\ \mathrm{Pa\ (Pascal)} = 1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s^2}}$

Dynamische Viskosität: $1\ \mathrm{Pa \cdot s\ (Pascalsekunde)} = 1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s}}$

Einheitssprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung: $x_a(t) = K\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)$ für $t \geq 0$

1. Aufgabe:

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschreibt für eine laminare stationäre Strömung den Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom $\dot{V} = dV/dt$, eines homogenen Newton'schen Fluids der dynamischen Viskosität η durch ein kreiszylindrisches Rohr mit dem Radius r und der Länge l sowie dem Druck am Eingang p_1 und dem Druck am Ausgang p_2 (vgl. Abb. 1.1). Für Rohre mit einer erheblichen Länge $l \gg r$ ergibt sich der Volumenstrom $\dot{V}$ gemäß folgendem Zusammenhang:

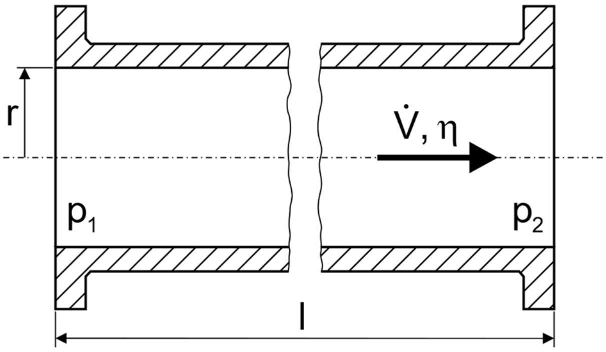


Abbildung 1.1: Durchströmtes Rohr

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot \Delta p$$

Hierin ist $\dot{V}$ der Volumenstrom, r ist der Radius des durchströmten Rohrs, η ist die dynamische Viskosität des Fluids, l ist die Länge des durchströmten Rohrs zwischen Ein- und Ausgang und Δp ist die sich einstellende Druckdifferenz zwischen den Drücken p_1 am Eingang und p_2 am Ausgang des Rohrs.

Im Folgenden soll der Volumenstrom $\dot{V}$ auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen r, η, l und Δp einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Der Innenradius des betrachteten Rohrs wird vom Hersteller mit $r = 53\ \mathrm{mm} \pm 0{,}1\ \mathrm{mm}$ bei $P = 95\%$ und sehr großem Stichprobenumfang n_r angegeben.

Die Länge l des Rohrs wurde im Vorfeld in $n_l = 10$ Wiederholungen zu $l = 5\ \mathrm{m} \pm 0{,}005\ \mathrm{m}$ bei $P = 95\%$ ermittelt.

Die dynamische Viskosität η des Fluids wird anhand von Tabellenwerten ermittelt zu $\eta = 4{,}4\ \mathrm{mPa \cdot s} \pm 0{,}05\ \mathrm{mPa \cdot s}$ bei $P = 99\%$ und sehr großem Stichprobenumfang n_η.

Die Druckdifferenz Δp wird während der Versuchsdurchführung mittels zweier Manometer in $n_{\Delta p} = 7$ Wiederholungen ermittelt. Dabei ergaben sich die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte.

i	1	2	3	4	5	6	7
Δp / Pa	12246	12356	12466	12258	12286	12424	12379

Tabelle 1.1: Messwerte der Druckdifferenz Δp

a) Berechnen Sie den gesuchten Volumenstrom $\dot{V}$ und geben Sie das vollständige Messergebnis in der Einheit m^3/s (Kubikmeter pro Sekunde) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Im Rahmen einer Lehrveranstaltung zur Makroökonomie sind Sie auf die Aussage gestoßen, dass die Anzahl der Arbeitskräfte in den großen Volkswirtschaften der Welt einer Pareto-Verteilung genügen soll. Die Pareto-Verteilung ist eine univariate stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die auf einem rechtsseitig unendlichen Intervall $[x_{min}, \infty)$ definiert ist. Für die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt (mit $x \geq x_{min}$), gilt:

$$P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{x_{min}}{x}\right)^k$$

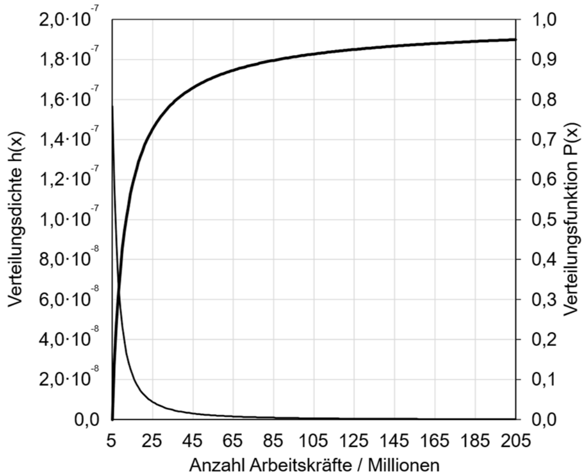


Abbildung 2.1: Pareto-Verteilung mit Parametern $x_{min} = 5.000.000$ *und* $k = 0{,}805$

Hierin steht x für einen beliebigen Wert innerhalb des Definitionsbereichs, im vorliegenden Fall also für die Anzahl der Arbeitskräfte, x_{min} ist die Untergrenze des Definitionsbereichs, im vorliegenden Fall also die gewählte Untergrenze der Anzahl der Arbeitskräfte der betrachteten Volkswirtschaften, und k ist ein Parameter der Pareto-Verteilung, welcher bestimmt, wie steil die Verteilung nach rechts abfällt.

Sie entschließen sich, die Hypothese anhand aller Länder mit mindestens 5 Millionen Arbeitskräften zu überprüfen, woraus für Ihre Betrachtung ein Definitionsbereich von $[5.000.000, \infty)$ folgt. Einer Online-Datenbank haben Sie die Anzahl der Arbeitskräfte des Jahres 2022 der insgesamt $n = 86$ Länder mit mindestens 5 Millionen Arbeitskräften entnommen und zu den in Tabelle 2.1 eingetragenen Klassen zusammengefasst.

Arbeitskräfte in Millionen	≥ 5 bis ≤ 10	> 10 bis ≤ 20	> 20 bis ≤ 30	> 30 bis ≤ 50	> 50 bis ≤ 100	> 100 bis ≤ 200	> 200
Häufigkeit	33	19	12	9	8	3	2

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten der klassierten Arbeitskräfteanzahl großer Volkswirtschaften

Den Parameter k haben Sie im Vorfeld mittels Maximum-Likelihood-Methode anhand der empirischen Daten zu $k = 0{,}805$ abgeschätzt.

a) Untersuchen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ einer Pareto-Verteilung mit den Parametern $x_{min} = 5.000.000$ und $k = 0{,}805$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.
- *Fragetyp Zuordnung*: Bei Fragen dieses Typs ist in der gegebenen Matrix von Termen jeder Zeile genau eine Spalte zuzuordnen. Bei Fragen dieses Typs erfolgt die Bewertung zeilenweise und es wird je Zeile nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Spalte zugeordnet wurde.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Anlagen für die Chemieindustrie wird im Rahmen einer Wareneingansprüfung eine Charge nahtloser rostfreier Stahlrohre gemäß ASME B 36.19 Schedule 10S mit einer Nennweite von 5 Zoll hinsichtlich ihrer Wanddicke überprüft. Hierzu wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 12$ entnommen und die Wanddicke D ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert der Wanddicke von $\overline{D} = 3{,}36$ mm und eine Streuung von $S_D = 0{,}04$ mm. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Wanddicke D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% beträgt für diesen Fall rund:

a) $D = 3{,}36\ \text{mm} \pm 0{,}0157\ \text{mm}; \text{P} = 98\%$ ☐
b) $D = 3{,}36\ \text{mm} \pm 0{,}0237\ \text{mm}; \text{P} = 98\%$ ☐
c) $D = 3{,}36\ \text{mm} \pm 0{,}0269\ \text{mm}; \text{P} = 98\%$ ☐
d) $D = 3{,}36\ \text{mm} \pm 0{,}0314\ \text{mm}; \text{P} = 98\%$ ☐
e) $D = 3{,}36\ \text{mm} \pm 0{,}0359\ \text{mm}; \text{P} = 98\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung der Wanddicke $\sigma_D = 0{,}04$ mm betrage (*Hinweis: Gilt nur für Aufgabenteil 3.2*). Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Wanddicke D auf maximal $\pm$ 0,01 mm abschätzen zu können?

a) 42 ☐
b) 44 ☐
c) 62 ☐
d) 64 ☐
e) 87 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Rohre weisen dann eine Wanddicke auf, die innerhalb des Intervalls von $3{,}35\ \text{mm} \leq D \leq 3{,}45\ \text{mm}$ liegt?

a) 21,1% ☐
b) 41,4% ☐
c) 58,6% ☐
d) 78,9% ☐
e) 98,8% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert der Wanddicke betrage $\mu_D = 3{,}4$ mm. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_D der Wanddicke dann maximal aufweisen, damit 90% der Rohre eine Wanddicke innerhalb des Intervalls von $3{,}35\ \text{mm} \leq D \leq 3{,}45\ \text{mm}$ aufwiesen?

a) 0,019 mm ☐
b) 0,026 mm ☐
c) 0,030 mm ☐
d) 0,039 mm ☐
e) 0,055 mm ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller rostfreier Stahlrohre möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigungsanlagen sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck stündlich jeweils eine Stichprobe aus der laufenden Produktion zweier baugleicher Fertigungsanlagen A und B. Anhand der entnommenen Stichproben wird jeweils der Erwartungswert μ_D der Wanddicke der auf Anlage A beziehungsweise B gefertigten Rohre abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob die so abgeschätzten Erwartungswerte μ_{D_A} und μ_{D_B} sich signifikant voneinander unterscheiden.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben ☐
e) χ^2-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand einer Stichprobe der Wanddicke D einer Charge rostfreier Stahlrohre möchten Sie einen t-Test für den Erwartungswert durchführen. Aus der erhobenen Stichprobe vom Umfang $n = 15$ haben Sie Mittelwert und Streuung der Wanddicke D ermittelt zu $\overline{D} = 1{,}63$ mm und $S_D = 0{,}02$ mm. Die gemäß Spezifikation geforderte Wanddicke beträgt $D_{Nenn} = 1{,}65$ mm.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) $-0{,}26$ ☐
b) $-1{,}00$ ☐
c) $-2{,}74$ ☐
d) $-3{,}87$ ☐
e) $-4{,}16$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 13 ☐
b) 14 ☐
c) 15 ☐
d) 28 ☐
e) 29 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben die Eigenschaften zweier Fertigungslinien rostfreier Stahlrohre überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt jeweils $n = 20$. Ihre Nullhypothese lautet, dass zwischen beiden Fertigungslinien kein Unterschied besteht ($\mu_x = \mu_y$). Ihre Alternativhypothese lautet, dass die Fertigungslinien sich unterscheiden ($\mu_x \neq \mu_y$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2{,}34$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Größen es sich um Grundgrößen des SI-Systems handelt!

a) Thermodynamische Temperatur ☐
b) Elektrische Spannung ☐
c) Beleuchtungsstärke ☐
d) Dichte ☐
e) Spezifisches Gewicht ☐
f) Elektrische Stromstärke ☐
g) Leuchtdichte ☐
h) Länge ☐

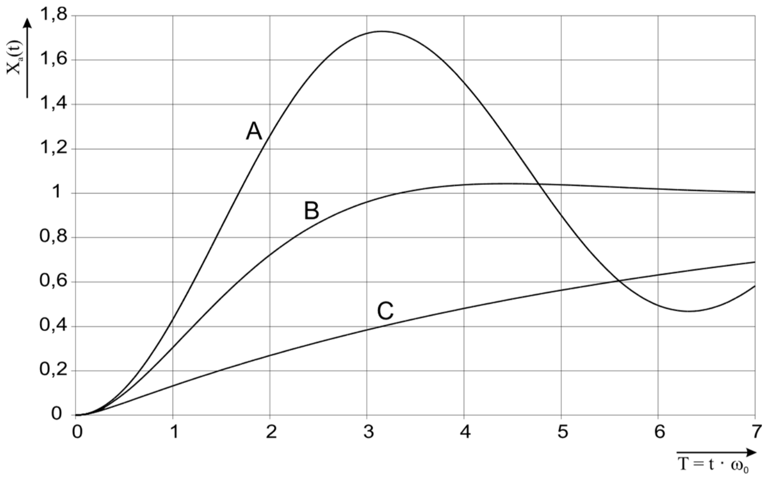
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $5\ \mathrm{MN} \cdot 2\ \mathrm{cm} = 100\ \mathrm{kNm}$ ☐
b) $10\ \mathrm{mg} + 100\ \mu\mathrm{g} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{g}$ ☐
c) $970\ \mathrm{hPa} + 103\ \mathrm{kPa} = 2 \cdot 10^{5}\ \mathrm{Pa}$ ☐
d) $50\ \mathrm{pF} + 0{,}5\ \mathrm{nF} = 5{,}5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F}$ ☐
e) $0{,}8\ \mathrm{TW} + 2000\ \mathrm{GW} = 1 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{W}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 2$; $D_B = 1$; $D_C = 0{,}5$ ☐
b) $D_A = 0{,}3$; $D_B = 1$; $D_C = 3$ ☐
c) $D_A = 0{,}1$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 3$ ☐
d) $D_A = 0{,}1$; $D_B = 0{,}3$; $D_C = 0{,}5$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten $T = 3$ s und dem Übertragungsfaktor $K = 2$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von -10 V auf $+10$ V beaufschlagt. Geben Sie an, nach welcher Zeitdauer t am Ausgang des Systems eine Spannung von etwa $+10$ V anliegt! *Hinweis: Formelsammlung auf Seite 2 beachten!*

a) 5,48 s ☐
b) 4,16 s ☐
c) 3,57 s ☐
d) 2,77 s ☐
e) 1,39 s ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts kommt es infolge von Temperaturschwankungen im Messraum zu einer thermischen Längenänderung der Maßstäbe der inkrementalen Wegmesssysteme. Geben Sie an, um welche Art von Störeinfluss es sich handelt!

a) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße ☐
b) innerer Störeinfluss ☐
c) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
d) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
e) Repräsentativitätsfehler ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 20 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $95 \leq \mu \leq 105$ bei $P = 99\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $98 \leq \mu \leq 102$ zu reduzieren!

a) 50 ☐
b) 100 ☐
c) 125 ☐
d) 180 ☐
e) 200 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -24 V bis $+24$ V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler nicht mehr als 10 µV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 20 Bit ☐
b) 21 Bit ☐
c) 22 Bit ☐
d) 23 Bit ☐
e) 24 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Sie untersuchen den nach Ländern kategorisierten durchschnittlichen täglichen Lebensmittelverbrauch anhand empirischer Daten der pro Person aufgenommenen Lebensmittelmenge in Kilokalorien (kcal). Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median des Lebensmittelverbrauchs beträgt 2857 kcal; der Modalwert des Lebensmittelverbrauchs beträgt 3307 kcal; der arithmetische Mittelwert des Lebensmittelverbrauchs beträgt 2871 kcal; der Quartilsabstand des Lebensmittelverbrauchs beträgt 714 kcal; das erste Quartil des Lebensmittelverbrauchs liegt bei 2563 kcal. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

a) In einem Viertel der Länder werden pro Tag 3277 kcal oder mehr pro Tag aufgenommen. ☐

b) In der Hälfte der Länder werden pro Tag 3307 kcal oder mehr pro Tag aufgenommen. ☐

c) In der Hälfte der Länder werden pro Tag 2857 kcal oder weniger pro Tag aufgenommen. ☐

d) In der Hälfte der Länder werden pro Tag 2871 kcal oder mehr pro Tag aufgenommen. ☐

e) In der Hälfte der Länder werden zwischen 2563 kcal und 3277 kcal pro Tag aufgenommen. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

15. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über Massenmessgeräte zutreffend sind!

a) Die Messung einer Masse wird meist auf eine Kraftmessung zurückgeführt, da Masse und die durch die Masse ausgeübte Kraft über die Erdbeschleunigung miteinander verknüpft sind. ☐

b) Die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung wird hauptsächlich durch die nichtideale Kugelform der Erde verursacht. ☐

c) Um die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung zu berücksichtigen, ist Deutschland in 4 Gebrauchszonen mit unterschiedlicher Erdbeschleunigung unterteilt. ☐

d) Im Unterschied zum *Wägewert* wird beim *konventionellen Wägewert* der Einfluss des Auftriebs im umgebenden Medium berücksichtigt. ☐

e) Während *Wägen* das Feststellen einer unbekannten Masse bezeichnet, bezeichnet man mit *Abwägen* das Herstellen einer bestimmten Masse. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!

a) Der Messschieber ist robust gegenüber dem Auftreten des Abbe-Fehlers, da bei ihm im Regelfall Antast- und Messlinie fluchten. ☐

b) Der Nonius eines Messschiebers stellt eine Hilfsteilung dar, welche dazu dient, bei der Ablesung das Auftreten von Parallaxeneffekten zu vermindern. ☐

c) Bei einer Bügelmessschraube stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher. ☐

d) Bei der Messuhr wird die Auslenkung des Messbolzens über ein Präzisionsgetriebe in eine Zeigerdrehung gewandelt. ☐

e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im engeren Sinne. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der Digitalisierung von Signalen zutreffend sind!

a) Digitalisierung ist die Umwandlung eines zeit- und wertkontinuierlichen Analogsignals in ein zeit- und wertdiskretes Digitalsignal. ☐

b) Bei der Abtastung wird das Signal zu festen Zeitpunkten mit konstanten zeitlichen Abständen abgetastet, die Zustände zwischen den Abtastpunkten werden nicht berücksichtigt. ☐

c) Ist die Zeit zwischen zwei Abtastungen zu lang, ist die Dichte der Abtastpunkte zu gering und es tritt eine charakteristische Fehlmessung auf, der sogenannte „Aliasing-Fehler“. ☐

d) Der zweite Schritt der Digitalisierung eines Signals ist die Quantisierung. Hierbei wird der kontinuierliche Wertebereich des Signals auf diskrete Werte abgebildet. ☐

e) Der bei der Quantisierung auftretende Rundungsfehler beträgt maximal die Hälfte der Auflösung, mit der quantisiert wird. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Ordnen Sie die nachfolgend genannten Merkmalsausprägungen den zugehörigen Skalenniveaus zu!

	Nominalskala	Ordinalskala	Intervallskala	Verhältnisskala	Absolutskala
Bildungsabschluss	☐	☐	☐	☐	☐
Familienstand	☐	☐	☐	☐	☐
Kinderzahl	☐	☐	☐	☐	☐
Einkommen	☐	☐	☐	☐	☐
Intelligenzquotient	☐	☐	☐	☐	☐

(Fragetyp Zuordnung)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

<u>Kurzfragen:</u>

19. Grenzen Sie die Begriffe *Messwert* und *Messergebnis* gegeneinander ab!

20. Geben Sie an, mit welcher Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit beschrieben werden kann, mit der bei n Würfen eines idealen sechsseitigen Würfels k-mal die Zahl 6 gewürfelt wird!

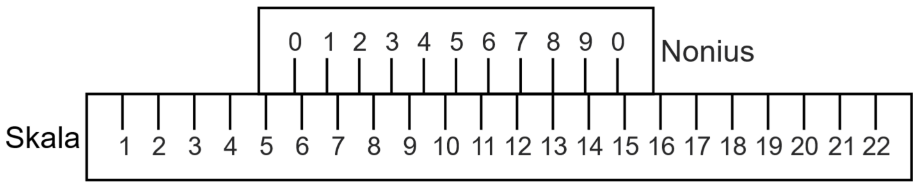
21. Bei der Beobachtung einer poissonverteilten Zufallsgröße stellen Sie fest, dass der Erwartungswert $\mu = 1764$ beträgt. Geben Sie die Standardabweichung σ der Verteilung an!

22. Ein Thermometer zeige bei einer tatsächlichen Temperatur von 42°C den Wert 43,5°C an. Das Gerät wird kalibriert. Geben Sie an, welchen Messwert es nach der Kalibrierung bei einer tatsächlichen Temperatur von 42°C anzeigt! Begründen Sie Ihre Antwort!

23. Bei der Durchführung eines statistischen Tests stellen Sie fest, dass wiederholt der Fall eintritt, dass die Nullhypothese infolge des Testresultats angenommen wird, obwohl weiterführende Untersuchungen zeigen, dass die Nullhypothese tatsächlich <u>nicht</u> zutrifft. Geben Sie an, wie Sie das Signifikanzniveau α des Tests verändern würden, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung zu reduzieren! Begründen Sie Ihre Antwort!

24. Geben Sie an, welcher Punkt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden liegt!

25. Lesen Sie die auf untenstehender Abbildung dargestellte Skala mit Nonius ab und geben Sie das (einheitenlose) Ableseergebnis mit einer Auflösung von einer Nachkommastelle an!



26. Für die indirekte Widerstandsmessung mittels Strom- und Spannungsmessgerät sind zwei unterschiedliche Schaltungsarten gebräuchlich.

a) Benennen und skizzieren Sie die beiden Schaltungsarten! Achten Sie dabei auf eine jeweils eindeutige Zuordnung von Benennung und Skizze!

b) Geben Sie an, welche der beiden Schaltungsarten für die Messung kleiner Widerstände geeigneter ist!

Ende der Kurzfragen

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y} + b\left(\bar{x} - x_j\right)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \dots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1-\alpha$ beträgt:
$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$
4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert
$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$
zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1-\alpha$ beträgt:
$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1-\alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist
$$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha} \;,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist
$$t_0 > t_{n-1;1-\alpha} \;,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist
$$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \;,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad (\mathrm{df} = 2\mathrm{n} - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1,1-\alpha}^2$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70	1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80	1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90	1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit *s* Freiheitsgraden

s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

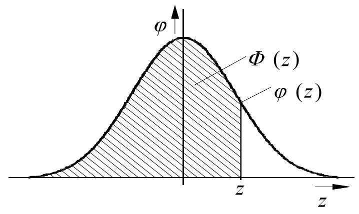
Tabelle 1

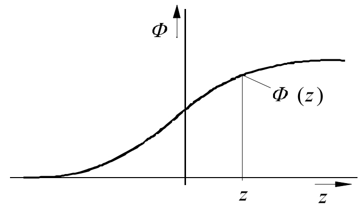
Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \,; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$

Transformation: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350 \cdot 10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326 \cdot 10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167 \cdot 10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398 \cdot 10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867 \cdot 10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866 \cdot 10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280 \cdot 10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221 \cdot 10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129 \cdot 10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620 \cdot 10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z