

Klausur zur Vorlesung Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- bzw. Gedankengang muss stets erkennbar sein!
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Verwenden Sie ausschließlich die im Lehrbuch angegebenen Dampf tafeln.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Badezimmer mit Durchlauferhitzer*

16 von 50 Punkten

Ein Durchlauferhitzer (normale Widerstandsheizung) nimmt eine elektrische Leistung von $\dot{W}_{el} = 18 \text{ kW}$ auf und erwärmt (inkompressibles) Wasser (\dot{m}_A), das beim Einströmen in den isobaren Durchlauferhitzer eine Temperatur von $t_1 = 10^\circ\text{C}$ und Umgebungsdruck hat. Das austretende, heiße Wasser mit der Temperatur t_2 wird dann in der Badezimmerarmatur erneut mit kaltem Wasser (\dot{m}_B mit $t_3 = t_1 = 10^\circ\text{C}$, $p_3 = p_1 = p_u$) gemischt und strömt dann mit einer mittleren Temperatur von $t_4 = 38^\circ\text{C}$ in eine Badewanne.

- Wie lange dauert es mindestens bis die zunächst leere Wanne, die ein Volumen von 150 Litern hat, voll mit warmem Wasser ist?
- Stellen Sie für den oben beschriebenen Durchlauferhitzer eine Funktion für die produzierte Entropie pro Zeit $\dot{S}_{prod}(\dot{m}_A)$ in Abhängigkeit vom Wassermassenstrom auf! (Stellen Sie dafür zunächst eine Funktion der Austrittstemperatur $t_2(\dot{m}_A)$ auf.)
- Hängt die im Gesamtsystem (Durchlauferhitzer, Badezimmerarmatur) produzierte Entropie S_{prod} beim Füllen der Wanne davon ab, wie groß der Massenstrom \dot{m}_A durch den Durchlauferhitzer ist bzw. wieviel erst in der Armatur dazu gemischt wird? (Bei festgelegter Austrittstemperatur von $t_4 = 38^\circ\text{C}$)

Gehen Sie ab hier davon aus, dass zum Erwärmen keine Widerstandsheizung verwendet wird, sondern ein reversibel arbeitenden Durchlauferhitzer mit einer Wärmepumpe, die ebenfalls eine Antriebsleistung von $\dot{W} = 18 \text{ kW}$ sowie Wärme aus der Umgebung ($t_U = 10^\circ\text{C}$) aufnimmt. Auch die Temperaturen t_1, t_3 und t_4 bleiben unverändert.

- Bestimmen Sie die optimale Temperatur t_2 hinter dem neuen Durchlauferhitzer, die gewählt werden muss, um die Wanne möglichst schnell zu füllen.
- Bestimmen Sie für diesen optimalen Fall die benötigte Zeit, die zum Füllen benötigt wird.

Lösungsvorschlag für Aufgabe 1:

a) Eine Energiebilanz rund um das Gesamtsystem (Durchlauferhitzer + Armatur) liefert:

$$0 = \dot{m}(h_{ein} - h_{aus}) + \dot{W}_{el}.$$

Der Zustand *ein* beschreibt dabei sowohl das kalte Wasser, das in den Durchlauferhitzer eintritt, als auch das kalte Wasser, das in die Armatur eintritt. Beide Wasserströme befinden sich im gleichen Zustand. Für flüssiges (inkompressibles) Wasser gilt $dh = c_{H_2O}dT$. Somit ergibt sich:

$$0 = \dot{m}c_{H_2O}(T_{ein} - T_{aus}) + \dot{W}_{el}.$$

Integriert man über den gesamten Einströmvorgang ergibt sich

$$\dot{W}_{el} \cdot \Delta t = mc_{H_2O}(T_{aus} - T_{ein}) = 150 \text{ kg} \cdot 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot (38^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}) = 17556 \text{ kJ}.$$

$$\Delta t = \frac{17556 \text{ kJ}}{18 \text{ kJ/s}} = 975 \text{ s} = 16,25 \text{ Minuten}$$

b) Diesmal wird eine Energiebilanz nur für den Durchlauferhitzer benötigt:

$$0 = \dot{m}_A(h_1 - h_2) + \dot{W}_{el} = \dot{m}_Ac_{H_2O}(T_1 - T_2) + \dot{W}_{el}.$$

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{W}_{el}}{\dot{m}_Ac_{H_2O}}$$

Die produzierte Entropie ist die Differenz zwischen (mit dem Wasser) einströmender und ausströmender Entropie. Zusammen mit der technischen Arbeit (bzw. hier dem elektrischen Strom) wird hingegen keine Entropie transportiert. Es bleibt also lediglich:

$$\dot{S}_{prod} = \dot{m}_A \cdot c_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Einsetzen von T_2 liefert die gesuchte Beziehung:

$$\dot{S}_{prod} = \dot{m}_A \cdot c_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_1 + \frac{\dot{W}_{el}}{\dot{m}_Ac_{H_2O}}}{T_1}\right)$$

c) Nein, es spielt keine Rolle, wie groß der Anteil ist, der durch den Durchlauferhitzer fließt. Je weniger durch den Durchlauferhitzer fließt, desto weniger Entropie wird dort produziert; dafür wird dann aber mehr Entropie beim Mischen in der Armatur produziert. Man kann sich das auch klarmachen, indem man wieder eine Entropiebilanz um das Gesamtsystem macht. Elektrischer Strom und Wasser mit 10°C fließen in das System. Wasser mit 38°C fließt heraus. Das passiert immer so egal wie sich das Wasser innerhalb des Systems aufteilt. Solange aber Ein- und Austrittszustände immer gleich bleiben, ist auch die Entropieproduktion unabhängig davon, was im (stationären) System passiert.

d) Da im neuen (reversiblen!) WP-Durchlauferhitzer keine Entropie mehr produziert wird, bleibt nur noch die Armatur als Entropiequelle übrig. Erwärmt man also den gesamten Wasserstrom A auf nur 38°C , so muss man kein kaltes Wasser mehr hinzumischen und es wird überhaupt keine Entropie produziert. Das ist der bestmögliche Weg.

e) Entweder rechnet man nun die Leistungszahl einer reversiblen Wärmepumpe aus, die Wasser von 10°C auf 38°C erwärmt, um damit dann auf den Wärmestrom zu schließen, der dem Wasser zugeführt wird, und kommt darüber auf die Zeit, die es dauert 150 kg von 10°C auf 38°C zu erwärmen. Oder man berechnet die Exergiedifferenz der inneren Energie der 150 kg Wasser (zwischen 10°C und 38°C) und teilt diese durch die zugeführte elektrische Leistung (= reine Exergiestrom):

$$\begin{aligned}
-W_{ex} &= U_2 - U_1 - T_u(S_2 - S_1) = m \cdot c_{H_2O} \cdot (T_2 - T_1) - T_u \cdot m \cdot c_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \\
&= 150 \text{ kg} \cdot 4,18 \text{ kJ/kgK} \left((38^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}) - 283,15 \text{ K} \cdot \ln\left(\frac{311,15 \text{ K}}{283,15 \text{ K}}\right) \right) \\
&= 814,7 \text{ kJ}
\end{aligned}$$

Diese Exergiezufuhr wird benötigt und kann bei einer elektrischen Leistung von 18 kW innerhalb der folgenden Zeit bereitgestellt werden:

$$\Delta t = \frac{814,7 \text{ kJ}}{18 \text{ kW}} = 45,26 \text{ Sekunden.}$$

Kurzfrage: Welche Transportgrößen eines Stoffes lassen sich aus seiner Fundamentalgleichung durch Differentiation und algebraisches Umstellen bestimmen?

Zunächst wird ein Kilogramm eines realen Gases mit der spezifischen isobaren Wärmekapazität $c_p = 1,2 \frac{kJ}{kg K}$ isentrop verdichtet. Dabei steigen der Druck um $\Delta p_{1,2} = 0,001 \text{ bar}$ und die Temperatur von $t_1 = 20,0000^\circ C$ um $\Delta T_{1,2} = 0,0015 K$. Danach wird dem Gas isobar die Wärme Q_{2-3} zugeführt, so dass sein spezifisches Volumen um $\Delta v_{2,3} = 0,0003 \frac{m^3}{kg}$ steigt.

- Bestimmen Sie die Entropieänderung ΔS_{2-3} des Gases während der Wärmezufuhr.
- Schätzen Sie die zugeführte Wärme Q_{2-3} ab. (Hinweis: Sie sollen hier nicht raten, sondern eine vereinfachte Abschätzungsrechnung machen.)

Lösungsvorschlag für Aufgabe 2:

Kurzfrage: Es können mit Fundamentalgleichungen überhaupt keine Transportgrößen bestimmt werden.

- a) Um diese Aufgabe zu lösen wird eine Maxwellrelation benötigt:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

Da keine Funktionen $T(S)$ und $V(S)$ gegeben sind, muss statt der Ableitung ein Differenzenquotient gebildet werden:

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta p}\right)_S = \frac{0,0015 K}{0,001 \text{ bar}} = \left(\frac{\Delta V}{\Delta S}\right)_p = \frac{0,0003 m^3}{\Delta S}$$

$$\Delta S = 0,0003 m^3 \cdot \frac{0,001 \text{ bar}}{0,0015 K} = 20 \frac{J}{K}$$

- b) Aus der gerade berechneten Entropieänderung während der zweiten Zustandsänderung lässt sich die zugeführte Wärme berechnen

$$Q_{2-3} = \int T dS.$$

Da die Temperaturänderung während der Wärmezufuhr sehr gering ist, kann man vereinfachend die Entropieänderung mit der Ausgangstemperatur multiplizieren und es muss nicht integriert werden:

$$Q_{2-3} = T_2 \cdot \Delta S = 293,15 K \cdot 20 \frac{J}{K} = 5863 J$$

- a) Bestimmen Sie die Arbeitsfähigkeit, die vernichtet wird, wenn sich 5 kg Luft, die zunächst bei Umgebungsdruck ($p_U = 1 \text{ bar}$) und $t_1 = -20^\circ\text{C}$ vorliegen, durch thermischen Kontakt mit der Umgebung ($t_U = 20^\circ\text{C}$) auf deren Temperatur isobar erwärmen ohne dabei Arbeit zu verrichten.
- b) Feuchte Luft ($p_1 = 1 \text{ bar}$, $\varphi_1 = 0,90$, $t_1 = 20^\circ\text{C}$) wird isobar um 10 K auf Zustand 2 abgekühlt: Wieviel kg dampfförmigen Wassers liegen nun im Zustand 2 pro kg trockener Luft vor?

Lösungsvorschlag für Aufgabe 3:

a) Da die Luft nach der Erwärmung den Umgebungszustand hat, hat sie dann keinerlei Arbeitsfähigkeit mehr. Da während der Wärmezufuhr auch keine Arbeit von der Luft verrichtet wurde, wurde also die gesamte Exergie im Zustand 1 in Anergie umgewandelt. Also muss man hier lediglich die Exergie (der inneren Energie) im Zustand 1 ausrechnen.

$$-W_{ex} = U_1 - U_u + p_u(V_1 - V_u) - T_u(S_1 - S_u)$$

Da $p_1 = p_u$ ist und da sich Luft bei den gegebenen Drücken und Temperaturen wie ein ideales Gas verhält, ergibt sich

$$\begin{aligned} -W_{ex} &= U_1 - U_u + p_1V_1 - p_uV_u - T_u(S_1 - S_u) = H_1 - H_u - T_u(S_1 - S_u) \\ &= c_p(T_1 - T_u) - T_u \cdot c_p \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_u}\right) \end{aligned}$$

Mit $c_p = 1,006 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$ für Luft ergibt sich

$$-W_{ex} = 1,006 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot (253,15 \text{ K} - 293,15 \text{ K}) - 293,15 \text{ K} \cdot 1,006 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot \ln\left(\frac{253,15 \text{ K}}{293,15 \text{ K}}\right) = 3,02 \text{ kJ}$$

Daraus ergibt sich für die gesamten 5 kg eine vernichtete Arbeitsfähigkeit von 15,1 kJ.

b) Anhand der hohen relativen Luftfeuchte im Zustand 1 kann man erkennen, dass Zustand 2 im übersättigten Bereich liegen muss. (Man kann das aber auch nachrechnen, indem man den Sättigungsdruck bei 20°C abliest und danach mit der rel. Feuchte den tatsächlichen Dampfdruck ermittelt, der über $p_s(10^\circ\text{C})$ liegt.) Also muss man nur noch den Sättigungsdruck bei 10°C ablesen und aus diesem die Wasserdampfbeladung ermitteln:

$$p_s(10^\circ\text{C}) = 0,0123 \text{ bar}$$

$$x_D = 0,622 \frac{p_D}{p - p_D} = 0,622 \frac{0,0123}{1 - 0,0123} = 0,00775 = 7,75 \frac{\text{gWasserdampf}}{\text{kgtr.Luft}}$$

Kurzfrage: Eine Wärmepumpe hat eine Leistungszahl von $\varepsilon_{WP} = 3$. Wie groß ist bei dieser das Verhältnis von aufgenommener Wärme zu aufgenommener technischer Arbeit?

In einem Kreisprozess (Wärmepumpe) läuft ein Massenstrom Wasser von $\dot{m} = 2 \frac{kg}{s}$ um. Dieser Wasserstrom erfährt folgende Zustandsänderungen:

- 1-2 Adiabat, isentrope Druckabsenkung in einer Turbine auf $p_2 = 0,8 \text{ bar}$.
- 2-3 Isotherme Wärmezufuhr.
- 3-4 Adiabate Verdichtung in einem realen Verdichter mit einer Leistungsaufnahme von $\dot{W}_t = 1460 \text{ kW}$ bis zum Zustand des gesättigten Dampfes und einem Druck $p_4 = 190 \text{ bar}$.
- 4-1 Isobare Zustandsänderung bis zu einer Temperatur von $t_1 = 100^\circ\text{C}$.

Stoffwerte für Wasser (flüssig)

Werte bei $p = 190 \text{ bar}$:

$\vartheta/^\circ\text{C}$	80	90	100	110	120
$h/(\frac{J}{g})$	350	392	433	475	517
$s(\frac{J}{gK})$	1,063	1,180	1,294	1,403	1,511

In der Umgebung herrscht eine Temperatur von $T_U = 20^\circ\text{C}$.

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben, die sich auf den oben beschriebenen Kreisprozess beziehen:

- a) Zeichnen Sie den Prozess in ein T-S-Diagramm und tragen Sie alle bekannten Größen ein. Ermitteln Sie zuvor die Siedetemperatur von Wasser bei $p = 190 \text{ bar}$!
- b) Bestimmen Sie die Drücke und Temperaturen in allen vier Eckpunkten des Prozesses! Sofern die Eckpunkte innerhalb des Nassdampfgebiets liegen, bestimmen Sie weiterhin jeweils deren Nassdampfgehalt x !
- c) Welchen Wirkungsgrad $\eta_{S,V}$ hat der Verdichter?
- d) Bestimmen Sie die Leistungszahl ε_{WP} des Prozesses.
- e) Erklären Sie knapp, welches Problem bei der Verdichtung 3-4 auftritt. Wie unterscheidet sich ein Wärmepumpen-Kreisprozess daher meistens in der Praxis von dem hier beschriebenen Prozess?

Lösungsvorschlag für Aufgabe 4:

Kurzfrage: Das Verhältnis von ABGEGEBENER Wärme zur aufgenommenen technischer Arbeit liegt bei 3. Das gesuchte Verhältnis hingegen bei 2, da die abgegebene Wärme die Summe aus aufgenommener Wärme und aufgenommener technischer Arbeit ist.

a) $T_s(190 \text{ bar}) = 361,22^\circ\text{C}$ ergibt sich aus linearer Interpolation zwischen 170 bar und 200 bar. Somit liegt Punkt 1 (100°C , 190 bar) im Flüssigkeitsgebiet.

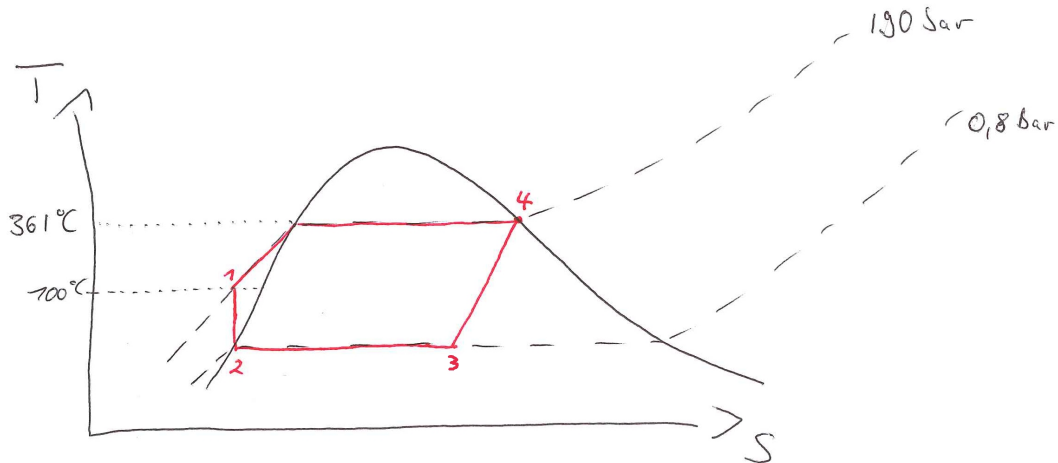


Abbildung 1: Kreisprozess im T-S-Diagramm.

Die Frage, ob sich Punkt 2 inner- oder ausserhalb des 2-Phasen-Gebiets befindet, ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht genau bestimmt. Da sich die Isobaren aber recht nah an die Siedelinie anschmiegen, ist zu vermuten, dass er sich innerhalb befindet.

b) Zunächst lohnt es sich noch weitere Werte bei 190 bar durch lineare Interpolation zwischen 170 bar und 200 bar zu ermitteln:

$$s' = 3,9423 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}, \quad s'' = 5,0173 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

$$h' = 1779,3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \quad h'' = 459,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Wenden wir uns zunächst den Temperaturen zu:

T_1 wird im Aufgabentext mit 100°C gegeben

T_2 und T_3 entsprechen der Siedetemperatur bei 0,8 bar:

$T_2 = T_3 = T_s(0,8 \text{ bar}) = 93,51^\circ\text{C}$ T_4 wurde schon in a) bestimmt.

Nun die Drücke:

Das obere Druckniveau wird in der Aufgabenstellung mit 190 bar gegeben:

$$p_4 = p_1 = 190 \text{ bar}$$

Das untere Druckniveau wird in der Aufgabenstellung mit 0,8 bar gegeben:

$$p_2 = p_3 = 0,8 \text{ bar}$$

Und als letztes die Dampfgehalte:

Punkt 1 liegt außerhalb des ND-Gebiets (unterkühlte Flüssigkeit).

Punkt 4 liegt auf der Taulinie: $x_4 = 1$.

Die Punkte 2 und 3 müssen berechnet werden. Beginnen wir mit Punkt 2: Punkt 2 ist über einen isentropen Prozess mit Punkt 1 verbunden. Hat also die selbe Entropie. s_1 wiederum lässt sich aus der gegebenen Stoffdatentabelle (flüssig) direkt ablesen: $s_2 = s_1 = 1,294 \frac{kJ}{kg K}$. Mithilfe von $s'(0,8bar) = 1,233 \frac{kJ}{kg K}$ und $s''(0,8bar) = 7,430 \frac{kJ}{kg K}$ lässt sich $x_2 = 0,00984$ ermitteln.

Zwischen Punkt 3 und Punkt 4 wird eine Leistung von $\dot{W}_t = 1460 kW$ zugeführt. Diese führt zu einem Anstieg der spezifischen Enthalpie von $\Delta h_{3-4} = \frac{1460 kW}{2 \frac{kg}{s}} = 730 \frac{kJ}{kg}$. h_4 ist bekannt: $h_4 = h''(190bar) = 2459,5 \frac{kJ}{kg}$. Punkt 3 muss eine Enthalpie haben, die um Δh_{3-4} darunter liegt. Also ist $h_3 = 2459,5 \frac{kJ}{kg} - 730 \frac{kJ}{kg} = 1729,5 \frac{kJ}{kg}$. Mithilfe von $h'(0,8bar) = 391,6 \frac{kJ}{kg}$ und $h''(0,8bar) = 2664,3 \frac{kJ}{kg}$ lässt sich $x_3 = 0,582$ ermitteln.

c) Der Verdichterwirkungsgrad berechnet sich wie folgt $\eta_{S,V} = \frac{h_{4^*} - h_3}{h_4 - h_3}$.

Zunächst muss also die Enthalpie in Punkt 4* bestimmt werden. Punkt 4* hat die selbe Entropie wie Punkt 3: $s_{4^*} = s_3 = 4,88 \frac{kJ}{kg K}$. (Diese lässt sich aus x_3 und $s'(0,8bar) = 1,2325 \frac{kJ}{kg K}$ und $s''(0,8bar) = 7,430 \frac{kJ}{kg K}$ ermitteln). Die nun bekannte Entropie s_{4^*} erlaubt die Bestimmung von $h_{4^*} = 2373 \frac{kJ}{kg}$ aus den bereits ermittelten Werten für $h'(190bar)$ und $h''(190bar)$.

$$\eta_{S,V} = \frac{2373 - 1729,5}{2459,4 - 1729,5} = 0,88$$

d) Die Leistungszahl eines WP-Prozesses berechnet sich wie folgt: $\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{ab}}{\dot{W}_{zu}}$.

(Man kann natürlich auch alle Werte auf 1 kg umlaufende Masse beziehen und erhält dann $\varepsilon = \frac{h_1 - h_4}{h_4 - h_3 + h_2 - h_1}$)

Achtung: Die zuzuführende Leistung berechnet sich als aufgenommene Leistung des Verdichters $\dot{W}_{VD} = 1460 kW$ abzüglich der Leistung der Turbine $\dot{W}_T = \dot{m}(h_2 - h_1) = -38,05 kW$. Die abgegebene Wärme berechnet sich genauso zu $\dot{Q} = \dot{m}(h_1 - h_4) = -4053 kW$.

$$\varepsilon = \frac{4053 kW}{1422 kW} = 2,85$$

e) Verdichtungen aus dem 2-Phasen-Gebiet verursachen Probleme, da es leicht zu einer Trennung der Phasen kommen kann. Technisch kann man das zwar in den Griff bekommen; es ist aber teuer. I.d.R. wird daher solange Wärme zugeführt, bis das Arbeitsmedium verdampft oder sogar etwas überhitzt ist. Punkt 3 wandert im T-S-Diagramm nach rechts.