

## Klausur zur Vorlesung Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- bzw. Gedankengang muss stets erkennbar sein!  
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.  
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.  
Verwenden Sie ausschließlich die im Lehrbuch angegebenen Dampftafeln.  
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

### Aufgabe 1: *Ideales Gas*

18 von 50 Punkten

Kurzfrage: Ist das Naßdampfgebiet in einem p-h-Diagramm bei einem idealen Gas nach links oder rechts geneigt?

Es werden Zustandsänderungen von  $1,5 \text{ kg}$  Luft als idealem Gas betrachtet. Hierbei wird die Luftmasse als konstant angenommen. Die Temperatur beträgt im Zustand 1  $T_1 = 300 \text{ K}$ . Durch eine isotherme Druckabsenkung wird die Luft von dem Zustand 1 auf den Zustand 2 entspannt  $V_2 = 0,0075 \text{ m}^3$ . Durch die Zufuhr von Wärme  $Q_{2,3} = 250 \text{ kJ}$  wird die Luft isobar von Zustand 2 in den Zustand 3 überführt. Hierbei beträgt das Volumen  $V_3$  das Zweifache von  $V_1$ . Anschließend findet eine isotherme Entspannung des Gases von Zustand 3 nach Zustand 4 statt.

- Berechnen Sie den Druck  $p_2$  im Zustand 2!
- Auf welche Temperatur  $T_3$  wird das Gas vom Zustand 2 auf den Zustand 3 erwärmt?  
Auf welches Volumen  $V_3$  wird das vorliegende Gas expandiert?
- Wie groß ist das Volumen  $V_4$  im Zustand 4, wenn die Entropieänderung  $\Delta S_{34} = 545 \frac{\text{J}}{\text{K}}$  beträgt?
- Berechnen Sie die Drücke  $p_1$  und  $p_4$ !
- Berechnen Sie die gesamte Entropieänderung  $\Delta S_{14}$ !
- Wie groß ist die freie Enthalpie  $G_4$ , wenn  $h_1 = 401,8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$  und  $s_4 = 7615 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$  gilt?

KF: (1 Punkt)

Ein ideales Gas hat kein Naßdampfgebiet, daher ist es unerheblich ob das Naßdampfgebiet im ph-Diagramm nach links oder rechts geneigt sein würde.

a) (3 Punkte)

Der Druck  $p_2$  lässt sich über das ideale Gasgesetz  $pV = mRT$  mit  $m = 1,5\text{kg}$ ,  $R_{Luft} = 0,287\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ ,  $T = 300\text{K}$  und  $V = 0,0075\text{m}^3$  zu  $p_2 = 172,2\text{bar}$  berechnen.

b) (4 Punkte)

Da eine isotherme Zustandsänderung von 1 nach 2 vorliegt, ist die Temperatur im Punkt 2 bekannt  $T_2 = 300\text{K}$ . Die Temperatur  $T_3$  nach der isobaren Wärmezufuhr berechnet sich somit mit der Gleichung  $\dot{Q}_{2,3} = \dot{m}c_p(T_3 - T_2)$  und  $c_{p,Luft} = 1,006\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$  zu  $T_3 = 465,7\text{K}$

Das Volumen  $V_3$  berechnet sich über das ideale Gasgesetz mit  $p_2 = p_3$  zu:  $V_3 = 0,01164\text{m}^3$

c) (3 Punkte)

Das Volumen im Punkt 4 kann mit Hilfe der Entropieänderung  $\Delta S_{3,4}$  bestimmt werden. Wird Gl. 4.36 aus Thermodynamik kompakt auf dieses Problem angewendet erhält man:

$$s_4 - s_3 = c_v \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{v_4}{v_3}\right)$$

Da eine isotherme Zustandsänderung von 3 nach 4 vorliegt, entfällt der erste Term auf der linken Seite. Die Entropie nimmt von 3 nach 4 zu, daher ist  $s_4 - s_3 = \frac{\Delta S_{3,4}}{m} = 363,33\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ . Löst man die Gleichung auf, so erhält man  $\frac{v_4}{v_3} = 3,54$  bzw.  $V_4 = 0,0412\text{m}^3$ .

d) (3 Punkte)

Berechnung von  $p_4$ : Der Druck  $p_4$  kann über das ideale Gasgesetz ermittelt werden. Durch die isotherme Zustandsänderung ist  $T_4 = T_3 = 465,7\text{K}$ , außerdem ist das in Teil c) bestimmte Volumen  $V_4 = 0,0412\text{m}^3$  bekannt. Damit kann  $p_4$  berechnet werden zu:  $p_4 = 48,54\text{bar}$

Berechnung von  $p_1$ : In der Aufgabenstellung ist  $V_3 = 2V_1$  gegeben, so dass das Volumen im Punkt 1 zu  $V_1 = 0,00582\text{m}^3$  bestimmt werden kann. Mit dem idealen Gasgesetz ergibt sich  $p_1$  dann zu  $p_1 = 221,9\text{bar}$

e) (1 Punkt)

Die Entropieänderung  $\Delta S_{1,4}$  kann mit der nachfolgenden Gl. 4.36 aus Thermodynamik kompakt berechnet werden. Die Größen  $T_4$ ,  $T_1$ ,  $p_4$  und  $p_1$  wurden in den vorangegangenen Aufgabenteilen berechnet.

$$s_1 - s_4 = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_4}\right)$$

Mit  $S = sm$  ergibt sich eine Entropieänderung  $\Delta S_{1,4} = S_1 - S_4$  von  $\Delta S_{1,4} = -1317,9\frac{\text{J}}{\text{K}}$

f) (3 Punkte)

Zunächst wird  $h_4$  berechnet, welches sich über  $c_p = \frac{dh}{dT}$  zu  $h_4 = 568,5 \frac{kJ}{kg}$  bestimmen lässt.  
Mit der Beziehung  $H_4 = G_4 + S_4 T_4$  kann  $G_4$  berechnet werden zu  $G_4 = -4466,7 kJ$

Kurzfrage: Warum ist Arbeit eine Prozessgröße; Exergie, also maximale Arbeitsfähigkeit, jedoch eine Zustandsgröße?

In einem konventionellen Wasserkocher mit einer elektrisch betriebenen Heizspirale im Boden werden  $1,5\text{ kg}$  Wasser, die zu Beginn die Umgebungstemperatur von  $20^\circ\text{C}$  besitzen, so lange Wärme zugeführt, bis fünf Prozent des Wasser verdampft sind. Der Umgebungsdruck betrage  $1\text{ bar}$ .

- a) Wie viel technische Arbeit (in Form von elektrischem Strom) wurde dem Wasserkocher mindestens zugeführt?
- b) Wie groß ist die maximale Arbeit, die das Wasser (Flüssigkeit und Dampf) nun theoretisch leisten könnte?
- c) Zeichnen Sie in einem T-S-Diagramm die Zustandsänderungen ein, die an dem Gemisch aus Flüssigkeit und Dampf vollzogen werden müssten, damit die maximale Arbeit geleistet wird. Zeichnen Sie zusätzlich die Wärme ein, die dabei mit der Umgebung ausgetauscht wird.
- d) Zeichnen Sie in einem p-V-Diagramm die Zustandsänderungen ein, die an dem Gemisch aus Flüssigkeit und Dampf vollzogen werden müssten, damit die maximale Arbeit geleistet wird. Zeichnen Sie zusätzlich die Arbeit ein, die geleistet wird.
- e) Wie viel Arbeit (elektrischen Strom) könnte eine perfekte Maschine im Vergleich zum Wasserkocher bei dem oben beschriebenen Prozess (Erwärmen und teilweises Verdampfen) sparen?

KF: (1 Punkt)

Die Exergie ist nur vom Zustand des Systems und den konstanten Umgebungsbedingungen ( $T_U$ ,  $p_U$ ) abhängig. Für jeden Systemzustand gibt es nur eine maximal gewinnbare Arbeit. Die Arbeit ist dagegen vom gewählten Weg bzw. Prozess abhängig und somit eine Prozessgröße.

a) (2 Punkte)

Die technische Arbeit  $W_t$  lässt sich mit  $W_t = m_W \cdot c_{p,Wasser} \cdot (T_2 - T_1) + m_D \cdot r$  bestimmen. Die Masse des Wassers, welche einphasig erwärmt wird beträgt  $m_W = 1,5\text{kg}$ , die Masse des verdampften Wassers beträgt  $m_D = 0,05 \cdot 1,5\text{kg} = 0,075\text{kg}$ . Mit den Stoffdaten  $c_{p,Wasser} = 4,182 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$  und  $r = 2255,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$  berechnet sich die technische Arbeit zu  $W_t = 671\text{kJ}$ .

b) (4 Punkte)

Die maximale Arbeitsfähigkeit des Dampf-Flüssigkeitsgemisches ( $x_2 = 0,05$ ,  $T_2 = 100^\circ\text{C}$ ) wird über die Exergie beschrieben. Für ein geschlossenes System gilt Gl. 6.7 aus Thermodynamik kompakt:

$$-W_{ex} = U_2 - U_U + p_U(V_2 - V_U) - T_U(S_2 - S_U)$$

mit  $h = u + pv$  kann die Gleichung umgeformt werden zu:

$$-W_{ex} = m(h_2 - h_U - T_U(s_2 - s_U))$$

Die spezifischen Zustandsgrößen des Wassers im Naßdampfgebiet mit  $x_2 = 0,05$  und dem Ansatz  $h_2 = h' + x_2(h'' - h')$  können bestimmt werden zu:

- $h_2(T = 100^\circ\text{C}, p = 1\text{bar}, x = 0,05) = 531,68 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
- $s_2(T = 100^\circ\text{C}, p = 1\text{bar}, x = 0,05) = 1,609 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

Bei Umgebung haben  $h_U$  und  $s_U$  die nachfolgend ermittelten Werte:

- $h_U$  bestimmt sich über  $c_p = \frac{dh}{dT} = \frac{h_U - h_0}{T_U - T_0} = \frac{h_U - 0}{20 - 0}$  zu:  
 $h_U(T = 20^\circ\text{C}, p = 1\text{bar}) = 83,64 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ .
- $s_U$  wird über die Kombination aus erstem und zweitem Hauptsatz bestimmt. Für ein kleines Volumenelement welches die Wärme  $d\dot{Q}$  zugeführt wird erhält man aus beiden Hauptsätzen:  
1.HS:  $d\dot{Q} = c_{H_2O} \cdot dT$   
2.HS:  $\frac{d\dot{Q}}{T} = ds$

Beide Gleichungen werden durch Ersetzung von  $d\dot{Q}$  miteinander verknüpft und integriert. Das Resultat ist:  $s_2 - s_1 = c_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$ . Mit  $T_U = 293,15\text{K}$ ,  $T_0 = 273,15\text{K}$  und  $s_0 = 0$  berechnet sich  $s_U$  zu:

$$s_U(T = 20^\circ\text{C}, p = 1\text{bar}) = 0,2955 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

Mit diesen Werten kann  $-W_{ex}$  bestimmt werden zu:  $-W_{ex} = 94,48kJ$

c) (3 Punkte)

Das TS-Diagramm sollte folgende Punkte enthalten:

- Das Naßdampfgebiet mit Siede- und Taulinie
- Die Isobare  $p_U$ , welche im flüssigen Bereich mit zunehmender Entropie bis zur Siedelinie ansteigt, im Naßdampfgebiet horizontal verläuft und nach der Taulinie erneut mit zunehmender Entropie ansteigt.
- Die maximale Arbeit wird durch zwei Zustandsänderungen erreicht: Zunächst erfolgt eine isentrope Zustandsänderung von 1 nach 2, verbunden mit einer Druckabnahme. Anschließend erfolgt eine isotherme Zustandsänderung von 2 nach 3 bis zum Umgebungsdruck  $p_U$ .
- Die mit der Umgebung ausgetauschte Wärme  $Q = TdS$  ist die rechteckige Fläche unterhalb der Zustandsänderung 2, 3 bis zur Grundlinie.

d) (2 Punkte)

Die Zustandsänderungen aus Teil c) sind im zu zeichnenden pV-Diagramm zu verdeutlichen. Das Diagramm soll folgende Punkte enthalten:

- Das Naßdampfgebiet mit Siede- und Taulinie
- Es werden zwei Isothermen bei  $T = 100^\circ C$  und bei  $T_U = 20^\circ C$  sowie eine Isentrope für die Zustandsänderung von 1 nach 2 benötigt. Dabei ist zu beachten, dass Isentropen steiler als Isothermen verlaufen. Im Naßdampfgebiet hat eine Isentrope mit zunehmendem Volumen eine negative Steigung.
- Die isentrope Zustandsänderung von 1 nach 2 sowie die isotherme Zustandsänderung von 2 nach 3 sind in das Diagramm einzuzeichnen.
- Die maximale Arbeitsfähigkeit des Wassers wird durch die eingeschlossene Fläche entlang der Zustandsänderungen 1, 2 und 3 sowie einer horizontalen Verbindungslinie zum Ausgangspunkt 1 beschrieben.

e) (1 Punkt)

Die Energieeinsparung ergibt sich aus der Differenz zwischen der in Teil a) berechneten el. Energie  $W_t$  und der in b) berechneten maximalen Arbeitsfähigkeit  $-W_{ex}$ . Die Einsparung ist:

$$\text{Einsparung} = W_t - W_{ex} = 576,5kJ$$

**Aufgabe 3:** *Phasenwechsel*

9 von 50 Punkten

- Warum müssen alle Stoffe, die sich beim Gefrieren ausdehnen (wie z.B. Wasser), eine nach links geneigte Schmelzdruckkurve haben?
- Bestimmen Sie so gut wie möglich anhand der unten gegebenen Stoffdaten die Verdampfungsenthalpie von  $CO_2$  bei  $p = 60 \text{ bar}$ .
- Ist die Verdampfungsenthalpie von  $CO_2$  bei  $p = 70 \text{ bar}$  größer oder kleiner als bei  $60 \text{ bar}$ ? Denken Sie daran, Ihre Antwort knapp zu begründen.

Druck, Temperatur und Dichte von  $CO_2$  (2-phasen-Gebiet flüssig/dampfförmig)

p/bar	t/°C	$\rho'/(kg/m^3)$	$\rho''/(kg/m^3)$
45	10,0	861,3	135,1
50	14,3	827,3	156,7
55	18,3	791,1	181,4
60	22,0	751,0	210,9
65	25,4	703,6	248,3

**Aufgabe 4:** *Luftentfeuchtung im Duschaum*

10 von 50 Punkten

Kurzfrage: Warum kann reines Wasser nicht in einem h-x-Diagramm für feuchte Luft eingezeichnet werden?

Im Duschaum eines Schwimmbades soll der Luft Wasser entzogen werden. Die Luft im Duschaum hat eine relative Luftfeuchte von 95%. Aus dem Duschaum werden pro Minute  $1,5 \text{ kg}$  Luft abgesaugt und zunächst auf  $10^\circ\text{C}$  abgekühlt. Dabei bilden sich pro kg trockener Luft  $17 \text{ g}$  Kondensat, das als Abwasser entsorgt wird.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben analytisch (nicht grafisch!)

- Wie hoch ist die Temperatur in dem Duschaum?
- Welche Leistung muss die nachgeschaltete Heizung haben, um die abgekühlte Luft auf  $35^\circ\text{C}$  zu erwärmen, bevor sie wieder in den Duschaum eingeblasen wird.
- Welche relative Luftfeuchte hat die erwärmte, in den Duschaum eingeblasene Luft?

### Lösung Aufgabe 3

a) (4 Punkte)

Eine nach links geneigte Schmelzdruckkurve im pT-Diagramm bedeutet, dass  $\frac{dp}{dT} < 0$  ist. Ein Beweis hierfür erfolgt über die Clausius-Clapeyronsche Gleichung. Diese ist in Gl. 4.8 aus Thermodynamik kompakt definiert als:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s'' - s'}{v'' - v'}$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für das Naßdampfgebiet, sondern auch für den fest-flüssig Bereich. Der Zustand auf der Erstarrungslinie wird nachfolgend durch  $''$ , der Zustand auf der Schmelzlinie durch  $'$  beschrieben. Die spezifische Entropie nimmt beim Schmelzen zu, daher ist immer  $s'' > s'$ . Aufgrund der Ausdehnung beim Gefrieren von z.B. Wasser ist  $v'' < v'$ , woraus eine negative Steigung von  $\frac{dp}{dT}$  resultiert.

b) (3 Punkte)

Die Verdampfungsenthalpie wird über die Clausius-Clapeyronsche Gleichung ermittelt, wobei hier der Ansatz  $\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{h'' - h'}{v'' - v'}$  zur Anwendung kommt. Das spezifische Volumen ist mit der Dichte verknüpft ( $v = 1/\rho$ ). Die Steigung  $\frac{dp}{dT}$  lässt sich mit den Tabellenwerten zu  $\frac{dp}{dT} = \frac{65-55}{25,4-18,3} \frac{\text{bar}}{\text{K}}$  bestimmen, die Dichten werden aus der Tabelle bei  $p = 60 \text{ bar}$  entnommen. Für die spezifische Enthalpiedifferenz erhält man dann:  $h'' - h' = r = 141,76 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ .

c) (2 Punkte)

Die Verdampfungsenthalpie nimmt mit zunehmenden Druck zwischen 60 und 70 bar bis zum kritischen Druck bei etwa 73bar ab. Im kritischen Punkt ist die Verdampfungsenthalpie 0.

### Lösung Aufgabe 4

KF: (1 Punkt)

Im h-x-Diagramm ist der Wassergehalt des Wassers, definiert als Masse Wasser pro Masse trockene Luft, auf der x-Achse aufgetragen. In reinem Wasser geht der Anteil der Luft gegen 0, daher geht der Wassergehalt gegen unendlich.

a) (4 Punkte)

Am Eintritt liegt der Zustand 1, am Austritt der Zustand 2 vor. Die Berechnung der Temperatur  $t_1$  erfolgt über die Berechnung des Wassergehaltes.

Im Punkt 2 liegt gesättigte Luft vor ( $x_2 = x_S$ ). Mit dem Sättigungsdruck  $p_S$  von  $p_S(t_2 = 10^\circ\text{C}) = 0,0123 \text{ bar}$  berechnet sich  $x_2$  zu  $x_2 = x_S = 0,622 \frac{p_S}{p - p_S} = 0,00775 \frac{\text{kg Wasser}}{\text{kg tr. Luft}}$ . Von 1 nach 2 fällt Kondensat aus, der Wassergehalt des Kondensates ist mit  $x_{\text{Kondensat}} =$

$0,017 \frac{\text{kg Wasser}}{\text{kg tr. Luft}}$  gegeben. Damit beträgt der Wassergehalt im Punkt 1:

$$x_1 = x_2 + x_{\text{Kondensat}} = 0,02475 \frac{\text{kg Wasser}}{\text{kg tr. Luft}}$$

Im Punkt 1 wird der Dampfpartialdruck  $p_{D,1}$  mit der Gleichung  $x_D = 0,622 \frac{p_D}{p-p_D}$  zu  $p_{D,1} = 0,038268 \text{ bar}$  bestimmt. Außerdem kann der Sättigungsdruck über die relative Feuchte zu  $p_{S,1} = 0,040276 \text{ bar}$  bestimmt werden.

Die gesuchte Temperatur  $t_1$  wird nun über die Dampftafel (D.3 Thermodynamik kompakt) ermittelt, wofür eine Interpolation zwischen 25 und 30°C notwendig ist. Für  $t_1$  erhält man:  $t_1 = 29^\circ\text{C}$

b) (2,5 Punkte)

Nach der Heizung liegt der Punkt 3 vor, dort beträgt die Temperatur  $t_3 = 35^\circ\text{C}$ . Die Bestimmung der Heizleistung erfolgt über  $\dot{Q} = \dot{m}_L(h_3 - h_2)$ . Die spezifische Enthalpie  $h_3$  und  $h_2$  berechnen sich über den Ansatz aus Thermodynamik kompakt (Gl. 7.116).

$$h = c_{p,L}t + x_D(c_{p,D}t + r_D)$$

Da der Dampfgehalt von 2 nach 3 gleich ist, vereinfacht sich die Gleichung zu:

$h_3 - h_2 = c_{p,L}dt + x_D c_{p,D}dt$ . Mit den für feuchte Luft in Anhang D.4 von Thermodynamik kompakt aufgeführten Stoffgrößen berechnet sich  $h_3 - h_2 = 25,522 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ .

Der Massenstrom der trockenen Luft  $\dot{m}_L$  kann für den Zustand 1 berechnet werden. Mit  $x_1 = 0,0247 \frac{\text{kg Wasser}}{\text{kg tr. Luft}}$  und einem Gesamtmassenstrom  $\dot{m} = \dot{m}_{W,1} + \dot{m}_L = 1,5 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$  berechnet sich der Massenstrom der trockenen Luft zu  $\dot{m}_L = 1,464$ .

Somit ergibt sich ein Wärmestrom der Heizung von  $\dot{Q} = 0,623 \text{ kW}$ .

c) (2,5 Punkte)

Nach der Heizung ist der Wassergehalt der Luft  $x_3$  gleich dem am Eintritt  $x_2 = x_3 = 0,00775 \frac{\text{kg Wasser}}{\text{kg tr. Luft}}$ . Der Dampfpartialdruck  $p_{D,3}$  berechnet sich mit  $x_D = 0,665 \frac{p_D}{p-p_D}$  zu  $p_D = 0,0123 \text{ bar}$ . Der Sättigungspartialdruck  $p_S$  aus Anhang D.3 beträgt  $p_S(t = 35^\circ\text{C}) = 0,0562 \text{ bar}$ . Die relative feuchte  $\varphi_3 = \frac{p_D}{p_S}$  ist damit  $\varphi_3 = 0,219$ .