iprom

INSTITUT FÜR PRODUKTIONSMESSTECHNIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Klausur

Einführung in die Messtechnik

5. Februar 2019

☐ für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: ____

Matrikel-Nr.: ________________________________

Prüfungsraum: _______________________________

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/18	/12	/17	/24	/14	/85

NOTE

Hilfe zu Aufgabe 2 erhalten: ☐

______________________ Unterschrift Studierende/r

______________________ Unterschrift Betreuer

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u\big(v(x)\big)$

Dichte: $1\ \mathrm{kg/m^3} = 1\ \mathrm{g/l} = 10^{-3}\ \mathrm{kg/l}$

1. Aufgabe:

Die Dichte eines flüssigen Mediums kann unter Ausnutzung des Archimedischen Prinzips ermittelt werden. Hiernach taucht ein Körper so weit in eine Flüssigkeit ein, bis die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit der Gewichtskraft des eingetauchten Körpers entspricht. Je kleiner also die Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit ist, desto tiefer wird ein schwimmender Prüfkörper in diese eintauchen.

Für entsprechende Messungen verwendete Prüfkörper heißen Senkspindel oder Aräometer und bestehen vereinfacht aus einem zylindrischen Glaskörper, wie in Abbildung 1.1 skizziert. Damit der Prüfkörper in der Flüssigkeit in aufrechter Lage stabil schwimmt, ist er in seinem unteren Teil mit einem meist aus Blei bestehenden Gewicht beschwert. Der zylindrische Glaskörper trägt eine Skala, an welcher die Eintauchtiefe des Prüfkörpers abgelesen werden kann.

Im vorliegenden Fall weise der Glaskörper die Masse m_{Glas} auf und sei mit einem zusätzlichen Bleigewicht der Masse m_{Blei} beschwert. Die Eintauchtiefe, gemessen von der Unterkante des zylindrischen Prüfkörpers bis zum Spiegel der Flüssigkeit, wird von der Skala angezeigt und sei mit h bezeichnet. Der zylindrische Prüfkörper weise über die gesamte Länge den Durchmesser d auf. Die Dichte ρ des zu untersuchenden Mediums ist dann näherungsweise durch folgenden formelmäßigen Zusammenhang definiert:

$$\rho = \frac{m_{Glas} + m_{Blei}}{\frac{1}{4}\pi \cdot d^2 \cdot h}$$

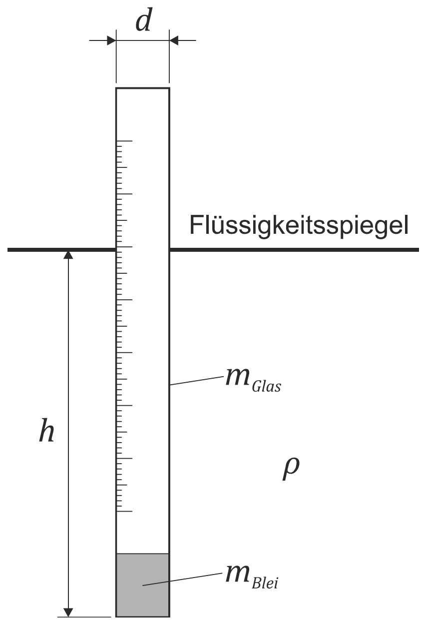


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines Aräometers

Im Folgenden soll die Dichte ρ auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen m_{Glas}, m_{Blei}, d und h einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Massen m_{Glas} und m_{Blei} werden in einer gemeinsamen Wägung mittels einer elektronischen Präzisionswaage ermittelt. Die von der Waage angezeigte gemeinsame Masse von Glaskörper und Bleigewicht beträgt $(m_{Glas} + m_{Blei}) = 14$ g. Die relative Unsicherheit der Waage wird vom Hersteller mit 0,5% des Anzeigewertes bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ angegeben.

Der Durchmesser d des Glaszylinders wurde in $n_d = 25$ Wiederholungen mittels einer Bügelmessschraube gemessen. Das vollständige Messergebnis des Durchmessers beträgt $d = 12$ mm $\pm$ 0,011 mm bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 90\%$.

Die Eintauchtiefe h wird in insgesamt $n_h = 7$ Wiederholungen von der Skala abgelesen. Dabei werden die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	1	2	3	4	5	6	7
h / mm	157,2	157,0	156,6	156,9	157,0	156,1	157,9

Tabelle 1.1: Messwerte der Eintauchtiefe h

a) Berechnen Sie die gesuchte Dichte ρ und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Abbildung 2.1: Links: vierseitiger „Würfel“ (W4), hier mit Ergebnis 4; rechts: sechsseitiger Würfel (W6), hier mit Ergebnis 3

Da Sie in Ihrer Freizeit gerne Pen-&-Paper-Rollenspiele spielen, befassen Sie sich derzeit näher mit der Wahrscheinlichkeit bestimmter Würfelergebnisse. Für die gängigen Pen-&-Paper-Rollenspiele werden in der Regel nicht nur klassische sechsseitige Würfel verwendet, sondern auch „Würfel“ mit anderen Seitenanzahlen.

Zwei Standard-Würfeltypen sind hierbei der vierseitige „Würfel“ – nachfolgend als W4 bezeichnet – welcher die Form eines Tetraeders aufweist, sowie der klassische sechsseitige Würfel – nachfolgend als W6 bezeichnet (vergleiche Abbildung 2.1). Mögliche Ergebnisse beim Wurf eines einzelnen W4 sind die Zahlen 1, 2, 3 und 4, mögliche Ergebnisse beim Wurf eines einzelnen W6 sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6.

Bei dem von Ihnen untersuchten Spielzug werden jeweils ein W4 und ein W6 gemeinsam geworfen und die Summe der geworfenen Zahlen des W4 und des W6 gebildet. Mögliche Ergebnisse der Summe der geworfenen Zahlen liegen folglich im Bereich 2 bis 10. Ihnen ist ferner bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der bei beiden Würfeltypen die jeweils möglichen Zahlen geworfen werden gleichverteilt ist, dass also bei einem einzelnen Würfelwurf alle Zahlen 1 bis 4 (W4) beziehungsweise 1 bis 6 (W6) mit jeweils derselben Wahrscheinlichkeit fallen.

Für Ihre statistische Untersuchung haben Sie über insgesamt n = 120 Spielzüge hinweg Ihre Würfelergebnisse protokolliert und für die möglichen Ergebnisklassen die aufgetretenen Häufigkeiten ermittelt. Die dabei erhaltenen Daten sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Ergebnis	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Häufigkeit	3	12	17	18	23	16	11	13	7

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten der Summe der mit einem W4 und einem W6 geworfenen Zahlen

a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ als zufällig angesehen werden kann, ob also die beobachtete Verteilung der aus den Randbedingungen der Versuchsdurchführung zu erwartenden Verteilung genügt!

Hinweis: Sofern Sie die sich aus den beschriebenen Randbedingungen ergebende theoretische relative Häufigkeitsdichte nicht ermitteln können oder Ihnen diese zweifelhaft erscheint, kann Ihnen die für den Test zu verwendende Verteilung auf Anfrage vom Betreuer zur Verfügung gestellt werden. In diesem Fall wird die Hilfestellung auf dem Deckblatt vermerkt und die auf die Bestimmung der theoretischen relativen Häufigkeitsdichte entfallenden Punkte – 3 von insgesamt 12 Punkten in Aufgabe 2 – werden ungeachtet etwaiger Lösungsansätze nicht vergeben.

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Aräometern zur Dichtebestimmung von Flüssigkeiten werden im Rahmen einer Warenausgangsprüfung Aräometer hinsichtlich ihrer Masse untersucht. Hierzu wird aus den produzierten Aräometern eine Stichprobe vom Umfang $n = 30$ entnommen und die Masse m mittels einer digitalen Präzisionswaage experimentell ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert der Masse von $\overline{m} = 18{,}47$ g und eine Streuung von $S_m = 0{,}09$ g. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Masse m für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% beträgt für diesen Fall rund:

a) $m = 18{,}47\ \text{g} \pm 0{,}0270\ \text{g}\,;\text{P} = 95\%$ ☐
b) $m = 18{,}47\ \text{g} \pm 0{,}0279\ \text{g}\,;\text{P} = 95\%$ ☐
c) $m = 18{,}47\ \text{g} \pm 0{,}0322\ \text{g}\,;\text{P} = 95\%$ ☐
d) $m = 18{,}47\ \text{g} \pm 0{,}0336\ \text{g}\,;\text{P} = 95\%$ ☐
e) $m = 18{,}47\ \text{g} \pm 0{,}0499\ \text{g}\,;\text{P} = 95\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $\text{P} = 99\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Masse m auf maximal $\pm\ 0{,}05$ g abschätzen zu können?

a) 11 ☐
b) 18 ☐
c) 21 ☐
d) 22 ☐
e) 26 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Aräometer weisen dann eine Masse auf, die innerhalb des Intervalls von $18{,}4\text{ g} \leq m \leq 18{,}6\text{ g}$ liegt?

a) 29,3% ☐
b) 70,7% ☐
c) 73,3% ☐
d) 85,0% ☐
e) 92,5% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert der Masse m betrage $\mu_m = 18{,}5$ g. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_m der Masse dann maximal annehmen, damit 90% der Aräometer eine Masse innerhalb des Intervalls von $18{,}4\text{ g} \leq m \leq 18{,}6\text{ g}$ aufweisen?

a) 0,0388 g ☐
b) 0,0430 g ☐
c) 0,0510 g ☐
d) 0,0608 g ☐
e) 0,0780 g ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Aräometern betreiben Sie mehrere Fertigungslinien zum Abwiegen von Bleigranulatfüllungen. Aufgrund von Auffälligkeiten im Rahmen der Qualitätskontrolle möchten Sie dem Verdacht nachgehen, dass zwei nominell identischen Fertigungslinien A und B sich hinsichtlich der erzielten Massen unterscheiden. Sie entnehmen daher aus der laufenden Fertigung an beiden Linien jeweils Stichproben vom Umfang $n = 25$ und überprüfen die Massen in Ihrem Messlabor. Anhand der ermittelten Daten möchten Sie feststellen, ob – wie von Ihnen vermutet – die Masse der auf Linie A abgewogenen Bleigranulatmenge signifikant kleiner ist, als jene der auf Linie B abgewogenen.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben ☐
e) χ^2-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand einer Stichprobe der Masse eines bestimmten Aräometermodells möchten Sie einen t-Test für den Erwartungswert durchführen. Aus der erhobenen Stichprobe vom Umfang $n = 20$ haben Sie Mittelwert und Streuung der Masse m ermittelt zu $\overline{m} = 24{,}57$ g und $S_m = 0{,}04$ g. Der laut Spezifikation geforderte Erwartungswert der Masse beträgt $m_{nenn} = 24{,}5$ g.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) 0,39 ☐
b) 0,78 ☐
c) 2,58 ☐
d) 5,53 ☐
e) 7,83 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 19 ☐
b) 20 ☐
c) 24 ☐
d) 38 ☐
e) 39 ☐
f) 40 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte anhand zweier <u>un</u>abhängiger Stichproben die Eigenschaften zweier Fertigungslinien für Aräometer überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt jeweils $n = 15$. Ihre Nullhypothese lautet, dass <u>kein</u> Unterschied zwischen beiden Fertigungslinien besteht ($\mu_x = \mu_y$). Sie wählen eine zweiseitige Alternativhypothese ($\mu_x \neq \mu_y$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2{,}41$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um extensive Größen handelt!

a) Viskosität ☐
b) Volumen ☐
c) Druck ☐
d) Stoffmenge ☐
e) elektrische Spannung ☐
f) elektrische Ladung ☐
g) spezifischer Widerstand ☐
h) Wärmeleitfähigkeit ☐

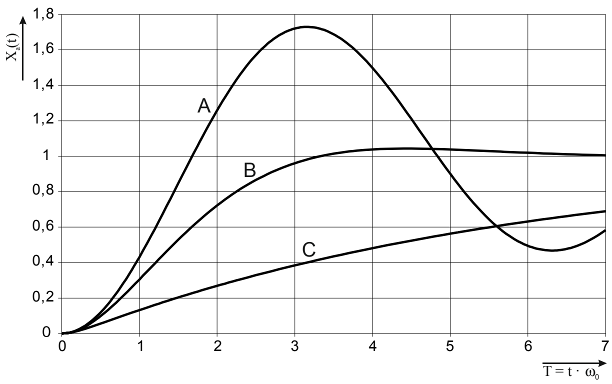
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $1\ \mathrm{MJ} - 100\ \mathrm{kJ} = 9{\cdot}10^5\ \mathrm{J}$ ☐
b) $100\ \mu\mathrm{m} + 1{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{km} = 1{,}1\ \mathrm{mm}$ ☐
c) $10\ \mathrm{mN} \cdot 100\ \mathrm{cm} = 0{,}1\ \mathrm{Nm}$ ☐
d) $980\ \mathrm{hPa} + 10\ \mathrm{kPa} = 9{,}9{\cdot}10^5\ \mathrm{Pa}$ ☐
e) $1\ \mathrm{nm} = 1{\cdot}10^{-12}\ \mathrm{m}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 5$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 0{,}3$ ☐
b) $D_A = 1$; $D_B = 3$; $D_C = 5$ ☐
c) $D_A = 0{,}1$; $D_B = 1$; $D_C = 2$ ☐
d) $D_A = 0{,}1$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 3$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = -2$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von $-5\,\mathrm{V}$ auf $+5\,\mathrm{V}$ beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang ungefähr anliegen?

a) $-2{,}6\,\mathrm{V}$ ☐
b) $-1{,}3\,\mathrm{V}$ ☐
c) $1{,}3\,\mathrm{V}$ ☐
d) $2{,}6\,\mathrm{V}$ ☐
e) $6{,}3\,\mathrm{V}$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung unterhalb des dritten Dezils liegen!

a) 3% ☐
b) 30% ☐
c) $33{,}3\overline{3}\%$ ☐
d) 60% ☐
e) 75% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von $-32\,\mathrm{V}$ bis $+32\,\mathrm{V}$ soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler $500\,\mu\mathrm{V}$ beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 15 Bit ☐
b) 16 Bit ☐
c) 17 Bit ☐
d) 18 Bit ☐
e) 19 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die Studiendauer im Bachelorstudiengang Maschinenbau. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Studiendauer beträgt 7,9 Semester; der Modalwert der Studiendauer beträgt 8 Semester; der arithmetische Mittelwert der Studiendauer beträgt 8,3 Semester; der Quartilsabstand der Studiendauer beträgt 1,9 Semester; das dritte Quartil der Studiendauer liegt bei 9,1 Semestern. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

a) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss zwischen 7,2 und 9,1 Semester. ☐
b) Die Hälfte der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 8,3 Semester oder mehr. ☐
c) Ein Viertel der Studierenden benötigt bis zum Abschluss 9,1 Semester oder mehr. ☐
d) Die meisten Studierenden benötigen für ihr Studium 7,9 Semester. ☐
e) Die Spanne der Studiendauer beträgt 3,8 Semester. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

14. Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts tritt infolge der Antastkraft eine elastische Verformung des Messobjekts auf. Geben Sie an, um welche Art von Störeinfluss es sich handelt!

a) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
b) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
c) innerer Störeinfluss ☐
d) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße ☐
e) Repräsentativitätsfehler ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!

a) Der Messschieber ist anfällig für das Auftreten eines Fehlers erster Ordnung, da bei ihm Antast- und Messlinie nicht fluchten. ☐
b) Der Nonius eines Messschiebers dient dazu, die bei der Ablesung der Skala erzielbare Auflösung zu erhöhen. ☐
c) Bei der Bügelmessschraube stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher. ☐
d) Eine Bügelmessschraube kann anfällig für das Auftreten eines Fehlers erster Ordnung sein, sofern sie seitlich angesetzte Messschnäbel aufweist. ☐
e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im engeren Sinne. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der interferometrischen Längenmessung zutreffend sind!

a) Zur interferometrischen Längenmessung wird in der Regel ein Laserstrahl in zwei Teilstrahlen aufgespalten und über verschiedene Wege geführt. Der Referenzstrahl durchläuft einen festen Referenzarm, während der Messstrahl einen Messarm variabler Länge durchläuft. ☐
b) Da die Phasenlage des Lichtes von der zurückgelegten Wegstrecke abhängig ist, ist der Messstrahl gegenüber dem Referenzstrahl phasenverschoben. ☐
c) Die am Empfänger detektierbare Intensität variiert aufgrund von Interferenz in Abhängigkeit von der relativen Phasenlage von Mess- und Referenzstrahl. ☐
d) Da der Messstrahl den Messarm hin und zurück durchläuft, entspricht die Periodenlänge des Ausgangssignals der doppelten Laserwellenlänge. ☐
e) Bei der interferometrischen Längenmessung handelt es sich um ein absolut messendes Verfahren, so dass eine kurzzeitige Unterbrechung des Strahlverlaufs <u>un</u>problematisch ist. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über Massenmessgeräte zutreffend sind!

a) Die Messung einer Masse wird meist auf eine Kraftmessung zurückgeführt, da Masse und die durch die Masse ausgeübte Kraft über die Erdbeschleunigung miteinander verknüpft sind. ☐

b) Die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung wird im Wesentlichen durch die nichtideale Kugelform der Erde sowie durch die Erdrotation und die damit verbundene, der Gravitation entgegen gesetzte Zentrifugalkraft verursacht. ☐

c) Um die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung zu berücksichtigen, ist Deutschland in 4 Gebrauchszonen mit unterschiedlicher Erdbeschleunigung unterteilt. ☐

d) Im Unterschied zum *konventionellen Wägewert* wird beim *unkonventionellen Wägewert* der Einfluss des Auftriebs im umgebenden Medium berücksichtigt. ☐

e) Das Feststellen der Gewichtsklasse, der ein Körper angehört, wird als *Klassier-* oder *Grenzwägen* bezeichnet. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Bei der Messung des Spannungsabfalls über einem Widerstand mittels eines Spannungsmessgerätes welches direkt an die Zuleitungen des Widerstandes angeschlossen wird kann es aufgrund des Widerstandes der Zuleitungen zu systematischen Messabweichungen kommen. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich dieser Messabweichungen zutreffend sind!

a) Die systematischen Abweichungen entstehen dadurch, dass an den widerstandsbehafteten Zuleitungen des Widerstandes dieselbe Spannung anliegt, wie an dem Widerstand selbst. ☐

b) Die durch den Widerstand der Zuleitungen verursachte systematische Messabweichung bewirkt, dass der gemessene Spannungsabfall kleiner ist, als der tatsächliche Spannungsabfall über dem Widerstand. ☐

c) Bei der Spannungsmessung an großen Widerständen wirkt sich der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen stärker auf das Messergebnis aus, als bei der Messung an kleinen Widerständen. ☐

d) Bei bekannten Leitungswiderständen kann die Abweichung rechnerisch korrigiert werden. ☐

e) Sind die Leitungswiderstände nicht bekannt und können nicht vernachlässigt werden, kann der Einfluss der Leitungswiderstände durch Einsatz einer Vierleiterschaltung reduziert werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

Kurzfragen:

19. Nennen Sie alle extensiven Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten und Einheitenzeichen!

20. Bei der Durchführung eines statistischen Tests stellen Sie fest, dass wiederholt der Fall eintritt, dass die Nullhypothese infolge des Testresultats abgelehnt wird, obwohl weiterführende Untersuchungen zeigen, dass die Nullhypothese tatsächlich zutrifft. Geben Sie an, wie Sie das Signifikanzniveau α des Tests verändern würden, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung zu reduzieren! Begründen Sie Ihre Antwort!

21. Bei der Messung einer Kraft wird festgestellt, dass die Messgröße normalverteilt ist, dass der Erwartungswert $42\,\mathrm{N}$ beträgt und dass $99{,}73\%$ aller Messwerte im Intervall $[36\,\mathrm{N};\ 48\,\mathrm{N}]$ liegen. Die Verteilungsdichtefunktion wird gezeichnet und die beiden Wendestellen der Kurve werden bestimmt. Geben Sie an, welchen Abstand in Newton die Wendestellen aufweisen!

22. Geben Sie an, welcher Zusammenhang bei poissonverteilten Daten zwischen Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besteht!

23. Geben Sie an, welcher Punkt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden liegt!

24. Für die indirekte Widerstandsmessung mittels Strom- und Spannungsmessgerät sind zwei unterschiedliche Schaltungsarten gebräuchlich.

a) Benennen und skizzieren Sie die beiden Schaltungsarten! Achten Sie dabei auf eine jeweils eindeutige Zuordnung von Benennung und Skizze!

b) Geben Sie an, welche der beiden Schaltungsarten für die Messung kleiner Widerstände geeigneter ist!

25. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon hinsichtlich der verlustfreien Rekonstruktion der digitalisierten Daten um eine *hinreichende*, aber *nicht notwendige* Bedingung handelt!

Ende der Kurzfragen

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1,\ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x},\quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}},\quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1,\ldots,x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n) - c_f,\ f(\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2},\quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.
Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70	1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80	1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90	1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

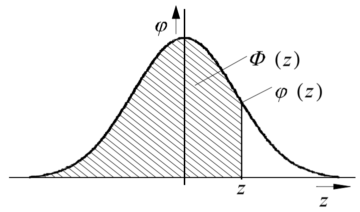
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

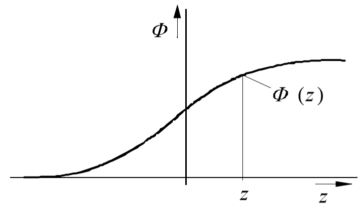
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z