

2666 - 977 1

**INSTITUT FÜR BAUSTOFFE, MASSIVBAU UND BRANDSCHUTZ
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG**

Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Direktoren:

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. K. Kordina

Prof. Dr.-Ing. F. S. Rostásy

**NICHTLINEARE BERECHNUNG EBENER
STAHLBETONFLÄCHENTRAGWERKE UNTER
EINSCHLUSS VON BRANDBEANSPRUCHUNG**

von

Michael Kiehl

Heft 81

BRAUNSCHWEIG

1987

ISSN 0178-5796

ISBN 3-89288-027-1

ZFR + TA+ (Institut Baustoffe und Stahl-
betonbau)

Diese Arbeit ist die vom Fachbereich für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität Braunschweig genehmigte Dissertation des Verfassers.

Eingereicht am 2.6.1987

Mündliche Prüfung am 20.11.1987

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. H. Ahrens

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. D. Hosser

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz - IBMB. Dessen langjähriger geschäftsführender Leiter o. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Karl Kordina hat das Zustandekommen dieser Arbeit durch stete Bereitschaft zur Diskussion unterstützt und schließlich den Vorsitzes der Prüfungskommission übernommen.

In finanzieller Hinsicht wurde die Arbeit ermöglicht durch Forschungsvorhaben des Bundesministers für Raumordnung, Bauwesen und Städtebau und der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 148 "Brandverhalten von Bauteilen". Zahlreiche angesprochene Experimente sind der Förderung durch die genannten Institutionen zu verdanken.

Besonderer Dank gebührt Prof. Dr.-Ing. Dietmar Hosser, nicht nur für die Berichterstattung, sondern weil er die richtigen Prioritäten gesetzt hat. Prof. Dr.-Ing. Herrmann Ahrens übernahm die Mitberichterstattung und förderte die Arbeit durch viele sachdienlichen Hinweise.

Stellvertretend für die vielen Kolleginnen und Kollegen des IBMB möchte ich hier Frau Doris Paetzold nennen. Mit starkem Strich und viel Einfühlungsvermögen hat sie das äußere Erscheinungsbild der Arbeit geprägt, wofür ich herzlich zu danken habe.

Ohne die Bereitschaft meiner Familie auf so manches gemeinsame Wochenende zu verzichten wäre die Anfertigung dieser Arbeit allerdings unmöglich gewesen.

Braunschweig, im Dezember 1987

Michael Kiel

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

1	Einleitung.....	1
1.1	Problemstellung und Ziel der Arbeit.....	1
1.2	Überblick.....	3
2	Lösungswege.....	5
2.1	Mechanisches Modell.....	5
2.1.1	Analytische Verfahren.....	5
2.1.2	Differenzenverfahren.....	9
2.1.3	Finite Element-Methoden.....	10
2.2	Werkstoffmodelle.....	14
2.2.1	Beton.....	14
2.2.2	Stahl.....	16
2.3	Versagenskriterien.....	16
3	Strukturmodell der dünnen Platte mit großen Verformungen.....	19
3.1	Herleitung der Tangentenmatrix.....	19
3.2	Der nichtlineare Verzerrungszustand.....	21
3.3	Elementgeometrie und Formfunktionen.....	23
3.4	Aufstellen der BL-, BNL und der KS-Matrix.....	25
3.5	Integration der Elementmatrix.....	27
3.6	Aufbau der Systemmatrix, Lösung des Gleichungssystems und quasi viskoser Dämpfer.....	28
3.7	Algorithmische Realisierung.....	31
4	Werkstoffmodell.....	35
4.1	Beton.....	35
4.1.1	Grundlagen.....	35
4.1.2	Thermische Dehnung.....	38
4.1.3	Ursprungsmodul.....	41
4.1.4	Bruchspannung.....	42
4.1.5	Bruchdehnung.....	46
4.1.6	Querdehnzahl.....	48
4.1.7	Konstante Werkstoffparameter.....	51
4.1.8	Formulierung - Algorithmus.....	51
4.2	Betonstahl.....	57
4.2.1	Grundlagen.....	57
4.2.2	Arbeitslinie.....	58
4.2.3	Formulierung - Algorithmus.....	58

5	Verifizierung.....	63
5.1	Lineares Material.....	63
5.1.1	Kleine Verformungen.....	63
5.1.2	Stabilität.....	65
5.1.3	Große Verformungen.....	67
5.1.4	Temperaturbeanspruchung.....	69
5.2	Nichtlineares Material.....	72
5.2.1	Vorbemerkung.....	72
5.2.2	Biaxiale Betonarbeitslinien.....	73
5.2.3	Temperaturbelastung bei konstanter Spannung.....	76
5.2.4	Temperaturbelastung bei konstanter Dehnung.....	77
5.2.5	Zusammenwirken Beton-Stahl.....	78
5.3	Numerische Stabilität.....	81
6	Nachrechnung von Versuchen.....	83
6.1	Wandversuche.....	83
6.1.1	Zielstellung.....	83
6.1.2	Dreiseitig gelagerte Wand.....	84
6.1.3	Mehrwelliges Beulen.....	87
6.2	Brandversuche an Stahlbetonplatten.....	91
6.2.1	Zielstellung.....	91
6.2.2	Versuchsaufbau.....	92
6.2.3	Ungezwängte Quadratplatte.....	93
6.2.4	Gezwängte Quadratplatte.....	96
7	Partiell beflamnte Platte.....	105
7.1	Zielstellung.....	105
7.2	Randbedingungen.....	106
7.3	Ergebnisse.....	109
7.3.1	Allgemeines.....	109
7.3.2	M-N-Diagramm.....	110
7.3.3	Verformungsverhalten.....	112
7.3.4	Tragverhalten.....	117
7.4	Schlußfolgerungen.....	131
8	Zusammenfassung und Ausblick.....	133
A	Grundmatrizen für das Strukturmodell.....	137
A.1	Abkürzungen.....	137
A.2	BL-Matrix.....	138
A.3	BNL-Matrix.....	139
A.4	KS-Matrix.....	149

LITERATUR

- Wal.81 Walter, Robert
Partiell brandbeanspruchte Stahlbetondecken - Berechnung
des inneren Zwanges mit einem Scheibenmodell -
Dissertation, TU Braunschweig 1981
- Gir.56 Girkmann, Karl
Flächentragwerke
Springer-Verlag, Wien 1956
- Hub.25 Huber, M.T.
Über die genaue Berechnung einer orthotropen Platte
Bauingenieur 6, 878 - 1925
- AsJ.79 Aas-Jakobsen, K.
Buckling of Slender Walls
Contribution to C.E.B. Com. III "Buckling and Instability"
Oslo 1979
- Ki.82 Kiel, Michael
Stabilität mehrseitig gelagerter Stahlbetonwände, 2. Stufe
Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben B I 5 - 80 01 80 -
18 des Bundesministers für Raumordnung, Bauwesen und
Städtebau
Braunschweig 1982
- BSK.63 Bürgermeister, G. und H. Steup, H. Kretzschmar
Stabilitätstheorie, Teil II
Akademie-Verlag 1963
- Kes.79 Kesting, Klaus
Berechnung von Stahlbetonwänden und Platten unter Berück-
sichtigung geometrischer und physikalischer
Nichtlinearität
Dissertation, Universität Dortmund 1979
- Mas.76 Marsal, Dietrich
Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen
Bibliographisches Institut, Mannheim 1976
- Swz.80 Schwarz, Hans Rudolf
Methode der finiten Elemente
B.G. Teubner, Stuttgart 1980
- Krp.82 Kröplin, Bernd-Helmut
Quasi viskose Berechnung von nichtlinearen Stabilitäts-
problemen
Bericht Nr. 82-37, Institut für Statik, Braunschweig 1982

- Kup.73 Kupfer, Helmut**
 Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung zweiachsiger Beanspruchung
 Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 229, Berlin 1973
- Lin.76 Link**
 Eine Formulierung des zweiachsialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten
 Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 270, Berlin 1976
- Ric.86 Richter, Ekkehard**
 Spannungs/Dehnungslinien zur Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens von Konstruktionsbauteilen unter Feuerangriff
 Arbeitsbericht 1984-86 des Sonderforschungsbereichs 148 Braunschweig 1987
- Eis.76 Smith, B.T., J.M. Boyle, J.J. Dongarra, B.S. Garbow, Y. Ikebe, V.C. Klema, C.B. Moler**
 Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide
 Springer-Verlag 1976
- RUM.85 Hearn, Anthony C. (Editor)**
 Reduce User's Manual, Version 3.2
 Rand Publication CP78 (Rev. 4/85), The Rand Corporation, Santa Monica (CA) 1985
- Ehm.86 Ehm, Christian**
 Versuche zur Festigkeit und Verformung von Beton unter zweiachsialer Beanspruchung und hohen Temperaturen
 Dissertation, TU Braunschweig 1986
- Mar.70 Marechal, J.C.**
 Variations in the Modulus of Elasticity and Poisson's Ratio with Temperature
 ACI-Int. Sem. on Concrete for Nuclear Reactors, Berlin 1970
- Ti.79 Timm, Reiner**
 Experimentelle Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten von bewehrten und unbewehrten Betonwänden
 Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben B I 5 - 80 01 75 - 43 des Bundesministers für Raumordnung, Bauwesen und Städtebau
 Braunschweig 1979

- BGS.86 Bozorgzadeh, I., R. Grzeschkowitz, B. Schönhoff, M.
Teutsch
Stabilität mehrseitig gelagerter Stahlbetonwände, 3. Stufe
Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben B I 6 - 80 01 83 -
6 des Bundesministers für Raumordnung, Bauwesen und
Städtebau
Braunschweig 1986
- SFB.80 Arbeitsbericht 1978 - 1980 des Sonderforschungsbereichs
148
Braunschweig 1980
- SFB.83 Arbeitsbericht 1981 - 1983 des Sonderforschungsbereichs
148
Braunschweig 1983
- SFB.87 Arbeitsbericht 1984 - 1986 des Sonderforschungsbereichs
148
Braunschweig 1987
- Bec.76 Becker, James, H. Bizri, B. Bresler
FIRES-T, A Computer Program for the Fire Response of
Structures - Thermal
Fire Research Group Report UCB FRG 74-1, UC Berkeley 1974
- MO.81 Kordina, Karl, C. Meyer-Ottens
Beton-Brandschutz-Handbuch
Beton-Verlag, Düsseldorf 1981

BEZEICHUNGEN

Skalare:

x, y, z	Kartesische Koordinaten
u, v, w	Verschiebung in den Koordinaten-Richtungen
a, b, h	Längen in den Koordinaten-Richtungen
p	Flächenlast, senkrecht zur Plattenebene
n	Streckenlast in Plattenebene
ϵ	Verzerrung
σ	Spannung
E	Elastizitätsmodul, Tangentenmodul
μ	Querdehnzahl
K	Plattensteifigkeit
T	absolute Temperatur
t	Temperatur

Vektoren und Matrizen:

\underline{K}	Steifigkeitsmatrix
\underline{N}	Nachgiebigkeitsmatrix
\underline{V}	Dämpfungsmatrix
\underline{y}	Verschiebungsvektor
\underline{p}	Lastvektor
\underline{k}_p	Vektor der Knotenparameter
\underline{k}_v	Vektor der Koeffizienten der Formfunktionen
\underline{f}_v	Vektor der Formfunktionen
\underline{G}	Matrix zur Verknüpfung der Knotenverschiebungen mit den Koeffizienten der Formfunktionen
\underline{B}	Matrix zur Verknüpfung des Verschiebungsfeldes mit den Verzerrungen
\underline{T}	Transformationsmatrix
$\underline{\epsilon}$	Vektor der Verzerrungen
$\underline{\sigma}$	Vektor der Spannungen
\underline{D}	Matrix der elastischen Konstanten

Nicht aufgeführte Bezeichnungen sind entsprechend gängigem Gebrauch verwendet worden oder haben nur lokale Bedeutung und sind daher im Text erläutert.

1 EINLEITUNG

1.1 PROBLEMSTELLUNG UND ZIEL DER ARBEIT

Den Hintergrund dieser Arbeit bildet ein in der Praxis vergleichsweise häufig anzutreffendes Brandszenarium. Sind nämlich unter einer Stahlbetondecke raumabschließende Bauteile angeordnet und es bricht in einem dieser Räume ein Brand aus, so spricht man von einer partiellen Beflammung. Die Stahlbetonplatte wird dann bereichsweise gedehnt, wobei diese Dehnungen durch die nicht vom Brand betroffenen Bereiche behindert werden. Daraus entstehen axiale Zwangkräfte, die zu Verformungen und zu Schnittkräften nach Theorie II. Ordnung, auch in den zuvor unbeanspruchten Bereichen, führen.

Durch die nichtlinear erfolgende Durchwärmung des Plattenquerschnitts und die zusätzlich wirkenden Zwangkräfte bildet sich ein komplexer Beanspruchungszustand, wobei die auftretende Zusatzbeanspruchung zu vergleichsweise frühem Versagen führen kann.

Im Sonderforschungsbereich 148 "Brandverhalten von Bauteilen" wurden, beginnend etwa mit dem Jahr 1979, Versuche durchgeführt, die zum Ziel hatten, besonders den Einfluß der bei partieller Beflammung auftretenden Zwängung des beflamnten Teils zu untersuchen. Die Durchlaufwirkung wurde erzielt, indem die geprüfte Einfeldplatte am Rand durch exzentrisch angeordnete, hydraulische Pressen an ihrer freien Verformung gehindert wurde.

Zur rechnerischen Begleitung dieser Versuche, in erster Linie also zur Ermittlung der zulässigen Randverschiebung, stand das Modell von Walter /Wal.81/ zu Verfügung, das auf einem Scheibenansatz beruht und daher die Durchbiegung der Platte nicht berücksichtigt. Tatsächlich sind die auftretenden Durchbiegungen jedoch mit $f/l > 1/20$ sehr groß, so daß der Wunsch entstand, ein neues Berechnungsverfahren zu entwickeln, das folgende Anforderungen erfüllt:

- Berücksichtigung von Biegung mit Normalkraft bei der Strukturanalyse,
- Anwendung der Theorie der großen Verformungen bei gleichzeitig kleinen Verzerrungen und
- Verwendung eines wirklichkeitsnahen Materialgesetzes unter Berücksichtigung des Einflusses der Temperatur auf Steifigkeit und Festigkeit für Beton und Betonstahl.

Dieses Rechenmodell ist an Versuchen zu verifizieren, um Leistungsfähigkeit und Anwendungsgrenzen feststellen zu können. Die im gleichen Zeitraum im Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz unter Beteiligung des Verfassers durchgeführten experimentellen Untersuchungen zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonwänden standen hierfür zusätzlich zu den Brandversuchen zu Verfügung.

Mit dem verifizierten Rechenmodell soll dann die eigentliche Frage nach dem Trag- und Verformungsverhalten der Stahlbetonplatte unter lokaler Brandbeanspruchung behandelt werden. Die Beantwortung dieser Frage erfolgt mit Hilfe einer Parameterstudie und mündet in Schlußfolgerungen für die Konstruktion und Bemessung.

Die Arbeitslinien für Beton und Betonstahl nach DIN 1045 sind zur Lösung der gestellten Aufgabe nicht geeignet, da diese mit dem bekannten Materialverhalten des Betons, insbesondere unter biaxialer Beanspruchung, nur wenig übereinstimmen.

Bei der Formulierung von Versagenskriterien schied die Vorgabe gewisser Grenzwerte der Dehnung im Querschnitt aus, da diese bei Temperaturbeanspruchung kaum definierbar sind. Um die im System vorhandenen Möglichkeiten zur Lastumlagerung zu nutzen, muß primär das Versagen des Systems durch Stabilitätsverlust (Kollaps) betrachtet werden, das von dem zu entwickelnden Rechenmodell sicher erkannt werden muß. Außerdem muß sichergestellt sein, daß die verwendeten Algorithmen nicht instabil werden, während das System selbst noch stabil ist.

Das Trag- und Verformungsverhalten der Stahlbetonplatten wird von der Zugfestigkeit des Betons maßgeblich beeinflusst. Da allgemein nur geringe Bewehrungsgrade vorliegen, weist die Last-Verformungsbeziehung ein ausgeprägtes lokales Maximum bei Erreichen der Betonzugfestigkeit auf. Das System ist in der Umgebung dieses lokalen Maximums instabil, kann aber, wenn die Tragfähigkeit der Bewehrung ausreicht, durch Verformungszunahme wieder stabil werden. Die Stabilitätsprüfung im Rechenmodell darf daher ein lokales und ein absolutes Maximum nicht verwechseln.

Die Beschreibung, Verifizierung und Anwendung des Rechenmodells ist Gegenstand dieser Arbeit. Es erhielt den Namen FIPSE, ein Anagramm für FInites Platten-Scheiben Element.

1.2 ÜBERBLICK

Für die Entwicklung eines Rechenmodells auf dem Gebiet der Strukturmechanik stehen immer eine Reihe von Lösungswegen zur Verfügung, die im vorhinein überdacht und gegeneinander abgewogen werden sollten. Auch gilt es, Erfahrungen auszuwerten, die andere Forscher bei der Lösung vergleichbarer Probleme gewonnen haben. Im Kapitel 2 wird in knapper Form über diese Vorüberlegungen berichtet.

Kapitel 3 beinhaltet die Entwicklung eines mechanischen Modells auf der Basis der Finite Element-Methode. Neben der Herleitung der Grundgleichungen werden auch die erforderlichen Algorithmen mitgeteilt, soweit sie nicht trivial sind. Außerdem werden Überlegungen zur Konvergenz des Iterationsverfahrens zur Lösung der nichtlinearen Systemgleichungen angestellt.

Das entwickelte Werkstoffmodell wird in Kapitel 4 beschrieben. Der Hauptteil ist dabei dem biaxial beanspruchten Beton gewidmet, während der Betonstahl nur sehr kurz behandelt wird, da hierfür keine grundsätzlichen Unterschiede zur Stabtheorie bestehen.

Im Kapitel 5 wird das vorgeschlagene Rechenmodell verifiziert. Damit ist gemeint, daß anhand des Gesamtprogramms FIPSE einige kleinere Beispiele vorgeführt werden, die jeweils eng begrenzte Teilaspekte behandeln und deren Ergebnis analytisch oder anschaulich kontrollierbar ist. Die Beispiele sind so gewählt, daß alle Funktionen des Programms verifiziert werden.

Im Kapitel 6 werden einige Großversuche exemplarisch nachgerechnet, zunächst die Versuche an Stahlbetonwänden bei Normaltemperatur, anschließend Plattenversuche des SFB's 148. Außerdem werden einige Einflußgrößen analysiert, die beim Problem der partiell beflamten Platte von Bedeutung sind.

Damit steht das Werkzeug zu Verfügung, um in Kapitel 7 eine Parameterstudie zum Trag- und Verformungsverhalten der partiell beflamten Platte durchzuführen. Das zugrundeliegende statische System ist eine 3*3-Feld-Platte der Feuerwiderstandsklasse F-90 nach DIN 4102 mit der nach DIN 1045 maximal zulässigen Schlankheit.

Kapitel 8 enthält schließlich eine Zusammenfassung der Arbeit und einige Bemerkungen zu den festgestellten Anwendungsgrenzen des entwickelten Rechenmodells.

2 LÖSUNGSWEGE

2.1 MECHANISCHES MODELL

2.1.1 Analytische Verfahren

Fast alle bekannten analytischen Verfahren zur Lösung des Plattenproblems basieren auf der Kirchhoffschen Plattentheorie. Diese geht von folgenden Annahmen aus:

- Die Dicke der Platte ist klein im Vergleich zu ihrer Länge und Breite. Daher verbleiben Punkte einer Normalen zur Mittelfläche auch nach der Formänderung auf einer Geraden.
- Die Durchbiegung der Platte ist klein gegenüber ihrer Dicke. Daher kann angenommen werden, daß die Elemente der Mittelfläche unverzerrt bleiben.

Die Herleitung der Differentialgleichung ist in der Literatur /Gir.56/ ausführlich dargestellt und erfolgt hier nur in abgekürzter Form. Mit den oben angegebenen Bezeichnungen können die Verschiebungen angeschrieben werden:

$$u = -z \cdot \delta w / \delta x,$$

$$v = -z \cdot \delta w / \delta y$$

Die Verzerrungen ergeben sich aus der Ableitung der Verschiebungen nach den Koordinaten. Also:

$$\epsilon_x = -z \cdot \delta^2 w / \delta x^2,$$

$$\epsilon_y = -z \cdot \delta^2 w / \delta y^2,$$

$$\epsilon_{xy} = -2 \cdot z \cdot \delta^2 w / \delta x \delta y$$

Unter Ausnutzung der Gleichgewichtsbedingungen kann hiermit jetzt die Differentialgleichung der querbelasteten Platte angeschrieben werden:

$$\delta^4 w / \delta x^4 + 2 \cdot \delta^4 w / \delta x^2 \delta y^2 + \delta^4 w / \delta y^4 = p(x,y) / K \quad \text{bzw.}$$

$$K \cdot \Delta \Delta w = p(x,y)$$

K ist die Plattensteifigkeit. Diese DGL kann für Horizontalkräfte n erweitert werden zu:

$$K \cdot \Delta \Delta w = p(x,y) + n_x \cdot \delta^2 w / \delta x^2 + 2 \cdot n_{xy} \cdot \delta^2 w / \delta x \delta y + n_y \cdot \delta^2 w / \delta y^2$$

Die geschlossene Integration dieser DGL gelingt mit dem Ansatz:

$$w(x,y) = \sum_m \sum_n C_{mn} \cdot \sin(m \cdot \pi \cdot x / a) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot y / b)$$

für die allseitig gelenkig gelagerte Rechteck-Platte, mit m, n ganzzahlig und a, b = Breite, Höhe und unter Vernachlässigung der Schubbeanspruchung n_{xy} .

Für ganzzahlige Seitenverhältnisse a:b und Normalkraft nur in x-Richtung ergibt sich dann die klassische Gleichung für die Knicklast zu:

$$n_x = 4 \cdot K \cdot \pi^2 / b^2$$

auf die im folgenden noch häufiger Bezug genommen wird.

Die isotrope Platten-DGL ist für die praktische Anwendung im Beton- und Stahlbetonbau nicht geeignet, da der Werkstoff Beton ein ausgeprägt orthotropes Verhalten zeigt. Die orthotrope Platten-DGL kann jedoch leicht aus der isotropen abgeleitet werden. Man wählt hierzu richtungsabhängige Steifigkeitsansätze der Form:

$$\begin{aligned}
K_x &= E_x \cdot I_x / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) , & K_y &= E_y \cdot I_y / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) , \\
2 \cdot C &= (1 - \sqrt{(\mu_x \cdot \mu_y)}) \cdot \sqrt{(K_x \cdot K_y)} , & & / \text{Hub. 25/} \\
2 \cdot K_{xy} &= (K_x \cdot \mu_x + K_y \cdot \mu_y) + 4 \cdot C
\end{aligned}$$

und schreibt die orthotrope Platten-DGL an:

$$K_x \cdot \delta^4 w / \delta x^4 + 2 \cdot K_{xy} \cdot \delta^4 w / \delta x^2 \delta y^2 + K_y \cdot \delta^4 w / \delta y^4 = p(x, y)$$

Die Berücksichtigung des Normalkrafteinflusses erfolgt genauso wie bei der isotropen DGL und soll deshalb hier nicht dargestellt werden. Auch die Lösung der DGL kann grundsätzlich dem obigen Schema folgen. Für zahlreiche praxisbezogene Fälle wurden rasch konvergierende numerische Näherungsverfahren auf dieser Basis entwickelt. Zu nennen wäre hier besonders das Verfahren von Aas-Jakobsen /AsJ.79/ zum Knicken von Wänden, das im folgenden kurz geschildert werden soll, da es einige interessante Erweiterungsmöglichkeiten aufweist. Dieses Verfahren wurde vom Verfasser in /Ki.82/ in stark modifizierter Form angewendet.

Mit dem bekannten Ansatz für die Durchbiegung:

$$w(x, y) = C \cdot \sin(\pi \cdot x/a) \cdot \sin(\pi \cdot y/b)$$

und unter der Annahme einer einwelligigen Biegefläche ergibt sich als Lösung der orthotropen Platten-DGL die Biegefläche zu:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4} \cdot \frac{p \cdot \sin(\pi \cdot x/a) \cdot \sin(\pi \cdot y/b)}{K_x/a^4 + 2 \cdot K_{xy}/(a^2 \cdot b^2) + K_y/b^4 + n_y/(\pi^2 \cdot b^2)}$$

für den Fall der Rechteckplatte unter Querbelastung $p = \text{const}$ und Normalkraft n_y . Bestimmt man die Querbelastung so, daß sie im Mittelquerschnitt die gleichen Momente hervorruft wie eine exzentrisch angeordnete Normalkraft und berücksichtigt man wirklichkeitsnahe Steifigkeiten, so zeigt sich eine überraschende Leistungsfähigkeit dieses Ansatzes. Es gelingt nicht nur, die Bruchlast, sondern auch das Verformungsverhalten von allseitig gelenkig gelagerten Stahlbetonwänden mit guter Übereinstimmung

nachzuvollziehen /Ki.82/. Nachteilig ist allerdings, daß die Steifigkeit bei diesem Ansatz als konstant angenommen wird, was mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt. Außerdem erfordert ihre Berücksichtigung einen Iterationszyklus, der günstigerweise auf einem Kleincomputer ausgeführt wird. Zu beachten ist weiterhin, daß die Steifigkeiten nur für den vermeintlich maximal beanspruchten Querschnitt, nämlich in Plattenmitte, berechnet werden. Diese Annahme war seinerzeit unbewiesen und kann mittlerweile als widerlegt angesehen werden. Bei den bisher durchgeführten Versuchen an mehrseitig gelagerten Wänden hat sich eindeutig gezeigt, daß das Versagen der Versuchskörper gleichzeitig in zwei Ecken eingeleitet wird, von denen ausgehend sich eine parabel-förmige Bruchkurve bis in Wandmitte fortsetzt.

Die Erweiterungsmöglichkeiten dieser Formulierung sind insbesondere im Einbau temperaturabhängiger Werkstoffmodelle zu sehen. Hierdurch könnte ein Verfahren hergeleitet werden, das bezüglich Genauigkeit und einfacher Anwendung durchaus mit der Bruchlinien-Theorie mithalten kann und darüber hinaus noch Angaben über die Durchbiegung liefert. Die Anwendung dieses Verfahrens bleibt jedoch schwierig, da die DGL immer nur für eine bestimmte Lastart und eine bestimmte Kombination von Lagerungsbedingungen gelöst werden kann.

Zum Schluß noch eine grundsätzliche Bemerkung zur Lösung des Plattenproblems mit Hilfe einer DGL. Wie in der Einleitung schon angedeutet, ist das zu lösende Problem gekennzeichnet durch Mittendurchbiegungen, die gegenüber der Plattendicke nicht mehr als klein angesehen werden können. Es wird also erforderlich, die Kirchhoffsche Plattentheorie zu verlassen und von einem nicht-linearen Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Verzerrung auszugehen. Dieser Zusammenhang wird allgemein folgendermaßen dargestellt:

$$\epsilon_x = \delta u / \delta x + (\delta w / \delta x)^2 / 2 - z \cdot \delta^2 w / \delta x^2 \text{ usw.}$$

Wie man leicht sieht, gibt es jetzt einen zusätzlichen quadratischen Zusammenhang zwischen Verzerrung und Neigung. Nach

Einführung der Spannungsfunktion θ , für welche entsprechend der Airyschen Spannungsfunktion gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \delta^2\theta/\delta y^2, \\ \sigma_y &= \delta^2\theta/\delta x^2, \\ \sigma_{xy} &= -\delta^2\theta/\delta x\delta y,\end{aligned}$$

verbleibt nach Elimination der linearen Verzerrungsglieder die erweiterte Spannungsfunktion für den überkritischen Bereich:

$$\delta^4\theta/\delta x^4 + 2\cdot\delta^4\theta/\delta x^2\delta y^2 + \delta^4\theta/\delta y^4 = E\cdot((\delta^2w/\delta x\delta y)^2 - \delta^2w/\delta x^2\cdot\delta^2w/\delta y^2)$$

Hiermit kann nach /BSK.63/ nun die DGL aufgestellt werden:

$$K\cdot\Delta\Delta w = -h\cdot(\delta^2\theta/\delta y^2\cdot\delta^2w/\delta x^2 - 2\cdot\delta^2\theta/\delta x\delta y\cdot\delta^2w/\delta x\delta y + \delta^2\theta/\delta x^2\cdot\delta^2w/\delta y^2)$$

Im Prinzip handelt es sich um zwei simultane DGL'en. Die eine beschreibt die nichtlineare Spannungsverteilung in der Plattenmittelfläche, die andere beschreibt die Biegefläche. Eine geschlossene Integration gelingt im allgemeinen nicht, jedoch sind Näherungslösungen mit Hilfe von Energiemethoden bekannt, von denen eine im Abschnitt 5 dieser Arbeit auch benutzt werden wird.

2.1.2 Differenzenverfahren

Die Differenzenverfahren gehören zu den am weitesten verbreiteten Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen. Ihr größtes Anwendungsgebiet sind partielle DGL'en erster und zweiter Ordnung. Mit diesen DGL'en werden im wesentlichen Transportprobleme beschrieben, also Wärmeleitungs- oder Diffusionsvorgänge. Auf diesem Gebiet sind sehr schnelle Algorithmen bekannt. Die Anwendung dieses Verfahrens auf DGL'en vierter Ordnung birgt einige Gefahren in sich, wengleich in der Literatur gelegentlich damit gearbeitet wird /Kes.79/.

Differenzenverfahren ersetzen die in der DGL auftretenden Differentiale durch endliche Differenzen. Den Differenzenausdrücken liegen bereichsweise algebraische Polynome zugrunde. In der Natur des Verfahrens liegt es daher, daß sehr viele Stützstellen erforderlich sind, wenn die Lösung der DGL nicht auf algebraischen Polynomen beruht. Dies ist schon bei der elastischen Platte der Fall, deren Lösung eine trigonometrische Reihe ist, nicht aber zum Beispiel beim elastischen Balken.

Ein weiterer Nachteil des Differenzenverfahrens ist darin zu sehen, daß ein recht starres System achsenparalleler Gittergeraden das Grundgebiet der Lösung aufspannt. Die flexible Anpassung des Netzes an sich stark ändernde Lösungsfunktionen ist daher nur selten möglich. Die Berücksichtigung von Unendlichkeitsstellen der Lösung oder der Parameterfunktionen erfordert zusätzlichen Aufwand, da es sich hier um ein differenzierendes und nicht um ein integrierendes Verfahren handelt (vergl. /Mas.76/). Bei gleicher Genauigkeit der Lösung entstehen zudem beim Differenzenverfahren um ein mehrfaches größere lineare Gleichungssysteme als bei den Finiten Element-Methoden. Bei physikalisch oder geometrisch instabilen Problemen ist es daher wesentlich schwieriger eine vertrauenswürdige Lösung zu finden.

2.1.3 Finite Element-Methoden

Die Methode der Finiten Elemente ist in der Ingenieurspraxis heute weit verbreitet. Die theoretischen Grundlagen sind in erster Linie in der Anwendung von Variationsprinzipien zu sehen. In der Strukturmechanik wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen oder allgemeiner das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie verwendet. Letzteres besagt, daß das Gesamtpotential eines elastischen Körpers in der Klasse der zulässigen Verschiebungen einen stationären Wert hat für die Verschiebungen, die dem Gleichgewichtszustand entsprechen. Das Potential der elastischen Platte mit kleinen Durchbiegungen ist:

$$\Pi = \frac{K}{2} \int \left\{ \left[\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \right]^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \left[\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right]^2 + 2 \cdot (1-\mu) \left[\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right]^2 - p \cdot w \right\} dF$$

Die Anwendung dieses Prinzips auf das Gesamtgebiet führt jedoch nur im elastischen Bereich zum Ziel, da zur Lösung der Variationsaufgabe Ansätze gemacht werden müssen. Man behilft sich deshalb damit, diese Ansätze nur für Teilgebiete zu formulieren und die Gesamtstruktur aus einer Reihe von Teilgebieten zusammenzusetzen. Man erhält dann ein lineares Gleichungssystem, das entweder durch Aufstellen der Gleichgewichts- oder der Kontinuitätsbedingungen entsteht.

Die zweite Form, die sogenannte Kraftgrößenformulierung, hat sich nicht durchgesetzt, da die Nachgiebigkeit im Falle sehr weicher Systeme gegen unendlich geht und daher zu numerischen Problemen führt. Dies kann so weit gehen, daß einzelne Elementmatrizen gar nicht mehr gebildet werden können, da verschiedene Terme entartet sind. Im Gegensatz dazu ist die erste Form des linearen Systems, die sogenannte Weggrößenformulierung, numerisch stabil für alle Fälle, bei denen die Steifigkeit kleiner als unendlich ist, was hier vorausgesetzt werden kann.

Eine interessante Eigenschaft dieser Gleichungssysteme ist darin zu sehen, daß der kleinste bzw. größte Eigenwert der Systemmatrix eine Aussage darüber erlaubt, ob das System stabil, labil oder instabil ist. Auf diese Eigenschaft wird im folgenden noch des öfteren Bezug genommen.

Die Lösung nichtlinearer Probleme mit Hilfe von FE-Methoden erfordert noch Vorüberlegungen hinsichtlich des anzuwendenden Iterationsverfahrens. Zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren stehen zur Verfügung, das Sekanten- und das Tangentenverfahren, außerdem gibt es eine Reihe von Varianten und Mischformen.

Beim Sekantenverfahren wird die Steifigkeit als Quotient der verallgemeinerten Belastung und der verallgemeinerten Verformung ermittelt. Die Konvergenz des Verfahrens ist recht gut, solange die Tangente nicht allzu stark von der Sekante abweicht. Sucht man jedoch Lösungen beispielsweise im Bereich des Scheitelpunktes der potentiellen Energie, so muß mit vergleichsweise schlechter Konvergenz gerechnet werden. Immerhin konvergiert das Verfahren auch in Bereichen mit negativer potentieller Energie, also wenn dem System zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes Energie zugeführt werden muß. Leider erlaubt das Sekantenverfahren jedoch nicht, aus den Eigenwerten der Systemmatrix auf die Stabilität des Systems zu schließen, da der kleinste Eigenwert sich Null um so mehr nähert, je kleiner die Belastung im Vergleich zur Verformung ist.

Um das Tangentenverfahren zu benutzen, schreibt man die Systemgleichung in der Form

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{p}$$

Aus der Lösung dieses Systems ergeben sich also für Zuwächse von \mathbf{p} Zuwächse von \mathbf{v} . Da es sich hier um ein sogenanntes Newtonsches Verfahren handelt, ist mindestens lineare Konvergenz zu erwarten, vorausgesetzt der Startvektor liegt in der Nähe der gesuchten Nullstelle. Das Tangentenverfahren hat die gewünschte Eigenschaft, aus den Eigenwerten der Systemmatrix Rückschlüsse auf die Stabilität des Systems zuzulassen. Bei seiner Anwendung sind jedoch einige Punkte zu berücksichtigen.

Erstens sind physikalisch instabile Systeme in der Tangentendarstellung auch numerisch instabil; es ist daher erforderlich, inkrementell vorzugehen und in der Umgebung des Stabilitätspunktes nach numerisch vertrauenswürdigen Gleichgewichtszuständen zu suchen. Der Vergleich zwischen größtem und kleinstem Eigenwert der Systemmatrix läßt Rückschlüsse auf die numerischen Genauigkeitsverluste zu, so daß die numerische von der strukturellen Stabilität abgespalten werden kann.

Zweitens gibt es immer die Möglichkeit, daß eng benachbarte Nullstellen vorliegen, weil in der Nähe eine Verzweigung des Lösungspfadcs eingetreten ist. Dieser Umstand ist in letzter Zeit Gegenstand intensiver Forschung gewesen. Mittlerweile zeichnen sich aber Lösungsansätze ab /Krp.82/, die es gestatten, von mehreren möglichen Nullstellen immer die mit dem geringsten Energieniveau anzusteuern. Deren Anwendung beschränkte sich bisher allerdings auf elastische und elastoplastische Materialien. Der Grundansatz beruht darauf, den Iterationsprozeß quasi viskos zu dämpfen. Die Berechnung der Dämpfung ist unabhängig vom verwendeten Werkstoffmodell, so daß dieses Verfahren auch für Stahlbeton angewandt werden kann, um einen monotonen Iterationsverlauf zu erzwingen. Die Herleitung der Grundgleichungen folgt im Abschnitt 3.

Aus den beiden genannten Iterationsverfahren sind einige Hybride entstanden, von denen zu sagen wäre, daß sie in erster Linie entwickelt wurden, um Rechenzeit einzusparen. Man nimmt an, daß der Aufbau und die Lösung eines Gleichungssystems von mindestens quadratischer Komplexität ist, während der Aufbau einer neuen rechten Seite nur lineare Komplexität aufweist. Dieser Umstand wird insofern ausgenutzt, als man versucht, so wenig Gleichungssysteme wie möglich aufzubauen, wobei Aussagen über die Stabilität der Struktur naturgemäß (siehe oben) nur noch schwer zu gewinnen sind. Solange also keine a priori Abschätzung über Verzweigungen und Instabilitäten vorliegt, kann ihre Anwendung nicht als gesichert angesehen werden.

Die Anwendung des Verfahrens auf nichtlineare Probleme, insbesondere auf geometrisch nichtlineare, bereitet ansonsten keinerlei Schwierigkeiten. Es genügt, den geometrisch nichtlinearen Anteil dem Verzerrungstensor hinzuzufügen und damit das Prinzip der virtuellen Verrückungen anzuschreiben. Die Aufstellung der erforderlichen linearen Gleichungen erfolgt in einem "integrierenden" Prozeß, so daß auch in numerischer Hinsicht ein gutartiges Verhalten zu erwarten ist. Damit kann das Verfahren als zur Lösung des gestellten Problems geeignet eingestuft werden.

Das Differenzenverfahren wird nicht verwendet, weil trotz höheren rechnerischen Aufwandes unschärfere Ergebnisse zu erwarten sind als bei der Finite Element-Methode. Die analytischen Methoden eignen sich zur Aufstellung von Näherungsverfahren. Außerdem sind sie sehr wertvoll bei Vergleichsrechnungen.

2.2 WERKSTOFFMODELLE

2.2.1 Beton

In der Vergangenheit wurden zahlreiche Werkstoffmodelle zur wirklichkeitsnahen Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens mehraxial beanspruchten Betons entwickelt, das grundsätzlich von folgenden Eigenschaften bestimmt wird:

- die Steifigkeit hängt von der Beanspruchung ab,
- die Steifigkeit hängt von der Zeit ab, in der die Beanspruchung einwirkt,
- die Steifigkeit hängt von der Temperatur ab,
- die Versagenskurve im Spannungsraum hängt vom Verhältnis der in orthogonalen Richtungen wirkenden Beanspruchungen und der Temperatur ab,
- die Versagenskurve im Dehnungsraum hängt vom Verhältnis der in orthogonalen Richtungen wirkenden Beanspruchungen und der Temperatur ab.

Im folgenden soll nun untersucht werden, inwieweit es möglich ist, diese genannten Eigenschaften in einem Finiten Weggrößenmodell zu berücksichtigen. Es bieten sich zwei unterschiedliche Wege an, indem man zur Aufstellung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung entweder

- Kompressions- und Schubmodul oder
- Elastizitätsmodul und Querdehnzahl

verwendet.

Für Kompressions- und Schubmodul existieren sehr einfache Abhängigkeiten von der Oktaederschubverzerrung, die Kupfer in /Kup.73/ dargestellt hat. Das von Kupfer vorgeschlagene Modell hat jedoch zwei Nachteile. Erstens handelt es sich um ein isotropes Modell, bei dem die Steifigkeiten in den beiden Hauptbeanspruchungsrichtungen wegen ihrer Abhängigkeit von der Oktaederschubverzerrung immer gleich sind. Damit widerspricht es im Grunde auch Kupfers eigenen Versuchen. Dies kann hier nicht hingenommen werden. Zweitens muß die K-G Darstellung zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix wieder in eine E- μ Darstellung überführt werden. Bei diesem Vorgang kommt es zu einer Division, die zumindest in einem Tangentenverfahren nicht immer eindeutig durchführbar ist. Zudem fehlt die Formulierung der K-G-Moduli für den abfallenden Ast.

Die E- μ Darstellung vermeidet diese Schwierigkeiten. Von Link /Lin.76/ ist eine Formulierung bekannt, bei der in Abhängigkeit von den bezogenen Hauptspannungen die Tangentenwerte von E-Modul und Querdehnzahl berechnet werden. In einem zweiten Schritt wird dann überprüft, ob die Bruchspannung überschritten worden ist. Die verwendeten funktionalen Ansätze stellen letztlich eine Interpolation der Kupferschen Versuche dar, so daß sie insofern als abgesichert gelten können. Nachteilig für die Anwendung in einem Weggrößenmodell ist die spannungsabhängige Darstellung, die es nicht ermöglicht, auf den "abfallenden Ast" der Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu kommen. Außerdem ist ein zusätzlicher Iterationsprozeß erforderlich.

Ein Modell, das den direkten Schluß von den mehraxialen Verzerrungen auf Steifigkeiten und Spannungen zuläßt und nicht auf den ansteigenden Ast der Spannungs-Dehnungs-Beziehung beschränkt ist, steht zur Zeit nicht zu Verfügung. Daher wird im Abschnitt 4 ein solches Modell hergeleitet.

2.2.2 Stahl

Im Stahlbetonbau wird der Bewehrungsstahl immer nur einaxial beansprucht. Es genügt also eine einfache Formulierung der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Ausreichend genaue, auch thermische Einflüsse berücksichtigende Modelle sind bereits entwickelt worden. In jüngster Zeit wurde von Richter /Ric.86/ ein Modell bereitgestellt, das insbesondere für thermisch beanspruchten Stahl eine gute Übereinstimmung mit Versuchen zeigt. Das Modell genügt in vollem Umfang den Anforderungen für einen Einbau in ein Tangenten-Weggrößenverfahren.

2.3 VERSAGENSKRITERIEN

Um das Versagen von Beton- und Stahlbetonkonstruktionen zu beschreiben, sind bisher eine ganze Reihe von Kriterien formuliert worden. Die DIN 1045 beispielsweise fordert eine Dehnungsbeschränkung für die gedrückten Fasern von 3.5 mm/m, die an allen Stellen der Konstruktion im Versagenzustand eingehalten werden muß. Dies kann man unter dem Oberbegriff lokales Versagen fassen. Außerdem wird gefordert, daß das Bauwerk unter ν -facher Gebrauchslast nicht instabil werden darf. Dies kann unter dem Oberbegriff Systemversagen gefaßt werden.

Bei Konstruktionen, die einer Brandbeanspruchung unterworfen werden sollen, ist eine Dehnungsbeschränkung auf 3.5 mm/m nicht sinnvoll. Hier müssen die Kriterien der DIN 4102 herangezogen werden. Diese fordert unter anderem, daß die dem Brandherd abgewandte Bauteiloberfläche eine Temperaturerhöhung von im Mittel nicht mehr als 140 K erfährt. Außerdem muß die Gebrauchslast auch lokal noch aufgenommen werden können. Daraus ist für die Struktur abzuleiten, daß die Brandbeanspruchung nicht zu großflächigen Zerstörungen des Tragquerschnittes führen darf.

Darüber hinaus sollen bei überwiegend auf Biegung beanspruchten Bauteilen sowohl die Durchbiegung als auch die Durch-

biegungsgeschwindigkeit gewisse Grenzwerte nicht überschreiten. Dieses Kriterium fällt wieder unter den Oberbegriff Systemversagen.

Für Berechnungen sind die genannten Versagenskriterien jedoch nur bedingt anwendbar. So kann lokales Versagen im Brand durch Abplatzungen ausgelöst werden, deren Eintreten von vielen schwer erfaßbaren Parametern abhängt. Mit dem Einfluß der einzelnen Kriterien auf die angenommene Versagenszeit beschäftigt sich Abschnitt 6.

Das vorgeschlagene Rechenmodell hat die Eigenschaft, weder bei lokalem noch bei globalem Versagen mit einem Abbruch des Rechenlaufes zu reagieren. Die grundlegenden Parameter für eine nachträgliche Ermittlung aller genannten Kriterien werden jedoch ausgegeben, so daß die Entscheidung, ob Versagen eingetreten ist, letztlich vom Benutzer gefällt werden muß.

3 STRUKTURMODELL DER DÜNNEN PLATTE MIT GROSSEN VERFORMUNGEN

3.1 HERLEITUNG DER TANGENTENMATRIX

Es wird angenommen, daß ein Näherungsansatz für das im Elementbereich vorhandene Verschiebungsfeld vorliegt:

$$\underline{v} = \underline{k}_v^T \cdot \underline{f}_v$$

Darin sind \underline{k}_v die Koeffizienten der Formfunktionen und \underline{f}_v die Formfunktionen. Die Formfunktionen sind so zu wählen, daß sie linear unabhängig sind, das heißt, daß die Wronski-Determinante nicht verschwindet. Die \underline{k}_v sind mit den Knotenparametern \underline{k}_p linear verknüpft und zwar nach der Beziehung:

$$\underline{k}_v = \underline{G} \cdot \underline{k}_p$$

\underline{G} wird Geometriematrix genannt. Damit kann jetzt die Beziehung zwischen den im Vektor $\underline{\epsilon}$ zusammengefaßten Verzerrungen und den Koeffizienten der Formfunktionen \underline{k}_v hergeleitet werden.

$$\underline{\epsilon} = \underline{B}_L \cdot \underline{k}_v + \underline{B}_{NL} \cdot \underline{k}_v + \underline{\epsilon}_0$$

Die Matrix \underline{B} verknüpft die Koeffizienten der Formfunktionen mit den Verzerrungen. Der Index L kennzeichnet hierbei den geometrisch linearen, der Index NL den geometrisch nichtlinearen Anteil. In $\underline{\epsilon}_0$ sind die Anfangsverzerrungen zusammengefaßt. Hier sind sie nur der Vollständigkeit halber aufgeführt, für die weitere Betrachtung sind Anfangsverzerrungen und Anfangsspannungen ohne Belang. Der Spannungsvektor $\underline{\sigma}$ ist mit den Dehnungen über die Werkstoffmatrix \underline{D} verknüpft.

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{D} \cdot (\underline{B}_L + \underline{B}_{NL}) \cdot \underline{k}_v$$

Nun kann das Prinzip der virtuellen Verrückungen angewandt werden. Es besagt, daß bei einer virtuellen Verschiebung $\delta \underline{k}_V$ die Summe der Potentiale der äußeren Lasten und der inneren Energie verschwindet.

$$\int \delta \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{q} \, dV = \underline{p} \cdot \delta \underline{k}_V$$

Dabei bedeutet $\delta \underline{k}_V$ die Änderung der Koeffizienten der Formfunktionen bei einer virtuellen Änderung der Knotenkräfte. \underline{p} ist der Vektor der Ungleichgewichtskräfte transformiert in das Koordinatensystem der \underline{f}_V . Betrachten wir nun die virtuelle Änderung der Verzerrung.

$$\delta \underline{\epsilon} = \underline{B}_L \cdot \delta \underline{k}_V + \underline{B}_{NL} \cdot \delta \underline{k}_V + \delta \underline{B}_{NL} \cdot \underline{k}_V$$

Da \underline{B}_{NL} eine lineare Funktion von \underline{k}_V ist, kann man schreiben:

$$\delta \underline{B}_{NL} \cdot \underline{k}_V = \underline{B}_{NL} \cdot \delta \underline{k}_V$$

und somit ist

$$\delta \underline{\epsilon} = \underline{B}_L \cdot \delta \underline{k}_V + 2 \cdot \underline{B}_{NL} \cdot \delta \underline{k}_V \quad \text{und}$$

$$\delta^2 \underline{\epsilon} = 2 \cdot \underline{B}_{NL} \cdot \delta \underline{k}_V$$

Für die virtuelle Änderung der Spannung \underline{q} gilt:

$$\delta \underline{q} = \underline{D} \cdot \delta \underline{\epsilon}$$

Damit gelingt es nun die Iterationsbeziehung

$$\underline{K} \cdot \delta \underline{k}_V = \delta \underline{p}$$

für das Tangentenverfahren zu formulieren. Diese Beziehung besagt, daß die Änderung der Verformung $\delta \underline{k}_V$ aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems gewonnen werden kann, wobei die Koeffizientenmatrix durch die Tangentensteifigkeitsmatrix \underline{K} und die

rechte Seite durch die Ungleichgewichtskräfte $\delta \underline{p}$ gebildet werden. Nun kann wieder das Prinzip der virtuellen Verrückungen angeschlossen werden, um die Tangentensteifigkeitsmatrix herzuleiten:

$$\int \left\{ \delta^2 \underline{\epsilon} / \delta \underline{k}_V^2 \cdot \underline{\sigma} + \delta \underline{\epsilon} / \delta \underline{k}_V \cdot \delta \underline{\sigma} / \delta \underline{k}_V \right\} dV \cdot \delta \underline{k}_V = \delta \underline{p}$$

Daraus kann die Steifigkeitsmatrix durch Einsetzen der Unbekannten hergeleitet werden.

$$\underline{K} = \int \left\{ \delta \left((2 \cdot \underline{B}_{NL})^T \cdot \underline{\sigma} \right) / \delta \underline{k}_V + (\underline{B}_L + 2 \cdot \underline{B}_{NL})^T \cdot \underline{D} \cdot (\underline{B}_L + 2 \cdot \underline{B}_{NL}) \right\} dV$$

Während im ersten Term quasi die Anteile der Theorie II. Ordnung auftauchen, sind im zweiten Term der lineare Anteil und der Anteil der großen Verformungen zusammengefaßt.

Die inneren Kräfte werden berechnet zu:

$$\underline{p}_i = \int (\underline{B}_L + 2 \cdot \underline{B}_{NL})^T \cdot \underline{\sigma} dV$$

3.2 DER NICHTLINEARE VERZERRUNGSZUSTAND

Als nächstes betrachten wir den Verzerrungszustand des Plattenscheibenelementes. Die Verzerrung des differentiellen Elementes setzt sich aus einem linearen und einem nichtlinearen Anteil zusammen. Der lineare Anteil lautet:

$$\underline{\epsilon}_l = \left[\begin{array}{ll} du/dx & - \quad z \cdot d^2w/dx^2 \\ dv/dy & - \quad z \cdot d^2w/dy^2 \\ du/dy + dv/dx & - \quad 2 \cdot z \cdot d^2w/(dx \cdot dy) \end{array} \right]$$

Wie man sieht, besteht er aus den Ableitungen der Verschiebungen in x- und y-Richtung sowie der Krümmung multipliziert mit dem Abstand von der Bezugsebene.

Im verformten Zustand nimmt das differentielle Element dx die Länge ds an. Die aus der Verformung resultierenden Verzerrungen sind demnach $\epsilon(v) = (ds - dx)/dx = ds/dx - 1$. Die euklidische Länge von ds wird berechnet zu:

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2 + dv^2 + dw^2}$$

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + (du/dx)^2 + (dv/dx)^2 + (dw/dx)^2}$$

Dieser Ausdruck kann in eine Reihe entwickelt werden und nimmt dann folgende Gestalt an:

$$ds = dx \cdot \left[1 + \frac{1}{2} (du/dx)^2 - \frac{1}{8} (du/dx)^4 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (dv/dx)^2 - \frac{1}{8} (dv/dx)^4 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (dw/dx)^2 - \frac{1}{8} (dw/dx)^4 + \dots \right]$$

Unter der Voraussetzung, daß die Verzerrungen klein gegenüber 1 sind, kann diese Reihe jeweils nach dem zweiten Glied abgebrochen werden. Man erhält dann den sogenannten Green'schen Verzerrungstensor.

Der nichtlineare Anteil der Verzerrungen lautet demnach:

$$\epsilon_{NL} = \left[\begin{array}{ccc} ((du/dx)^2 + (dv/dx)^2 + (dw/dx)^2)/2 \\ ((du/dy)^2 + (dv/dy)^2 + (dw/dy)^2)/2 \\ du/dx \cdot du/dy + dv/dx \cdot dv/dy + dw/dx \cdot dw/dy \end{array} \right]$$

Der nichtlineare Verzerrungsvektor enthält also sämtliche relevanten Anteile des Greenschen Verzerrungstensors in inkrementeller Schreibweise.

3.3 ELEMENTGEOMETRIE UND FORMFUNKTIONEN

Als nächstes müssen die Ansätze für die Formfunktionen gewählt werden. Dazu sind einige Vorüberlegungen erforderlich.

Die Formfunktionen der Biegefläche und ihre Normalableitung soll an den Elementrändern eindeutig sein. Dies ist eine Grundforderung, die die Konvergenz des Verfahrens der Finiten Elemente sicherstellt. Wird sie erfüllt, so tritt in der Biegefläche kein Sprung und kein Knick auf, die Biegefläche ist also stetig.

Aus der Stetigkeitsforderung für die Biegefläche können Anzahl und Art der Knotenfreiheitsgrade hergeleitet werden. Für einen Elementrand, der parallel zur x-Achsen liegt, gilt:

- die Normalenrichtung ist gleich der Richtung der y-Achse.
- als Knotenparameter müssen w und dw/dy herangezogen werden.

Gleiche Überlegungen gelten für die y-Achse, so daß schließlich in jedem Knoten mindestens die Durchbiegung und deren erste Ableitung nach den Koordinaten als Parameter auftauchen. Da die Neigung der Biegefläche entlang des Elementrandes jedoch veränderlich ist, erhält man in den Knoten einen Widerspruch bezüglich der gemischten Ableitung zweiter Ordnung. Um dies zu vermeiden, fügt man sie am einfachsten den Knotenparametern hinzu.

Die Erweiterung auf Knoten, in denen Elementränder beliebiger Richtung zusammenstoßen, ist im allgemeinen nicht erlaubt. Die Stetigkeitsforderung für die Biegefläche läßt sich hier nur erfüllen, wenn man alle Ableitungen zweiter Ordnung als Knoten-

parameter berücksichtigt. Damit werden jedoch physikalische Forderungen verletzt.

Wenn sich nämlich die Steifigkeit von Element zu Element verändert, was für Stahlbeton ja typisch ist, so würde hier infolge der Gleichheit der Krümmung auf dem Rand ein Sprung im Momentenverlauf auftreten. Dies kann im allgemeinen nicht hingenommen werden, wenngleich eine Anwendung bei homogenen Strukturen sicherlich erfolgversprechend ist.

Das gern verwendete konforme Dreieckelement vom Typ T18 oder T21 ist also, aufgrund vorgenannter Schwierigkeiten, zur Lösung der gestellten Aufgabe nicht geeignet, während ein einfaches konformes Rechteckelement mit vier Knoten alle Anforderungen erfüllt.

Das vorgeschlagene Element ist daher ein Viereckelement mit den Knotenparametern des Knotens i :

$$kP_i = (u, v, w, \delta w/\delta x, \delta w/\delta y, \delta^2 w/\delta x \delta y) \quad \text{mit } i = 1..4$$

Die Biegefläche wird durch einen vollständigen Polynomansatz dritten Grades beschrieben, während die Verschiebungen in der Elementebene durch vollständige Polynomansätze ersten Grades bestimmt werden.

$$u(x,y) = u_0 + u_1 \cdot x + u_2 \cdot y + u_3 \cdot x \cdot y$$

$$v(x,y) = v_0 + v_1 \cdot x + v_2 \cdot y + v_3 \cdot x \cdot y$$

$$w(x,y) = w_0 + w_1 \cdot x + w_2 \cdot x^2 + w_3 \cdot x^3 + w_4 \cdot y + w_5 \cdot x \cdot y + w_6 \cdot x^2 \cdot y + w_7 \cdot x^3 \cdot y + w_8 \cdot y^2 + w_9 \cdot x \cdot y^2 + w_{10} \cdot x^2 \cdot y^2 + w_{11} \cdot x^3 \cdot y^2 + w_{12} \cdot y^3 + w_{13} \cdot x \cdot y^3 + w_{14} \cdot x^2 \cdot y^3 + w_{15} \cdot x^3 \cdot y^3$$

Das Element ist konform, wenn die Elementränder parallel zu den Koordinatenachsen sind. Ist dies nicht der Fall, so treten in der Biegefläche Knicke auf, die Konformität geht also verloren. Für nicht konforme Elemente gilt, daß sie unter Umständen konvergieren, wenn die Elemententeilung unendlich fein gewählt wird und demzufolge die Knicke bzw. Sprünge der Lösung unendlich klein werden. Leider hat diese Aussage keine praktische Bedeutung, da eine unendlich feine Elementierung nicht denkbar ist. Daher muß in jedem Einzelfall, in dem die Konformität verletzt wird, die Genauigkeit der Lösung analytisch oder durch andere Verfahren abgeschätzt werden.

3.4 AUFSTELLEN DER BL-, BNL- UND DER KS-MATRIX

Die Ermittlung der Grundwerte der Steifigkeitsmatrix kann heute mit Hilfe des Programmes REDUCE erfolgen, das in der Lage ist, mathematisch-analytisch vorzugehen /RUM.85/. Der Datensatz für die Bestimmung der Matrizen sieht wie folgt aus:

```

COMMENT
HERLEITUNG DER BL DER BNL UND DER KS MATRIX FUER DAS
QUADRATISCHE PLATTENSCHIEBENELEMENT
KIEL
18.10.85
;
KORDER X,Y,Z;
OFF ALLFAC;
MATRIX KU(1,4),KV(1,4),KW(1,16),FU(1,4),FV(1,4),FW(1,16),
      BL(3,24),BNL(3,24),EPSL(3,1),EPSNL(3,1),KV(1,24),
      SIG(3,1),BMS(24,1),KS(24,24);
KU := MAT((U1,U2,U3,U4));
KV := MAT((V1,V2,V3,V4));
KW :=
MAT((W1,W2,W3,W4,W5,W6,W7,W8,W9,W10,W11,W12,W13,W14,W15,W16));
FU := MAT((1,X,Y,X*Y));
FV := MAT((1,X,Y,X*Y));
FW := MAT((1      ,X      ,X**2      ,X**3      ,
            Y      ,X*Y    ,X**2*Y    ,X**3*Y    ,

```

```

        Y**2,X*Y**2,X**2*Y**2,X**3*Y**2,
        Y**3,X*Y**3,X**2*Y**3,X**3*Y**3));
SIG := MAT((SX),(SY),(SXY));
U := KU*TP(FU);
V := KV*TP(FV);
W := KW*TP(FW);
KV := MAT((U1,U2,U3,U4,
           V1,V2,V3,V4,
           W1,W2,W3,W4,W5,W6,W7,W8,W9,W10,W11,W12,W13,W14,W15,W16));
EPSL(1,1) := DF(U,X) - Z*DF(W,X,2);
EPSL(2,1) := DF(V,Y) - Z*DF(W,Y,2);
EPSL(3,1) := DF(U,Y) + DF(V,X) - 2*Z*DF(W,X,1,Y,1);
EPSNL(1,1) := DF(U,X)**2/2 + DF(V,X)**2/2 + DF(W,X)**2/2;
EPSNL(2,1) := DF(U,Y)**2/2 + DF(V,Y)**2/2 + DF(W,Y)**2/2;
EPSNL(3,1) := DF(U,X)*DF(U,Y) + DF(V,X)*DF(V,Y) +
             DF(W,X)*DF(W,Y);
FOR N := 1 STEP 1 UNTIL 3 DO BEGIN;
    FOR M := 1 STEP 1 UNTIL 24 DO BEGIN;
        BL(N,M) := DF(EPSL(N,1),KV(1,M));
        BNL(N,M) := DF(EPSNL(N,1),KV(1,M));
    END;
END;
BMS := TP(BNL)*SIG;
FOR N := 1 STEP 1 UNTIL 24 DO BEGIN;
    FOR M := 1 STEP 1 UNTIL 24 DO BEGIN;
        KS(N,M) := 2*DF(BMS(N,1),KV(1,M));
    END;
END;
FOR N := 1 STEP 1 UNTIL 3 DO BEGIN;
    FOR M := 1 STEP 1 UNTIL 24 DO BEGIN;
        WRITE "      BL(",M,",",N,") = ",BL(N,M);
    END;
END;
FOR N := 1 STEP 1 UNTIL 3 DO BEGIN;
    FOR M := 1 STEP 1 UNTIL 24 DO BEGIN;
        WRITE "      BNL(",M,",",N,") = ",BNL(N,M);
    END;
END;
END;

```

```

FOR N := 1 STEP 1 UNTIL 24 DO BEGIN;
  FOR M := N STEP 1 UNTIL 24 DO BEGIN;
    WRITE "      KS(",N,",",",M,") = ",KS(N,M);
  END;
END;

```

Damit wurden die im Anhang aufgeführten Elementmatrizen berechnet. Es sind jeweils nur die von NULL verschiedenen Matrixelemente angeführt. Die KS-Matrix ist symmetrisch, daher genügt es, nur die untere Dreiecksmatrix mitzuteilen.

3.5 INTEGRATION DER ELEMENTMATRIX

Theoretisch besteht die Möglichkeit, die Elementsteifigkeitsmatrix unter Verwendung der oben hergeleiteten Matrizen mit Hilfe des Programmes REDUCE analytisch zu integrieren. Wegen zu großen Speicherbedarfs ist der Versuch jedoch gescheitert. Andererseits ist die analytische Lösung in diesem Fall nicht unbedingt die beste Lösung des Integrationsproblems.

Die numerische Integration bietet nämlich die Möglichkeit, durch Verwendung von mehr Stützstellen als zur Integration des Volumens unbedingt erforderlich sind, die Genauigkeit bei nicht-linearen Materialproblemen deutlich zu erhöhen. Das Viereckelement bringt hierzu ideale Voraussetzungen mit.

Durch Verwendung der Integrationsformeln vom Gauss-Legendre-Typ gelingt es, mit einem Minimum an Stützstellen auszukommen, da mit n Stützstellen ein Polynom vom Grad $(2n-1)$ noch exakt integriert wird. Die gewählten Formfunktionen sind maximal vom Grad 3, so daß in der Steifigkeitsmatrix Terme vom Grad 6 auftreten. Daher genügen 4 Stützstellen je Koordinatenrichtung der Grundebene zur exakten Berechnung der Integrale.

Normal zur Grundebene, in Richtung der z -Achse also, wird ebenfalls mit dem Gauss-Legendre-Verfahren integriert. Es ergibt

sich damit quasi ein Schichtenmodell, die einzelnen Schichten werden aber mit Gewichten belegt.

Die Genauigkeit läßt sich leider nicht einfach abschätzen, da die Stammfunktion der Integrale noch nicht bekannt ist. Man kann aber die Fehlerordnung des Verfahrens im Intervall $[-h, h]$ mit $O(h^{2n+3})$ für $n+1$ Stützstellen allgemein angeben. Für ein rein elastisches Materialgesetz und allenfalls kubische Temperaturverteilung gilt daher, daß 4 Stützstellen ausreichend sind, um die Integrale exakt zu berechnen. Damit ergibt sich die minimale Stützstellenanzahl zu $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$.

In einem Programm sollte zur Erhöhung der Flexibilität eine Tabelle von Stützstellen für

$$n = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$$

mit normierten Koordinaten und den zugehörigen Gewichten fest eingegeben werden, so daß der Benutzer die Möglichkeit hat, die Genauigkeit der Integration selbst zu wählen. Es muß jedoch unbedingt darauf geachtet werden, bei der Integration über die Plattendicke nicht zu viele Stützstellen zu wählen. Die der Gauss-Legendre-Integration zugrunde liegenden Polynome neigen nämlich wie alle Polynome zum Schwingen, was die Genauigkeit der Lösung wieder beeinträchtigen könnte. Allgemein gilt jedoch, daß beim reinen Schichtenmodell lediglich eine globale Fehlerordnung von $O(h)$ erreicht wird. Hier ergibt sich also ein linearer Zusammenhang zwischen Genauigkeit und Anzahl der Stützstellen und man erkennt die Überlegenheit des gewählten Verfahrens.

3.6 AUFBAU DER SYSTEMMATRIX, LÖSUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS UND QUASI VISKOSER DÄMPFER

Mit Hilfe der eingegebenen Inzidenzmatrix werden die Elementmatrizen zur Systemmatrix kompiliert. Dies kann auf zwei verschiedenen Wegen durchgeführt werden:

- mit Priorität der Elemente oder
- mit Priorität der Knoten.

Die zweite Möglichkeit hat den Vorteil, daß die Kompilation auf Hilfsspeichern mit höherer signifikanter Stellenzahl erfolgen kann. Damit wird die Gefahr der Auslöschung signifikanter Stellen vermindert, die entsteht, wenn annähernd gleichgroße Zahlen unterschiedlichen Vorzeichens addiert werden. Speicherbedarf und Rechenzeit steigen dabei nur geringfügig an.

Nach Einbau der Randbedingungen wird das lineare Gleichungssystem mit dem Unterprogramm BANDV aus EISPACK /EIS.76/ gelöst. Dieses Unterprogramm erhielt den Vorzug vor anderen vergleichbaren, weil es auch bei nicht positiv definiten Matrizen eingesetzt werden kann.

Die Analyse physikalisch nichtlinearer Systeme unter Hochtemperaturbeanspruchung mit dem Tangentenverfahren birgt die Gefahr einer unkontrollierten Schwingung des Iterationsverlaufes. Dies ist dadurch begründet, daß die Temperaturbeanspruchung grundsätzlich als Zwangsbeanspruchung aufgebracht wird, der sich das System dann im Laufe der Iteration nach Möglichkeit durch Verformung zu entziehen versucht. Hierzu bestehen oft eine Vielzahl von Möglichkeiten, deren Suche den angesprochenen unkontrollierten Iterationsverlauf bewirkt.

Begegnet man dem durch Belastung in kleinsten Inkrementen, so erhöht dies die Rechenzeit unerträglich, was aber vermieden werden kann, wenn der in /Krp.82/ beschriebene quasi-viskose Dämpfer verwendet wird. Die Systemgleichung wird zu diesem Zweck in folgender Form angeschrieben:

$$\underline{K} \cdot \underline{kv} + \underline{V} \cdot \dot{\underline{kv}} = \underline{p}$$

Hiermit wird ein Kriechprozeß mit geschwindigkeitsabhängiger Dämpfung beschrieben, \underline{V} ist die Dämpfungsmatrix. Nimmt man nun an, daß im Zeitintervall $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ der Verformungsvektor

linear vom Zustand $i-1$ in den Zustand i übergeht und daß während dieser Zeit die Ungleichgewichtskräfte \underline{p} ebenfalls linear vom Zustand $i-1$ in den Zustand i übergehen, so kann man die Systemgleichung nach /Krp.82/ in folgende Form bringen:

$$[\underline{K} \cdot \zeta + \underline{V} / \Delta t] \cdot \underline{kv} = \underline{p}$$

Hierin ist ζ eine auf das Intervall Δt normierte Zeitvariable und kann damit jede Größe zwischen 0 und 1 annehmen. Für $\zeta = 1$ ergibt sich das stabilste Iterationsverfahren, während für $\zeta < 0,5$ die Stabilität nicht sichergestellt ist. Die Größe Δt ist von fiktiver Natur und braucht nicht explizit berücksichtigt zu werden.

Abschließend muß noch die Dämpfungsmatrix bestimmt werden. Sie beeinflußt durch die Verteilung der Viskosität über das Tragwerk den lokalen Zuwachs von \underline{kv} . Bei konstantem \underline{V} ergibt sich je nach Größe über- oder unterdämpftes Verhalten, wobei sich Gleichgewicht allgemein nur für $t = \infty$ einstellt.

Wählt man \underline{V} jedoch in Abhängigkeit von den Ungleichgewichtskräften, so kann sich das Gleichgewicht früher einstellen. Hierbei genügt es, \underline{V} als Diagonalmatrix zu formulieren. Also ist:

$$\underline{V}_{jj} = \eta \cdot |\underline{p}_j / \underline{kv}_j| \text{ mit } |\underline{kv}_j| > \text{tol}$$

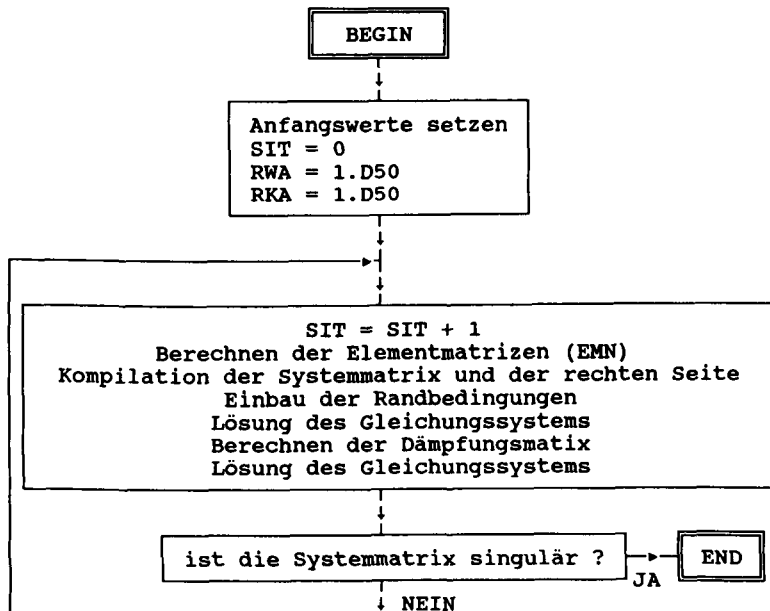
Die Schranke tol soll verhindern, daß unnötig große Dämpfungsglieder gebildet werden, während η ein Steuerparameter ist, mit dem die Konvergenzgeschwindigkeit beeinflußt wird. Wie man leicht sieht, hat diese Formulierung die Eigenschaft, mit zunehmender Näherung an den Gleichgewichtszustand kleinere Dämpfungsglieder zu bilden, so daß bei Gleichgewicht die Dämpfung verschwindet und das System ruht, das Gleichgewicht also statisch ist.

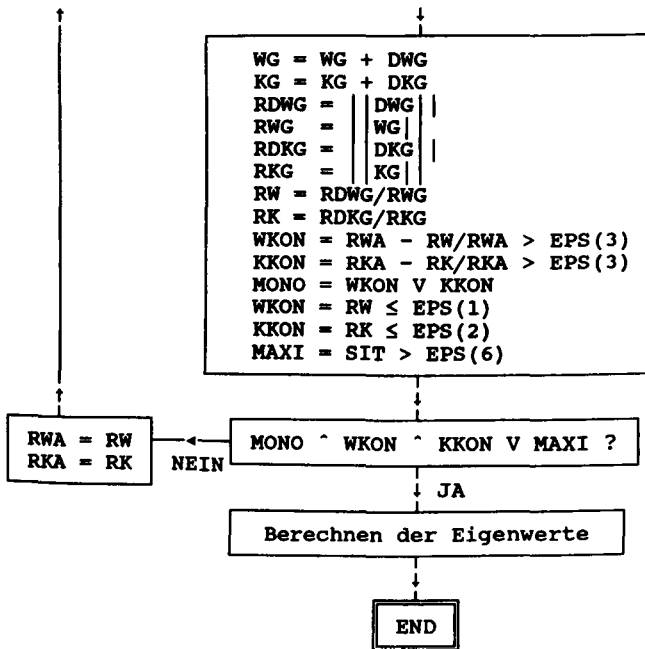
3.7 ALGORITHMISCHE REALISIERUNG

Die vorgenannte theoretische Herleitung wurde zu zwei Algorithmen verarbeitet, die im folgenden dargestellt werden sollen.

SYS: Newton-Raphson-Iteration für das Gesamtsystem

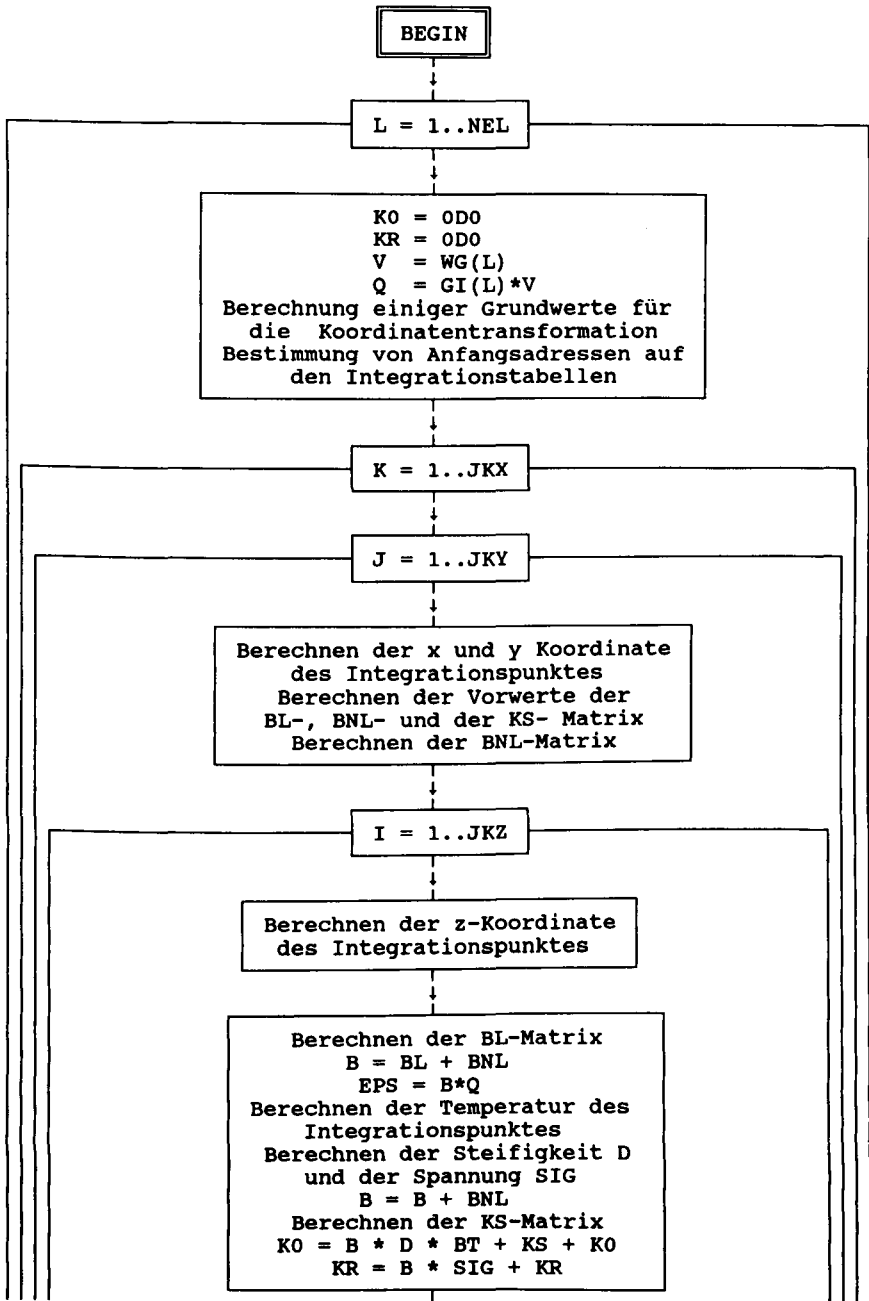
Benutzte Variablen:
SIT : Iterationsschrittzähler
RW : erreichte Genauigkeit des WG-Vektors
RK : erreichte Genauigkeit des KG-Vektors
RWA : Vorgängerwert der erreichten Genauigkeit des WG-Vektors
RKA : " " " " " KG-Vektors
EPS : Vektor der vorgegebenen Genauigkeiten
WG : Weggrößenvektor
KG : Kraftgrößenvektor
DWG : Weggrößenänderungsvektor
DKG : Kraftgrößenänderungsvektor

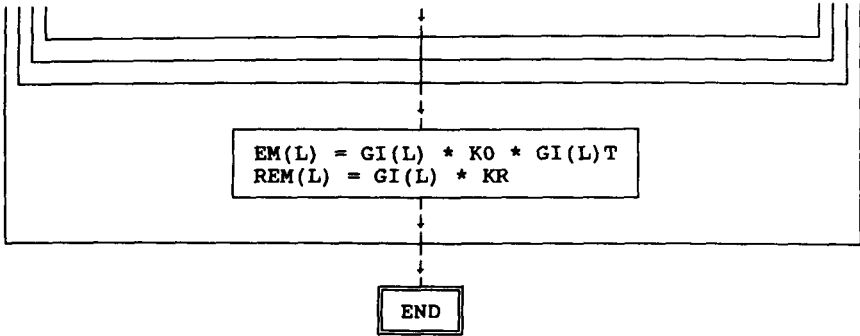




EMN: Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix und der rechten Seite

- Benutzte Variablen:
- EM : Elementmatrix
 - REM : Rechte Seite
 - KO : Elementmatrix in Formfunktionskoordinaten
 - KR : Rechte Seite in Formfunktionskoordinaten
 - GI : Inverse der G-Matrix
 - V : Vektor der Elementverschiebungen
 - Q : Koeffizienten der Formfunktionen
 - EPS : Vektor der Integrationspunktverzerrungen
 - SIG : Vektor der Integrationspunktspannungen
 - D : Matrix der Integrationspunktsteifigkeiten
 - B : B-Matrix, hängt ab von BL und BNL
 - KS : KS-Matrix
 - NEL : Anzahl der Elemente
 - JK.. : Anzahl der Integrationspunkte in der jeweiligen Richtung





4 WERKSTOFFMODELLE

4.1 BETON

4.1.1 Grundlagen

Beton ist ein heterogener Werkstoff, dessen Verhalten bei Beanspruchung durch Last, Temperatur und Zeit von so unterschiedlichen Einflüssen abhängt wie Zuschlagsart, Sieblinie, Zementart, Zementgehalt, Wasser/Zement-Wert, Belastungsgeschwindigkeit, Belastungsgeschichte, Aufheizgeschwindigkeit, Temperaturgeschichte und Alter. Die Erfassung dieser Einflußgrößen in einem Werkstoffmodell ist naturgemäß schwierig und erfordert eine Eingrenzung. Außerdem sind die Reaktionen des natürlichen Werkstoffs auf Änderungen dieser Einflußgrößen mehr stochastischer als deterministischer Natur. Ein Rechenmodell braucht jedoch einen deterministischen Kern, der dann durch eine stochastische Hülle erweitert werden kann. Im vorliegenden Fall ist der deterministische Kern jedoch zu komplex, als daß an die Stochastik zu denken wäre.

Das vorgeschlagene Modell soll unter folgenden Randbedingungen angewandt werden können:

- Normalbeton mit quarzitischem Zuschlag,
- monotone Verformung und
- monotone Temperaturbeanspruchung.

Die Zuschlagsart beeinflusst im wesentlichen nur den funktionalen Verlauf der noch aufzustellenden Arbeitslinie. Änderungen der sie bestimmenden Parameter sind in jedem Rechenmodell leicht möglich. Die Monotonieforderung für Verformung und Tem-

peratur ist hingegen eine grundsätzliche Einschränkung, die einer Erläuterung bedarf.

Bei monotoner Verformung hat die Arbeitslinie des Betons einen im Druck- und im Zugbereich stetigen Verlauf. Sie kann also relativ einfach durch stetige Funktionen, etwa Polynome, beschrieben werden. Ist die Verformung nicht monoton, so ist diese Formulierung so nicht mehr möglich, statt dessen ist eine differentielle Darstellung der Gestalt

$$d\sigma/d\epsilon + \sigma/C = E$$

erforderlich. Hier handelt es sich offensichtlich um eine inhomogene, lineare Differentialgleichung. Schreibt man sie in der Form:

$$d\sigma = E \cdot d\epsilon - \sigma \cdot |d\epsilon|/C,$$

so zerfällt die DGL in einen reversiblen und einen irreversiblen Teil. Auf dieser Überlegung basieren die Arbeiten von Valanis und später Bazant. Die Variable $|d\epsilon|$ hat dabei die Eigenschaft, wie die Zeit monoton zu wachsen, weshalb man auch von intrinsischer Zeit spricht. Bei der Auswertung dieser DGL ist zu beachten, daß sich auch bei monotoner Veränderung der Schnittgrößen die Dehnung einzelner Fasern nicht monoton verhalten muß. Daher führt nur eine mit kleinsten Schritten durchgeführte Änderung der Beanspruchungen zu einem vertrauenswürdigen Ergebnis, was jedoch naturgemäß mit sehr hohem Rechenaufwand verbunden ist.

Bedenkt man weiterhin, daß die experimentelle Erforschung des Werkstoffes Beton bei gleichzeitiger Einwirkung von Temperatur und nicht monotoner mehraxialer Belastung noch nicht begonnen hat, so kann die Entwicklung eines Rechenmodells, das beide Effekte berücksichtigt, nicht erfolgreich sein.

Die Monotonieforderung für den Temperaturverlauf resultiert aus ähnlichen Überlegungen. Auch hier mangelt es bedauerlicherweise an gesicherten Meßwerten. Aber gesichert ist immerhin, daß

auch reine Temperaturbeanspruchung im Beton irreversible Veränderungen auslöst; diese sind im Augenblick jedoch nicht quantifizierbar.

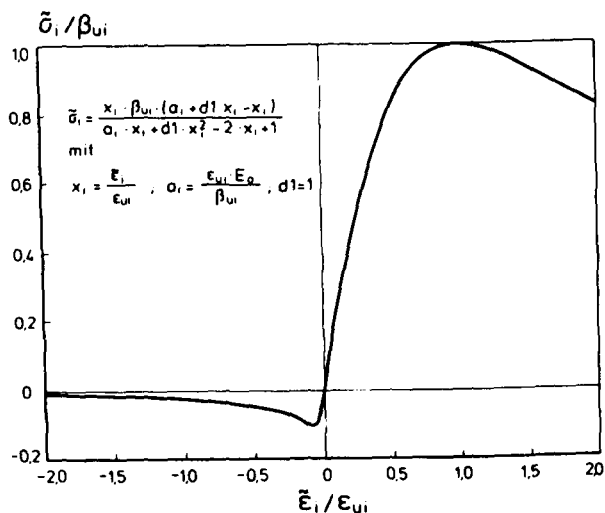


Bild 4.0: Arbeitslinie

Die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung erfolgt in dem vorgeschlagene Modell mit Hilfe einer einaxialen Arbeitslinie, deren Verlauf und funktionale Beschreibung auf Bild 4.0 dargestellt ist. Zu beachten ist, daß lediglich eine Dehnungshalbachse durch die angegebene Funktion beschrieben wird. Dies genügt aber, denn erstens ist die Funktion flexibel genug, um das unterschiedliche Verhalten des Betons auf Zug- und Druckseite zu beschreiben und zweitens werden die beiden Äste der Funktion im Ursprung mit Hilfe des Ursprungsmoduls aneinander gekoppelt, so daß sich ein stetiger Verlauf ergibt. Um nun von dieser einaxialen Formulierung auf das biaxiale Trag- und Verformungsverhalten des Betons unter Hochtemperaturbeanspruchung schließen zu können, ist eine Parametrierung vorzunehmen, die dies zu leisten vermag. Die notwendigen Parameter sind:

- die thermische Dehnung ϵ_t ,
- der Ursprungsmodul E_0 ,

- die Bruchspannung β_u ,
- die Bruchdehnung ϵ_u und
- die Querdehnzahl μ .

Die Herleitung der Rechenfunktionen für diese Parameter basiert, mit Ausnahme der thermischen Dehnung, auf sogenannten Warmkriechversuchen. Beim Warmkriechversuch wird der Probekörper unter konstanter Last solange erwärmt, bis der Bruch eintritt. Es werden die auftretenden Verformungen gemessen. Die spannungserzeugenden Dehnungen ergeben sich näherungsweise als Differenz der gemessenen und der thermischen Dehnung. Die thermische Dehnung muß an einem anderen Probekörper bestimmt werden.

Die spannungserzeugende Dehnung enthält demnach auch die Kriechdehnung, diese hängt jedoch von der Aufheizgeschwindigkeit ab. Die zugrunde gelegten Versuche wurden mit einer Aufheizgeschwindigkeit von 2 K/min durchgeführt, so daß hier eine weitere Einschränkung der Anwendung des Rechenmodells erforderlich wird.

Unter der Voraussetzung einer Brandbeanspruchung in der Art der ETK (Einheitstemperatur-Zeit-Kurve nach DIN 4102) kann mit den hergeleiteten Rechenwerten jedoch gearbeitet werden. Die genaue Beschreibung des Verfahrens sowie der Gültigkeitsbereich kann in /Ric.86/ nachgelesen werden.

4.1.2 Thermische Dehnung

Die Gesamtdehnung setzt sich aus den beiden Anteilen

- thermische Dehnung und
- spannungserzeugende Dehnung

zusammen. Die thermische Dehnung ist im allgemeinen um eine Zehnerpotenz größer als die spannungserzeugende Dehnung. Daher ist sie von entscheidender Bedeutung für die Genauigkeit, mit der

die spannungserzeugende Dehnung aus der Gesamtdehnung ermittelt wird. Um die spannungserzeugende Dehnung noch vertrauenswürdig ermitteln zu können, muß man demzufolge fordern, daß die thermische Dehnung mit einem relativen Fehler von weniger als 0.001 bestimmt werden muß.

Die vorliegenden Meßwerte, über die unter anderem in verschiedenen Arbeitsberichten des SFB 148 berichtet wird, genügen dieser Forderung nicht, sondern sie sind um eine Größenordnung ungenauer. Die Gründe hierfür sind:

Zum einen ist der verwendete Versuchsaufbau - an den gestellten Anforderungen gemessen - in hohem Maße fehleranfällig. Die Meßkette beginnt mit einem Quarzdilatometer, führt über einen induktiven Weggeber zu einem Meßwertumformer und endet schließlich bei einem mechanischen Anzeigeinstrument. Setzt man unter Vernachlässigung des Meßwertumformers für jedes Element dieser Kette einen Fehler e von 0,005 voraus, so ergibt sich ein Gesamtfehler E von $\sqrt{3 \cdot 0,005^2} = 0,009$ für die Gesamtdehnung. Die eigentliche Zielgröße ist jedoch die spannungserzeugende Dehnung, die, wie bereits gesagt, um eine Zehnerpotenz kleiner ist als die Gesamtdehnung. Für sie liegt der Gesamtfehler bei einer Größenordnung von $10 \cdot 0,009 = 0,09 \approx 0,1$.

Zum anderen war es in den meisten Fällen nicht möglich, begleitend zu den Bauteilversuchen spezifische Werkstoffuntersuchungen hinsichtlich der thermischen Dehnung durchzuführen. Es muß also mit einer zusätzlichen Streuung gerechnet werden, so daß der vermutete Fehler der spannungserzeugenden Dehnung von 0,1 insgesamt eher gering angesetzt ist.

Wie für die anderen Werkstoffparameter auch wird für die thermische Dehnung stückweise ein Polynom dritten Grades, beginnend bei 20°C, angesetzt. Die Koeffizienten sind Tabelle 4.1 zu entnehmen.

t	0	1	2	3
+700	-0.2298849e+0	0.1165589e-1	-0.8699141e-5	0.3085519e-7
+1000	0.1425000e+2	0.0000000e+0	0.0000000e+0	0.0000000e+0

Tabelle 4.1: ϵ_t

Daraus ergibt sich der auf Bild 4.1 dargestellte Kurvenverlauf. Er weist einen Knick bei 700°C auf, der die Konvergenz des Finite Element-Verfahrens nicht beeinträchtigt, weil er lediglich von der Temperatur abhängt.

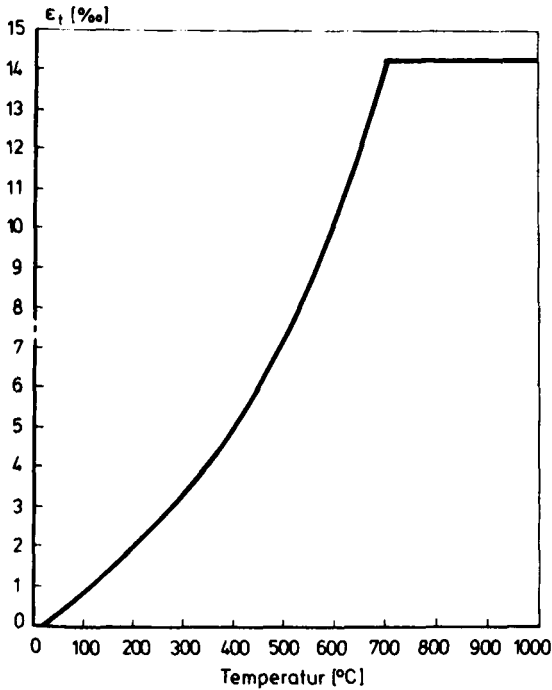


Bild 4.1: ϵ_t

4.1.3 Ursprungsmodul

Der Ursprungsmodul hat zusammen mit der Bruchdehnung einen entscheidenden Einfluß auf die Verformung der Struktur. Ist die Struktur stabilitätsgefährdet, so wirkt sich der Ursprungsmodul direkt auf das rechnerische Versagen aus. Weiterhin dient der Ursprungsmodul bei der Formulierung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung als Übergangsbedingung zwischen Druck- und Zugbereich und sichert damit die Stetigkeit der Arbeitslinie.

Die verwendete temperaturabhängige Rechenfunktion wurde, wie oben schon angedeutet, auf der Grundlage von Warmkriechversuchen gewonnen und in drei Bereichen als Polynom dritter Ordnung formuliert. Die Koeffizienten dieses Polynoms können Tabelle 4.2 entnommen werden.

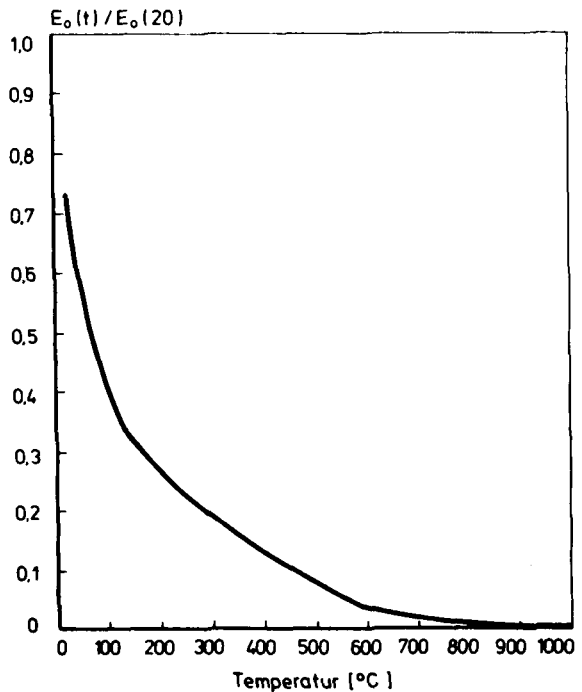


Bild 4.2: $E_0(t)/E_0(20)$

t	0	1	2	3
+200	0.8694419e+0	-0.7434811e-2	0.3351184e-4	-0.5684825e-7
+590	0.4799169e+0	-0.1290412e-2	0.1282263e-5	-0.6198921e-9
+1000	0.4040421e+0	-0.1237232e-2	0.1341404e-5	-0.5034635e-9

Tabelle 4.2: $E_0(t)/E_0(20)$

Es ergibt sich der in Bild 4.2 dargestellte Kurvenverlauf. Auffällig ist, daß die Kurve nicht bei 1.0 beginnt, sondern bei 0.74. Hierin kommt bereits ein Kriecheinfluß zum Ausdruck und es wird deutlich, daß das vorgeschlagene Modell für Bauteilversuche mit Temperaturbeanspruchung nach ETK optimiert ist. Für andere Fälle, also insbesondere für kalte Kurzzeitversuche, muß der Ursprungsmodul entsprechend größer eingegeben werden.

4.1.4 Bruchspannung

Die Bruchspannung β_u beeinflusst im wesentlichen das lastgesteuerte Versagen einer Struktur. Sie kennzeichnet den Scheitelpunkt der Spannungs-Dehnungs-Beziehung, bei dem die Steifigkeit verschwindet.

Zwei Parameter bestimmen die Größe der Bruchspannung. Zum einen die Temperatur t , zum andern das Verhältnis der Hauptspannungen $\alpha_\sigma = \sigma_1/\sigma_2$ mit $\sigma_1 \leq \sigma_2$.

Zunächst zum Temperatureinfluß. Der Temperatureinfluß wurde auf der Grundlage der oben erwähnten einaxialen Warmkriechversuche ermittelt. Die Begründung für diese Vorgehensweise folgt später in diesem Abschnitt. Als Rechenfunktion ist wieder ein Polynom dritten Grades verwendet worden, diesmal jedoch in zwei Bereiche aufgeteilt. Die Koeffizienten der Rechenfunktion können Tabelle 4.3 entnommen werden.

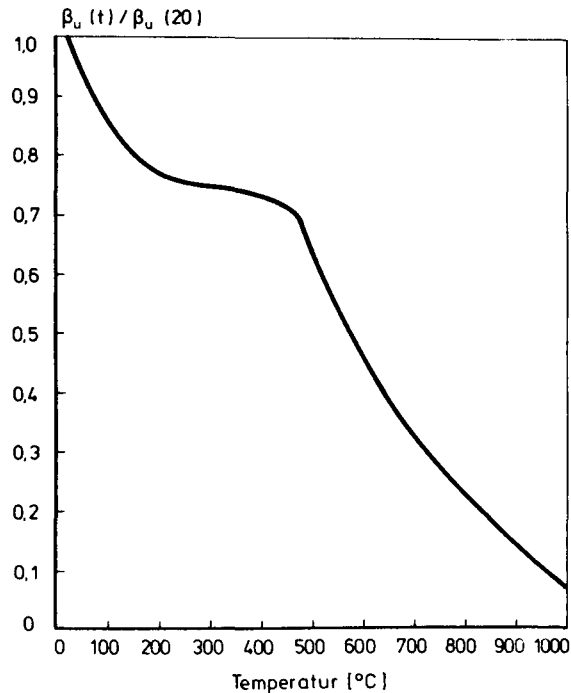


Bild 4.3: $\beta_u(t)/\beta_u(20)$

t	0	1	2	3
+470	0.1051600e+1	-0.2746200e-2	0.8434999e-5	-0.8901701e-8
+1000	0.2541900e+1	-0.6048300e-2	0.5380300e-5	-0.1801800e-8

Tabelle 4.3: $\beta_u(t)/\beta_u(20)$

Damit ergibt sich der auf dem Bild 4.3 dargestellte Kurvenverlauf. Bemerkenswert ist, daß diese Kurve bei 1.0 beginnt. Ein Dauerstandseinfluß ist also noch nicht berücksichtigt, ebenso fehlt der Beiwert für die Probenform. Beide Einflußgrößen müssen demzufolge bei der Vorgabe des Bezugswertes $\beta_u(20)$ berücksichtigt werden.

Des weiteren gilt es, den Einfluß des Hauptspannungsverhältnisses zu berücksichtigen. Entsprechende Versuche bei Raum-

temperatur wurden mit unterschiedlichem Versuchsaufbau in den letzten 30 Jahren durchgeführt. Dabei hat sich in besonderem Maße die Belastungskonstruktion als kritisch erwiesen. Die anerkanntermaßen besten Versuche auf diesem Gebiet wurden von Kupfer durchgeführt und in /Kup.73/ ausführlich beschrieben. Sie zeichnen sich infolge der Anordnung von sogenannten Belastungsbürsten durch besonders zwängungsfreie Lasteintragung aus.

Bei erhöhter Temperatur hat in den letzten Jahren Ehm im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 148 Versuche von vergleichbarer Qualität durchgeführt und die ersten Ergebnisse in /Ehm.86/ dargestellt. Wie bei Kupfer fanden Belastungsbürsten Verwendung, so daß auch hier eine weitgehend zwängungsfreie Lagerung angenommen werden kann. Bei instationärer Temperatur ist dies besonders wichtig, da ja zu den spannungserzeugenden die thermischen Dehnungen treten. Außerdem zeigt sich bei Raumtemperatur eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den Kupfer'schen Ergebnissen.

Oberhalb von 300°C fällt die einaxiale Druckfestigkeit erheblich ab, gleichzeitig steigt aber das Verhältnis von bi- zu einaxialer Festigkeit nennenswert an. Die Abweichungen zwischen Versuchs- und Rechenwerten werden damit zwar größer, sie haben aber mit zunehmender Temperatur geringere Bedeutung für das Tragverhalten von Querschnitten mit inhomogener Temperaturverteilung.

Leider war es Ehm nicht möglich, seine Versuchsreihe auf den bei Stahlbetonplatten besonders wichtigen Zugbereich auszuweiten.

0	1	2	3
0.3964378e+2	-0.3723060e+2	0.1173536e+2	-0.1209556e+1

Tabelle 4.4: Biaxiale Bruchspannung $\beta_{u,b}/\beta_u$

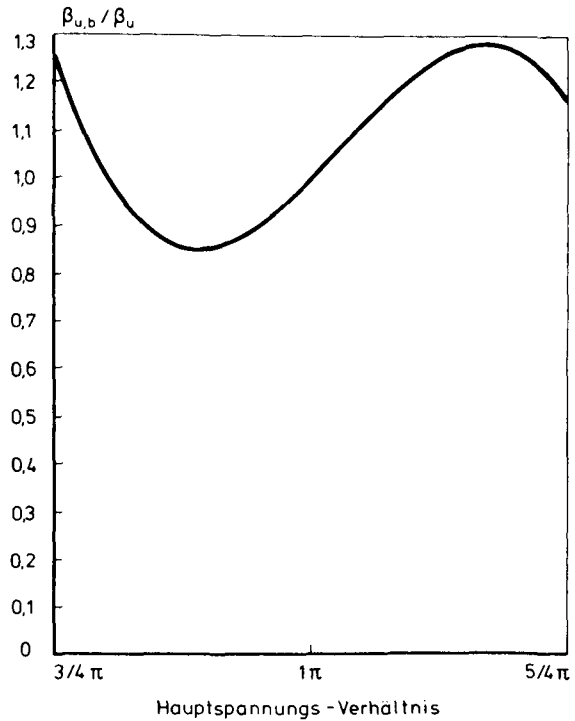


Bild 4.4: Biaxiale Bruchspannung $\beta_{u,b}/\beta_u$

Da also einerseits wichtige Werte fehlen und andererseits die Abweichungen im Druck-Druck Bereich nur von untergeordneter Bedeutung sind, wurde auf die Berücksichtigung der Ehmschen Ergebnisse verzichtet und lediglich die Kupfersche Untersuchung herangezogen. Die hiermit berechnete biaxiale Bruchspannung wurde mit Hilfe der oben angegebenen Temperaturfunktion linear verzerrt.

Die Bruchkurve wurde in Abhängigkeit von $\arctan(\alpha_\sigma)$ als Polynom dritten Grades formuliert. Die Koeffizienten sind der Tabelle 4.4 zu entnehmen.

Der Verlauf der Kurve ist auf Bild 4.4 dargestellt. Bemerkenswert ist, daß die Approximation im ganzen Bereich stetig ist. Dies stellt die Konvergenz des Finite Element-Verfahrens sicher.

4.1.5 Bruchdehnung

Die Bruchdehnung ϵ_u bestimmt die Steifigkeit im beanspruchten Zustand und hat damit, wie der Ursprungsmodul, entscheidenden Einfluß auf das Versagen stabilitätsgefährdeter Strukturen. Des weiteren steuert sie die Verformbarkeit und damit die Möglichkeit der Lastumlagerung in statisch unbestimmten Strukturen.

Wie die Bruchspannung wird die Bruchdehnung einerseits von der Temperatur und andererseits vom Verhältnis der Hauptdehnungen $\alpha_\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2$ mit $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ beeinflusst.

Zunächst zum Temperatureinfluß. Mit Hilfe eines Polynoms dritten Grades wurde in zwei Bereichen eine Rechenfunktion definiert, die den Verlauf der Bruchdehnung in Abhängigkeit von der Temperatur beschreibt. Die Koeffizienten des Polynoms sind Tabelle 4.5 zu entnehmen.

Wie man auf Bild 4.5 erkennen kann, beginnt die Kurve bei 2.4 mm/m. Damit weicht sie relativ stark von dem in DIN 1045 verankerten Scheitelwert der Dehnung von 2 mm/m ab. Der Grund hierfür ist wieder in dem bereits berücksichtigten Dauerstandseinfluß zu sehen.

Der biaxiale Beanspruchungszustand beeinflusst die Bruchdehnung in sehr hohem Maße. Wie die Kupferschen Untersuchungen gezeigt haben, gibt es jedoch auch einen betonmorphologischen Einfluß, denn die Ergebnisse weisen sehr große Abweichungen für Beton 1, 2 und 3 auf, vor allem im Druck-Zug-Bereich. Allgemein gilt jedoch, daß die Bruchdehnung mit zunehmendem Querdruck abnimmt, während sie mit zunehmendem Querzug zunächst zunimmt, um nach Erreichen eines Maximums bei $\alpha_\epsilon \approx -0.5$ sehr rasch auf die einaxiale Reißdehnung abzufallen. Dies wird für den Druck-Druck-Bereich auch von Ehm bestätigt.

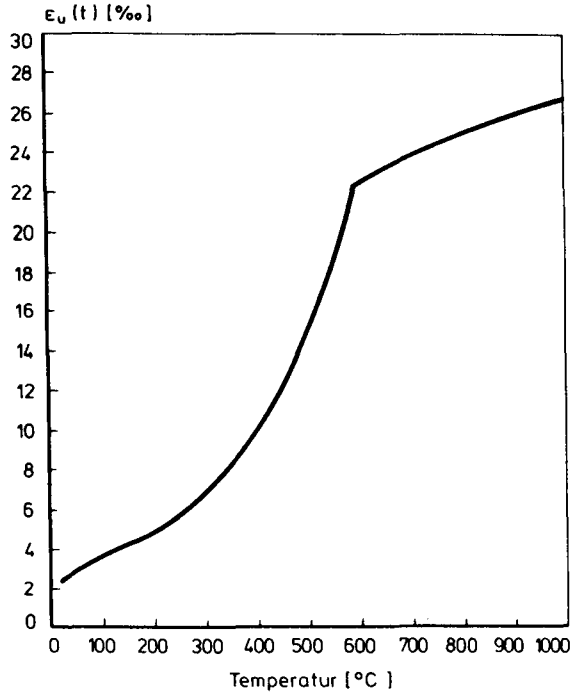


Bild 4.5: $\epsilon_u(t)$

t	0	1	2	3
÷590	0.1997447e+1	0.2120375e-1	-0.5650079e-4	0.1336248e-6
÷1000	0.3228959e+1	0.5300878e-1	-0.4305840e-4	0.1356240e-7

Tabelle 4.5: $\epsilon_u(t)$ [o/oo]

Ausgehend hiervon wurde eine Rechenfunktion hergeleitet, die dem Charakter der Meßwerte einigermaßen gerecht wird. Bei der Rechenfunktion handelt es sich wiederum um ein Polynom dritten Grades in Abhängigkeit von $\arctan(\alpha_\epsilon)$, das der Stetigkeitsforderung genügt. Die Koeffizienten können der Tabelle 4.6 entnommen werden. Im Bild 4.6 wurde der Kurvenverlauf aufgetragen.

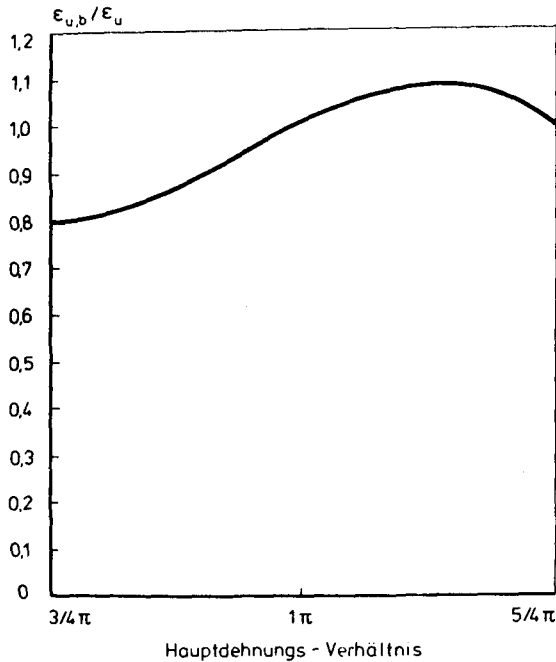


Bild 4.6: Biaxiale Bruchdehnung $\epsilon_{u,b}/\epsilon_u$

0	1	2	3
0.8000029e+1	-0.7830455e+1	0.2755948e+1	-0.3096161e+0

Tabelle 4.6: Biaxiale Bruchdehnung $\epsilon_{u,b}/\epsilon_u$

4.1.6 Querdehnzahl μ

Die Querdehnzahl ist von entscheidender Bedeutung für die wirklichkeitsnahe Modellierung des Verformungsverhaltens von Beton. In der Querdehnzahl kommt die Eigenschaft des Werkstoffs zum Ausdruck, sich bei Beanspruchung in einer Richtung auch in der anderen Richtung zu verformen, ohne daß in dieser Richtung notwendigerweise Spannungen auftreten.

Der Grundwert der Querdehnzahl hängt in geringem Maße von dem verwendeten Beton ab und liegt zwischen 0.15 und 0.20. Mit zunehmender Beanspruchung wächst auch die Querdehnzahl an, und zwar auf einen Wert von 0.4 bis 0.5 im Bruchzustand. Bei Erreichen der Bruchdehnung kommt es zu einer starken Desintegration des Werkstoffs, und der Zusammenhang zwischen den unterschiedlich beanspruchten Fasern geht verloren. Daher erscheint die Annahme gerechtfertigt, daß die Querdehnzahl dann wieder langsam abnimmt und bei Erreichen des dreifachen Wertes der Bruchdehnung schließlich ganz verschwindet. Diese Rechenannahme konnte bisher nicht durch Versuche belegt werden.

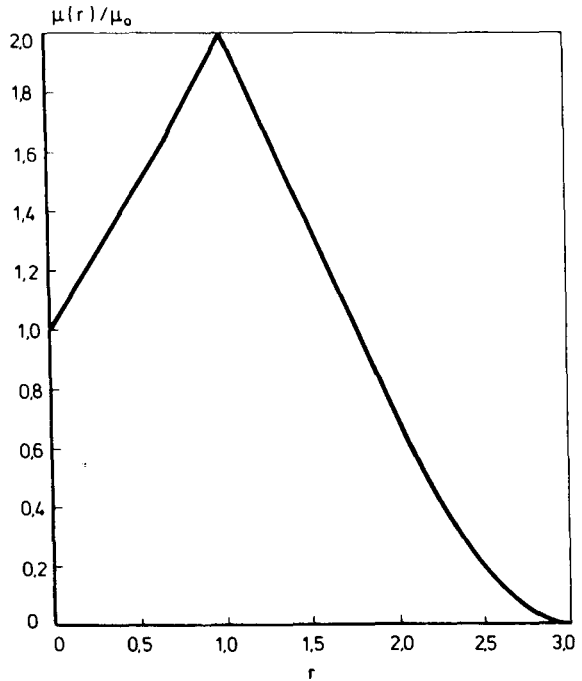


Bild 4.7: Querdehnzahl
 μ/μ_0

r	0	1	2	3
0 ÷ 1	1.0000000e+0	1.0000000e+0	-1.6666667e-1	1.6666667e-1
1 ÷ 3	2.6250000e+0	1.2500000e-1	-9.5833333e-1	2.0833333e-1
3 ÷ ∞	0.0000000e+0	0.0000000e+0	0.0000000e+0	0.0000000e+0

Tabelle 4.7: Querdehnzahl μ/μ_0

Wie Ehm herausgefunden hat, wächst die Querdehnzahl außerdem mit zunehmender Temperatur auf das 1.2-fache des Wertes bei 20°C. Diesem Umstand wird in dem vorgeschlagenen Modell nicht Rechnung getragen, da dies den Versuchen von Marechal /Mar.70/ widerspricht. Dieser hat das genaue Gegenteil hiervon gefunden, so daß die Frage als noch nicht endgültig geklärt angesehen werden muß.

Mit diesen Grundlagen kann der Verlauf der Querdehnzahl angenähert werden. Als Maß r für die Beanspruchung wird der Ausnutzungsgrad der Dehnung herangezogen. Es gilt also:

$$r = \left\| \left\| \epsilon_i / \epsilon_u \right\| \right\|_2, \quad i=1,2$$

Die Veränderung der Querdehnzahl wird dann als Polynom dritten Grades in drei Bereichen in Abhängigkeit von r formuliert. Die Koeffizienten des Polynoms können Tabelle 4.7 entnommen werden.

Zur Verdeutlichung ist dieser Zusammenhang auf Bild 4.7 noch grafisch dargestellt. Wieder ist die angenommene Funktion stetig, um die Konvergenz des Finite Element-Verfahrens zu gewährleisten.

4.1.7 Konstante Werkstoffparameter

Die Zugfestigkeit und der Verlauf des abfallenden Astes der Spannungs-Dehnungs-Beziehung sind im vorgeschlagenen Modell als Konstante eingeführt.

Die Zugfestigkeit hängt linear von der einaxialen Druckfestigkeit ab. Der Faktor kann beliebig gewählt werden.

Der abfallende Ast der Arbeitslinie wird implizit durch die gewählte Funktion beschrieben. Die wesentliche Eigenschaft ist, daß bei steilerem Anstieg auch der abfallende Ast steiler wird.

4.1.8 Formulierung - Algorithmus

Der vorgeschlagene Algorithmus zur Berechnung der temperatur- und dehnungsabhängigen biaxialen Spannung und Steifigkeit ist in vier Teile gegliedert. Algorithmus THB berechnet den Hauptdehnungswinkel und transformiert den xy-Dehnungsvektor in das Hauptsystem. Algorithmus SPD ermittelt die spannungserzeugenden Dehnungen. Algorithmus BET berechnet die Spannung und die Steifigkeit im Hauptsystem. Schließlich transformiert Algorithmus TXB den Spannungsvektor und die Werkstoffmatrix wieder in das xy-Koordinatensystem.

Der Hauptdehnungswinkel α ist definiert als

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot \epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}\right)$$

Damit kann die Transformationsmatrix \underline{T} aufgestellt werden. Mit den Abkürzungen $c = \cos(\alpha)$ und $s = \sin(\alpha)$ hat sie die folgende Gestalt:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2 \cdot s \cdot c \\ s^2 & c^2 & -2 \cdot s \cdot c \\ -s \cdot c & s \cdot c & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

Des weiteren haben wir den Dehnungsvektor $\underline{\epsilon}$, den Spannungsvektor $\underline{\sigma}$ und die Werkstoffmatrix \underline{D} .

$$\underline{\epsilon}_{xy} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy})^T,$$

$$\underline{\epsilon}_{12} = (\epsilon_1, \epsilon_2, 0)^T$$

$$\underline{\sigma}_{xy} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})^T,$$

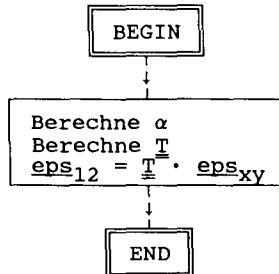
$$\underline{\sigma}_{12} = (\sigma_1, \sigma_2, 0)^T$$

$$\underline{D}_{xy} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xt} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yt} \\ d_{tx} & d_{ty} & d_{tt} \end{bmatrix}$$

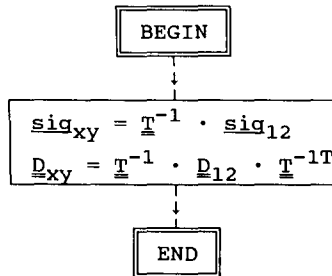
$$\underline{D}_{12} = \frac{1}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Somit können die beiden Algorithmen THB und TXB definiert werden.

THB: Transformation in das Hauptsystem



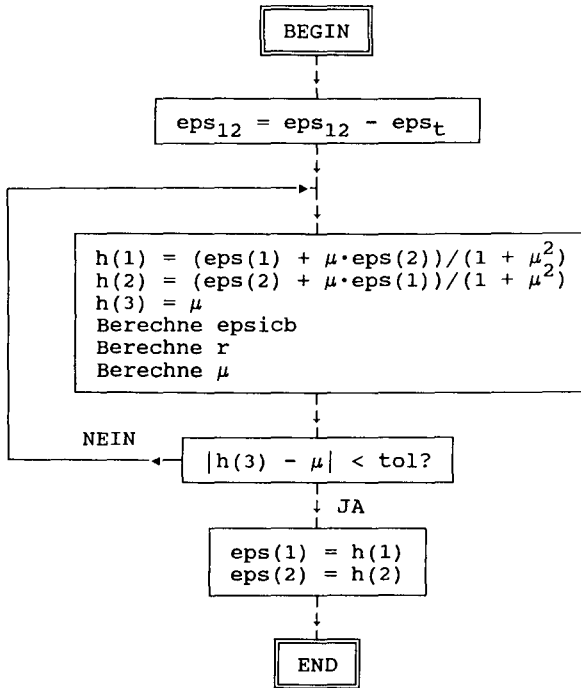
TXB: Transformation in das xy-Koordinatensystem



Im Algorithmus SPD wird, wie oben schon angedeutet, die spannungserzeugende Dehnung ermittelt. Das heißt, die thermische Dehnung wird von der Gesamtdehnung abgezogen. Außerdem wird die Querdehnung berücksichtigt.

Wie man erkennt, handelt es sich hier um ein iteratives Verfahren, da die biaxiale Bruchdehnung von den spannungserzeugenden Dehnungen selbst abhängt und a priori nicht bekannt ist. Als Iterationsverfahren wurde das sogenannte einfache Verfahren gewählt. Es konvergiert rasch, stabil und in wenigen Schritten. Deshalb konnte auf ein alternatives Abbruchkriterium verzichtet werden.

SPD: Spannungserzeugende Dehnung



Der Algorithmus BET ist etwas schwieriger. Zunächst muß die Arbeitslinie definiert werden. Sie ist eine analytische Funktion der in den vorangegangenen Abschnitten erläuterten Parameter und der Dehnung. Es gilt mit den Abkürzungen

$$x_i = \epsilon_i / \epsilon_{ip} \quad , i=1,2$$

$$a_i = \epsilon_{ip} \cdot E_0 / \sigma_{ip}$$

d1 = 1 = Parameter zur Steuerung des abfallenden Astes

$$\sigma_i = \frac{x_i \cdot \sigma_{ip} \cdot (a_i + d1 \cdot x_i - x_i)}{a_i \cdot x_i + d1 \cdot x_i^2 - 2 \cdot x_i + 1} \quad , i=1,2$$

ϵ_{ip} und σ_{ip} sind die Bruchdehnung bzw. Spannung in Abhängigkeit von t und α_ϵ bzw. α_σ .

Das Hauptdehnungsverhältnis α_ϵ ist a priori bekannt. Das Hauptspannungsverhältnis α_σ muß iterativ berechnet werden. Als Startwert für die Iteration wird $\alpha_\sigma = 0$ angenommen und der Spannungsvektor σ_{12} berechnet. Anschließend wird geprüft, ob sich die Bruchspannung signifikant geändert hat. Wenn dies der Fall ist, wird die Schleife erneut durchlaufen.

Anschließend kann die Werkstoffmatrix \underline{D} aufgestellt werden. Die Hauptwerte d_{11} und d_{22} ergeben sich als Ableitung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach der Dehnung. Die Formel hierfür lautet:

$$d(i,i) = \frac{\sigma_{ip} \cdot \epsilon_{ip} \cdot ((ai \cdot \epsilon_{ip} + 2 \cdot \epsilon_i \cdot (d1-1)) \cdot \epsilon_{ip} + \epsilon_i^2 \cdot (2-ai-2 \cdot d1))}{(((\epsilon_{ip} + e3) \cdot \epsilon_{ip} + e2) \cdot \epsilon_{ip} + e1) \cdot \epsilon_{ip} + d1^2 \cdot \epsilon_i^4}$$

mit

$$e1 = 2 \cdot \epsilon_i^3 \cdot (ai-2) \cdot d1$$

$$e2 = \epsilon_i^2 \cdot ((ai-2)^2 + 2 \cdot d1)$$

$$e3 = 2 \cdot \epsilon_i \cdot (ai-2)$$

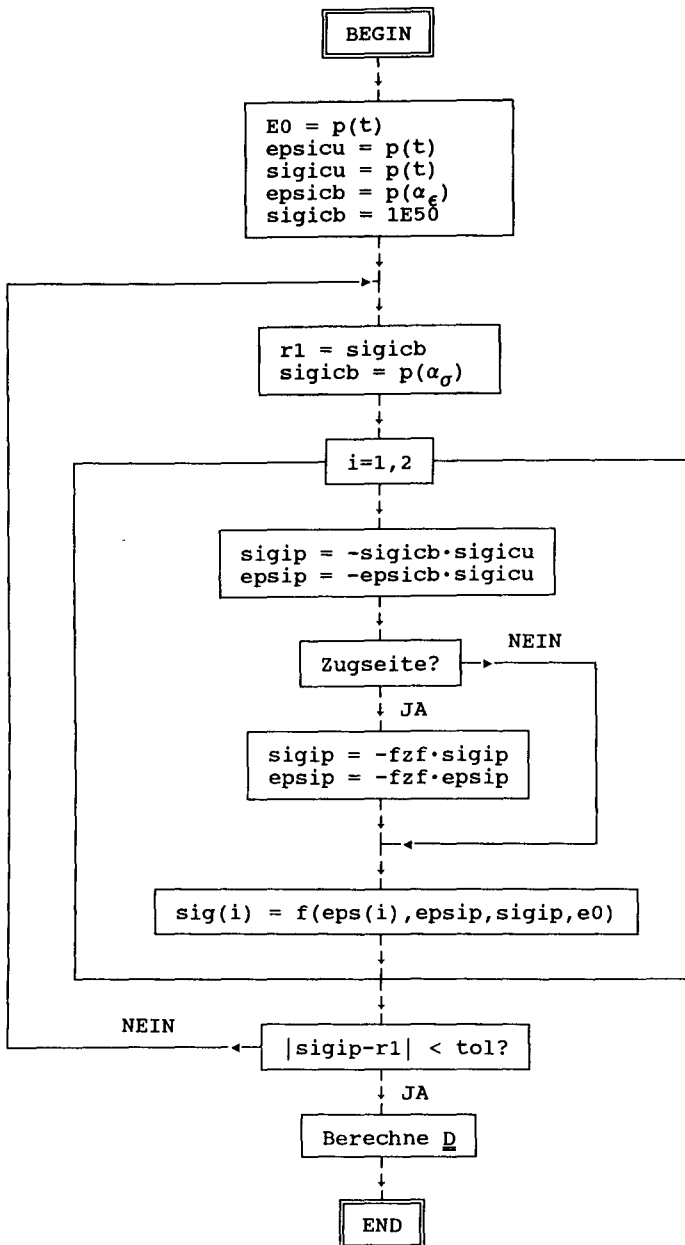
$$d(1,2) = d(2,1) = \mu \cdot (d(1,1) + d(2,2)) / 2$$

$$d(3,3) = (d(1,1) + d(2,2)) \cdot (1 - \mu^2) / 4$$

Bei der Ermittlung der Nebendiagonalelemente sowie der Schubsteifigkeit wurde das arithmetische Mittel verwendet, um die Symmetrie der Werkstoffmatrix zu erhalten. Das geometrische Mittel kann nicht verwendet werden, weil beim Tangentenverfahren die Steifigkeit auch negativ werden kann und das Vorzeichen verloren gehen würde bzw. die Wurzel imaginär würde. Das harmonische Mittel scheidet aus, weil bei verschwindender Steifigkeit ihr reziproker Wert entartet.

Somit kann jetzt der Algorithmus BET angeschrieben werden. Das Suffix c der verwendeten Variablen kennzeichnet charakteristische Größen, das Suffix u bezeichnet einaxiale Größen und das Suffix b bezeichnet biaxiale Größen.

BET: Berechnung von Spannung und Steifigkeit für Beton



Wie man erkennt, enthält die Iteration kein alternatives Abbruchkriterium. Dies war aufgrund der großen numerischen Stabilität nicht erforderlich, das heißt, daß das Verfahren unter allen Umständen konvergiert, wenn die Schranke tol nicht zu klein ist.

Im Abschnitt 5 sind einige Beispiele für die mit diesen Algorithmen berechneten Arbeitslinien aufgetragen.

4.2 BETONSTAHL

4.2.1 Grundlagen

Im Gegensatz zu Beton genügt es bei Betonstahl, für die vorgesehenen Anwendungsfälle ein einaxiales Materialmodell zu entwickeln. Da Flächentragwerke aus Stahlbeton üblicherweise jedoch mit orthogonalen Netzbewehrungen versehen werden, soll der zu entwickelnde Algorithmus zur Berechnung von Spannung und Steifigkeit nicht eine, sondern zwei richtungsunabhängige Stahllagen in einem Schritt bearbeiten.

Die thermische Dehnung ist bei den in der Praxis üblichen geringen Bewehrungsgehalten von untergeordneter Bedeutung. Sie wurde konstant mit $\epsilon_t = 1E-5 \cdot T$ angenommen.

Die Parameter der Arbeitslinie wurden wie bei Beton auf der Grundlage von Warmkriechversuchen hergeleitet. Die Auswertung dieser Versuche und die Aufstellung der temperaturabhängigen Materialkenngrößen stammen von Richter und sind in /Ric.86/ beschrieben.

4.2.2 Arbeitslinie

Die Arbeitslinie wird bereichsweise definiert. Die Bereichsgrenzen sind jedoch temperaturabhängig, außerdem sind sie nicht nach anschaulichen Gesichtspunkten gewählt, sondern liegen so, daß die vorliegenden Meßwerte möglichst gut approximiert werden. An den Bereichsgrenzen treten keine Sprünge und keine Knicke auf. Damit ist die Hauptforderung der Stetigkeit zur Sicherung der Konvergenz des Finite Element-Verfahrens erfüllt.

4.2.3 Formulierung - Algorithmus

Der Algorithmus zerfällt wieder in drei Teile. Zunächst wird der Dehnungsvektor in die Richtung der Stahllage transformiert (THS), anschließend werden Spannung und Steifigkeit berechnet (STA). Diese werden zum Schluß in das xy-Koordinatensystem zurücktransformiert (TXS).

Die Algorithmen zur Transformation sind praktisch identisch mit THB und TXB. Daher kann auf eine Mitteilung verzichtet werden. Lediglich der Winkel, um den transformiert wird, ist in diesem Falle vorgegeben, während er bei Beton zu berechnen war.

Die Arbeitslinie ist eine analytische Funktion der Parameter Spannung und Steifigkeit an den Bereichsgrenzen sowie der Dehnung. Die Bereichsgrenzen sowie die dort vorliegende Spannung und Steifigkeit sind als Polynom dritten Grades formuliert. Die Arbeitslinie hat dann die Form:

$$\sigma = A \cdot B + \sigma_i \quad \text{mit}$$

$$A = 1 - \frac{\epsilon_{i+1} - \epsilon}{(\epsilon_{i+1} - \epsilon_i)^N}$$

$$B = \sigma_{i+1} - \sigma_i - E_{i+1} \cdot (\epsilon_i - \epsilon) \quad \text{und}$$

$$N = \frac{E_i \cdot (\epsilon_{i+1} - \epsilon_i)}{\sigma_{i+1} - \sigma_i - E_{i+1} \cdot (\epsilon_{i+1} - \epsilon_i)}$$

Die Indices i bzw. $i+1$ kennzeichnen die untere bzw. obere Bereichsgrenze. Die Steifigkeit wird als Ableitung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach der Dehnung gebildet. Sie hat die Form:

$$D = A_1 \cdot B + E_{i+1} \cdot A \quad \text{mit}$$

$$A_1 = N \cdot \left(\frac{\epsilon_{i+1} - \epsilon}{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i} \right)^N \cdot \frac{1}{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i}$$

Mit diesen Grundlagen kann der Algorithmus STA formuliert werden. Er ist auf Seite 60 als Flußdiagramm dargestellt.

Wegen der großen Zahl der erforderlichen Polynomkoeffizienten muß auf deren Mitteilung hier verzichtet werden, sie sind jedoch in /Ric.86/ verzeichnet. Die mit diesem Algorithmus berechneten Arbeitslinien sind in Bild 4.8 für eine Auswahl von Temperaturen aufgezeichnet.

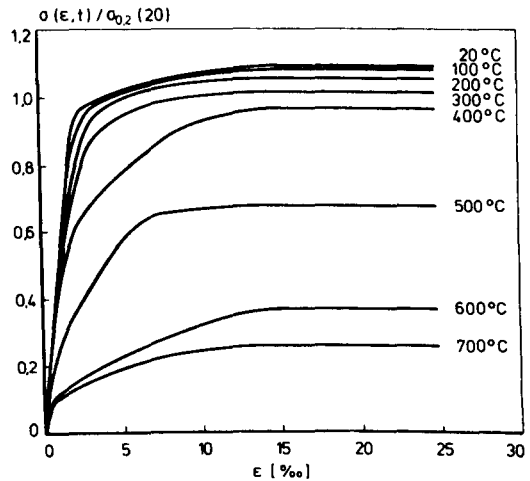
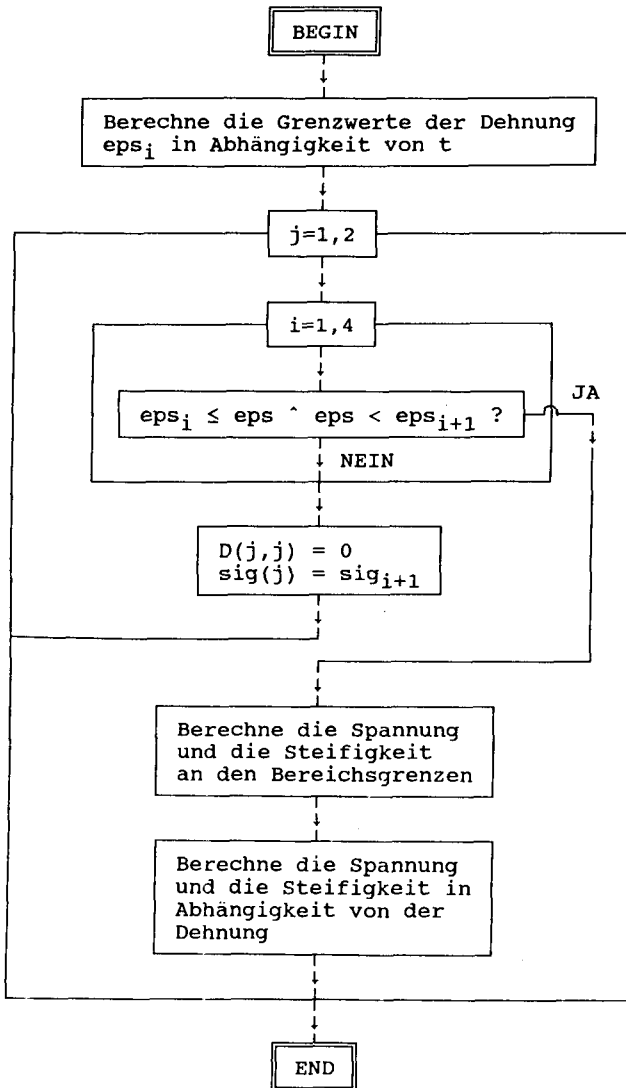


Bild 4.8: Stahlarbeitslinien

STA: Berechnung von Spannung und Steifigkeit für Stahl



Das aufgestellte Rechenmodell ist nunmehr vollständig beschrieben und kann getestet werden. Die Testtheorie sagt aus, daß ein Algorithmus nur dann als vollständig geprüft angesehen werden

kann, wenn alle Schleifen und alle Verzweigungen mit jeder Kombination von Eingangsgrößen wenigstens einmal fehlerfrei durchlaufen wurde. Dieses Kriterium kann von einer gewissen Größe des Algorithmusses an nicht mehr streng erfüllt werden.

In diesem Fall beschränkt man sich darauf, die einzelnen Module für sich zu testen und den Gesamtalgorithmus anhand von überschaubaren Beispielen auf Übereinstimmung mit der Anschauung zu prüfen. Zu den Modultests soll nur gesagt werden, daß sich auch hier die Limitierung der Modulgröße sehr bewährt hat. Dadurch konnte die Fehlerrate auf ein bis zwei pro Modul beschränkt werden, die relativ rasch gefunden werden konnten. Die bei größeren Modulen bestehende Möglichkeit, daß mehrere Fehler sich bei bestimmten Konfigurationen gegenseitig aufheben, kann dadurch stark eingeschränkt werden.

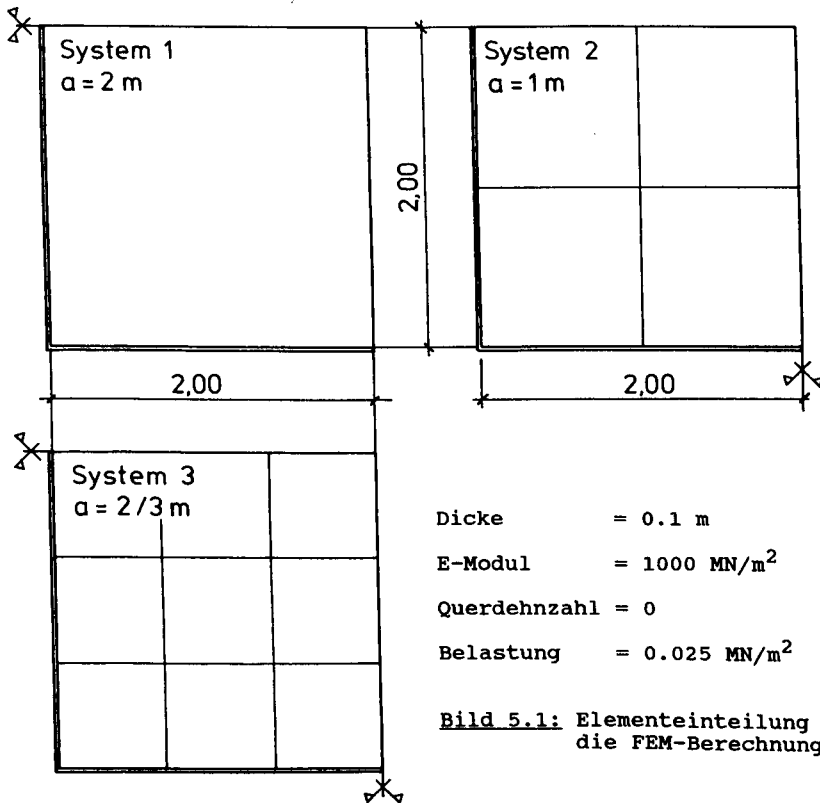
Der nächste Abschnitt befaßt sich mit den Tests des Gesamtalgorithmusses.

5 VERIFIZIERUNG

5.1 LINEARES MATERIAL

5.1.1 Kleine Verformungen

Am Beispiel der vierseitig gelenkig (Navier-) gelagerten Quadratplatte soll gezeigt werden, wie das Rechenmodell mit zunehmender Verfeinerung des Netzes zur analytischen Lösung konvergiert. Zunächst wird eine Gleichlast aufgebracht. Die analytische Lösung kann beispielsweise /Gir.56/ entnommen werden. Randbedingungen und Elementierung sind auf Bild 5.1 dargestellt. Gelagerte Ränder sind durch Doppellinien gekennzeichnet.



Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle 5.1 zusammengestellt. Zunächst wurde versucht, die Flächenlast durch Einzelasten in den Knoten nachzubilden. Die Ergebnisse zeigen, daß dann mindestens 4 Elemente erforderlich sind, um das analytische Ergebnis auch nur annähernd nachzuvollziehen. Berechnet man jedoch einen geeigneten Lastvektor als Oberflächenintegral der Formfunktionen mit der Flächenlast, so genügt ein Element zur hinreichenden Beschreibung des Verformungsverhaltens.

Methode	Mittendurchbiegung [m]	Abweichung eps [/]	$\text{eps} \cdot l^2 / a^2$ [/]
Analytisch Knotenlast	0.311808	-	-
System 1	0.212696	0.3179	0.3179
System 2	0.283495	0.0908	0.3632
System 3	0.299079	0.0408	0.3672
Flächenlast System 1	0.316624	-0.0145	-0.0145

Tabelle 5.1: Vergleich analytische - FEM-Lösung bei Gleichlast

Als nächstes wird das Verhalten bei Belastung mit einer mittig angeordneten Einzellast untersucht. Alle anderen Parameter bleiben gleich. Die analytische Lösung wurde mit dem in /Gir.56/ angegebenen Verfahren unter Verwendung einer einfach unendlichen Reihe mit einer Genauigkeit von $1E-6$ bestimmt. Bemerkenswerterweise waren zur Erzielung dieser Genauigkeit 500 Glieder erforderlich. Die Ergebnisse können Tabelle 5.2 entnommen werden.

Methode	Mittendurchbiegung [m]	Abweichung eps [/]	$\text{eps} \cdot l^2 / a^2$ [/]
Analytisch	0.222736	-	-
System 1	0.212696	0.0451	0.0451
System 2	0.220251	0.0112	0.0448
System 3	0.221638	0.0049	0.0441

Tabelle 5.2: Vergleich analytische - FEM-Lösung bei Einzellast

Bei Einzellast sind die Abweichungen zur analytischen Lösung deutlich geringer als bei der durch Knotenlasten nachgebildeten Gleichlast.

Bezieht man die Abweichung ϵ auf das Quadrat der Seitenlänge l dividiert durch die Elementkantenlänge a , so erkennt man, daß zwischen beiden ein nahezu linearer Zusammenhang besteht. Dies kann ausgenutzt werden, um aus der erforderlichen Genauigkeit die erforderliche Elemententeilung zu berechnen. Danach kann also die Elementkantenlänge a zu 0.5 m angegeben werden, um für das obengenannte Beispiel bei Belastung durch Gleichlast eine Genauigkeit von $\epsilon = 0.001$ zu erzielen.

5.1.2 Stabilität

Am Beispiel einer vierseitig gelenkig gelagerten Platte unter Achsdruck in y -Richtung soll gezeigt werden, inwieweit das vorgeschlagene Rechenmodell mit der analytischen Lösung des elastischen Beulproblems übereinstimmt. Von besonderem Interesse sind die Übergangspunkte zwischen den Beulformen, an denen die Knicklast n_k ja bekanntlich ein relatives Maximum erreicht.

Zu diesem Zweck wurde das System aus Abschnitt 5.1.1 folgendermaßen verändert:

- E-Modul = 100'000 MN/m²
- Elementierung mit 4 * 4 = 16 Elementen, ganzes System!

Die Knicklast in der FEM-Rechnung ist als die Last definiert, bei der der kleinste Eigenwert der Systemsteifigkeitsmatrix gerade verschwindet. Es gilt also, das spezielle Eigenwertproblem $[\underline{K} + \lambda \cdot \underline{I}] = 0$ zu lösen für zwei eng benachbarte Laststufen, die zu kleinsten Eigenwerten unterschiedlichen Vorzeichens führen. Die Knicklast kann dann durch lineare Interpolation gefunden werden. Die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems $[\underline{K}_L + \lambda \cdot \underline{K}_{NL}] = 0$ verhilft zwar zu einem direkten Resultat, wobei

der kleinste Eigenwert dann als Maßstabsfaktor für die Skalierung der Last zu benutzen ist, die gewonnene Aussage ist jedoch nur zur Verifikation des Rechenmodells brauchbar, nicht jedoch bei der Analyse physikalisch nichtlinearer Probleme. Da die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems zudem wesentlich schwieriger ist als die Lösung des speziellen Eigenwertproblems, konnte auf deren Implementierung verzichtet werden.

Die analytische Lösung wurde wieder /Gir.56/ entnommen. Danach ergibt sich die elastische Beullast der allseitig gelenkig gelagerten Platte zu:

$$n_k = (m \cdot b/a + a/(m \cdot b))^2 \cdot K \cdot \pi^2 / b^2 \quad \text{mit } m=1,2,3\dots$$

Dabei ist m quasi der Welligkeitsparameter. m ist so zu wählen, daß n_k minimal wird. In der folgenden Tabelle 5.3 sind nun die Ergebnisse der FEM-Rechnung der analytischen Lösung gegenübergestellt.

a/b	analytisch	FEM	Abweichung [%]
1/2	32.13	31.45	0.0216
1	20.56	19.61	0.0484
$\sqrt{2}$	23.13	20.73	0.1158
2	20.56	20.02	0.0270
$\sqrt{6}$	21.42	20.42	0.0490
3	20.56	20.31	0.0123
$\sqrt{12}$	20.99	20.57	0.0204
4	20.56	21.17	-0.0288

Tabelle 5.3: n_k [MN/m]

Die Abweichungen haben offenbar mehr zufälligen Charakter. Dies mag einerseits an der obengenannten linearen Interpolation liegen, die in allen Fällen über ein Lastinkrement von 2.5 MN/m erfolgte. Durch Verringerung der Schrittweite ließe sich das Ergebnis also sicherlich noch verbessern. Andererseits spielt es bestimmt auch eine Rolle, daß die Steifigkeitsmatrix singulär ist, wenn der kleinste Eigenwert gerade verschwindet und demzufolge bei der Bestimmung der Eigenwerte mit numerischen Problemen zu rechnen ist.

Die grundlegende Eigenschaft der Knicklast, beim Wechsel zwischen den Beulfiguren anzusteigen, wird jedoch von der FEM-Lösung noch einwandfrei wiedergegeben.

5.1.3 Große Verformungen

Wird zusätzlich zur Theorie II. Ordnung die Theorie der großen Verformungen in Ansatz gebracht, so kann auf analytische Vergleichslösungen nicht mehr zurückgegriffen werden. Deshalb wird hier zunächst ein anschauliches Beispiel gewählt, um zu zeigen, welchen Einfluß große Verformungen auf die Dehnungen haben.

Das Beispiel ist folgendermaßen aufgebaut. Eine quadratische Platte der Abmessung $2 * 2$ m ist an einem Rand gelenkig gelagert und horizontal gehalten. Der gegenüberliegende Rand wird in vertikaler Richtung verschoben, wie bei einer Tür, die langsam geöffnet wird. Die Horizontalverschiebung dieses Randes soll ermittelt werden.

Wie man leicht erkennt, bewegt sich dieser Rand auf einer Kreisbahn mit dem Radius 2 m, seine planmäßige Horizontalverschiebung läßt sich also aus der Kreisgleichung berechnen. Auf dem folgenden Bild ist das Ergebnis der FEM-Rechnung für einige Randverschiebungen dargestellt. Die Abweichungen zur Kreisform können innerhalb der Rechengenauigkeit beliebig minimiert werden. Dies ist darauf zurückzuführen, daß bei der Aufstellung des nichtlinearen Verzerrungstensors auch die Terme in u und v berücksichtigt wurden. Vernachlässigt man diese nämlich, wie in der Literatur oft anzutreffen, so bewegt sich der freie Rand auf einer parabolischen Bahn, was bei zunehmender Vertikalverschiebung zu erheblichen Abweichungen führt. Bei Anwendung der linearen Theorie würden demgegenüber gar keine Horizontalverschiebungen auftreten, wengleich auch hier der Körper rechnerisch verzerrungsfrei bleibt. Zur Veranschaulichung ist dieser Zusammenhang auf Bild 5.2 noch grafisch dargestellt.

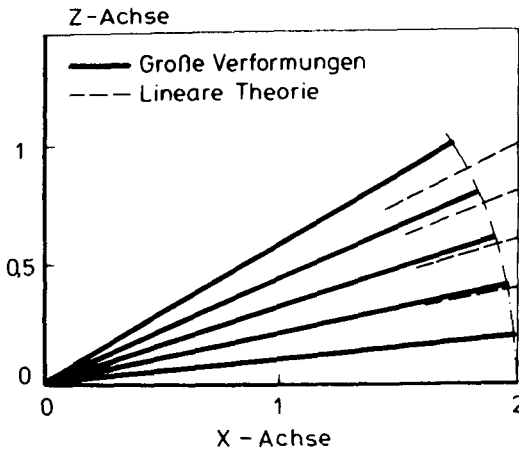


Bild 5.2: Einseitig freidrehbar gelagerte Platte mit vorgegebener Durchbiegung des gegenüberliegenden Randes

In der Praxis tritt ein solcher Fall selbstverständlich nicht auf. Daher soll nun das vorgeschlagene Modell anhand eines praxisnahen Beispiels mit dem weitverbreiteten Programm ADINA verglichen werden. Da hierbei zwei Modelle verglichen werden, die auf den gleichen theoretischen Grundlagen beruhen, kann nicht auf die Güte der einen oder anderen Lösung geschlossen werden. Auftretende Abweichungen sind lediglich in Unterschieden der Elementansatzfunktionen und der zugrundegelegten numerischen Verfahren begründet. Trotzdem ist der angestellte Vergleich sinnvoll. Durch die schon angesprochene weite Verbreitung von ADINA wird das hier vorgestellte Programm einerseits in einen übergeordneten Rahmen eingepaßt und andererseits kann an einem praxisnahen Beispiel die Wichtigkeit des aufwendigen Ansatzes begründet werden.

Es wird wiederum das System von Abschnitt 5.1.1 verwendet. Die Platte wird mit $3 \times 3 = 9$ Elementen diskretisiert, aus Symmetriegründen braucht nur ein Plattenviertel gerechnet zu werden. Als Belastung wird eine Einzellast in Plattenmitte angesetzt.

Da die Abweichungen zwischen den beiden Rechenmodellen sehr gering sind, kann auf eine grafische Darstellung verzichtet wer-

den. Statt dessen ist die Mittendurchbiegung für einige Laststufen in der folgenden Tabelle 5.4 eingetragen.

Last [MN]	Mittendurchbiegung [mm]			Abweichung ADINA/e.M. [/]
	ADINA	eigenes Modell	Lineare Theorie	
0.02	42.56	42.23	44.55	0.0078
0.04	77.69	76.38	89.09	0.0172
0.06	104.55	103.09	133.64	0.0142
0.08	125.89	124.79	178.19	0.0088
0.10	143.78	143.11	222.74	0.0047
0.12	159.29	159.04	267.28	0.0016

Tabelle 5.4: Vergleich der Mittendurchbiegung

Hier sollte jedoch noch auf einige interessante Unterschiede zwischen dem eigenen Rechenmodell und ADINA hingewiesen werden. ADINA verwendet ein Dreieckelement mit 15 Knotenfreiheitsgraden, während das hier vorgeschlagene Modell ein Viereckelement mit 24 Knotenfreiheitsgraden verwendet. Die Theorie der großen Verformungen ist in ADINA mit Hilfe der "updated Lagrange" Formulierung realisiert, während das eigene Modell die "total Lagrange" Lösung verwendet. Trotz dieser Unterschiede stimmen die Ergebnisse sehr gut überein.

Andererseits treten zur linearen Lösung mit zunehmender Last rasch wachsende Unterschiede auf.

5.1.4 Temperaturbeanspruchung

Es soll das Beul- und Nachbeulverhalten einer vierseitig gelagerten Platte zunächst mit in einer Achse vollständig behinderter Randverschiebung unter homogener Temperaturbeanspruchung, jedoch ohne statische Last, untersucht werden.

Als statisches System wird das System 1 aus Abschnitt 5.1.1 verwendet. Der E-Modul wird mit 10000 MN/m^2 angenommen, der thermische Ausdehnungskoeffizient beträgt $1\text{E-}5$. Daraus kann, ver-

gleiche Abschnitt 5.1.2, direkt die Beultemperatur berechnet werden. Sie beträgt 205.6 °C. Zusätzlich zur reinen Beuluntersuchung wird jedoch mit der Theorie der großen Verformungen gerechnet, so daß auch nach dem Ausbeulen noch stabile Gleichgewichtszustände gefunden werden.

Da es sich um eine quadratische Platte handelt, genügt es, ein Plattenviertel zu berechnen. Für das gestellte Problem sind analytische Näherungslösungen bekannt, zum Beispiel /BSK.63/. Danach lautet die Formel für die Mittendurchbiegung:

$$f = \frac{a}{\pi} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{n}{E} - \frac{\pi^2 \cdot h^3}{3 \cdot a^2}} \quad \text{mit}$$

$$n = E \cdot \epsilon = E \cdot \alpha_t \cdot T > n_k$$

Diese Formel wurde ausgewertet und den Rechenergebnissen in Bild 5.3 gegenübergestellt. Wie man erkennt, weichen beide Lösungen zwar zahlenmäßig deutlich voneinander ab, aber die Form der Kurve stimmt bei beiden gut überein. Die Rechenergebnisse lassen sich durch feinere Elementierung verbessern, andererseits käme es dann zu zunehmenden numerischen Ungenauigkeiten, das heißt, daß der prinzipielle Kurvenverlauf besser getroffen würde, die Beultemperatur aber abweichen würde.

Ferner wurde bei sonst gleichen Randbedingungen eine zweiachsige volle Zwängung vorgenommen. Die Temperatur-Mittendurchbiegungs-Beziehung ist in Bild 5.4 dargestellt. Die Beultemperatur liegt bei 102.8 °C, also genau bei der Hälfte der Beultemperatur der einachsig gezwängten Platte. Analytische Näherungslösungen sind im Augenblick nicht bekannt, aber denkbar.

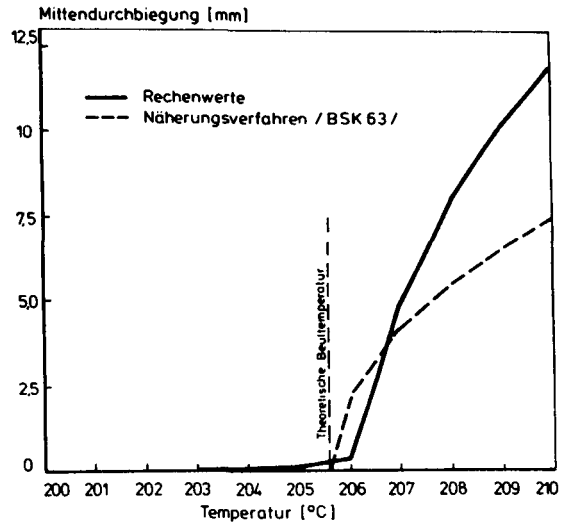


Bild 5.3: Mittendurchbiegung einer einachsigerzwängten Quadratplatte

Die auf dem folgenden Bild für den interessanten Bereich von 100 bis 105 °C aufgetragene Temperatur-Verformungs-Beziehung zeigt interessante Abweichungen zum einachsigerzwängten Fall. Die Kurve hat zwar einen ähnlichen Verlauf, die Ordinaten wachsen jedoch bei konstanter Temperaturänderung deutlich rascher. Dies ist eindeutig auf die zweiachsige Dehnbehinderung zurückzuführen. Berücksichtigt man jedoch den Faktor 2 auf der Temperaturachse, wie in Bild 5.4 geschehen, so zeigt sich, daß die Platte hier ein etwas steiferes Nachbeulverhalten hat.

Die Ermittlung der Rechenergebnisse stößt auf Schwierigkeiten. Am Verzweigungspunkt gibt es zwei stabile und einen instabilen Gleichgewichtszustand. Stabil ist jeweils der nach der einen oder anderen Seite ausgebeulte Zustand, während der unverformte Zustand möglich, aber instabil ist. Um das Rechenmodell nun in einen definierten, stabilen Zustand zu zwingen, ist eine Störlast in Plattenmitte erforderlich. Diese Störlast wurde mit 1.E-5 für das Plattenviertel gewählt.

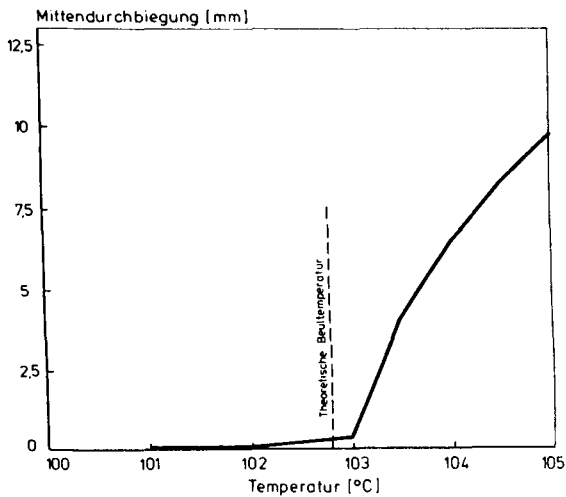


Bild 5.4: Mittendurchbiegung einer zweiachsig gezwängten Quadratplatte

Die Stabilität des Gleichgewichts kann mit Hilfe der Eigenwerte überprüft werden. Am Verzweigungspunkt erreicht der kleinste Eigenwert sein Minimum in der Nähe von Null. Mit weiter zunehmender Temperatur wächst der kleinste Eigenwert wieder an.

5.2 NICHTLINEARES MATERIAL

5.2.1 Vorbemerkung

Im ersten Teil dieses Abschnitts wurde gezeigt, wie das mechanische Modell mit einem linearen Werkstoffmodell zusammenwirkt und mit welcher Genauigkeit unter verschiedenen Randbedingungen die Lösung ermittelt wird. Im nächsten Abschnitt wird nun das nichtlineare Werkstoffverhalten untersucht. Das Hauptaugenmerk gilt dabei dem biaxial beanspruchten Beton, zum Schluß wird jedoch auch das Zusammenwirken zwischen Beton und Stahl gezeigt.

Alle Beispiele wurden mit dem gleichen Programm gerechnet, mit dem auch die Beispiele im ersten Teil dieses Abschnitts ge-

rechnet wurden. Der werkstoffspezifische Teil wurde also nicht aus dem Gesamtprogramm herausgeschnitten, sondern in seiner natürlichen Umgebung getestet. Zu diesem Zweck wurde eine Betonscheibe der Abmessung 1×0.1 m mit einem Element diskretisiert und an zwei senkrecht aufeinander stehenden Rändern gelagert. Die gegenüberliegenden Ränder wurden in der Scheibenebene je nach Erfordernis belastet. Die Werkstoffparameter sind in allen Fällen entsprechend Kupfer's Beton 1 /Kup.73/ angesetzt worden.

5.2.2 Biaxiale Betonarbeitslinien

Die biaxiale Betonarbeitslinie wird klassischer Weise für ein konstantes Verhältnis der Hauptspannungen ermittelt. Die Dehnungen ergeben sich in Abhängigkeit von den Spannungen und werden über der betragsgrößten Spannung aufgetragen.

Dies ist in den folgenden beiden Bildern für eine Auswahl von Spannungsverhältnissen in Übereinstimmung mit /Kup.73/ geschehen. Die Meßwerte wurden aus der Originalveröffentlichung entnommen und in Bild 5.5 und 5.6 einkopiert. Dem Verfasser kam es nicht so sehr darauf an, einzelne Arbeitslinien exakt mit dem Rechenmodell zu erfassen, sondern es wurde mehr auf die prinzipielle Charakteristik Wert gelegt.

Vergleicht man die Rechenergebnisse für den Druck-Druck Quadranten mit /Kup.73/, so erkennt man, daß der Verlauf der Arbeitslinien recht gut getroffen wird. Bei zunehmendem Querdruck steigt die Bruchspannung zunächst bis auf das 1.25-fache der einaxialen Festigkeit an. Gleichzeitig wächst die Steifigkeit. Nimmt der Querdruck noch weiter zu, so fällt die Bruchspannung wieder ab und erreicht schließlich nur noch die 1.16-fach einaxiale Festigkeit bei symmetrischer Druckbelastung. Dies stimmt mit Kupfer's Versuchen sehr gut überein.

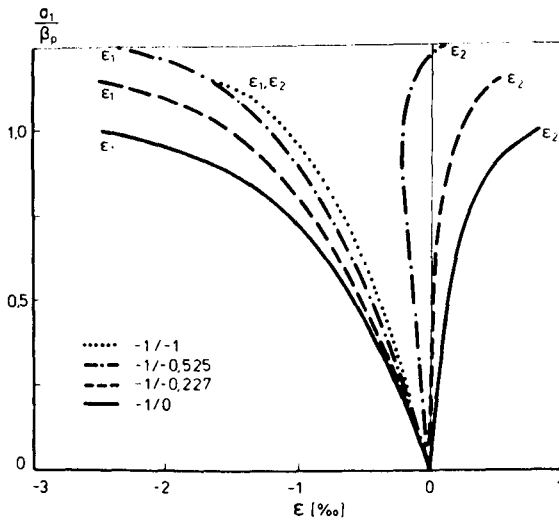


Bild 5.5: Betonarbeitslinien im Druck-Druck Quadranten

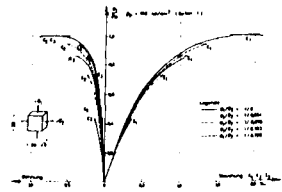
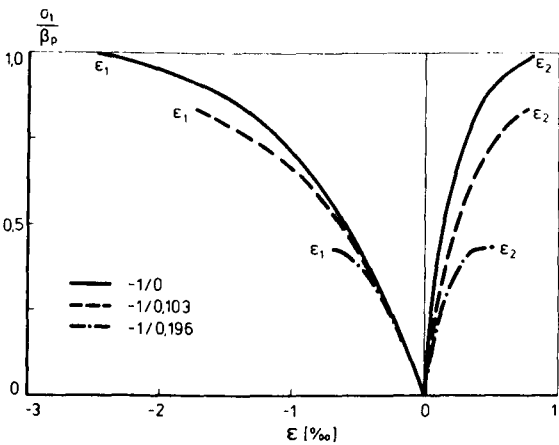


Bild 5.6: Betonarbeitslinien im Druck-Zug Quadranten

Die Verformungscharakteristik ist jedoch etwas anders, nämlich insgesamt weicher. Dies ist auf die eingesetzte Bruchdehnung von -2.4 mm/m zurückzuführen.

Im Druck-Zug Quadranten (siehe Bild 5.6) zeigt sich, daß die Bruchspannung mit zunehmendem Querkzug rasch abnimmt, was auch zahlenmäßig mit /Kup.73/ wieder gut übereinstimmt. Die auftreten-

den Verformungen, insbesondere in Querrichtung, sind jedoch größer als bei Kupfer.

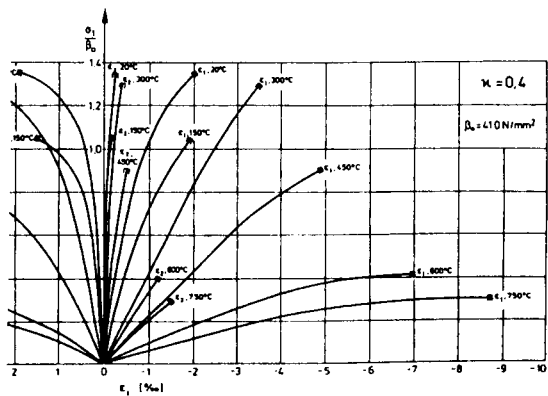
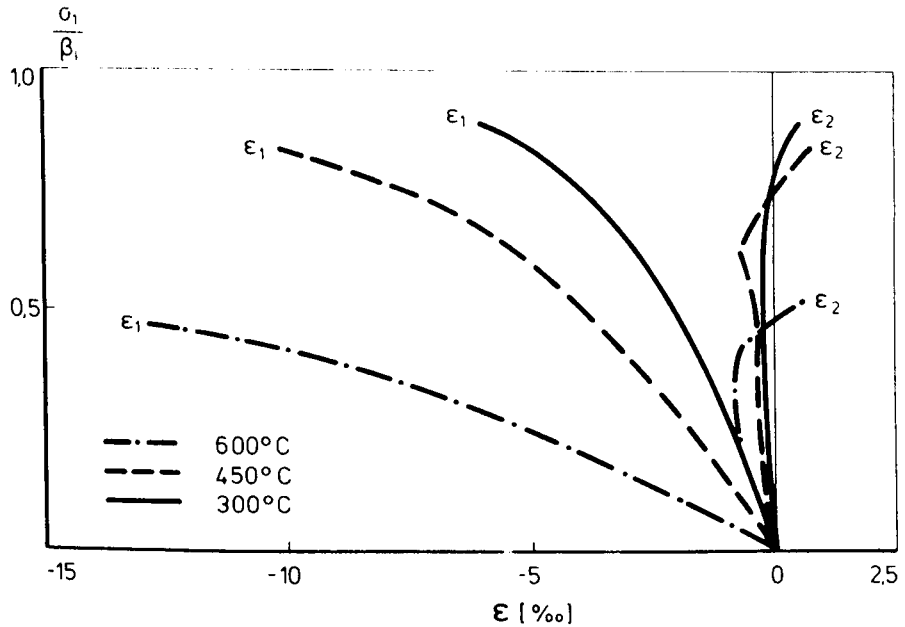


Bild 5.7: Betonarbeitslinien bei erhöhter Temperatur, Spannungsverhältnis -1/-0.4

Weiterhin wurde der Betonkörper bei dem Spannungsverhältnis -1/-0.4 einer Temperaturbeanspruchung unterworfen. Die Rechenergebnisse sind auf Bild 5.7 dargestellt und müssen mit /Ehm.86/ verglichen werden. Es zeigt sich, daß die Bruchspannung bei

300 °C deutlich unterschätzt wird, während sie sonst gut übereinstimmt.

Die Verformbarkeit ist etwas größer als bei Ehm. Das Verhalten der weniger belasteten Querrichtung wird bis ca 80 % der Bruchspannung recht gut wiedergegeben. Oberhalb hiervon kommt es bei allen Temperaturen zu Zugdehnungen, die Ehm bei diesem Spannungsverhältnis nicht gemessen hat.

5.2.3 Temperaturbelastung bei konstanter Spannung

Wird eine Probe bei konstanter Spannung einer linear wachsenden Temperaturbeanspruchung unterworfen, so handelt es sich um einen "Warmkriechversuch". Die auftretenden Dehnungen werden gemessen und in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Dieser Versuch gibt Aufschluß über die Versagenstemperatur der Probe.

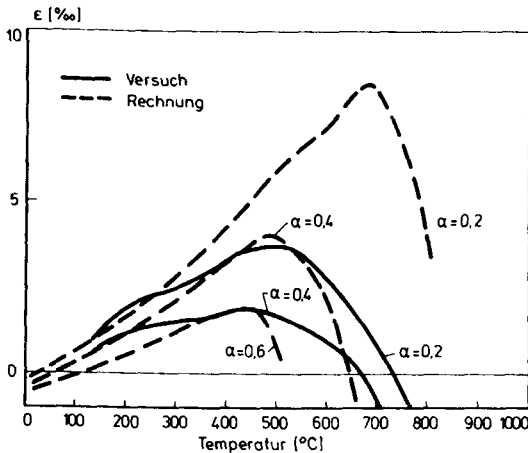


Bild 5.8: Nachrechnung von Warmkriechversuchen für verschiedene Auslastungsgrade α und das Spannungsverhältnis -1/-1

Im folgenden Beispiel wurde ein solcher Warmkriechversuch nachgerechnet. Die Ergebnisse sind auf Bild 5.8 dargestellt und können mit /Ehm.86/ verglichen werden. Es zeigt sich, daß die Versagenstemperatur in allen Fällen deutlich unterschätzt wird. Dies mag daran liegen, daß der von Ehm gefundene Festigkeitszu-

wachs bei zunehmender Temperatur und symmetrischer Druckbeanspruchung in das vorliegende Programm noch nicht eingearbeitet ist. Da außerdem, wie oben schon bemerkt, mit den Werkstoffparametern für Beton 1 von Kupfer gerechnet wurde, sind zusätzliche Abweichungen unvermeidlich.

Die Verformungscharakteristik wird ansonsten jedoch, bis auf den Auslastungsgrad $\alpha = 0.6$, gut erfaßt. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und den einaxialen Versuchen von Schneider ist im Übrigen wesentlich besser, da diese Versuche ja Grundlage der Herleitung des Werkstoffmodells waren. Auf eine Darstellung kann deshalb hier verzichtet werden.

5.2.4 Temperaturbelastung bei konstanter Dehnung

Wird bei konstantgehaltener Dehnung eine Probe einer monoton wachsenden Temperaturbeanspruchung unterworfen, so handelt es sich um einen "Zwängungsversuch". Beobachtet wird die Spannungsentwicklung in der Probe, die dann über der Temperatur aufgetragen werden kann. Außerdem kann wieder die Versagenstemperatur ermittelt werden, hier definiert als die Temperatur, bei der die auftretenden Spannungen gleich den Spannungen nach Aufbringen der Verformung sind.

Im folgenden Beispiel wurde ein derartiger Versuch für die Spannungsverhältnisse $-1/-1$ und $-1/0$ nachgerechnet. Vergleicht man die Ergebnisse auf Bild 5.9 mit /Ehm.86/ so zeigt sich, daß die temperaturabhängige Spannungsentwicklung gut erfaßt wird. Im Gegensatz zu den diskontinuierlich verlaufenden Meßkurven zeigen sich im Rechenmodell stetige Kurven von monotonem Verlauf. Der spannungssteigernde Einfluß der biaxialen Beanspruchung wird im übrigen gut erfaßt.

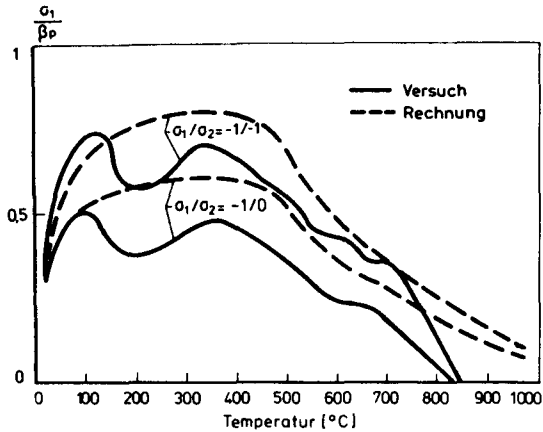


Bild 5.9: Zwängungskräfte im Beton bei vollständiger Dehnungsbehinderung für versch. Spannungsverhältnisse

Daraus kann geschlossen werden, daß der Beton sich bei eingprägtem Dehnungszustand deutlich anders verhält als bei eingprägtem Spannungszustand. Beim Warmkriechversuch handelt es sich um einen lastgesteuerten Versuch, der es nicht gestattet, lokale Minima in der Last-Verformungs-Beziehung aufzufinden. Diese sind demzufolge auch nicht in das Rechenmodell eingearbeitet worden.

Abschließend soll darauf hingewiesen werden, daß die dehnungsgesteuerten Versuche eine deutlich geringere Versagenstemperatur zeigen als die spannungsgesteuerten Versuche und zwar zum Beispiel für den Auslastungsgrad 0.3 und das Spannungsverhältnis -1/-1 730 °C statt 900 °C. Weiterhin ist in diesem Zusammenhang bemerkenswert, daß das vorgeschlagene Rechenmodell mit seinem Ergebnis ziemlich genau in der Mitte liegt.

5.2.5 Zusammenwirken Beton - Stahl

Ein wichtiger Aspekt bei der numerischen Behandlung von Stahlbetontragwerken ist das Zusammenwirken von Beton und Stahl im Rechenmodell, vor allem wenn die Stahleinlage nicht in der Hauptbeanspruchungsrichtung liegt. Um die Leistungsfähigkeit des

vorgeschlagenen Modells in diesem Bereich zu testen und nachzuweisen, wurde daher folgendes Beispiel untersucht.

Eine quadratische Scheibe der Abmessung $1 \times 1 \times 0.1$ m erhält ein mittig angeordnetes orthogonales Bewehrungsnetz von $10 \text{ cm}^2/\text{m}$ je Richtung, das unter einem Winkel von 45° eingelegt wird. Zwei rechtwinklig zusammenstoßende Ränder werden normal zum Rand gehalten, die gegenüberliegenden Ränder werden betragsgleich, aber mit unterschiedlichem Vorzeichen, in Scheibenebene belastet.

Damit wird, solange der Beton sich isotrop verformt, auf die Bewehrung eine reine Schubbeanspruchung aufgebracht, die definitionsgemäß keine Spannungen zur Folge haben kann. Nähert sich die Zugkraft nun der Reißlast, so soll das Betonmodell zunehmend orthotropen Charakter annehmen, so daß infolge der unterschiedlichen Verformungen in Achsrichtung die Stahleinlage unter Spannung gerät.

Die Stahleinlage ist so ausgelegt, daß sie nur etwa doppelt soviel Zugkraft aufnehmen kann, wie die Zugfestigkeit des Betons alleine aufnimmt. Daher kommt es jetzt infolge Reißbildung zu einem sehr starken Verformungszuwachs in Zugrichtung. Anschließend trägt die Bewehrung die Zugkraft alleine bis zum Erreichen ihrer Festigkeitsgrenze.

Die Druckkraft kann, wegen der wesentlich höheren Tragfähigkeit des Betons auf Druck, besser aufgenommen werden. Aber auch hier kommt es bei Bildung des Risses zu einem kleinen Verformungszuwachs.

Das Last-Dehnungsdiagramm der FEM-Rechnung ist auf Bild 5.10 dargestellt. Zum Zwecke der besseren Vergleichbarkeit ist die Druckdehnung mit umgekehrtem Vorzeichen in den Zug-Quadranten eingezeichnet worden.

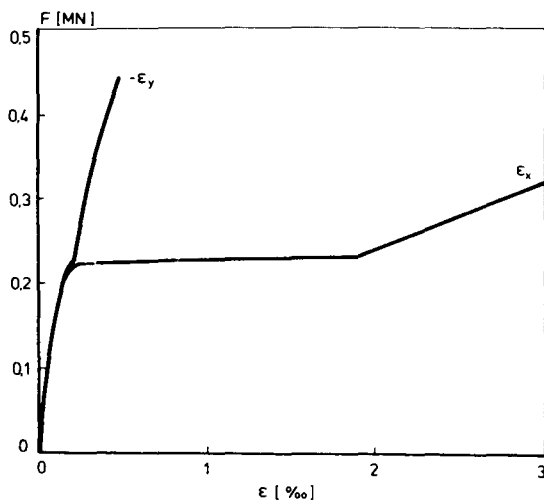


Bild 5.10: Last-Dehnungs-Beziehung für die Betonscheibe mit Bewehrungsnetz unter 45°

Man erkennt, daß der Kurvenverlauf der oben angeführten anschaulichen Betrachtung gut entspricht. Besonderer Wert ist auf zwei charakteristische Punkte zu legen. Einerseits ist es für ein Rechenmodell des Verbundwerkstoffs Stahlbeton von essentieller Bedeutung, ohne Konvergenzprobleme die Umlagerung der Zugkraft auf die Stahleinlage bei Erreichen der Zugfestigkeit des Betons wiedergeben zu können. Andererseits muß die Zugfestigkeit der Stahleinlage voll ausgenutzt werden können, auch wenn die Stahleinlage nicht in Richtung der Hauptbeanspruchung liegt. In beiden Fällen beweist das vorgeschlagene Modell seine hohe Leistungsfähigkeit.

Das gewählte Beispiel hat jedoch auch eine sehr praxisnahe Komponente. Dreht man die Scheibe um 45° , so entspricht sie genau der maximalbeanspruchten Faser einer Stahlbetonplatte mit orthogonalem Bewehrungsnetz auf der Hauptdiagonalen. Das Tragverhalten einer derartigen Platte wird vom Eckbereich in erheblichem Maß beeinflusst und zwar insofern, als es hier zur Bildung der ersten Risse kommt. Reagiert das Rechenmodell jetzt mit Konvergenzproblemen, so kann die Umlagerung der Schnittkräfte zur Plattenmitte hin nicht mehr verfolgt werden, und die Tragfähigkeit der Platte wird erheblich unterschätzt.

5.3 NUMERISCHE STABILITÄT

Numerische Stabilität bedeutet, daß bei kleinen Änderungen der Eingangsgröße auch kleine Änderungen der Zielgröße auftreten. Das Rechenmodell genügt diesen Anforderungen. Dies kann am einfachsten anhand der Beispiele mit elastischem Materialgesetz untersucht werden.

So gelingt es beim Beispiel in Abschnitt 5.1.4 die Störlast von $1.E-5$, die um 7 Zehnerpotenzen kleiner ist als die Normalkraft, mit Rechengenauigkeit, also etwa 14 bis 18 Stellen, je nach Rechenanlage, auszuiterieren. Die in Richtung der Störlast auftretenden Verformungen sind um 4 Zehnerpotenzen größer als die Störlast. Trotzdem können auch die Verformungen mit Rechengenauigkeit bestimmt werden. Bei der Beurteilung dieser Zusammenhänge bewährt sich die Eigenschaft des Rechenmodells Auflagerkräfte und nicht ausgeglichene Kräfte in inneren Knoten auszudrucken.

Mit wachsendem System ist aufgrund der größer werdenden Systemmatrix der Verlust einiger signifikanter Stellen bei der Auflösung des linearen Gleichungssystems zu erwarten. Solange der Verformungsvektor jedoch noch auf ca. 3 Stellen genau berechnet worden ist, kann mit Hilfe der eingebauten Gleichgewichtsüberprüfung nachiteriert werden, wobei mit einer deutlichen Verbesserung der Genauigkeit gerechnet werden kann.

Das Programm ist auf Rechenanlagen der Firmen Prime, IBM und Cray ablauffähig. Dabei waren die Rechenläufe an der Cray hinsichtlich des Laufzeitverhaltens besonders aufschlußreich. Die Cray verfügt über eine optionale automatische Laufzeitüberwachung für die einzelnen Unterprogramme. Hiermit wurde am Beispiel aus Abschnitt 5.1.1 festgestellt, daß das Unterprogramm mit dem höchsten Rechenzeitbedarf von ca. 80% die Matrixmultiplikation ist. Durch Verbesserung des Algorithmusses konnte ihr Anteil auf ca. 40% reduziert und die Rechenzeit damit nahezu halbiert werden.

Der Aufwand für die Lösung des Gleichungssystems ist demgegenüber verschwindend gering. Der hierfür verwendete Algorithmus stammt von Wilkinson und ist, ebenso wie die Unterprogramme zur Berechnung der Eigenwerte, in /Eis.77/ veröffentlicht. Er greift nicht auf das Unterprogramm zur Matrixmultiplikation zurück.

Die Rechenzeit ist insgesamt relativ hoch. Im Mittel kann sie pro Iterationsschritt und Element mit 32 Integrationspunkten auf der Hochschulrechenanlage der TU Braunschweig, einer Amdahl 470/V7 mit IBM Betriebssystem, mit 0.5 s angegeben werden. Da die Konfiguration dieser Anlage jedoch einer dauernden Veränderung unterliegt, ist die angegebene Zahl nur als Richtwert anzusehen. Ferner ist der Zeitaufwand natürlich bis zu einem gewissen Grad problemabhängig.

6 NACHRECHNUNG VON VERSUCHEN

6.1 WANDVERSUCHE

6.1.1 Zielstellung

Beginnend mit dem Jahr 1975 wurden im Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz Versuche an vierseitig und dreiseitig gelagerten Stahlbetonwänden durchgeführt. Die Versuche hatten zum Ziel, die Einflüsse der Lagerungsbedingung, des Seitenverhältnisses, der Schlankheit, der Ausmitte und der Bewehrung auf das Trag- und Verformungsverhalten der Wände wirklichkeitsnah zu untersuchen. Die Ergebnisse sind in den Forschungsberichten /Ti.79/, /Ki.82/ und /BGS.86/ dargestellt worden.

Aus einer Reihe von Gründen gelang es bei diesen Versuchen nicht, einen Versuchskörper herzustellen, der dem Ideal der ebenen, naviergelagerten Platte entspricht. So war es zum Beispiel erforderlich, zur Einleitung der erheblichen Normalkräfte Konsolen anzuordnen; diese wiesen obendrein noch eine Spaltzugbewehrung auf, da die Last eher punktförmig eingeleitet werden mußte. Außerdem wurde bei einigen Prüfkörpern auch Transportbewehrung eingebaut.

Die frei drehbare Lagerung konnte einwandfrei erzielt werden, die eigentlich erforderliche starre Linienlagerung wurde jedoch nur an den vertikalen Rändern erreicht, nicht hingegen an den horizontalen Rändern.

Bedingt durch Herstellungstoleranzen und die geringe Dicke der Prüfkörper wichen der geometrische Schwerpunkt und die tatsächliche Wanddicke von ihren Sollwerten um bis zu 10 % ab. Dies

wurde in einem aufwendigen Vermessungsverfahren festgestellt und in den Berichten auch mitgeteilt.

Will man die gemessenen Traglasten, Durchbiegungen und Dehnungen nun auf den eigentlich zu untersuchenden Fall einer ebenen, naviergelagerten Wand ohne Hilfsbewehrung übertragen, so bedarf es eines Rechenmodells mit den Eigenschaften des hier vorgestellten Modells. Das Rechenmodell wird nicht überfordert, da ja zunächst der Versuch selbst mit all seinen Imperfektionen nachgerechnet werden muß. Erst, wenn dies hinreichend genau gelungen ist, wird berechnet, wie sich der perfekte Versuchskörper verhalten hätte. Es handelt sich also um eine Extrapolation im Nahbereich vorhandener Meßwerte.

Im folgenden Abschnitt soll genau dies an einem Beispiel aus der letzten durchgeführten Versuchsserie /BGS.86/ gezeigt werden.

6.1.2 Dreiseitig gelagerte Wand

Als Versuch wurde zunächst die dreiseitig gelagerte, "unbewehrte" Wand W13 ausgewählt. Die quadratische Wand hat eine Höhe von 3.00 m. Die Dicke beträgt 0.082 m und die bezogene Ausmitte der Last 0.20.

Die komplizierte geometrische Form der Lasteinleitungskonstruktion kann im Rechenmodell nicht genau nachgebildet werden. Ersatzweise wird eine Konsolenhöhe von 0.15 m angesetzt. In Wirklichkeit hat die Konsole eine Höhe von lediglich 0.125 m und ist auf weiteren 0.125 m angevoutet. Außerdem ist die Konsole des Prüfkörpers durch Weicheinlagen in Abständen von 0.50 m bis zum Plattenspiegel aufgetrennt. Damit konnte die auf Bild 6.1 dargestellte Diskretisierung vorgenommen werden.

Es genügt hier, das halbe System zu berechnen und die Mittelachse als Symmetrieachse auszubilden, da die Wand ein quadratisches Seitenverhältnis hat.

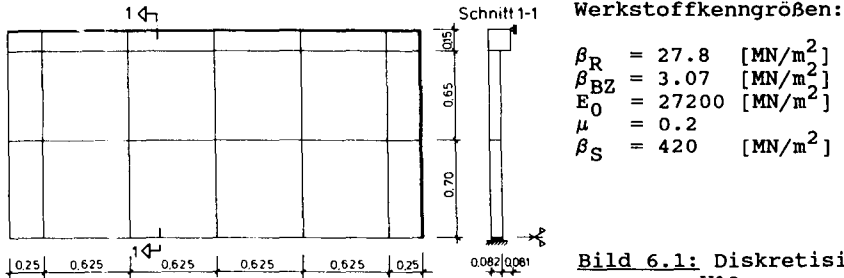


Bild 6.1: Diskretisierung von W13

Am freien Rand hat der Prüfkörper eine Transportbewehrung bestehend aus 2 ϕ 8 und 2 ϕ 6, die in der Rechnung als mittig angeordnet angenommen wurden.

Als Werkstoffkennwerte wurden die an Nebenversuchen gewonnenen Kennwerte in die Rechnung eingeführt. Die Querdehnzahl wurde nicht gemessen und mußte deshalb geschätzt werden.

Mit dem oben beschriebenen Rechenmodell wurde nun die Last-Durchbiegungs-Beziehung dieser Wand nachgerechnet. Sie ist für den freien Rand in Wandmitte zusammen mit den Meßwerten auf Bild 6.2 dargestellt.

Beide Kurven stimmen hinsichtlich ihres Verlaufes und hinsichtlich der erreichten Traglast gut überein. Setzt man ferner eine Versuchsstreuung von 10 % voraus, so liegen die Rechenwerte innerhalb des dadurch gebildeten Toleranzbereichs. Deshalb kann nun der Einfluß von Konsole und Transportbewehrung untersucht werden. Zu diesem Zweck wird der Versuch einmal unbewehrt und ohne Konsole, einmal mit Montagebewehrung und ohne Konsole und einmal unbewehrt aber mit Konsole nachgerechnet. Wieder soll anhand der Last-Durchbiegungs-Beziehung (siehe Bild 6.3) das Ergebnis dargestellt und erläutert werden.

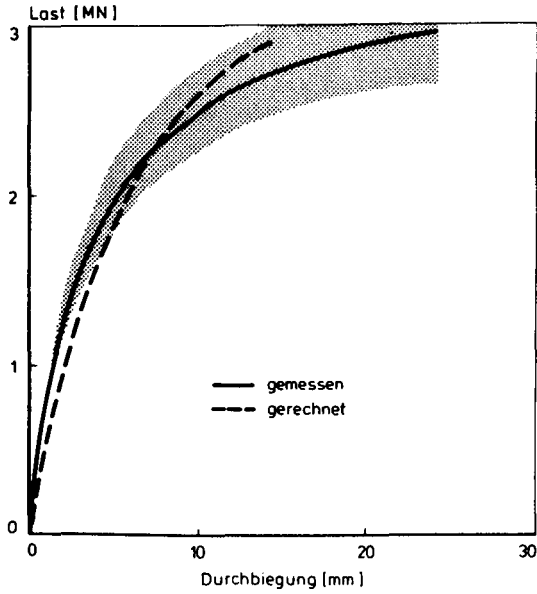


Bild 6.2: Vergleich der gemessenen und gerechneten Last-Durchbiegungs-Beziehung für W13

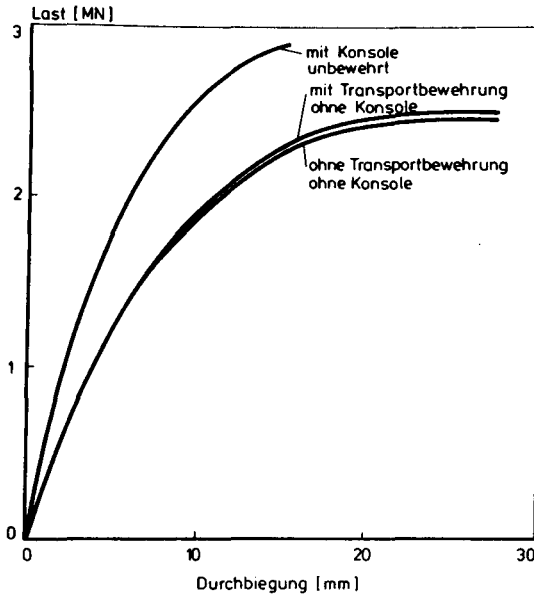


Bild 6.3: Einfluß von Konsole und Transportbewehrung auf die Last-Durchbiegungs-Beziehung von W13

Man erkennt sofort, daß die Transportbewehrung praktisch keinen Einfluß auf die Bruchlast und nur sehr geringen Einfluß auf die Durchbiegung hat. Anders bei der Konsole, die schon bei geringer Last offenbar zu einem wesentlich steiferen Verformungsverhalten führt. Die Ursprungstangente der Last-Durchbiegungs-Beziehung hat bei Berücksichtigung der Konsole nahezu die doppelte Steigung. Auch die Bruchlast erfährt eine wesentliche Steigerung von ca. 15 %.

Auf die Berücksichtigung der Konsole bei der Nachrechnung dieser Versuche kann daher nicht verzichtet werden. Andererseits kann das Versuchsergebnis ohne Nachrechnung nicht praxisgerecht bewertet werden, da in den meisten baupraktischen Fällen die Konsole fehlt.

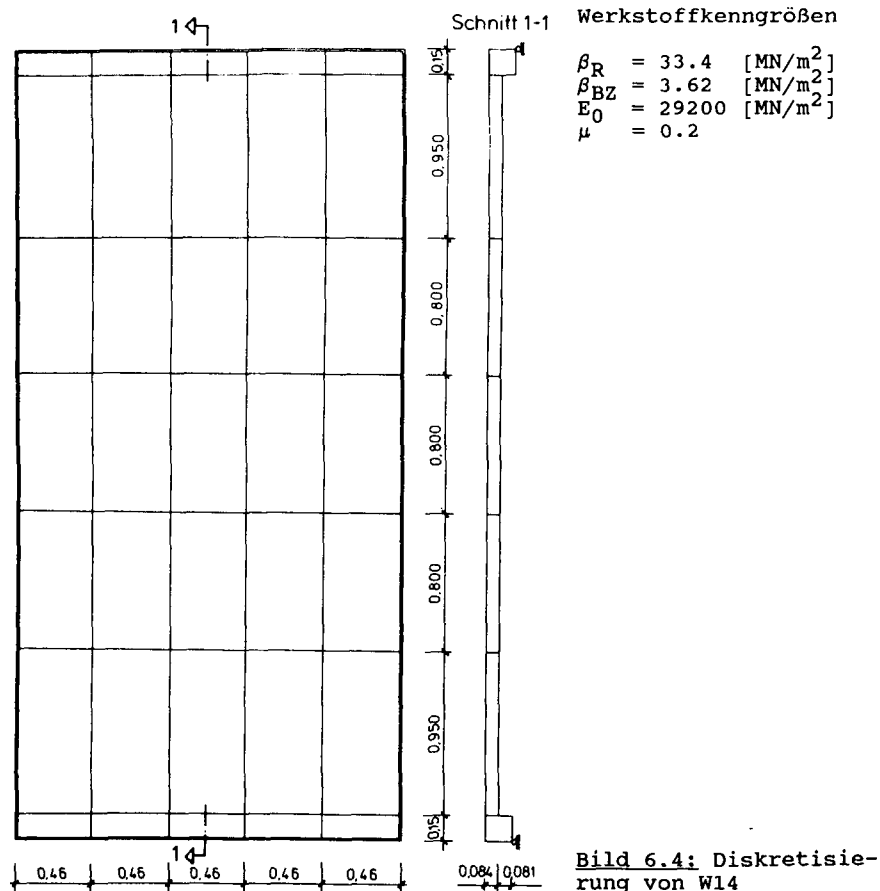
6.1.3 Mehrwelliges Beulen

Gleichsinnige Momentenbeanspruchung gegenüberliegender Ränder verursacht bei einer Platte mit Seitenverhältnis $h/b > \sqrt{2}/1$ eine 3-wellige Biegefigur mit Ordinaten gleichen Vorzeichens. Die zugehörige Beulfigur ist einwellig. Ob, wie und wann sich beide Figuren überlagern war bislang unbekannt, denn analytische Überlegungen führen hier nicht zum Ziel, da das Problem stark nicht-linear ist.

Der Zusammenhang konnte aber im Rahmen der Versuchsserie /BGS.86/ mit den Versuchen W14 und W15 erstmals experimentell untersucht werden. Es zeigte sich, daß bei geringer Belastung der Biegeanteil überwiegt und die Biegefigur eindeutig eine 3-wellige Form hat.

Bei einer gewissen Laststufe in der Nähe der Bruchlast verläßt der Prüfkörper jedoch die 3-wellige Form und nimmt eine einwellige Biegefigur ein. Dies geschieht im Versuch bei konstanter Last und unter erheblichem Verformungszuwachs, vor allem in Wandmitte. Danach ist die Verformungsfigur wieder stabil, und die

Last kann noch etwas gesteigert werden, ehe es zum Versagen kommt.



Die Nachrechnung dieses Versuches gestaltete sich etwas schwieriger, da der Versuchskörper aufgrund eines Fehlers bei der Auswertung der Geometriedaten nicht in seiner Mittelebene gelagert wurde. Aus dem gleichen Grund sind die Ausmitten der Lasten am oberen und unteren Rand auch etwas unterschiedlich. Der erste Fehler kann nur mit erheblichem Aufwand im Programm berücksichtigt werden und wurde deshalb vernachlässigt. Die Berücksichtigung des zweiten Fehlers verursacht demgegenüber keinerlei Schwierigkeiten. Außerdem wurde die Konsole berücksichtigt, wäh-

rend die Randbewehrung vernachlässigt wurde. Die gewählte Diskretisierung ist zusammen mit den Werkstoffkenngrößen auf Bild 6.4 dargestellt.

Das Trag- und Verformungsverhalten des Prüfkörpers wird vom Rechenmodell gut erfaßt, wie auf den folgenden Bildern gezeigt wird. Auf Bild 6.5 ist die Last-Durchbiegungs-Beziehung für Versuch und Rechnung gegenübergestellt. Aufgetragen ist die Durchbiegung in Wandmitte sowie der Maximalwert der Durchbiegung, der im oberen Viertel auftritt. Der Prüfkörper wurde zunächst mit einer Ausmitte $e/d = 0.1$ bis zu einer Last von ca. 3 MN belastet. Als man dann jedoch feststellte, daß nur geringe Verformungen auftraten und das Versagen mit der vorhandenen Prüfeinrichtung nicht zu erreichen war, wurde wieder entlastet und eine Ausmitte $e/d = 0.2$ eingestellt. Danach hatte der Prüfkörper jedoch bereits eine bleibende Verformung, vor allem im oberen Bereich, was auch in der gemessenen Last-Durchbiegungs-Beziehung zum Ausdruck kommt. Außerdem sind im Lasteinleitungsbereich einige Risse aufgetreten. Beim Wiederbelasten verhält sich der Prüfkörper daher etwas weicher als das Rechenmodell.

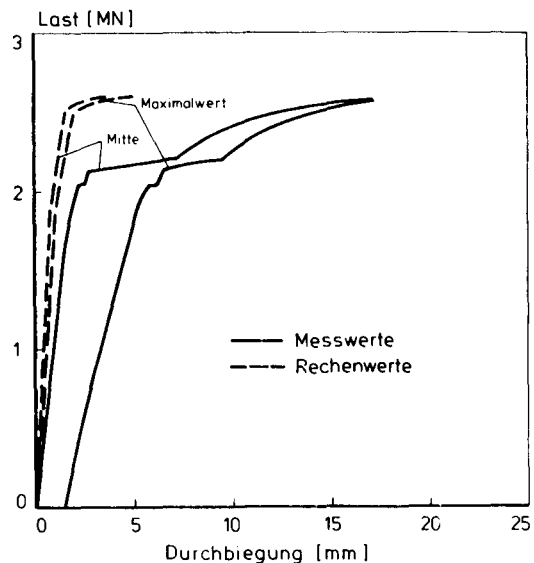


Bild 6.5: Vergleich gemessene und rechnerische Last-Durchbiegungs Beziehung für W14

Trotzdem stellt sich nach einigen Laststufen wieder eine ausgeprägt 3-wellige Biegefigur ein, die sich bis zu einer Last von ca. 2.1 MN hält. Das Rechenmodell gibt dies wieder, wenngleich die Verformungen hier deutlich geringer sind. Auf Bild 6.6 ist die rechnerische Biegefigur für die Laststufen 2 und 2.6 MN in Höhenlinienform dargestellt. Man erkennt an der Einschnürung der Höhenlinien in Wandmitte deutlich, daß bei 2 MN der Biegeanteil noch überwiegt. Aus der Last-Durchbiegungs-Beziehung ist dann ersichtlich, daß oberhalb von 2.5 MN ein Durchschlagen zur einwelligigen Beulfigur eintritt. Aufgrund der Vorverformung des Prüfkörpers und anderer Einflüsse liegt der rechnerische Durchschlagpunkt höher als im Versuch, was für Rechnungen im Stabilitätsbereich typisch ist.

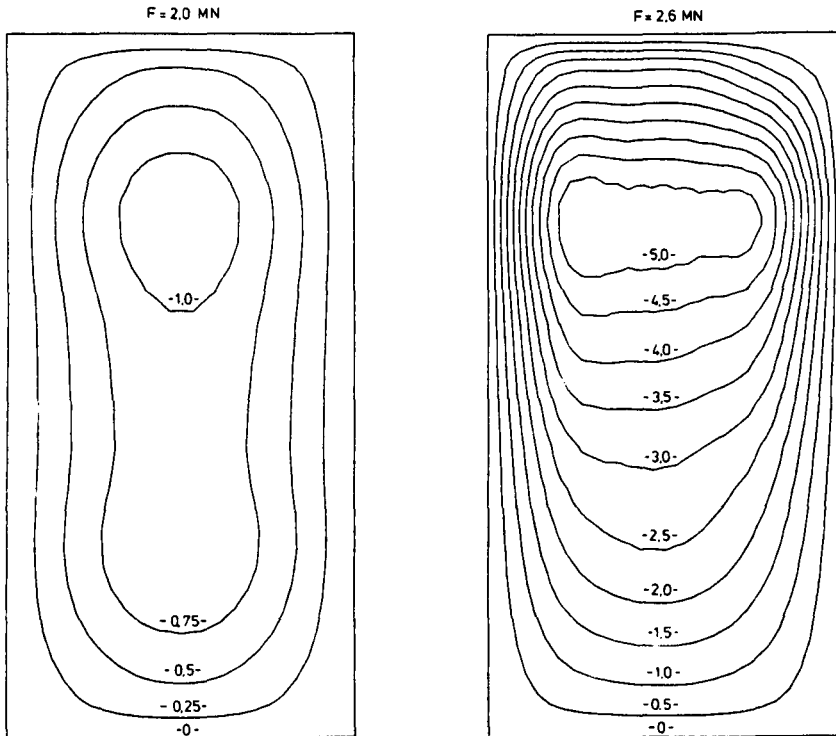


Bild 6.6: Rechnerische Biegefigur von W14 vor und nach dem Durchschlagen

Auf die rechnerische Bruchlast hat dies jedoch keinen Einfluß. Sie stimmt mit der im Versuch ermittelten Bruchlast gut überein.

6.2 BRANDVERSUCHE AN STAHLBETONPLATTEN

6.2.1 Zielstellung

Das Teilprojekt A2 des Sonderforschungsbereichs 148 "Brandverhalten von Bauteilen" hat, beginnend etwa mit dem Jahr 1979, Versuche zum Tragverhalten von Stahlbetonplatten im Brand durchgeführt. Aus den bis dahin vorliegenden Versuchen an mehrseitig gelagerten Einfeldplatten konnte geschlossen werden, daß auch relativ dünne Platten eine Feuerwiderstandsdauer von 90 Minuten problemlos erreichen. Versagen dieser Prüfkörper trat eher wegen zu hoher Temperatur an der dem Feuer abgewandten Seite, als durch strukturelle Instabilität auf.

Unter einem größeren Deckenfeld sind jedoch Brandszenarien denkbar, bei denen durch raumabschließende Bauteile eine Brandausbreitung über längere Zeit wirksam verhindert werden kann. In diesem Fall bleiben größere Deckenteile kalt und üben auf das brandbeanspruchte Feld eine Dehnungs- und Verdrehungsbehinderung aus. Das brandbeanspruchte Feld gerät dadurch unter erhebliche Normalkraft- und Momentenbeanspruchung. Deren Größe hängt von der Geometrie des Deckenfeldes, der Größe und Lage des brandbeanspruchten Teils und den Verformungen des Systems ab.

Die Normalkräfte rufen in der Platte Schnittkräfte nach Theorie II. Ordnung hervor. Außerdem treten erhebliche Durchbiegungen auf, so daß am verformten System auch Seilwirkungen berücksichtigt werden müssen. Um die Auswirkung dieser Beanspruchung auf das Tragverhalten und den Versagenszeitpunkt der Stahlbetonplatten experimentell zu untersuchen, wurden die oben angesprochenen Versuche durchgeführt. Gleichzeitig wurde das hier

vorgestellte Rechenmodell entwickelt, um die Versuche rechnerisch bewerten zu können.

6.2.2 Versuchsaufbau

Die experimentelle Prüfung eines kompletten Deckenfeldes ist wegen des damit verbundenen erheblichen Aufwandes nur in Ausnahmefällen möglich. Deshalb beschränkt man sich versuchstechnisch auf den brandbeanspruchten Teil und leitet die von der Umgebung hervorgerufenen Zwangkräfte mit Hilfe von hydraulischen Pressen am Rand in den Prüfkörper ein.

Die Größe und der zeitliche Verlauf der Randverschiebung wurden von Walter /Wal.81/ für einige ausgewählte Fälle mit einem nichtlinearen Scheibenprogramm berechnet. Daraus konnten Steuerkurven für die Pressen abgeleitet werden, um die Pressen im Versuch dann mit einem Prozeßrechner weggesteuert zu fahren. Die auftretenden Kräfte wurden gemessen und aufgezeichnet. Durch exzentrische Pressenanordnung wurde gleichzeitig ein Moment eingeleitet, das jedoch nicht unabhängig gesteuert werden konnte.

Außerdem wurden durch vertikal angeordnete hydraulische Pressen Querkräfte aufgebracht, die durch zahlreiche Lastverteiler soweit aufgeteilt wurden, daß sie annähernd einer gleichmäßig verteilten Flächenlast entsprachen. Die aufgebrachte Vertikalkraft entsprach im allgemeinen der zulässigen Last nach DIN 1045. Über den Entwurf und die Wirkungsweise des Prüfstandes wurde in /SFB.80,SFB.83/ berichtet. Die erzielten Ergebnisse werden in /SFB.87/ umfassend dargestellt.

Die Horizontalpressen stützen sich gegen einen Spannbetonrahmen. Trotz der beträchtlichen Querschnittsabmessungen dieses Rahmens treten bei den vorhandenen Kräften nennenswerten Verschiebungen der Auflagerpunkte auf. Da es sich hier jedoch um elastische Verformungen handelt, kann dies im Rechenmodell sehr einfach durch Federn berücksichtigt werden.

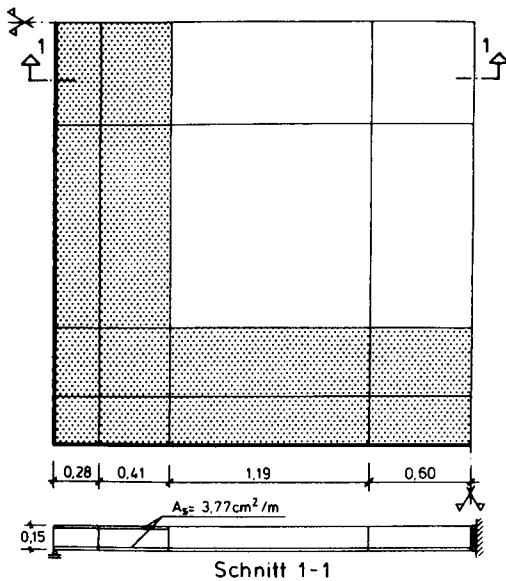
Durch die Vertikalverschiebung des Randes kommt es zu einer Verdrehung der Pressen, was wiederum zu negativen Vertikalkräften am Rand führt. Dies kann derzeit im vorgestellten Rechenmodell nicht berücksichtigt werden.

6.2.3 Ungezwängte Quadratplatte

Zunächst soll an einer vierseitig gelenkig gelagerten ungezwängten Quadratplatte gezeigt werden, wie das Rechenmodell in einfachen Fällen arbeitet. Dieses Beispiel ist insofern wichtig, als hier keine äußeren Normalkräfte vorhanden sind und damit kein Einfluß der Theorie II. Ordnung vorliegt, andererseits aber große Verformungen auftreten.

Der Nachrechnung liegt der Versuch Q5/82 zugrunde. Der Versuchskörper ist zusammen mit der gewählten Diskretisierung auf Bild 6.6 dargestellt. Da das System symmetrisch zur x- und y-Achse ist, genügt es, wenn nur ein Viertel gerechnet wird. In z-Richtung wurden zwei Schichten übereinander angeordnet, die jeweils mit 5 Gauß-Legendre-Stützstellen integriert wurden. Dies ist im allgemeinen günstiger als eine Schicht mit 10 Stützstellen, da infolge der Temperaturbeanspruchung bereichsweise 2 Druckzonen auftreten, eine unten und eine oben liegend mit einer dazwischenliegenden Zugzone. Die Spannungsverteilung hat dann 4 bis 6 Wendepunkte, und ein zu hochwertiges Integrationspolynom würde zum Schwingen neigen und damit Fehler verursachen.

Der Versuchskörper wurde künstlich getrocknet, das heißt er wurde ca. 8 Stunden auf dem Prüfofen mit ca. 200°C beheizt, um den Feuchtegehalt unter 4 % zu bringen. Neben dem erwünschten Austrocknungseffekt kommt es hierbei zu Festigkeitsverlusten des Betons, insbesondere bei der Zugfestigkeit, aber auch der Elastizitätsmodul wird geringer. Um dies berücksichtigen zu können, wurden einige der vorhandenen Nebenkörper mit in den Prüfofen gelegt und anschließend im wieder erkalteten Zustand geprüft. Die hierbei gewonnenen Materialkennwerte liegen der Nachrechnung zugrunde.



Werkstoffkenngrößen

Q5/82

$$\beta_R = 28 \quad [\text{MN}/\text{m}^2]$$

$$\beta_{BZ} = 2.8 \quad [\text{MN}/\text{m}^2]$$

$$E_0 = 18900 \quad [\text{MN}/\text{m}^2]$$

$$\mu = 0.2$$

$$\beta_S = 560 \quad [\text{MN}/\text{m}^2]$$

Q1/83

$$\beta_R = 27 \quad [\text{MN}/\text{m}^2]$$

$$\beta_{BZ} = 2.7 \quad [\text{MN}/\text{m}^2]$$

$$E_0 = 19550 \quad [\text{MN}/\text{m}^2]$$

$$\mu = 0.2$$

$$\beta_S = 560 \quad [\text{MN}/\text{m}^2]$$

Bild 6.7: Diskretisierung der Quadratplatte

Die Temperaturentbreitung in der Platte wurde mit zahlreichen Thermoelementen gemessen. Es zeigte sich, daß etwa 80 % der Platte mit einem nahezu gleichen Temperaturfeld behaftet ist. Am Rand jedoch nimmt die Temperatur deutlich ab, da ca. 0.2 m der Platte von der Brandkammerwand überdeckt sind und die in diesem Bereich liegende Lagerkonstruktion zusätzlich thermisch isoliert wurde. Dies wurde bei der Nachrechnung nicht berücksichtigt.

Das Ergebnis der Nachrechnung soll anhand der auf dem folgenden Bild 6.8 dargestellten Zeit-Durchbiegungs-Beziehung für die Plattenmitte erläutert und diskutiert werden.

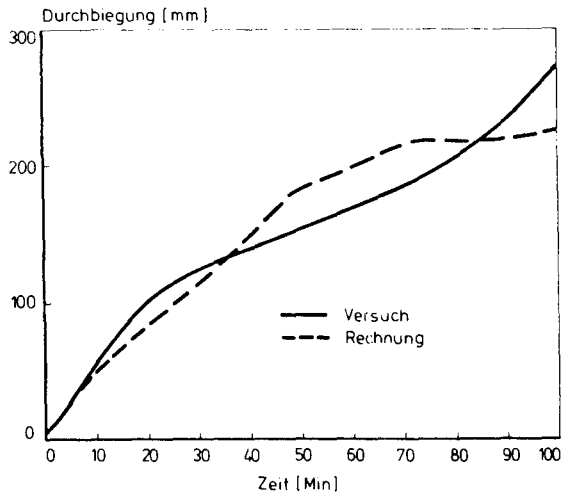


Bild 6.8: Zeit-Durchbiegungs-Beziehung für Q5/82

Beim Versuch zeigt sich eine Kurve, die durch drei Bereiche charakterisiert werden kann. Bis zur 20. Minute wächst die Durchbiegung sehr rasch an, weil die Brandbeanspruchung durch den sehr steilen Anstieg der ETK im Anfangsbereich zu einem sehr großen Temperaturgradienten im Prüfkörper führt. Danach wird die Brandraumtemperaturkurve flacher, und das Temperaturfeld im Prüfkörper gleicht sich mehr und mehr aus. Gleichzeitig verliert der Baustoff natürlich an Festigkeit. Zwischen der 80. und 90. Minute nehmen die Festigkeitsverluste dann stärker zu und die Durchbiegung demzufolge auch.

Bemerkenswerterweise ist die Durchbiegungsgeschwindigkeit beim Versuchsende nach 100 Minuten kleiner als zu Beginn des Versuches. Dies läßt die Vermutung zu, daß der Versuch etwas zu früh abgebrochen wurde. Erläuternd hierzu kann gesagt werden, daß sich beim Versuch auf der Oberseite der Platte eine Menge teurer und empfindlicher Meßgeräte sowie die hydraulischen Pressen befanden. Um diese nicht unnötigen Gefahren auszusetzen, wurden die Versuche bei der oben genannten Serie grundsätzlich dann abgebrochen, wenn erkennbar war, daß der Prüfkörper versagen wird. Im vorliegenden Fall wäre Versagen aber erst nach weiteren 5 bis 10 Minuten eingetreten.

Die Rechenkurve hat teilweise einen deutlich anderen Verlauf. Die erste Phase reicht hier bis zur 50. Minute, bei allerdings etwas geringerer Steigung als im Versuch. Daran schließt sich bis zur 70. Minute eine Phase an, bei der zwar die Steigung der Kurven gut übereinstimmt, nicht aber die Durchbiegung. In der letzten berechneten Phase bis zur 100. Minute ändert sich die Durchbiegung kaum noch.

Der in den letzten beiden Phasen von den Meßwerten deutlich abweichende Kurvenverlauf muß in erster Linie durch die ange-setzte thermische Dehnungsfunktion erklärt werden. Denn just in der 46. Minute gerät der unterste Integrationspunkt in den Bereich konstanter thermischer Dehnung und in der 76. Minute auch der zweitunterste Integrationspunkt. Dies hat die gezeigten Auswirkungen auf die Zeit-Durchbiegungs-Beziehung.

Daraus kann nicht geschlossen werden, daß die rechnerische thermische Dehnung fehlerhaft ist, denn immerhin beruht die Kurve auf einer großen Zahl von Meßwerten. Allerdings wurden diese Meßwerte an unbelasteten Proben gewonnen und eignen sich daher zunächst nur zur Nachrechnung dieser Proben. Die Erweiterung auf das komplex belastete Bauteil ist eine reine Hypothese, die jedoch vorerst hingenommen werden muß.

6.2.4 Gezwängte Quadratplatte

Interessanter ist die Nachrechnung der gezwängten, vierseitig gelenkig gelagerten Quadratplatte. Hier kommen alle nicht-linearen Einflüsse zum Tragen, die das vorgeschlagene Rechenmodell berücksichtigen kann, also auch die Theorie großer Verformungen.

Zur Nachrechnung stand Versuch Nr. Q1/83 zur Verfügung. Der Versuchsaufbau unterscheidet sich nur hinsichtlich der horizontalen Zwängung von Q2/85; alle zu diesem Versuch gemachten Bemerkungen sind also auch hier gültig und sollen nicht wiederholt werden.

Die Zwangskraft hatte eine planmäßige Exzentrizität von 25 mm und wurde als sogenannte volle Zwängung aufgebracht. Dies bedeutet, daß keine Verschiebung des Randes zugelassen wurde, mit Ausnahme der unvermeidlichen Verschiebung der Pressenaufleger. Wie oben schon angedeutet, konnte dies im Rechenmodell durch lineare Federn simuliert werden.

Der Prüfkörper hatte zwar eine Konsole zur Einleitung der hohen Zwangkräfte, diese war jedoch deutlich schwächer bewehrt, länger und durch mehr Weicheinlagen unterbrochen als bei den Wandversuchen. Daher konnte auf ihre Berücksichtigung verzichtet werden. Dies wurde außerdem mit Hilfe von ungezwängten Vergleichsversuchen überprüft und bestätigt.

Zur Beurteilung der Güte der Nachrechnung dient hier nicht nur die Mittendurchbiegung, sondern auch die mittlere Pressenkraft. Das ist nicht die Kraft in der mittleren Presse, sondern der Mittelwert aus allen gemessenen Pressenkräften bzw. die gesamte rechnerische Horizontalkraft geteilt durch drei. Die Mittelbildung ist erforderlich, um zufällige Einflüsse auf den Meßwert auszuschalten.

Betrachtet man die auf Bild 6.9 dargestellte Zeit-Durchbiegungs-Beziehung, so fällt an der gemessenen Kurve der nahezu lineare Verlauf auf. Lediglich zur 40. Minute wird die Durchbiegungsgeschwindigkeit etwas größer. Im Gegensatz zur ungezwängten Platte fehlt die Phase geringerer Durchbiegungsgeschwindigkeit.

Bis zur 32. Minute stimmt die rechnerische Kurve sehr gut mit der gemessenen überein. Danach kommt es rechnerisch zu einem sehr starken Verformungszuwachs. Dies kann nur mit Hilfe der auf obigem Bild dargestellten Zeit-Pressenkraft-Beziehung erklärt werden, die zunächst im Verlauf gut mit der gemessenen Kurve übereinstimmt, im Niveau zwar etwas höher, aber immer noch im Bereich der Streuung der Meßwerte (nicht mit aufgetragen) liegt.

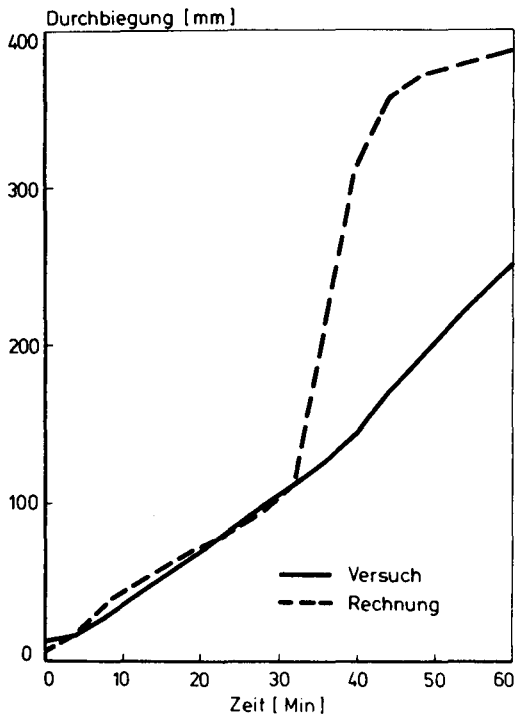


Bild 6.9: Vergleich gemessene und gerechnete Zeit-Durchbiegungs-Beziehung für Q1/83

Die Pressenkraft (siehe Bild 6.10) erreicht zur 32. Minute ihr Maximum, und zwar sowohl rechnerisch als auch beim Versuch. Dieses Maximum deutet an, daß der Versuchskörper seine größte aufnehmbare Normalkraft erreicht hat. Würde diese Kraft aus einer Lastbeanspruchung resultieren, käme es nun zu einem Versagen des Prüfkörpers. Da die Kraft jedoch aus einer behinderten Längsdehnung resultiert, wird die Längskraft lediglich durch Zuwachs der Durchbiegung abgebaut.

Dies geschieht im Rechenmodell aus einer Reihe von Gründen anders als im Versuch. Ein Grund ist in der hyperelastischen Eigenschaft der verwendeten Materialgesetze zu sehen. Da der Prüfkörper bereichsweise bereits bis zur Festigkeitsgrenze beansprucht ist und jetzt eine Entlastung erfährt, ist die dort wirklich vorhandene Steifigkeit etwa gleich dem Ursprungsmodul.

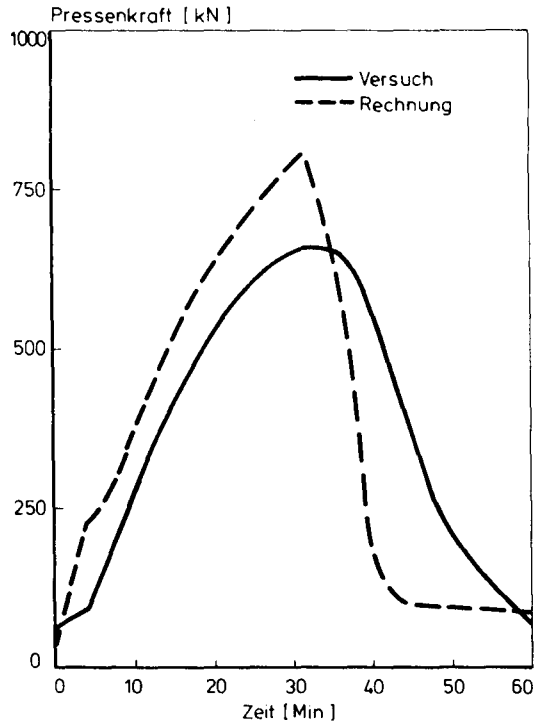


Bild 6.10: Vergleich gemessene und rechnerische Zeit-Pressenkraft-Beziehung für Q1/83

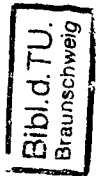
Gerechnet wird aber mit der zu dem momentanen Beanspruchungszustand gehörenden Tangentensteifigkeit für Belastung, die wesentlich geringer sein kann als der Ursprungsmodul. Allein aus diesem Grund muß die Nachrechnung im Bereich der Entlastung zu unrealistischen Verformungen führen.

Ein weiterer Grund ist vermutlich im Versuchsaufbau zu sehen. Die vorhandene Energie ist zum Teil in dem umgebenden Spannbetonrahmen und zum Teil in der Hydraulikanlage gespeichert. Beide sind nicht in der Lage, diese Energie verzögerungsfrei, wie im Rechenmodell angenommen, freizusetzen. Außerdem geht möglicherweise ein Teil dieser Energie durch plastische Verformungen verloren. Die gespeicherte Energie kann also nicht, wie rechnerisch angenommen, sofort in Kräfte umgesetzt werden. Dies muß Auswirkungen auf die Zeit-Durchbiegungs-Beziehung haben.

Der Bereich langsamer wachsender Verformungen ab der 48. Minute muß wieder in Zusammenhang mit der rechnerisch angesetzten thermischen Dehnung gesehen werden, die zu diesem Zeitpunkt am untersten Integrationspunkt in ihren horizontalen Ast übergeht.

Rechnerisch kommt es auch bei diesem Prüfkörper innerhalb der Versuchszeit nicht zum Versagen. Immerhin ist aber die Durchbiegung nach der 60. Minute wesentlich größer als bei der ungezwängten Platte nach 100 Minuten. Dies allein rechtfertigt die Vermutung, daß auch rechnerisch bald Versagen eintreten wird. Die Nachrechnung mußte abgebrochen werden, weil die Temperaturmessung mit dem Versuch in der 60. Minute endete.

Die Rechenwerte stimmen insgesamt in weiten Bereichen gut mit den Versuchen überein. Die auftretenden Abweichungen können gut erklärt werden und sind nicht auf Fehler im Rechenmodell zurückzuführen. Vielmehr sind zum einen Teil die vorliegenden Meßwerte nicht hinreichend und zum anderen Teil konnten die Eigenschaften des Prüfstandes nicht hinreichend genau erfaßt werden. Lediglich ein Mangel des Rechenmodells muß festgestellt werden, nämlich das hyperelastische Materialgesetz. Da es zur Entwicklung eines elastoplastischen Gesetzes jedoch im Augenblick keinerlei Versuchsdaten gibt, wären Arbeiten in dieser Richtung in weiten Bereichen auf Spekulationen angewiesen.



Daher kann nun abschließend anhand des gleichen Versuches der Einfluß von Querlast und Exzentrizität der Zwangskraft rechnerisch untersucht werden. Die Ergebnisse sollen mit Hilfe der auf den folgenden Bildern dargestellten Zeit-Durchbiegungs- (Bild 6.11) und Zeit-Pressenkraft-Beziehungen (Bild 6.12) erläutert werden.

Die Querlast wurde in 3 Stufen variiert. Die mit 100 % gekennzeichneten Kurven entsprechen dem Versuch Q1/83. Die Belastung von 70 % entspricht etwa der zu erwartenden Dauerlast, während 40 % einer Belastung nur durch Eigengewicht entspricht.

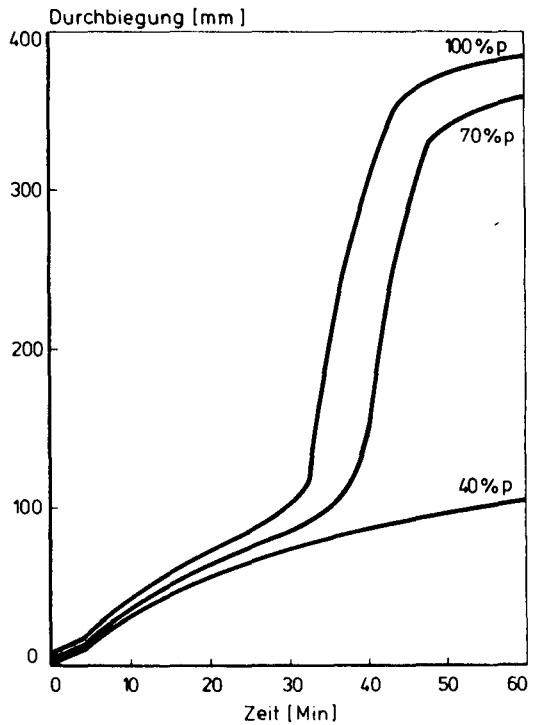


Bild 6.11: Einfluß der Querlast auf die Zeit-Durchbiegungs-Beziehung

Bei einer Belastung nur durch Dauerlast kommt es offenbar nicht zu einer einschneidenden Veränderung des Trag- und Verformungsverhaltens. Die maximal aufnehmbare Zwangskraft ist zwar etwas größer als unter Vollast und das Maximum wird auch um ca. 8 Minuten später erreicht, aber der anschließende schlagartige Verformungszuwachs tritt nahezu in gleicher Größe auf. Die zu erwartende Feuerwiderstandsdauer dürfte daher auch nur wenig größer sein.

Ganz anders ist das Verhalten unter Eigengewicht. Hier wird über die gesamte gerechnete Zeit Zwangskraft aufgebaut und die Zeit-Durchbiegungs-Beziehung zeigt einen weitgehend monotonen Verlauf. Die Feuerwiderstandsdauer dürfte demnach auch um mindestens 30 Minuten größer sein als unter Vollast, wenngleich dies

rechnerisch aus den genannten Gründen nicht nachvollzogen werden konnte.

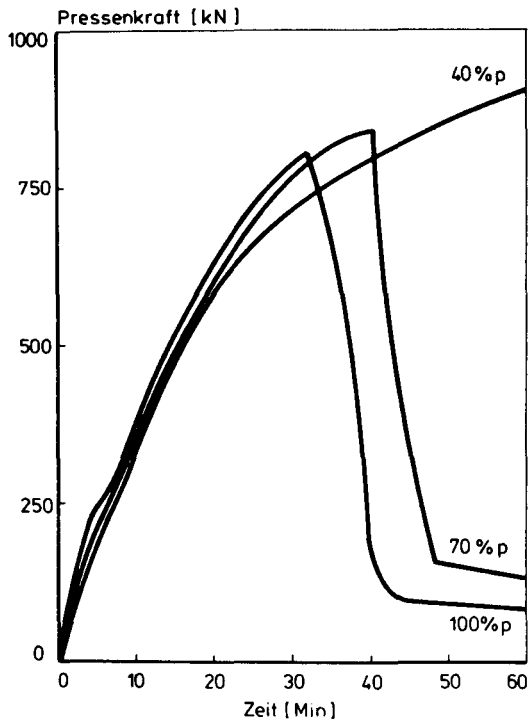


Bild 6.12: Einfluß der Querlast auf die Zeit-Pressenkraft-Beziehung

Die Exzentrizität wurde in 2 Stufen variiert. Der Wert von $e/d=0.167$ entspricht wieder dem Versuch Q1/83. Dieser Wert wurde zum Vergleich auf 0.333 verdoppelt. Damit greift die Zwangskraft an der zweifachen Kernweite des Querschnitts an.

Wie man an der Zeit-Durchbiegungs-Beziehung auf Bild 6.13 erkennt, hat eine geringfügige Vergrößerung der Ausmitte bereits sehr einschneidende Auswirkungen auf das Tragverhalten der Platte. Die Durchbiegung wird bei größerer Ausmitte wegen der größeren Randmomente wesentlich geringer und hat einen monotonen zeitlichen Verlauf. Die auf Bild 6.14 dargestellte Zwangkraftentwicklung unterscheidet sich dabei bis zur 32. Minute kaum. Während bei der kleinen Ausmitte dann jedoch der bekannte Abfall

eintritt, wächst die Zwangskraft bei der größeren Ausmitte weiterhin an und erreicht das Maximum erst nach der 60. Minute.

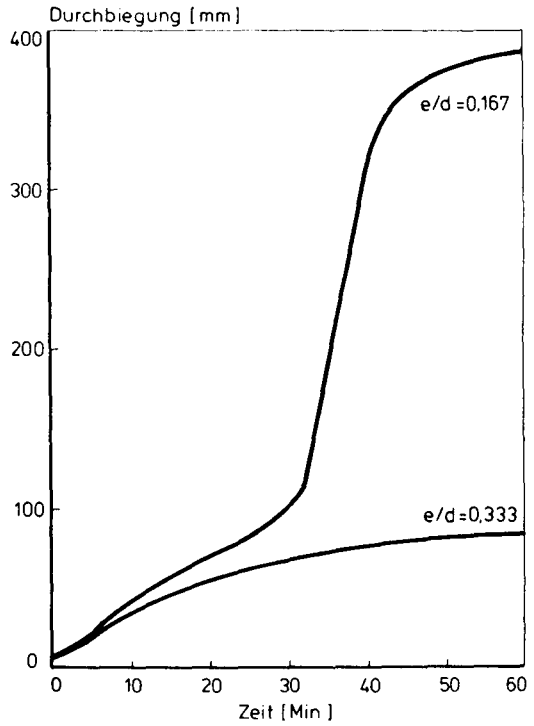


Bild 6.13: Einfluß der Exzentrizität auf die Zeit-Durchbiegungs-Beziehung

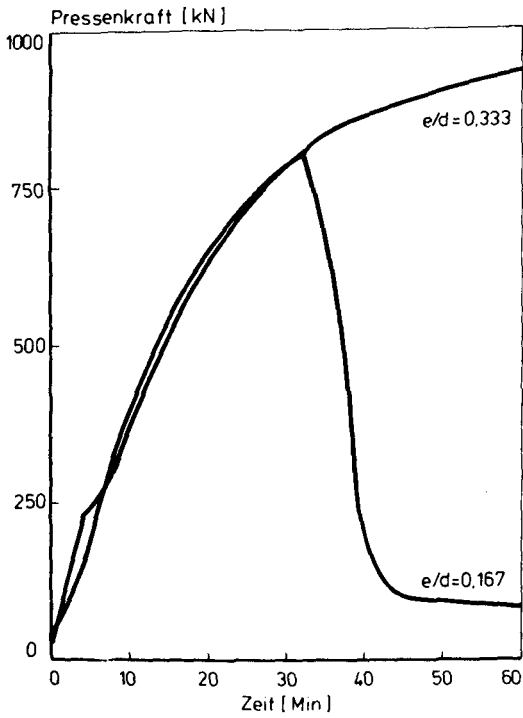


Bild 6.14: Einfluß der Exzentrizität auf die Zeit-Pressenkraft-Beziehung

7 PARTIELL BEFLAMMTE PLATTE

7.1 ZIEL DER UNTERSUCHUNG

Bei den im Abschnitt 6.2 nachgerechneten Versuchen handelt es sich um experimentell machbare Modellierungen des Problems der partiell beflamnten Platte. Rechnerisch kann man darüber hinausgehen und das Zusammenwirken der beflamnten und der unbeflamnten Bereiche direkt analysieren. Voraussetzung für den Erfolg ist eine hinreichende Wirklichkeitsnähe des Rechenmodells.

Wie in Abschnitt 6.2 gezeigt, wurde bei den Versuchen eine Zwangnormalkraft mit konstanter Exzentrizität verwendet, das heißt, Zwangnormalkraft und -moment stehen in einem konstanten Verhältnis. In natürlichen Durchlaufsystemen richten sich demgegenüber Zwangnormalkraft und -moment lediglich nach der am Rand vorhandenen Dehn- und Biegesteifigkeit. Sie können sich also in weiten Bereichen unabhängig voneinander entwickeln. Dies ist die Stelle, wo nach derzeitigem Stand der Versuchstechnik rechnerische Untersuchungen einsetzen müssen.

Einzelne Rechenergebnisse sind wenig aussagefähig. Einerseits darf die Wirklichkeitsnähe von Rechenmodellen nicht überschätzt werden, besonders wenn komplexe Systeme wie das vorliegende untersucht werden sollen. Andererseits gestatten es Rechenmodelle, die Einflüsse verschiedener Parameter auf das Trag- und Verformungsverhalten besser darzustellen als Versuche, da Versuche immer mit Imperfektionen behaftet sind und immer mehrere Parameter in einer nicht immer genau bestimmaren Größe geändert werden. Dies ist bei rechnerischen Untersuchungen nicht der Fall.

Daher wurde eine Parameterstudie mit dem Ziel durchgeführt, folgende Fragen zu beantworten:

- Wie ändert sich das Trag- und Verformungsverhalten, wenn statt einer gleichmäßigen Vollbelastung eine schachbrettartig verteilte Verkehrsbelastung angeordnet wird?
- Welchen Einfluß hat die Betongüte?
- Welchen Einfluß hat eine verstärkte Feldbewehrung?
- Wie ändert sich das Trag- und Verformungsverhalten, wenn keine partielle, sondern volle Beflammung von unten bzw. von oben vorhanden ist?

Da die vorhandene Rechnerkapazität hierdurch bereits erschöpft war, konnten weitere Fragen wie beispielsweise der Einfluß der Geometrie nicht untersucht werden.

7.2 RANDBEDINGUNGEN

Die Geometrie des untersuchten Körpers, also Dicke und Abstand der Lagerlinien, wurde so gewählt, daß unter Einhaltung der in DIN 1045 definierten Grenzen eine möglichst große Schlankheit erzielt wurde, wobei gleichzeitig die Feuerwiderstandsklasse F90 nach DIN 4102 erreicht werden sollte. Durch die zweite Bedingung ist die kleinste Plattendicke mit 100 mm festgelegt, ebenso wie der Mindestachsabstand der Bewehrung mit $u = u_0 = 15$ mm. Nach Abschnitt 17.7.2 der DIN 1045 in Verbindung mit Heft 240 DAfStb kann nun der Abstand der Lagerlinien der einzelnen Felder berechnet werden. Es gilt:

$$l_i/h \leq 35 \text{ mit}$$

$$l_i = \alpha \cdot l \text{ und}$$

$$\alpha = 0,8 \text{ für Rand- resp. } 0,6 \text{ für Innenfelder.}$$

Damit kann l_i berechnet werden:

$$l_i \leq 35 \cdot h/\alpha =$$

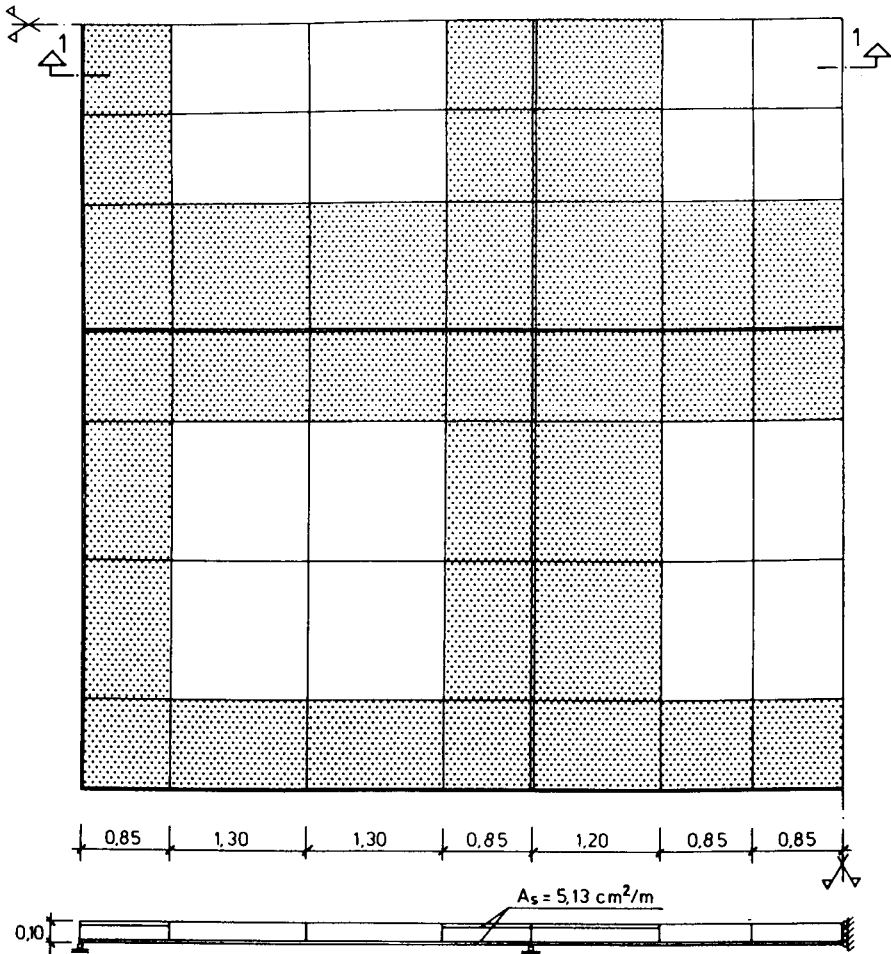
$$4,375 \text{ für Rand- resp. } 5,833 \text{ für Innenfelder.}$$

Eine Untersuchung partiell beflammer Platten ist erst sinnvoll, wenn wenigstens 3*3 Felder betrachtet werden, von denen dann das Mittelfeld beflammt wird. Beachtet man die in Abschnitt 14.4.2 von DIN 1045 formulierte Empfehlung, den Dehnfugenabstand erhöht brandgefährdeter Bauwerke nicht größer als 30 m zu wählen, so kann mit den oben angegebenen Längen maximal ein 5*5 Feldsystem konstruiert werden. Gegenüber dem 3*3 System ist jedoch ein 3-fach höherer Rechenaufwand erforderlich. Die Untersuchung wurde daher auf das kleinere System beschränkt, wobei obendrein die Symmetrie ausgenutzt wurde. Deshalb konnten die Rand- und Eckfelder nicht beflammt werden. Wie sich später noch zeigen wird, ist damit keine Einschränkung der Aussagefähigkeit der Studie verbunden.

Nach Abrunden der berechneten Längen auf ganze Dezimeter wurde das in Bild 7.1 dargestellte System der Studie zugrundegelegt. Wie die Prüfkörper aus Abschnitt 6.2 ist die Platte linien-gelagert. Auf der Systemskizze sind die Lagerlinien durch Doppel-linien angedeutet. Die unterlegten Bereiche kennzeichnen oben-liegende Bewehrung. Weiterhin wurden die folgenden Parameter festgelegt und in der Studie nicht variiert:

- Brandbeanspruchung nach DIN 4102, Teil 2 (ETK),
- Geometrie,
- Achsabstand der Bewehrung $u = u_0 = 15 \text{ mm}$,
- Stahlgüte BSt 500 S und
- obere Bewehrung Q513

Die Schnittgrößenermittlung erfolgte nach dem in DIN 1045 verankerten Verfahren der Belastungsumordnung, da dieses Verfahren in der Praxis wohl auch angewandt worden wäre. Damit ergab sich die zusätzlich zum Eigengewicht von $2,5 \text{ kN/m}^2$ aufnehmbare Verkehrslast zu $3,8 \text{ kN/m}^2$. Dieser Wert reicht aus, um die in Bürogebäuden auftretenden Verkehrslasten ($p = 2,5 \text{ kN/m}^2$) mit hinreichender Sicherheit abzudecken.



Schnitt 1-1

Bild 7.1: Statisches System und Diskretisierung

Variiert wurden demgegenüber die in Tabelle 7.1 zusammengestellten Parameter. Aus Gründen der Rechnerkapazität konnte jedoch keine vollständige Variation durchgeführt werden, das heißt, es wurden nur einige ausgewählte Kombinationen untersucht.

Als Bezugskombination wurde Wert 1 für alle Parameter in der unten stehenden Tabelle gewählt, das heißt die partiell beflamte Platte mit B25, gleichmäßig verteilter Vollbelastung und einer unten liegenden Quadratmatte Q377.

Nr	Parameter	Wert		
		1	2	3
1	Last	voll	Schachbrett	-
2	Betongüte	B25	B55	-
3	untere Bewehrung	Q377	Q513	-
4	Beflammung	partiell	voll unten	voll oben

Tabelle 7.1 : Variierte Parameter

Das im Brandfall zu erwartende Temperaturfeld in der Platte wurde mit dem am Institut verfügbaren Programm FIRES-T /Bec.76/ ermittelt. Es ergab sich, daß nach 90 Minuten an der dem Brandraum abgewandten Plattenoberfläche die Temperaturerhöhung gerade 140 K überschreitet. Die Rechenannahmen stimmen also in diesem Punkt mit DIN 4102 überein.

7.3 ERGEBNISSE

7.3.1 Allgemeines

Die Studie ist keine umfassende Parameterstudie, sondern vielmehr eine vergleichende Gegenüberstellung von ausgewählten Rechenergebnissen. Daran orientiert sich auch die Darstellung der Ergebnisse. Ausgehend von der Bezugskombination wird erläutert, welchen Einfluß eine Änderung der Randbedingungen auf

- die Zeit-Verformungs-Beziehung,
- die zeitabhängige Schnittgrößenentwicklung am Symmetrierand und
- die Schnittgrößenverteilung im Mittelfeld

hat, um daraus die Charakteristik des Trag- und Verformungsverhaltens herauszuarbeiten. Bei der geringen Anzahl der vorliegenden Rechenläufe erübrigt es sich, die Datenmenge mit statistischen Methoden zu komprimieren und dadurch gegebenenfalls spezielle Effekte zu verdecken. Trotzdem basiert die Studie auf einem großen Datenraum. Es handelt sich hierbei um Knotenkräfte und -verformungen mit einer Gesamtanzahl von genau 153'600 Werten.

7.3.2 M-N-Diagramm

Die Biegemoment-Normalkraft-Interaktion stellt den Grenzzustand der Tragfähigkeit eines Querschnitts dar und kann damit zur Charakterisierung des Tragverhaltens herangezogen werden. Bei dem vorliegenden System wird das Tragverhalten in erster Linie durch das Tragvermögen der Platte senkrecht zu den Kontinuitätsrändern des Mittelfeldes bestimmt. Hierfür wurde ein auf der Druckseite vollständiges Interaktionsdiagramm erstellt (siehe Bild 7.2), wobei die statischen Werte für die Bezugskombination angesetzt wurden. Für die Feldbereiche kann der Grenzzustand der Tragfähigkeit trotz abweichender Bewehrung mit guter Genauigkeit ebenfalls aus Bild 7.2 entnommen werden.

Die unsymmetrische Form des Diagramms muß auf die unsymmetrische Bewehrung und die unsymmetrische Temperaturbeanspruchung zurückgeführt werden. Das Diagramm kann in vier Bereiche eingeteilt werden, in denen die Temperaturbeanspruchung die Tragfähigkeit in jeweils unterschiedlichem Maße beeinflusst. Dies sind die Stütz- bzw. Feldbereiche (auf Bild 7.2 bereits vermerkt) und die Bereiche ober- bzw. unterhalb des Balancepoints, der etwa bei $n = -500$ kN/m anzusiedeln ist, sich aber mit der Zeit verschiebt.

Besonders interessant ist der Bereich unterhalb des Balancepoints. Hier fällt auf, daß die Momentenaufnahmefähigkeit im Stützbereich nur in geringem Maße unter der Temperaturbeanspruchung leidet, während im Feldbereich sehr große Tragfähigkeitseinbußen zu verzeichnen sind.

Umgekehrt sind die Verhältnisse oberhalb des Balancepoints. Hier sind die großen Tragfähigkeitseinbußen im Stützbereich zu verzeichnen, die Feldbereiche leiden nur innerhalb der ersten 30 Minuten unter der Temperaturbeanspruchung, danach ist ein Temperatureinfluß kaum noch merkbar.

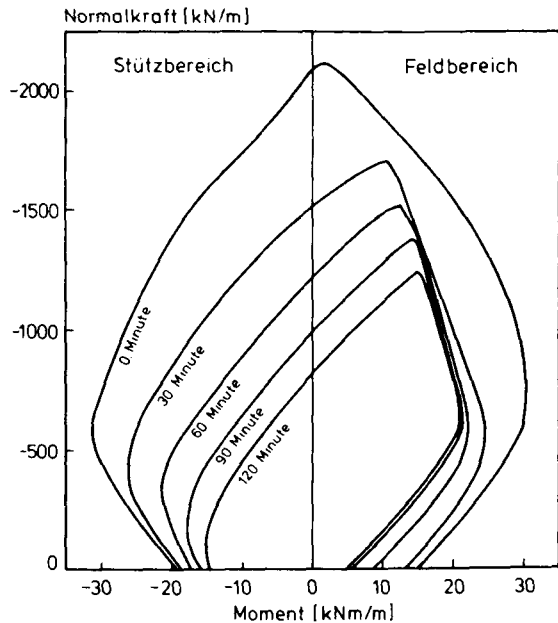


Bild 7.2: M-N-Interaktionsdiagramm für die Bezugskombination

Insgesamt kann dieses Verhalten auf die unsymmetrische Temperaturbeanspruchung in Verbindung mit der beidseitigen Bewehrung zurückgeführt werden. Da die obere Bewehrungslage über den ganzen berechneten Zeitraum beinahe ihre volle Tragfähigkeit behält, kann sie, solange sie sich in der Zugzone befindet, einen bedeutenden Beitrag zur Tragfähigkeit leisten. Liegt sie jedoch in der Druckzone, so verschwindet ihr Einfluß gegenüber dem Beton aufgrund der geringen Fläche.

Die untersuchten Systeme erreichen den Balancepoint in aller Regel nicht. Daher noch einige Anmerkungen zum Verhalten bei reiner Biegung. Die Spannweite der Bruchmomente reicht hier von -19 bis +15 kNm/m und umfaßt damit 34 kNm/m. Bei einem Sicher-

heitsbeiwert von 1,75 können davon $34/1,75 = 19,4$ kNm/m bei der Bemessung ausgenutzt werden. Dies geschieht in aller Regel jedoch nicht, da zwei verschiedene Lastfälle (Vollast und Schachbrettbelastung) die jeweils maximalen Momente an der Stütze und im Feld hervorrufen. Nach 120 Minuten Branddauer sinkt die Spannweite von -15 bis +5 kNm/m, umfaßt damit aber immer noch 20 kNm/m und ist größer als die bei der Bemessung ausnutzbaren 19,4 kNm/m. Aus dieser Sicht ist ein Versagen des Systems innerhalb von 120 Minuten Branddauer nicht zu erwarten.

Unberücksichtigt ist hierbei sowohl der Einfluß der biaxialen Beanspruchung auf das Tragvermögen der Biegedruckzone, als auch die Möglichkeit der Platten, Umlagerungen in weniger beanspruchte Bereiche vorzunehmen. Weiterhin sind in der Querschnittsanalyse die Auswirkungen der Theorie II. Ordnung, die vor allem bei partieller Beflammung wirksam werden, nicht enthalten. Das bleibt der Strukturanalyse mit dem oben vorgestellten Rechenmodell vorbehalten, deren Ergebnisse in den nächsten beiden Abschnitten dargestellt werden.

7.3.3 Verformungsverhalten

Das Verformungsverhalten wird innerhalb des untersuchten Parameterraumes in erster Linie von der Art der Beflammung beeinflusst. Dies wird an der in Bild 7.3 dargestellten Zeit-Durchbiegungs-Beziehung für den Mittelpunkt besonders deutlich. Das mit partiell beflammt gekennzeichnete Streuband umfaßt die Variation aller anderen in Abschnitt 7.2 zusammengestellten Parameter gegenüber der Bezugskombination. Die maximale Breite des Streubandes wird mit 30 mm nach 120 Minuten Branddauer erreicht, bei einem Mittelwert von 255 mm. Daran erkennt man, daß Betongüte, untere Bewehrung und Verteilung der Verkehrslast nur untergeordneten Einfluß auf das Verformungsverhalten haben. Weiterhin fällt der monotone Verlauf ins Auge, der darauf zurückgeführt werden kann, daß die Umlagerung der Schnittkräfte sehr kontinuierlich abläuft oder, anders ausgedrückt, das beflamte Mittel-

feld sich kontinuierlich durch große Verformungen den einwirkenden Zwangkräften entzieht.

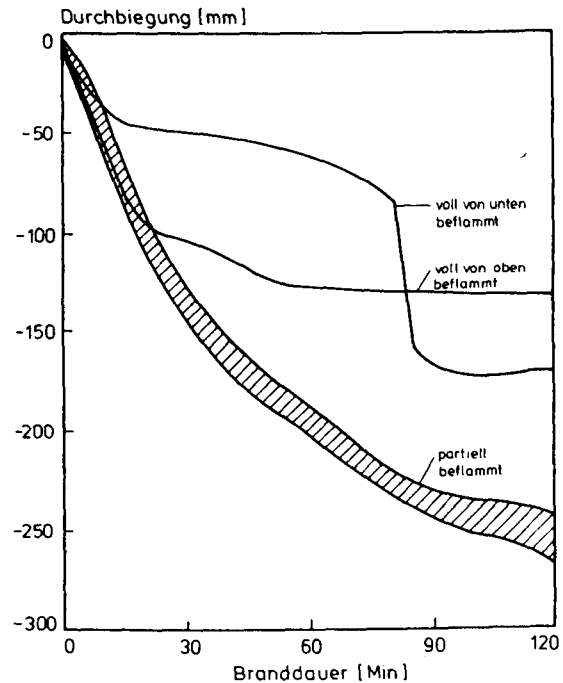


Bild 7.3: Zeit-Durchbiegungs-Beziehungen für den Mittelpunkt

Die an das Mittelfeld grenzenden Felder biegen sich unterdessen nach oben durch, während sich die Eckfelder analog zum Mittelfeld verhalten. Die Beträge der Durchbiegung sind hierbei um eine Zehnerpotenz geringer als im Mittelfeld.

Auf dem folgenden Bild 7.4 wird dies noch deutlicher. Hier ist die zeitliche Entwicklung der Durchbiegung in der Symmetrielinie dargestellt, in der linken Hälfte für den Lastfall Vollast, in der rechten Hälfte für den Lastfall Schachbrettbelastung. In den ersten 30 Minuten kommt es offensichtlich zu einem sehr raschen Anwachsen der Mittendurchbiegung. Gleichzeitig biegen sich die Nachbarfelder nach oben durch. Beide Ordinaten sind bei Schachbrettbelastung etwas größer als bei Vollbelastung. Mit der Zeit nimmt dann die Verformungsgeschwindigkeit ab.

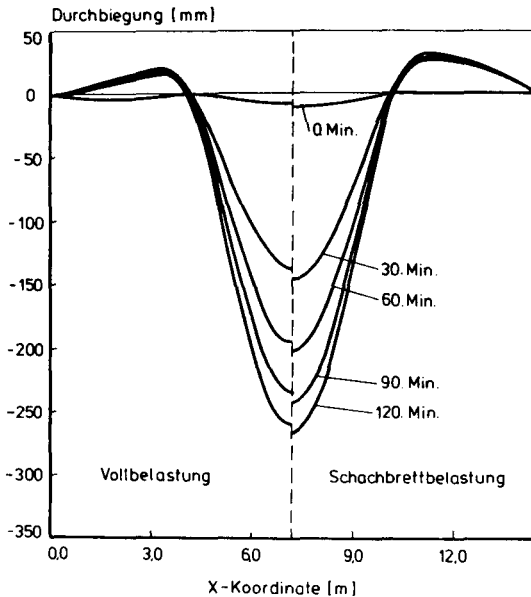


Bild 7.4: Durchbiegung in der Symmetrielinie

Ganz anders ist das Verformungsverhalten der voll beflam-
 ten Platte, denn alle Felder biegen sich nach unten durch. Von
 praktischer Bedeutung ist vor allem der Fall der von unten be-
 flammten Platte, da Platten in der Praxis meist gegen Beflammung
 von oben geschützt sind. Die größte Durchbiegung tritt wieder im
 Mittelfeld auf, sie ist jedoch wesentlich geringer als bei
 partieller Beflammung. Ihre zeitliche Entwicklung hat einen nicht
 monotonen Verlauf. Nach rascher Anfangsdurchbiegung tritt eine
 Stabilisierungsphase bei ungefähr halber Plattendicke entspre-
 chend 50 mm ein. Ab der 60. Minute etwa beginnt dann eine Be-
 schleunigungsphase, die nach 80 Minuten in einen sprunghaften
 Verformungszuwachs des Mittelfeldes mündet. Daran schließt sich
 wieder eine stabile Phase an, die durch recht große Durchbiegung
 gekennzeichnet ist, ohne hierbei jedoch das Niveau der partiell
 beflamten Platte zu erreichen.

Das Auftreten eines sprunghaften Verformungszuwachses ist
 dem Durchschlagen in der Elastizitätstheorie durchaus ähnlich,
 wäre in der Natur jedoch nicht in dieser Schärfe zu beobachten.

Das verwendete Rechenprogramm greift auf ein hyperelastisches Materialgesetz für Beton und Stahl zurück, was bedeutet, daß Be- und Entlastung auf dem gleichen Pfad erfolgen. In der Natur erfolgt die Entlastung jedoch auf einem anderen Pfad als die Belastung, nämlich annähernd linear und mit Ursprungsmodul. Die bei diesem starken Verformungszuwachs auftretenden Umlagerungen sind im allgemeinen so groß, daß die Abweichungen des Rechenmodells gegenüber der Wirklichkeit ebenfalls groß werden. Das schon stark plastizierte Material hat nur noch geringe Steifigkeit, in der Realität jedoch nur bei Belastung, im Rechenmodell bei Be- und Entlastung. Dies führt rechnerisch zu großen Verformungszuwächsen. Im Versuch hätte man aller Wahrscheinlichkeit nach deshalb einen wesentlich weicheren Verlauf der Zeit-Mittendurchbiegungs-Beziehung beobachtet. Der sprunghafte Verformungszuwachs selbst muß darauf zurückgeführt werden, daß die auch bei der voll beflamten Platte wirkenden Zwangnormalkräfte zunächst das System stabilisieren. Ab einer gewissen Mittendurchbiegung, nämlich oberhalb der halben Plattendicke, kehrt sich ihre Wirkung jedoch um und sie destabilisieren das System. Die Tatsache, daß der sprunghafte Verformungszuwachs überhaupt rechnerisch erfaßt wird, ist auf die im Rechenmodell verwendete Theorie der großen Verformungen zurückzuführen. Wäre lediglich Theorie II. Ordnung berücksichtigt worden, so wäre hier Versagen eingetreten.

Die in Bild 7.3 ebenfalls eingezeichnete Zeit-Durchbiegungs-Beziehung der voll von oben beflamten Platte zeigt, daß hier die Zwangkräfte durch rasch anwachsende Verformung viel schneller abgebaut werden können. Die Platte weist nach 30 Minuten schon eine Mittendurchbiegung von über 100 mm auf. Etwas oberhalb von diesem Niveau stabilisieren sich dann die Verformungen.

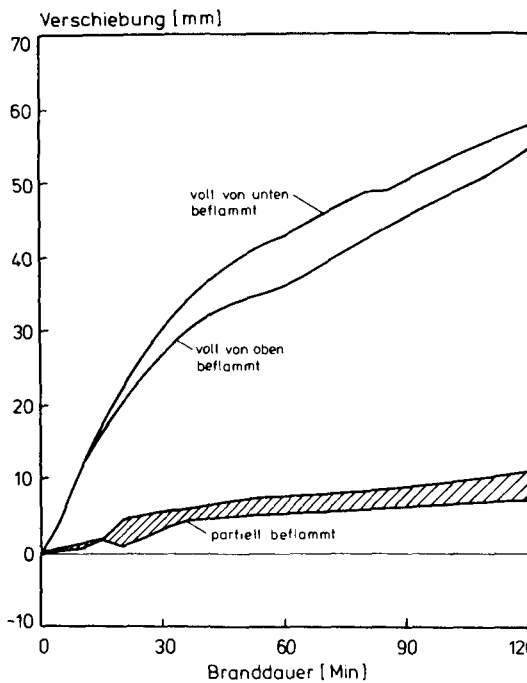


Bild 7.5: Zeit-Eckverschiebungs-Beziehung in Diagonalenrichtung

Für die angrenzenden, vielleicht vom Brand gar nicht betroffenen Bauteile sind die Horizontalverschiebungen der beflamnten Platte von großer Bedeutung. Wenn es sich dabei um Stützen handelt, so müssen diese die Verschiebungen der Platte in vollem Umfang mitmachen, da ihre Steifigkeit zu gering ist, um die Platte an der Verformung zu hindern. Um hier eine Beurteilung zu ermöglichen, ist in Bild 7.5 die zeitabhängige Entwicklung der Horizontalverschiebung des linken unteren Eckpunktes in diagonalen Richtung aufgetragen. Wie aus Bild 7.1 zu entnehmen ist, liegt der Festpunkt des Systems genau gegenüber. Die für partielle Beflammung ermittelten Werte sind wieder in einem Streuband zusammengefaßt. Ihr Betrag ist mit ca. 8 mm auch vergleichsweise klein gegenüber den über 50 mm, die bei der voll beflamnten Platte auftreten.

Die Horizontalverschiebungen sind bei voller Beflammung von unten größer als bei voller Beflammung von oben und verhalten sich damit genau umgekehrt wie die Mittendurchbiegungen.

7.3.4 Tragverhalten

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß bei partieller Beflammung die Parameter Betongüte, untere Bewehrung und Verteilung der Verkehrslast nur geringen Einfluß auf das Verformungsverhalten haben. Auf das Tragverhalten haben diese Parameter sehr wohl einen Einfluß, was in diesem Abschnitt nun anhand der Schnittgrößenentwicklung am Symmetrierand und der Schnittgrößenverteilung im Mittelfeld dargestellt werden soll.

Für die Bezugskombination ist die zeitabhängige Entwicklung der Schnittgrößen m_y und n_y - als Linien gleicher Schnittkraft - am Symmetrierand in Bild 7.6 aufgetragen. Durch die gewählte Darstellung sind in diesem und den beiden folgenden Bildern Geometrie, Zeit und Schnittkraft zusammengefaßt.

Aus Bild 7.6 ist zu entnehmen, daß die Schnittkraftentwicklung am Symmetrierand in zwei Phasen abläuft. In der ersten Phase werden die Zwangkräfte aufgebaut. Dies dauert etwa 20 Minuten und ist an dem ausgeprägt vertikalen Verlauf der Höhenlinien erkennbar. Die anschließende zweite Phase dient der Umlagerung und dem Abbau der Zwangkräfte. Die Höhenlinien haben hier einen eher horizontalen Verlauf.

Bei der Momentenentwicklung fällt auf, daß im Mittelfeld nach wenigen Minuten nur noch negative Momente auftreten, die an der Lagerlinie ihren Maximalwert von -10 kNm/m erreichen. Hier werden sie in der zweiten Phase kontinuierlich abgebaut, um nach 120 Minuten völlig zu verschwinden. Im Feld treten schon nach 50 Minuten wieder positive Momente auf, deren Bereich sich ebenfalls kontinuierlich ausdehnt. Das Randfeld weist, mit Ausnahme des Übergangsbereichs an der Lagerlinie, ausschließlich positive Momente auf.

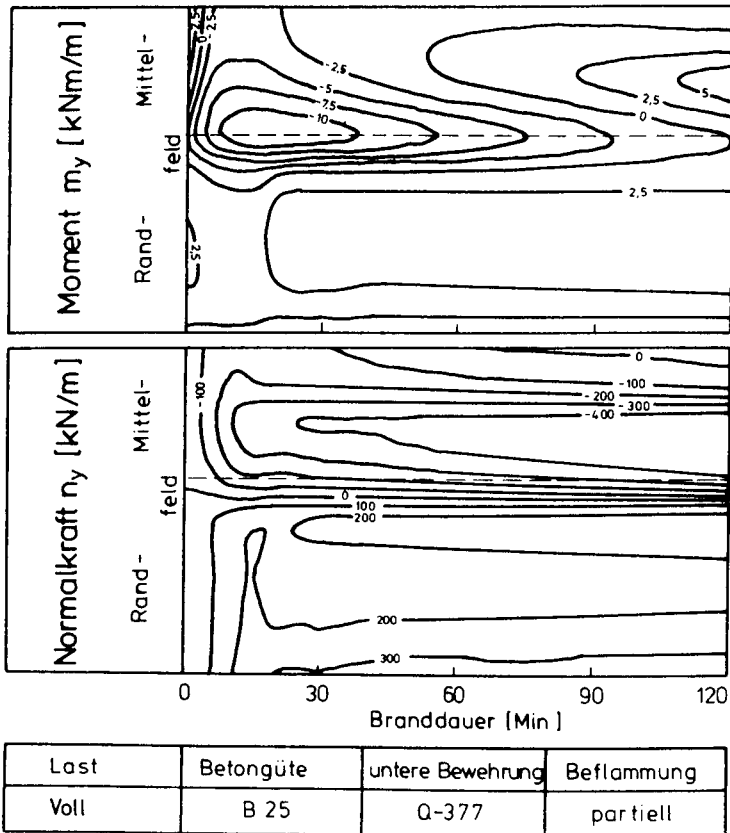


Bild 7.6: Schnittkraftentwicklung am Symmetrierand

Die Normalkraftentwicklung ist gekennzeichnet durch den Druckbereich im Mittelfeld und den Zugbereich im Randfeld mit einer sehr steilen Übergangszone an der Lagerlinie. Die Zugkräfte nehmen zum Rand hin kontinuierlich zu, wobei sie im Mittelbereich des Randfeldes beinahe konstant sind. Interessanter jedoch ist das Mittelfeld. Hier fällt besonders die Normalkraftentwicklung im Mittelpunkt auf. Nach Aufbau einer Druckkraft in der Größenordnung von -100 kN/m innerhalb weniger Minuten verschwindet diese nach 60 Minuten und macht einer geringen Zugkraft Platz. Gleichzeitig mit der Ausbreitung dieses Zugbereichs bildet sich

nahe an der Lagerlinie ein kräftiger Druckbereich mit Maximalwerten oberhalb -400 kN/m . Dies ist sehr charakteristisch für das Tragverhalten brandbeanspruchter Stahlbetonplatten. Die Mittelbereiche der beflamten Felder entziehen sich durch Verformung so gut es geht der Normalkraft, die wiederum an den Randbereichen der beflamten Felder konzentriert wird.

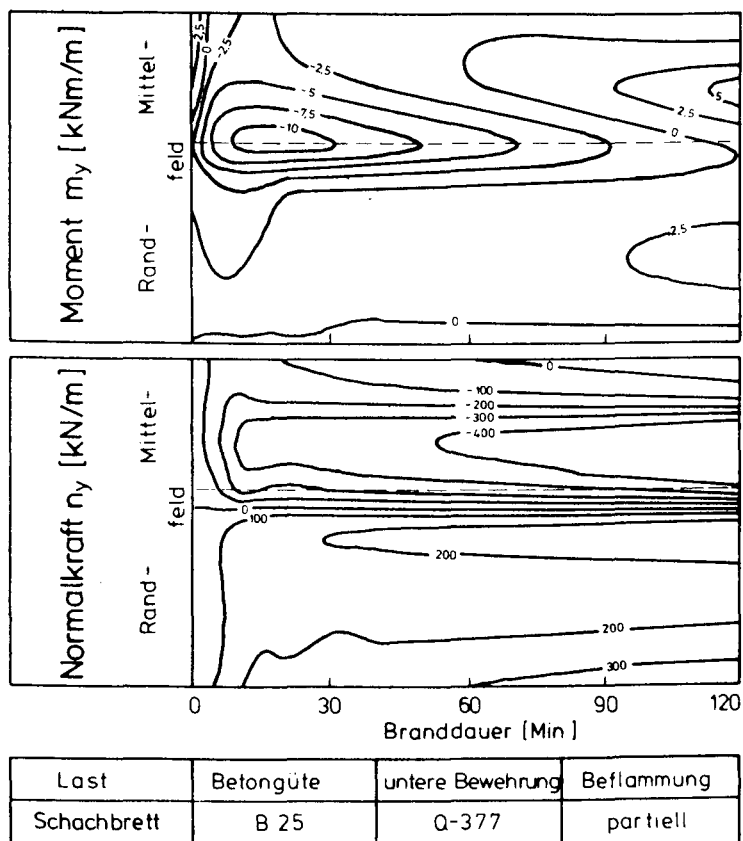


Bild 7.7: Schnittkraftentwicklung am Symmetrierand

Die Schnittkraftentwicklung am Symmetrierand bei Schachbrettverteilung der Verkehrslast ist auf Bild 7.7 dargestellt. Größere Unterschiede gegenüber der gleichmäßig verteilten Vollbelastung treten nur bei der Momentenverteilung auf, wie dies auch

unter Normaltemperatur der Fall ist. Das Feldmoment in Plattenmitte ist größer geworden, daher wird es auch nicht so rasch abgebaut, wohingegen die Momentenbeanspruchung im Randfeld sinkt. Der Verlauf der Linien höherer Beanspruchung ändert sich weder beim Moment noch bei der Normalkraft nennenswert. Daher ändert sich auch das Tragverhalten unter schachbrettverteilter Verkehrslast nur marginal gegenüber der gleichmäßig verteilten Vollbelastung.

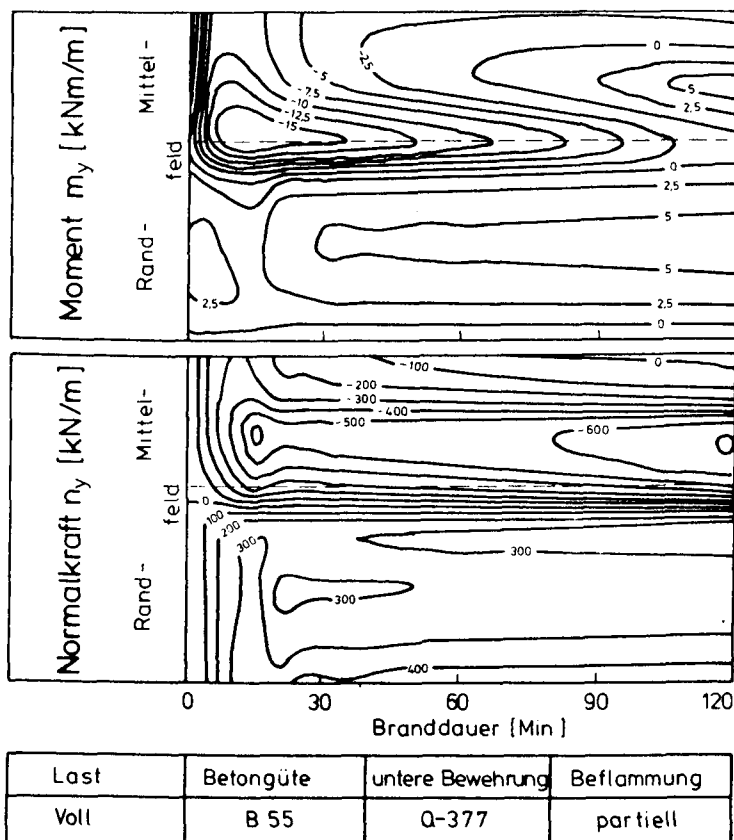


Bild 7.8: Schnittkraftentwicklung am Symmetrierand

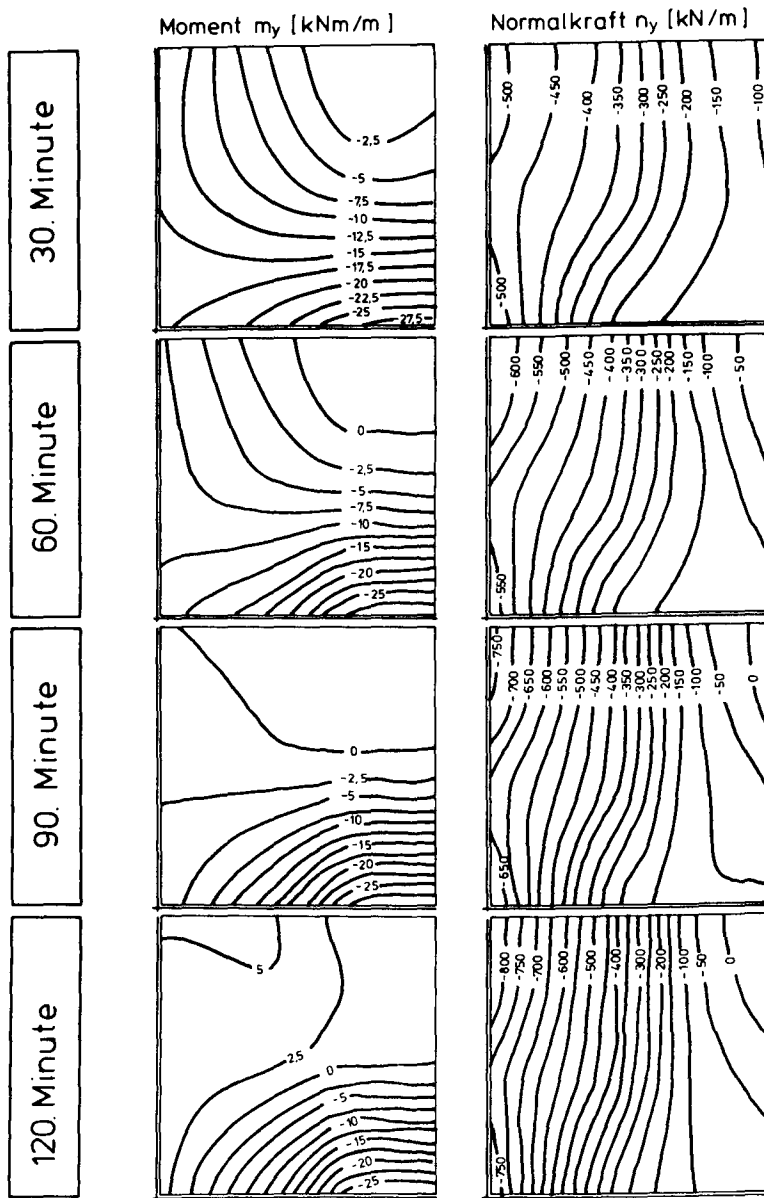
Der Einfluß der Betongüte ist, wie Bild 7.8 zu entnehmen ist, wesentlich größer. Die Rechnung erfolgte für die Festig-

keitsklasse B55 mit der gleichen Last wie bei B25. Grund hierfür ist, daß die zulässigen Momente wegen der geringen Bewehrung durch den Hebelarm der inneren Kräfte und nicht durch die Betonfestigkeitsklasse bestimmt werden. Weiterhin muß angemerkt werden, daß für die Berechnung nicht die Nennfestigkeit, sondern die Rechenfestigkeit nach DIN 1045 angesetzt wurde. Diese ist bei B55 um rund 70% größer als bei B25.

Daher fällt auf, daß das Stützmoment an der Lagerlinie im Vergleich zu B25 bei B55 um etwa dieses Maß anwächst. Auch hier nimmt wie bei B25 die Zwangbeanspruchung ab, so daß das Moment nach 120 Minuten Branddauer verschwindet; der Abbau erfolgt also rascher. In Plattenmitte erreicht das Zwangmoment sogar den dreifachen Wert. Genau wie an der Lagerlinie, wird aber auch dieses Moment mit zunehmender Branddauer rasch abgebaut. Im Randfeld ist gegenüber B25 mit der Zeit dagegen eine deutliche Zunahme der Feldmomente zu verzeichnen.

Im gleichen Maß wie die Betonfestigkeit wachsen auch die Zwangnormalkräfte an. Ihre Verteilung entspricht etwa der, die auch bei B25 angetroffen wurde. Daraus kann geschlossen werden, daß das Tragverhalten der partiell beflamten Platte durch die Verwendung höherer Betongüten nur insofern beeinflusst wird, als die Zwangsschnittgrößen ein deutlich höheres Niveau erreichen, die Art der Umlagerung wird dadurch nicht beeinflusst. Bedenkt man weiterhin, daß der Einfluß auf das Verformungsverhalten nur gering ist, so kann auch angenommen werden, daß die Feuerwiderstandsdauer durch höhere Betongüte nicht nachhaltig gesteigert werden kann.

Neben der Schnittkraftentwicklung am Symmetrierand gibt die Schnittkraftverteilung im Mittelfeld Aufschluß über das Tragverhalten des untersuchten Systems. Für die Bezugskombination ist die Schnittkraftverteilung des Mittelfeldes für 4 Zeitschritte in Bild 7.9 aufgezeichnet. Es handelt sich hierbei, wie man leicht sieht, um Linien gleichen Momentes m_y bzw. Linien gleicher Normalkraft n_y . Um Verwechslungen vorzubeugen, sei weiterhin angemerkt, daß dies keine Trajektorien sind.



Last	Betongüte	untere Bewehrung	Beflammung
Voll	B 25	Q-377	partiell

Bild 7.9: Schnittkraftverteilung im Mittelfeld

Da der erste dargestellte Zeitschritt die 30. Minute ist, sind die Zwangsschnittgrößen bereits aufgebaut, ihre Entwicklung kann hier also nicht mehr beobachtet werden. Die Zusammenstellung mehrerer folgender Zeitschritte auf einem Bild erlaubt jedoch die Beobachtung der wichtigen Umlagerungsphase.

An der Momentenverteilung wird deutlich, daß, ausgehend von einer im ganzen Mittelfeld negativen Momentenbeanspruchung, in der Umlagerungsphase das Stützmoment unter gleichzeitiger Bildung einer breiten Zone geringer Momentenbeanspruchung allmählich abgebaut wird. Der Übergangsbereich wird hierbei immer steiler. Der Bereich der größten positiven Momente wandert unterdessen von der Plattenmitte immer mehr zur Lagerlinie hin.

Dies wird verständlich, wenn man die zugehörige Normalkraftverteilung betrachtet. Man erkennt deutlich die Abnahme der Normalkraft im Mittelpunkt und den sich hier allmählich ausbreitenden Bereich geringer Zugkraft. An der Lagerlinie wächst währenddessen die Druckkraft kräftig an. Die Platte versucht also, die Normalkraft um den stark ausgebogenen Mittelbereich zu leiten. Wie schon im M-N-Diagramm zu sehen war, ist bei diesen Verhältnissen an der Lagerlinie eine viel größere Momentenaufnahmefähigkeit vorhanden als in Plattenmitte, und die Momentenverteilung ab der 60. Minute ist somit erklärt.

Der Unterschied zu den in Abschnitt 6.2 nachgerechneten Versuchen wird aus dem folgenden Bild 7.10 deutlich. Während die Versuche mit konstanter Exzentrizität an der Lagerlinie durchgeführt worden sind, stellt sich beim Durchlaufsystem ein stark nichtlinearer Verlauf der Ausmitte ein, der obendrein einer zeitlichen Veränderung unterliegt. Am Schnittpunkt mit der senkrecht zur betrachteten Richtung verlaufenden Lagerlinie verschwindet die Ausmitte beinahe, während sich an der Symmetrielinie der Größtwert mit $e/d = 3,5$ einstellt. Dieser Wert ist um eine Zehnerpotenz größer als die größten bei den Versuchen verwendeten Werte von $e/d = 0,5$. Man kann also schon beinahe von reiner Biegung sprechen. Bereits die bei den Versuchen angeordnete geringe Exzentrizität genügte, um das System über lange Zeit zu stabi-

lisieren. Somit ist es erklärlich, daß auch beim Durchlaufsystem innerhalb der berechneten 120 Minuten Branddauer kein Versagen auftrat.

Dem Leser, der vielleicht schon zu Bild 7.2 zurückgeblättert hat, wird vermutlich aufgefallen sein, daß die in Bild 7.9 aufgetragenen Stützmente deutlich größer sind, als die in Bild 7.2 aufgetragenen aufnehmbaren Momente. Dies bedarf einer Erklärung. In dem oben beschriebenen Rechenmodell wird mit einem biaxialen Gesetz für Beton gerechnet, dessen Eigenschaften im vorliegenden Fall je Betonelement in 90 Punkten, den Integrationspunkten, berechnet und mit Hilfe von Matrizenoperationen in Eigenschaften der Knoten umgeformt werden. Die Umformung hängt von den angesetzten Formfunktionen ab. Hierbei kann es zu Fehlern kommen, wenn die Kontinuitätsbedingung zwischen zwei Elementen zu sehr unterschiedlichen Schnittkräften führt. In keinem Fall wird jedoch mit falschen Spannungen gerechnet, dies haben genaue Untersuchungen gerade an dieser Stelle gezeigt.

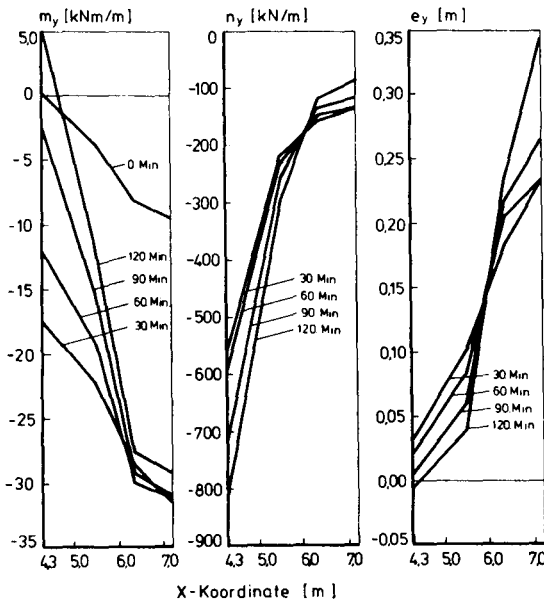


Bild 7.10: Schnittgrößen des eingespannten Randes

Zum Vergleich ist daher in Bild 7.11 die zeitliche Entwicklung der Spannung der obenliegenden Bewehrung an der Lagerlinie in Plattenmitte aufgetragen. Wie nicht anders zu erwarten, wird die Fließspannung nach ca. 30 Minuten erreicht. Diese sinkt mit zunehmender Erwärmung jedoch ab, was zusammen mit der abnehmenden Festigkeit der Betondruckzone zu großen Dehnungen führt. Erreicht werden Werte von 6 mm/m nach 120 Minuten. Diese Dehnung muß von einem normgemäßen Betonstahl selbstverständlich ertragen werden können. Andererseits kann jetzt bereits eine geringe Schädigung durch unsachgemäße Schweißung oder Korrosion zum Versagen der Bewehrung führen.

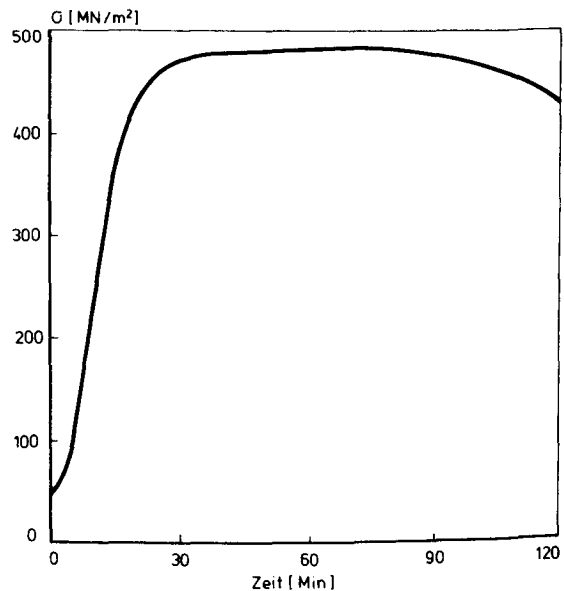
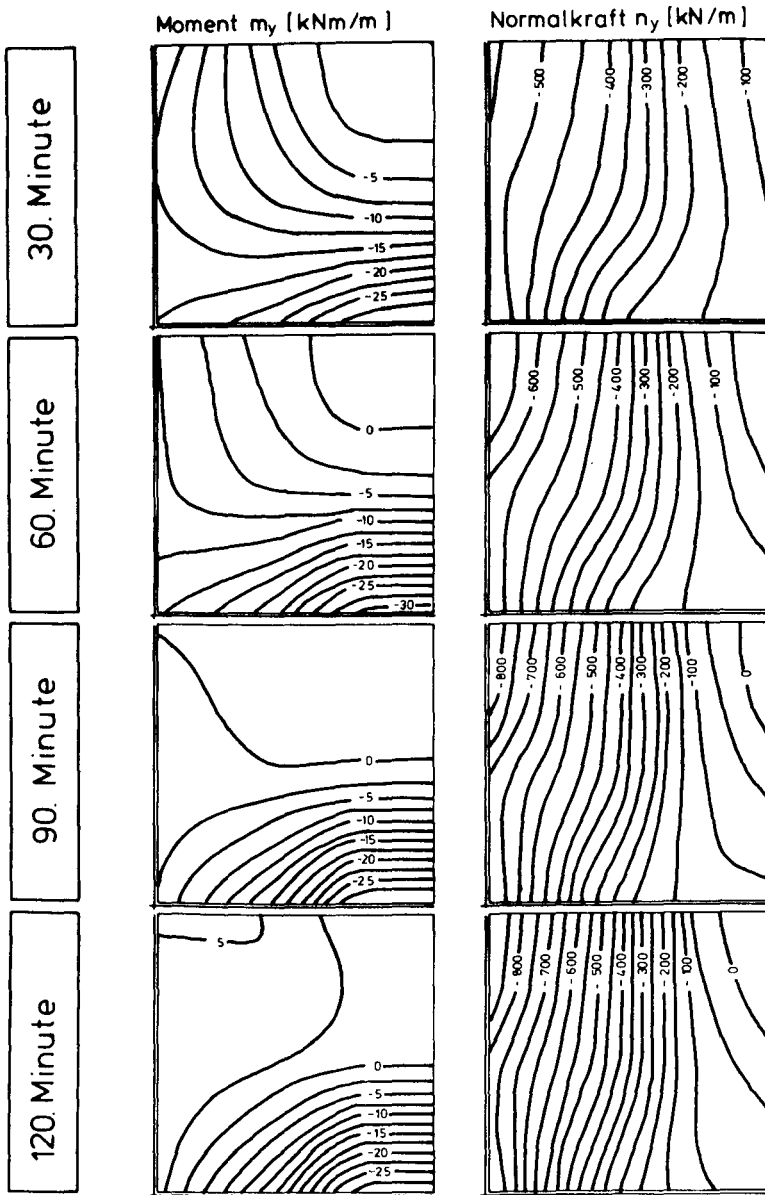


Bild 7.11: Stahlspannung am eingespannten Rand in Plattenmitte

Die Druckzone ist an dieser Stelle dem Brandraum zugewandt. Sie steht unter erheblicher biaxialer Druckbeanspruchung. Daher muß mit dem Auftreten von Abplatzungen gerechnet werden, wenn die Feuchte des Betons größer ist als 2 Gew. % /MO.81/.



Last	Betongüte	untere Bewehrung	Beflammung
Voll	B 25	Q - 513	partiell

Bild 7.12: Schnittkraftverteilung im Mittelfeld

Beide Ereignisse führen, wenn sie eintreten, dazu, daß sich schlagartig ein Einfeldsystem bildet, das auch ohne Temperaturbeanspruchung die Gebrauchslast kaum tragen könnte. Mit einem schlagartigen Versagen muß also gerechnet werden.

Der Einfluß der unteren Bewehrung wird bei einem Vergleich von Bild 7.12 mit Bild 7.9 deutlich. Die Anordnung einer verstärkten unteren Bewehrung bewirkt zweierlei. Zum einen wächst das zulässige Feldmoment an, dies kann jedoch nicht durch eine Erhöhung der Last ausgenutzt werden. Zum andern wächst bei partieller Beflammung die maximale Zugkraft in den nicht vom Brand beaufschlagten Bereichen.

So ist es erklärlich, daß die Umlagerung der Momente vom Mittelbereich zur Lagerlinie nicht mehr ganz das Maß wie bei der Bezugskombination erreicht, obwohl der Normkraftabbau in Plattenmitte sich nicht unterscheidet. Allerdings ist ein Anwachsen der Druckkräfte vor allem in der Nähe der Lagerlinie festzustellen. Der Einfluß auf die Normkraft ist größer als auf das Moment, denn der Aufbau der Zwangnormkräfte wird von den kalten Randbereichen getragen, während die Feldmomente in Plattenmitte in ihrer größtmäßigen Entwicklung durch die Temperaturbeanspruchung stark eingeschränkt werden.

Da auch hier im Verformungsverhalten kein nennenswerter Einfluß verzeichnet werden konnte, kann vermutet werden, daß auch die Feuerwiderstandsdauer durch Anordnung einer verstärkten Feldbewehrung nicht nachhaltig verbessert werden kann. Dieser Wunsch dürfte jedoch bei den bereits - rechnerisch - erzielten hohen Werten vermutlich kaum bestehen.

Bevor die bei voller Beflammung erzielten Ergebnisse besprochen werden, noch eine Bemerkung zu den bei partieller Beflammung auftretenden Beanspruchungen der nicht vom Brand betroffenen Bereiche. Die hier auftretenden Normalkräfte von über +400 kN/m führen selbstverständlich zum Fließen der Bewehrung. Damit verbunden ist eine Bildung von Rissen, die den ganzen Platten-

querschnitt durchqueren, der Querschnitt reißt also durch. Dieser Zustand wird im wesentlichen schon in der ersten Phase, also bis etwa zur 20. Minute erreicht. Die Sanierbarkeit dieser Bereiche ist, obwohl vom Brand gar nicht betroffen, unter diesen Umständen sehr zweifelhaft. Auch ist nicht sichergestellt, ob die Schubtragfähigkeit wieder in vollem Umfang hergestellt werden kann. Man sollte daher davon ausgehen, daß auch nach einer lediglich in Teilbereichen auftretenden Brandbeanspruchung größere Bereiche der Konstruktion bleibende Einschränkungen ihrer Tragfähigkeit erfahren.

Wie bereits bei der Analyse der Schnittkraftentwicklung am Symmetrierand, so ist auch bei der Schnittkraftverteilung im Mittelfeld ein großer Einfluß der Art der Beflammung zu bemerken. In Bild 7.13 ist die Momenten- und Normalkraftverteilung im Mittelfeld für die voll von unten beflamnte Platte abgebildet. Auch bei dieser Parameterkombination bleibt das Mittelfeld fast gänzlich im Bereich negativer Momentenbeanspruchung. Das Stützmoment an der Lagerlinie ist jedoch deutlich kleiner als bei der partiell beflamnten Platte. Außerdem fällt auf, daß sich der Bereich geringer positiver Momente mit zunehmender Branddauer nur in geringem Maß - verglichen mit partieller Beflammung - ausdehnt. Das Mittelfeld bleibt also unter überwiegend negativer Momentenbeanspruchung.

Die Normalkraftverteilung unterscheidet sich hier noch deutlicher von der partiell beflamnten Platte, denn bis auf einen kleinen Druckbereich in Plattenmitte steht das Feld unter Zugbeanspruchung.

Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Randfelder eine geringere Durchbiegung aufweisen als das Mittelfeld. Dadurch wird das Mittelfeld von den Randfeldern förmlich "auseinandergezogen". Beim Durchschlagen (siehe 7.3.3) nach 80 Minuten Branddauer verschwindet die Normalkraft im Mittelfeld dann fast völlig. Hiervon wird die Momentenverteilung nur in geringem Maß beeinflusst.

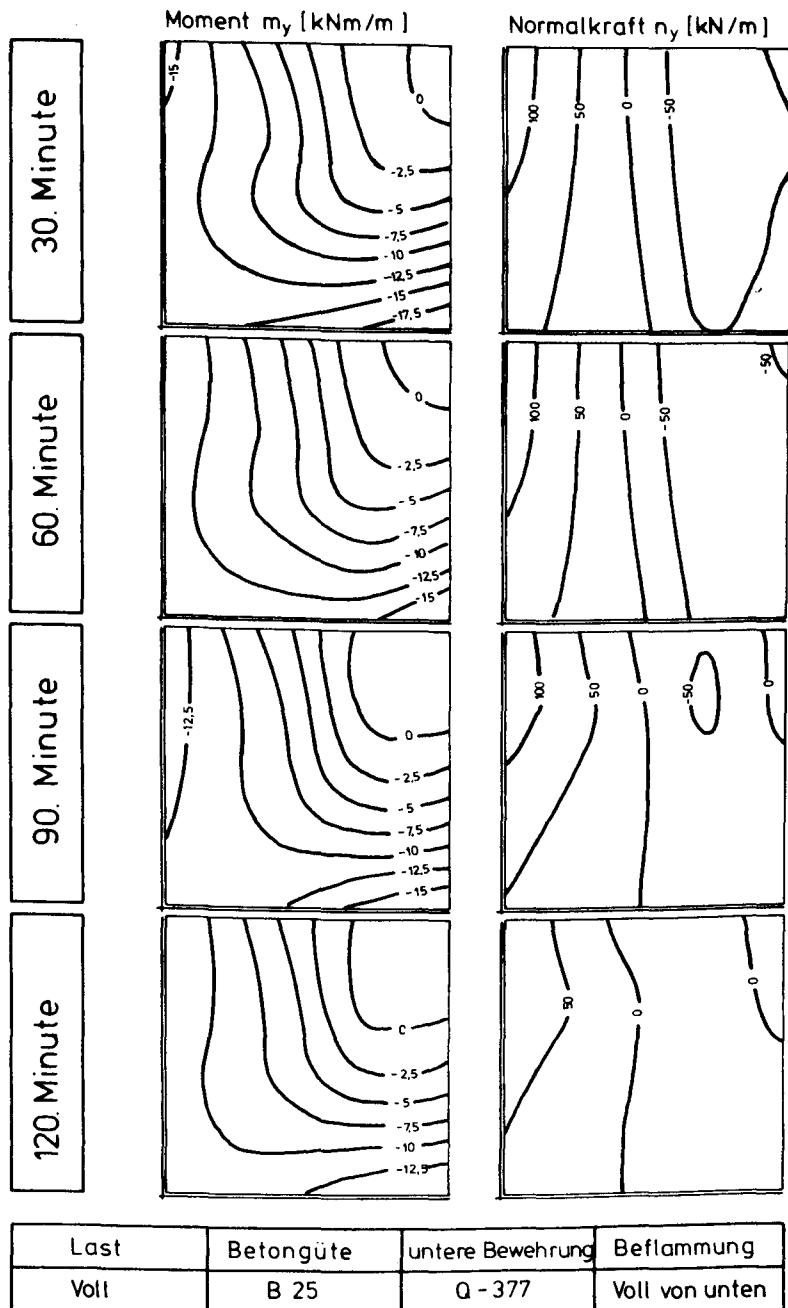
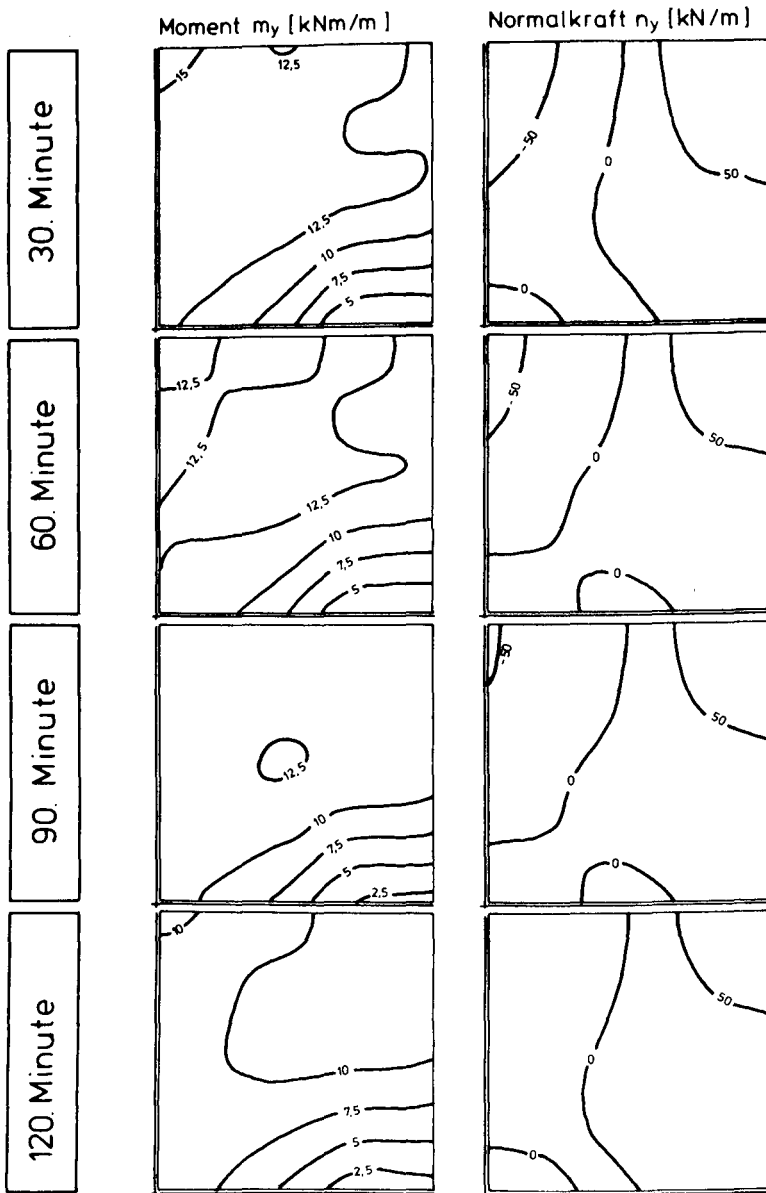


Bild 7.13: Schnittkraftverteilung im Mittelfeld



Last	Betongüte	untere Bewehrung	Beflammung
Voll	B 25	Q - 377	Voll von oben

Bild 7.14: Schnittkraftverteilung im Mittelfeld

Bei voller Beflammung von oben (siehe Bild 7.14) treten ausschließlich positive Momente im Mittelfeld auf. Die Maximalwerte sind am Symmetrierand zu finden. Mit zunehmender Branddauer werden auch hier die Zwangbeanspruchungen kleiner und es deutet sich nach 120 Minuten wieder die Bildung eines Stützmomentes an. Die Normalkräfte sind ihrer Größe wegen kaum der Rede wert. Interessant ist allenfalls, daß hier in Plattenmitte über den ganzen berechneten Zeitraum Zugkräfte auftreten.

7.4 SCHLUSSFOLGERUNGEN

In erster Linie ist bemerkenswert, daß in keinem der untersuchten Fälle innerhalb des berechneten Zeitraums von 120 Minuten Branddauer Versagen des Systems festgestellt werden konnte. Immerhin muß hier jedoch auf das Temperaturkriterium von DIN 4102 hingewiesen werden, das nach genau 90 Minuten Branddauer greift, denn zu diesem Zeitpunkt wird die zulässige mittlere Erhöhung der Oberflächentemperatur von 140 K gerade überschritten. Durch den im allgemeinen vorzufindenden Estrich kann diese Grenze in Praxis oftmals weiter nach hinten verschoben werden.

Die trotz der erheblichen Zwangnormalkräfte vorgefundene hohe Feuerwiderstandsdauer kann nur in Verbindung mit den verwendeten Entwurfsgrundlagen, zuvorderst DIN 1045, erklärt werden. Die in Abschnitt 17.7.2 festgelegte Begrenzung der Biegeschlankheit sorgt bei partieller Beflammung für eine Begrenzung der Beulgefahr.

Daher sind alle im folgenden angestellten Verallgemeinerungen der gefundenen Zusammenhänge nur gültig, wenn die Biegeschlankheit nach DIN 1045 begrenzt wird. Es läßt sich dann nämlich sagen, daß das untersuchte System die größte zulässige Schlankheit besitzt. Mit zunehmendem Abstand der Lagerlinien wächst die Plattendicke nämlich linear oder sogar quadratisch, wenn das Trennwandkriterium beachtet wird. Damit nimmt der Dehnwiderstand, der für die Zwangskraft bei partieller Beflammung

zuständig ist, linear, der Biegewiderstand kubisch zu. Dem steht zwar noch eine quadratisch mit der Länge wachsende Beullast gegenüber, aber der kubisch wachsende Biegewiderstand gewinnt die Oberhand, so daß die Beulgefahr konstant bleibt oder bei Beachtung des Trennwandkriteriums sogar abnimmt, obwohl der Abstand der Lagerlinien wächst.

Zusätzlich profitiert die Feuerwiderstandsdauer davon, daß das untersuchte Durchlaufsystem für zwei verschiedene Lastfälle bemessen wurde. Der eine Lastfall erzeugt die größten Feldmomente, der andere die größten Stützmomente. Die Lastfälle schließen sich jedoch gegenseitig aus, so daß während des Brandes immer nur ein Lastfall wirksam ist. Dadurch erhält das Gesamtsystem zusätzliche Reserven, die, wie gezeigt werden konnte, auch ausgeschöpft werden.

Daraus kann geschlossen werden, daß Durchlaufplatten unter Brandbeanspruchung ein günstiges Tragverhalten und eine hohe Feuerwiderstandsdauer besitzen. Das Verformungsverhalten ist weniger günstig, denn die ermittelten Durchbiegungen sind sehr groß, und es ist zu Beginn eine sehr große Durchbiebungsgeschwindigkeit festzustellen.

Die Verallgemeinerung der Ergebnisse muß insofern eingeschränkt werden, als weder

- dicke Platten, also Platten, die die Last vornehmlich durch Schub abtragen, noch
- Fertigteildecken, noch
- Flachdecken

in die Untersuchung mit einbezogen worden sind. Weiterhin muß darauf hingewiesen werden, daß normgemäße Herstellung und geringe Betonfeuchte hier besonders wichtig sind.

8 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die Entwicklung eines geometrisch und physikalisch nichtlinearen Modells zur Berechnung von Stahlbetonplatten beschrieben. Das Modell eignet sich besonders zur Berechnung von brandbeanspruchten und/oder stabilitätsgefährdeten Platten mit großen Durchbiegungen. Es trägt den Namen FIPSE, ein Anagramm für FInites Platten-Scheiben Element.

Das mechanische Modell basiert auf der Methode der Finiten Elemente. Es handelt sich um ein reines Weggrößenverfahren, das die nichtlinearen Einflüsse nach dem Tangentenverfahren berücksichtigt. Die auftretenden Instabilitäten werden nach der Eigenwertmethode erkannt. Das Modell hat sich bewährt. Erforderlich ist jedoch der quasi-viskose Dämpfer, da sonst bei Einwirkung von Temperaturbeanspruchung Konvergenz nicht sichergestellt ist und das verwendete Tangentenverfahren zum Schwingen neigt.

Das Werkstoffmodell für Beton unter biaxialer Beanspruchung wurde auf der Grundlage der von Kupfer gewonnenen Versuchsdaten hergeleitet, da die Versuche von Ehm bisher auf den Druck-Druck-Quadranten beschränkt waren. Kupfers Versuche sind kraftgesteuert gefahren worden, es fehlen daher Aussagen über den abfallenden Ast der Spannungsdehnungsbeziehung. Außerdem sind sie bei Normaltemperatur durchgeführt. Die charakteristischen Größen für Beton unter erhöhter Temperatur mußten daher in Anlehnung an den einaxial beanspruchten Beton verzerrt werden. Die gewählte Näherung weicht nur in einigen Temperaturbereichen und bei hoher biaxialer Ausnutzung von Ehm's Versuchen ab und scheint daher nicht unvertretbar. Außerdem sind die Abweichungen nicht auf die formulierten Algorithmen zurückzuführen, sondern lediglich auf die eingesetzten Parameter.

Das Rechenmodell konnte mit den bezüglich des Werkstoffmodells gemachten Einschränkungen verifiziert werden. Hierzu dienten einfache Beispiele, die analytisch oder anschaulich kontrolliert werden können. Damit konnte gezeigt werden, daß die gesteckten Ziele bezüglich der Eigenschaften des Rechenmodells, nämlich

- Theorie der großen Verformungen bei Berücksichtigung von Biegung und Normalkraft in der Strukturanalyse und
- wirklichkeitsnahes Materialgesetz für biaxial beanspruchten Beton bei Berücksichtigung des Einflusses hoher Temperatur auf Steifigkeit und Festigkeit

erreicht worden sind.

Die anschließenden Nachrechnungen von Wandversuchen bei Normaltemperatur sowie Brandversuchen an ungezwängten und gezwängten Stahlbetonplatten zeigten durchweg gute Übereinstimmung. Weiterhin wurde gezeigt, wie die bei Großversuchen unvermeidlichen Abweichungen zwischen praxisgerechter Anordnung von Randbedingungen und versuchstechnischen Möglichkeiten mit Hilfe des Rechenmodells quantifiziert und korrigiert werden können. Aus den vorgelegten Ergebnissen kann aber auch der Umkehrschluß gezogen werden, daß nämlich Rechenwerte nur nach Absicherung durch Versuchsergebnissen von dauerhafter Bedeutung sind.

In einer Parameterstudie wurde abschließend das Trag- und Verformungsverhalten partiell beflammer Stahlbetonplatten untersucht. Die Einflüsse von Lastverteilung, verwendeter Betongüte und einer verstärkten Feldbewehrung konnten herausgearbeitet werden. Darüber hinaus wurde die Einflüsse einer vollständigen Beflammung jeweils von einer Seite untersucht.

Ausgangssystem war eine 3*3-Feldplatte mit einer Plattendicke von 100 mm, deren Mittelfeld beflammt wurde. Der Abstand der Lagerlinien wurde so gewählt, daß sich die maximale Schlankheit ergab, die nach DIN 1045 noch zulässig ist.

Die nach DIN 4102 in die Feuerwiderstandsklasse F90 einzustufende Platte versagte rechnerisch in keinem Fall vor der 120. Minute. Dabei wurden jedoch sehr große Durchbiegungen ermittelt. Das Tragverhalten profitiert in hohem Maß von der Fähigkeit des Systems zu weiträumigen Lastumlagerungen. Dies konnte mit Hilfe von Bildern der Schnittgrößenverteilung im Mittelfeld und Randfeld dargestellt werden.

Die Ergebnisse bestätigen, daß dünne, monolithisch hergestellte, durchlaufende Stahlbetonplatten auch bei Zwangwirkungen aus partieller Beflammung mindestens die gleiche Feuerwiderstandsdauer erreichen wie entsprechende Einfeldplatten, sofern ihre Biegeschlankheit nach DIN 1045 begrenzt wird.

Das Rechenmodell ist jedoch noch nicht in der Lage, alle auftretenden Phänomene zu erklären. Auf der Strukturseite bleibt die Anwendung auf dünne Platten beschränkt, da der gewählte Ansatz Spannungen senkrecht zur Plattenebene nicht berücksichtigt. Daher kann unter anderem auch das Auftreten von Betonabplatzungen im Rechenmodell nicht erkannt werden.

Auf der Werkstoffseite wird die Anwendung auf monoton wachsende Dehnungen und Temperaturen einzuschränken sein. Diese Einschränkung beruht primär auf dem Mangel an Versuchswerten. Allerdings wären die verwendeten Algorithmen auch noch nicht in der Lage, wesentlich komplexere Randbedingungen zu verarbeiten. Weiterhin ist festzustellen, daß der temperaturbeaufschlagte, biaxial beanspruchte Beton im Druck-Zug und Zug-Zug Quadranten experimentell bisher nicht untersucht worden ist. Dies gilt auch für den "abfallenden Ast" der Arbeitslinie.

Hier wären Grundlagenversuche wünschenswert, damit das entwickelte Rechenmodell erfolgversprechend zur Strukturanalyse von natürlich brandbeanspruchten, ebenen Flächentragwerken eingesetzt werden kann.

A GRUNDMATRIZEN FÜR DAS STRUKTURMODELL

A.1 ABKÜRZUNGEN

Die folgenden Abkürzungen wurden verwendet, um die Grundmatrizen zur Aufstellung der Elementmatrix in einfacher Form bereitzustellen. Sie können auch in dem Programm REDUCE verwendet werden, was praktisch einer Klammerung entspricht und bezüglich des erforderlichen Rechenaufwandes sehr ökonomisch ist.

$X^{**2} = X2;$	$X^{**3} = X3;$	$X^{**4} = X4;$
$X^{**5} = X5;$	$X^{**6} = X6;$	$Y^{**2} = Y2;$
$Y^{**3} = Y3;$	$Y^{**4} = Y4;$	$Y^{**5} = Y5;$
$Y^{**6} = Y6;$	$X*Y = P11;$	$X2*Y = P21;$
$X3*Y = P31;$	$X4*Y = P41;$	$X5*Y = P51;$
$X6*Y = P61;$	$X*Y2 = P12;$	$X2*Y2 = P22;$
$X3*Y2 = P32;$	$X4*Y2 = P42;$	$X5*Y2 = P52;$
$X6*Y2 = P62;$	$X*Y3 = P13;$	$X2*Y3 = P23;$
$X3*Y3 = P33;$	$X4*Y3 = P43;$	$X5*Y3 = P53;$
$X6*Y3 = P63;$	$X*Y4 = P14;$	$X2*Y4 = P24;$
$X3*Y4 = P34;$	$X4*Y4 = P44;$	$X5*Y4 = P54;$
$X6*Y4 = P64;$	$X*Y5 = P15;$	$X2*Y5 = P25;$
$X3*Y5 = P35;$	$X4*Y5 = P45;$	$X5*Y5 = P55;$
$X6*Y5 = P65;$	$X*Y6 = P16;$	$X2*Y6 = P26;$

$$X3*Y6 = P36; \quad X4*Y6 = P46; \quad X5*Y6 = P56;$$

$$X6*Y6 = P66;$$

A.2 BL-MATRIX

Die BL-Matrix dient dem Aufbau der Steifigkeitsmatrix nach Theorie I. Ordnung.

$$\begin{aligned} \text{BL}(2,1) &= 1 & \text{BL}(4,1) &= Y \\ \text{BL}(11,1) &= -2*Z & \text{BL}(12,1) &= -6*X*Z \\ \text{BL}(15,1) &= -2*Y*Z & \text{BL}(16,1) &= -6*Z*P11 \\ \text{BL}(19,1) &= -2*Z*Y2 & \text{BL}(20,1) &= -6*Z*P12 \\ \text{BL}(23,1) &= -2*Z*Y3 & \text{BL}(24,1) &= -6*Z*P13 \\ \text{BL}(7,2) &= 1 & \text{BL}(8,2) &= X \\ \text{BL}(17,2) &= -2*Z & \text{BL}(18,2) &= -2*X*Z \\ \text{BL}(19,2) &= -2*Z*X2 & \text{BL}(20,2) &= -2*Z*X3 \\ \text{BL}(21,2) &= -6*Y*Z & \text{BL}(22,2) &= -6*Z*P11 \\ \text{BL}(23,2) &= -6*Z*P21 & \text{BL}(24,2) &= -6*Z*P31 \\ \text{BL}(3,3) &= 1 & \text{BL}(4,3) &= X \\ \text{BL}(6,3) &= 1 & \text{BL}(8,3) &= Y \\ \text{BL}(14,3) &= -2*Z & \text{BL}(15,3) &= -4*X*Z \\ \text{BL}(16,3) &= -6*Z*X2 & \text{BL}(18,3) &= -4*Y*Z \end{aligned}$$

$$BL(19,3) = - 8*Z*P11 \qquad BL(20,3) = - 12*Z*P21$$

$$BL(22,3) = - 6*Z*Y2 \qquad BL(23,3) = - 12*Z*P12$$

$$BL(24,3) = - 18*Z*P22$$

A.3 BNL-MATRIX

Als nächstes die BNL-Matrix. Sie formuliert den Einfluß der Verformungen auf die Steifigkeit.

$$BNL(2,1) = Y*U4 + U2$$

$$BNL(4,1) = Y*U2 + Y2*U4$$

$$BNL(6,1) = Y*V4 + V2$$

$$BNL(8,1) = Y*V2 + V4*Y2$$

$$BNL(10,1) = 2*X*W3 + Y*W6 + 3*X2*W4 + 3*W16*P23$$

$$+ 2*W15*P13 + W14*Y3 + 3*W12*P22 + 2$$

$$*W11*P12 + W10*Y2 + 3*W8*P21 + 2*W7*$$

$$P11 + W2$$

$$BNL(11,1) = 2*X*W2 + 6*X3*W4 + 4*X2*W3 + 6*W16*$$

$$P33 + 4*W15*P23 + 2*W14*P13 + 6*W12*$$

$$P32 + 4*W11*P22 + 2*W10*P12 + 6*W8*$$

$$P31 + 4*W7*P21 + 2*W6*P11$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(12,1) = & 9*X4*W4 + 6*X3*W3 + 3*X2*W2 + 9*W16* \\ & P43 + 6*W15*P33 + 3*W14*P23 + 9*W12* \\ & P42 + 6*W11*P32 + 3*W10*P22 + 9*W8* \\ & P41 + 6*W7*P31 + 3*W6*P21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(14,1) = & Y*W2 + 3*W16*P24 + 2*W15*P14 + W14*Y4 \\ & + 3*W12*P23 + 2*W11*P13 + W10*Y3 + 3 \\ & *W8*P22 + 2*W7*P12 + W6*Y2 + 3*W4*P21 \\ & + 2*W3*P11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(15,1) = & 6*W16*P34 + 4*W15*P24 + 2*W14*P14 + 6 \\ & *W12*P33 + 4*W11*P23 + 2*W10*P13 + 6* \\ & W8*P32 + 4*W7*P22 + 2*W6*P12 + 6*W4* \\ & P31 + 4*W3*P21 + 2*W2*P11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(16,1) = & 9*W16*P44 + 6*W15*P34 + 3*W14*P24 + 9 \\ & *W12*P43 + 6*W11*P33 + 3*W10*P23 + 9* \\ & W8*P42 + 6*W7*P32 + 3*W6*P22 + 9*W4* \\ & P41 + 6*W3*P31 + 3*W2*P21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(18,1) = & 3*W16*P25 + 2*W15*P15 + W14*Y5 + 3* \\ & W12*P24 + 2*W11*P14 + W10*Y4 + 3*W8* \\ & P23 + 2*W7*P13 + W6*Y3 + 3*W4*P22 + 2 \\ & *W3*P12 + W2*Y2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(19,1) = & 6*W16*P35 + 4*W15*P25 + 2*W14*P15 + 6 \\ & *W12*P34 + 4*W11*P24 + 2*W10*P14 + 6* \\ & W8*P33 + 4*W7*P23 + 2*W6*P13 + 6*W4* \\ & P32 + 4*W3*P22 + 2*W2*P12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(20,1) = & 9*W16*P45 + 6*W15*P35 + 3*W14*P25 + 9 \\ & *W12*P44 + 6*W11*P34 + 3*W10*P24 + 9* \\ & W8*P43 + 6*W7*P33 + 3*W6*P23 + 9*W4* \\ & P42 + 6*W3*P32 + 3*W2*P22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(22,1) = & 3*W16*P26 + 2*W15*P16 + W14*Y6 + 3* \\ & W12*P25 + 2*W11*P15 + W10*Y5 + 3*W8* \\ & P24 + 2*W7*P14 + W6*Y4 + 3*W4*P23 + 2 \\ & *W3*P13 + W2*Y3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(23,1) = & 6*W16*P36 + 4*W15*P26 + 2*W14*P16 + 6 \\ & *W12*P35 + 4*W11*P25 + 2*W10*P15 + 6* \\ & W8*P34 + 4*W7*P24 + 2*W6*P14 + 6*W4* \\ & P33 + 4*W3*P23 + 2*W2*P13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(24,1) = & 9*W16*P46 + 6*W15*P36 + 3*W14*P26 + 9 \\ & *W12*P45 + 6*W11*P35 + 3*W10*P25 + 9* \\ & W8*P44 + 6*W7*P34 + 3*W6*P24 + 9*W4* \\ & P43 + 6*W3*P33 + 3*W2*P23 \end{aligned}$$

$$\text{BNL}(3,2) = X*U4 + U3$$

$$\text{BNL}(4,2) = X*U3 + X2*U4$$

$$\text{BNL}(7,2) = X*V4 + V3$$

$$\text{BNL}(8,2) = X*V3 + X2*V4$$

$$\begin{aligned}\text{BNL}(13,2) = & X*W6 + 2*Y*W9 + X3*W8 + X2*W7 + 3*W16 \\ & *P32 + 3*W15*P22 + 3*W14*P12 + 3*W13* \\ & Y2 + 2*W12*P31 + 2*W11*P21 + 2*W10* \\ & P11 + W5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{BNL}(14,2) = & X*W5 + X4*W8 + X3*W7 + X2*W6 + 3*W16* \\ & P42 + 3*W15*P32 + 3*W14*P22 + 3*W13* \\ & P12 + 2*W12*P41 + 2*W11*P31 + 2*W10* \\ & P21 + 2*W9*P11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{BNL}(15,2) = & X4*W7 + X3*W6 + X2*W5 + 3*W16*P52 + 3 \\ & *W15*P42 + 3*W14*P32 + 3*W13*P22 + 2* \\ & W12*P51 + 2*W11*P41 + 2*W10*P31 + 2* \\ & W9*P21 + W8*X5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{BNL}(16,2) = & X4*W6 + X3*W5 + 3*W16*P62 + 3*W15*P52 \\ & + 3*W14*P42 + 3*W13*P32 + 2*W12*P61 \\ & + 2*W11*P51 + 2*W10*P41 + 2*W9*P31 \\ & + W8*X6 + W7*X5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(17,2) = & 2*Y*W5 + 6*W16*P33 + 6*W15*P23 + 6* \\ & W14*P13 + 6*W13*Y3 + 4*W12*P32 + 4* \\ & W11*P22 + 4*W10*P12 + 4*W9*Y2 + 2*W8* \\ & P31 + 2*W7*P21 + 2*W6*P11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(18,2) = & 6*W16*P43 + 6*W15*P33 + 6*W14*P23 + 6* \\ & *W13*P13 + 4*W12*P42 + 4*W11*P32 + 4* \\ & W10*P22 + 4*W9*P12 + 2*W8*P41 + 2*W7* \\ & P31 + 2*W6*P21 + 2*W5*P11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(19,2) = & 6*W16*P53 + 6*W15*P43 + 6*W14*P33 + 6* \\ & *W13*P23 + 4*W12*P52 + 4*W11*P42 + 4* \\ & W10*P32 + 4*W9*P22 + 2*W8*P51 + 2*W7* \\ & P41 + 2*W6*P31 + 2*W5*P21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(20,2) = & 6*W16*P63 + 6*W15*P53 + 6*W14*P43 + 6* \\ & *W13*P33 + 4*W12*P62 + 4*W11*P52 + 4* \\ & W10*P42 + 4*W9*P32 + 2*W8*P61 + 2*W7* \\ & P51 + 2*W6*P41 + 2*W5*P31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(21,2) = & 9*W16*P34 + 9*W15*P24 + 9*W14*P14 + 9* \\ & *W13*Y4 + 6*W12*P33 + 6*W11*P23 + 6* \\ & W10*P13 + 6*W9*Y3 + 3*W8*P32 + 3*W7* \\ & P22 + 3*W6*P12 + 3*W5*Y2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(22,2) = & 9*W16*P44 + 9*W15*P34 + 9*W14*P24 + 9 \\ & *W13*P14 + 6*W12*P43 + 6*W11*P33 + 6* \\ & W10*P23 + 6*W9*P13 + 3*W8*P42 + 3*W7* \\ & P32 + 3*W6*P22 + 3*W5*P12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(23,2) = & 9*W16*P54 + 9*W15*P44 + 9*W14*P34 + 9 \\ & *W13*P24 + 6*W12*P53 + 6*W11*P43 + 6* \\ & W10*P33 + 6*W9*P23 + 3*W8*P52 + 3*W7* \\ & P42 + 3*W6*P32 + 3*W5*P22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(24,2) = & 9*W16*P64 + 9*W15*P54 + 9*W14*P44 + 9 \\ & *W13*P34 + 6*W12*P63 + 6*W11*P53 + 6* \\ & W10*P43 + 6*W9*P33 + 3*W8*P62 + 3*W7* \\ & P52 + 3*W6*P42 + 3*W5*P32 \end{aligned}$$

$$\text{BNL}(2,3) = X*U4 + U3$$

$$\text{BNL}(3,3) = Y*U4 + U2$$

$$\text{BNL}(4,3) = X*U2 + Y*U3 + 2*P11*U4$$

$$\text{BNL}(6,3) = X*V4 + V3$$

$$\text{BNL}(7,3) = Y*V4 + V2$$

$$\text{BNL}(8,3) = X*V2 + Y*V3 + 2*V4*P11$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(10,3) = & X*W6 + 2*Y*W9 + X3*W8 + X2*W7 + 3*W16 \\ & *P32 + 3*W15*P22 + 3*W14*P12 + 3*W13* \\ & Y2 + 2*W12*P31 + 2*W11*P21 + 2*W10* \\ & P11 + W5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(11,3) = & 2*X*W5 + 2*X4*W8 + 2*X3*W7 + 2*X2*W6 \\ & + 6*W16*P42 + 6*W15*P32 + 6*W14*P22 \\ & + 6*W13*P12 + 4*W12*P41 + 4*W11*P31 \\ & + 4*W10*P21 + 4*W9*P11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(12,3) = & 3*X4*W7 + 3*X3*W6 + 3*X2*W5 + 9*W16* \\ & P52 + 9*W15*P42 + 9*W14*P32 + 9*W13* \\ & P22 + 6*W12*P51 + 6*W11*P41 + 6*W10* \\ & P31 + 6*W9*P21 + 3*W8*X5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(13,3) = & 2*X*W3 + Y*W6 + 3*X2*W4 + 3*W16*P23 \\ & + 2*W15*P13 + W14*Y3 + 3*W12*P22 + 2 \\ & *W11*P12 + W10*Y2 + 3*W8*P21 + 2*W7* \\ & P11 + W2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(14,3) = & X*W2 + Y*W5 + 3*X3*W4 + 2*X2*W3 + 6* \\ & W16*P33 + 5*W15*P23 + 4*W14*P13 + 3* \\ & W13*Y3 + 5*W12*P32 + 4*W11*P22 + 3* \\ & W10*P12 + 2*W9*Y2 + 4*W8*P31 + 3*W7* \\ & P21 + 2*W6*P11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(15,3) = & 3*X4*W4 + 2*X3*W3 + X2*W2 + 9*W16*P43 \\ & + 8*W15*P33 + 7*W14*P23 + 6*W13*P13 \\ & + 7*W12*P42 + 6*W11*P32 + 5*W10*P22 \\ & + 4*W9*P12 + 5*W8*P41 + 4*W7*P31 + 3 \\ & *W6*P21 + 2*W5*P11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(16,3) = & 2*X4*W3 + X3*W2 + 12*W16*P53 + 11*W15 \\ & *P43 + 10*W14*P33 + 9*W13*P23 + 9*W12 \\ & *P52 + 8*W11*P42 + 7*W10*P32 + 6*W9* \\ & P22 + 6*W8*P51 + 5*W7*P41 + 4*W6*P31 \\ & + 3*W5*P21 + 3*W4*X5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BNL}(17,3) = & 2*Y*W2 + 6*W16*P24 + 4*W15*P14 + 2* \\ & W14*Y4 + 6*W12*P23 + 4*W11*P13 + 2* \\ & W10*Y3 + 6*W8*P22 + 4*W7*P12 + 2*W6* \\ & Y2 + 6*W4*P21 + 4*W3*P11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BNL}(18,3) = & 9*W16*P34 + 7*W15*P24 + 5*W14*P14 + 3 \\
& *W13*Y4 + 8*W12*P33 + 6*W11*P23 + 4* \\
& W10*P13 + 2*W9*Y3 + 7*W8*P32 + 5*W7* \\
& P22 + 3*W6*P12 + W5*Y2 + 6*W4*P31 + 4 \\
& *W3*P21 + 2*W2*P11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BNL}(19,3) = & 12*W16*P44 + 10*W15*P34 + 8*W14*P24 \\
& + 6*W13*P14 + 10*W12*P43 + 8*W11*P33 \\
& + 6*W10*P23 + 4*W9*P13 + 8*W8*P42 + \\
& 6*W7*P32 + 4*W6*P22 + 2*W5*P12 + 6*W4 \\
& *P41 + 4*W3*P31 + 2*W2*P21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BNL}(20,3) = & 15*W16*P54 + 13*W15*P44 + 11*W14*P34 \\
& + 9*W13*P24 + 12*W12*P53 + 10*W11* \\
& P43 + 8*W10*P33 + 6*W9*P23 + 9*W8*P52 \\
& + 7*W7*P42 + 5*W6*P32 + 3*W5*P22 + 6 \\
& *W4*P51 + 4*W3*P41 + 2*W2*P31
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BNL}(21,3) = & 9*W16*P25 + 6*W15*P15 + 3*W14*Y5 + 9* \\
& W12*P24 + 6*W11*P14 + 3*W10*Y4 + 9*W8 \\
& *P23 + 6*W7*P13 + 3*W6*Y3 + 9*W4*P22 \\
& + 6*W3*P12 + 3*W2*Y2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BNL}(22,3) = & 12*W16*P35 + 9*W15*P25 + 6*W14*P15 + \\
& 3*W13*Y5 + 11*W12*P34 + 8*W11*P24 + 5 \\
& *W10*P14 + 2*W9*Y4 + 10*W8*P33 + 7*W7 \\
& *P23 + 4*W6*P13 + W5*Y3 + 9*W4*P32 + \\
& 6*W3*P22 + 3*W2*P12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BNL}(23,3) = & 15*W16*P45 + 12*W15*P35 + 9*W14*P25 \\
& + 6*W13*P15 + 13*W12*P44 + 10*W11* \\
& P34 + 7*W10*P24 + 4*W9*P14 + 11*W8* \\
& P43 + 8*W7*P33 + 5*W6*P23 + 2*W5*P13 \\
& + 9*W4*P42 + 6*W3*P32 + 3*W2*P22
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BNL}(24,3) = & 18*W16*P55 + 15*W15*P45 + 12*W14*P35 \\
& + 9*W13*P25 + 15*W12*P54 + 12*W11* \\
& P44 + 9*W10*P34 + 6*W9*P24 + 12*W8* \\
& P53 + 9*W7*P43 + 6*W6*P33 + 3*W5*P23 \\
& + 9*W4*P52 + 6*W3*P42 + 3*W2*P32
\end{aligned}$$

A.4 KS-MATRIX

Zum Schluß noch die KS-Matrix, die den Einfluß der Normalspannung auf die Durchbiegung darstellt.

$$KS(2,2) = 2 \cdot SX$$

$$KS(2,3) = 2 \cdot SXY$$

$$KS(2,4) = 2 \cdot X \cdot SXY + 2 \cdot Y \cdot SX$$

$$KS(3,3) = 2 \cdot SY$$

$$KS(3,4) = 2 \cdot X \cdot SY + 2 \cdot Y \cdot SXY$$

$$KS(4,4) = 2 \cdot X^2 \cdot SY + 4 \cdot SXY \cdot P11 + 2 \cdot SX \cdot Y^2$$

$$KS(6,6) = 2 \cdot SX$$

$$KS(6,7) = 2 \cdot SXY$$

$$KS(6,8) = 2 \cdot X \cdot SXY + 2 \cdot Y \cdot SX$$

$$KS(7,7) = 2 \cdot SY$$

$$KS(7,8) = 2 \cdot X \cdot SY + 2 \cdot Y \cdot SXY$$

$$KS(8,8) = 2 \cdot X^2 \cdot SY + 4 \cdot SXY \cdot P11 + 2 \cdot SX \cdot Y^2$$

$$KS(10,10) = 2 \cdot SX$$

$$KS(10,11) = 4 \cdot X \cdot SX$$

$$KS(10,12) = 6 \cdot X^2 \cdot SX$$

$$KS(10,13) = 2 \cdot SXY$$

$$KS(10,14) = 2 \cdot X \cdot SXY + 2 \cdot Y \cdot SX$$

$$KS(10,15) = 2*X2*SXY + 4*SX*P11$$

$$KS(10,16) = 2*X3*SXY + 6*SX*P21$$

$$KS(10,17) = 4*Y*SXY$$

$$KS(10,18) = 4*SXY*P11 + 2*SX*Y2$$

$$KS(10,19) = 4*SXY*P21 + 4*SX*P12$$

$$KS(10,20) = 4*SXY*P31 + 6*SX*P22$$

$$KS(10,21) = 6*SXY*Y2$$

$$KS(10,22) = 6*SXY*P12 + 2*SX*Y3$$

$$KS(10,23) = 6*SXY*P22 + 4*SX*P13$$

$$KS(10,24) = 6*SXY*P32 + 6*SX*P23$$

$$KS(11,11) = 8*X2*SX$$

$$KS(11,12) = 12*X3*SX$$

$$KS(11,13) = 4*X*SXY$$

$$KS(11,14) = 4*X2*SXY + 4*SX*P11$$

$$KS(11,15) = 4*X3*SXY + 8*SX*P21$$

$$KS(11,16) = 4*X4*SXY + 12*SX*P31$$

$$KS(11,17) = 8*SXY*P11$$

$$KS(11,18) = 8*SXY*P21 + 4*SX*P12$$

$$KS(11,19) = 8*SXY*P31 + 8*SX*P22$$

$$KS(11,20) = 8*SXY*P41 + 12*SX*P32$$

$$\begin{aligned}
KS(11,21) &= 12*SXY*P12 \\
KS(11,22) &= 12*SXY*P22 + 4*SX*P13 \\
KS(11,23) &= 12*SXY*P32 + 8*SX*P23 \\
KS(11,24) &= 12*SXY*P42 + 12*SX*P33 \\
KS(12,12) &= 18*X4*SX \\
KS(12,13) &= 6*X2*SXY \\
KS(12,14) &= 6*X3*SXY + 6*SX*P21 \\
KS(12,15) &= 6*X4*SXY + 12*SX*P31 \\
KS(12,16) &= 6*SXY*X5 + 18*SX*P41 \\
KS(12,17) &= 12*SXY*P21 \\
KS(12,18) &= 12*SXY*P31 + 6*SX*P22 \\
KS(12,19) &= 12*SXY*P41 + 12*SX*P32 \\
KS(12,20) &= 12*SXY*P51 + 18*SX*P42 \\
KS(12,21) &= 18*SXY*P22 \\
KS(12,22) &= 18*SXY*P32 + 6*SX*P23 \\
KS(12,23) &= 18*SXY*P42 + 12*SX*P33 \\
KS(12,24) &= 18*SXY*P52 + 18*SX*P43 \\
KS(13,13) &= 2*SY \\
KS(13,14) &= 2*X*SY + 2*Y*SXY \\
KS(13,15) &= 2*X2*SY + 4*SXY*P11
\end{aligned}$$

$KS(13,16) = 2*X3*SY + 6*SXY*P21$
 $KS(13,17) = 4*Y*SY$
 $KS(13,18) = 2*SXY*Y2 + 4*SY*P11$
 $KS(13,19) = 4*SXY*P12 + 4*SY*P21$
 $KS(13,20) = 6*SXY*P22 + 4*SY*P31$
 $KS(13,21) = 6*SY*Y2$
 $KS(13,22) = 2*SXY*Y3 + 6*SY*P12$
 $KS(13,23) = 4*SXY*P13 + 6*SY*P22$
 $KS(13,24) = 6*SXY*P23 + 6*SY*P32$
 $KS(14,14) = 2*X2*SY + 4*SXY*P11 + 2*SX*Y2$
 $KS(14,15) = 2*X3*SY + 6*SXY*P21 + 4*SX*P12$
 $KS(14,16) = 2*X4*SY + 8*SXY*P31 + 6*SX*P22$
 $KS(14,17) = 4*SXY*Y2 + 4*SY*P11$
 $KS(14,18) = 6*SXY*P12 + 4*SY*P21 + 2*SX*Y3$
 $KS(14,19) = 8*SXY*P22 + 4*SY*P31 + 4*SX*P13$
 $KS(14,20) = 10*SXY*P32 + 4*SY*P41 + 6*SX*P23$
 $KS(14,21) = 6*SXY*Y3 + 6*SY*P12$
 $KS(14,22) = 8*SXY*P13 + 6*SY*P22 + 2*SX*Y4$
 $KS(14,23) = 10*SXY*P23 + 6*SY*P32 + 4*SX*P14$
 $KS(14,24) = 12*SXY*P33 + 6*SY*P42 + 6*SX*P24$

$$\begin{aligned}
KS(15,15) &= 2*X4*SY + 8*SXY*P31 + 8*SX*P22 \\
KS(15,16) &= 10*SXY*P41 + 2*SY*X5 + 12*SX*P32 \\
KS(15,17) &= 8*SXY*P12 + 4*SY*P21 \\
KS(15,18) &= 10*SXY*P22 + 4*SY*P31 + 4*SX*P13 \\
KS(15,19) &= 12*SXY*P32 + 4*SY*P41 + 8*SX*P23 \\
KS(15,20) &= 14*SXY*P42 + 4*SY*P51 + 12*SX*P33 \\
KS(15,21) &= 12*SXY*P13 + 6*SY*P22 \\
KS(15,22) &= 14*SXY*P23 + 6*SY*P32 + 4*SX*P14 \\
KS(15,23) &= 16*SXY*P33 + 6*SY*P42 + 8*SX*P24 \\
KS(15,24) &= 18*SXY*P43 + 6*SY*P52 + 12*SX*P34 \\
KS(16,16) &= 12*SXY*P51 + 2*SY*X6 + 18*SX*P42 \\
KS(16,17) &= 12*SXY*P22 + 4*SY*P31 \\
KS(16,18) &= 14*SXY*P32 + 4*SY*P41 + 6*SX*P23 \\
KS(16,19) &= 16*SXY*P42 + 4*SY*P51 + 12*SX*P33 \\
KS(16,20) &= 18*SXY*P52 + 4*SY*P61 + 18*SX*P43 \\
KS(16,21) &= 18*SXY*P23 + 6*SY*P32 \\
KS(16,22) &= 20*SXY*P33 + 6*SY*P42 + 6*SX*P24 \\
KS(16,23) &= 22*SXY*P43 + 6*SY*P52 + 12*SX*P34 \\
KS(16,24) &= 24*SXY*P53 + 6*SY*P62 + 18*SX*P44 \\
KS(17,17) &= 8*SY*Y2
\end{aligned}$$

$$KS(17,18) = 4*SXY*Y3 + 8*SY*P12$$

$$KS(17,19) = 8*SXY*P13 + 8*SY*P22$$

$$KS(17,20) = 12*SXY*P23 + 8*SY*P32$$

$$KS(17,21) = 12*SY*Y3$$

$$KS(17,22) = 4*SXY*Y4 + 12*SY*P13$$

$$KS(17,23) = 8*SXY*P14 + 12*SY*P23$$

$$KS(17,24) = 12*SXY*P24 + 12*SY*P33$$

$$KS(18,18) = 8*SXY*P13 + 8*SY*P22 + 2*SX*Y4$$

$$KS(18,19) = 12*SXY*P23 + 8*SY*P32 + 4*SX*P14$$

$$KS(18,20) = 16*SXY*P33 + 8*SY*P42 + 6*SX*P24$$

$$KS(18,21) = 6*SXY*Y4 + 12*SY*P13$$

$$KS(18,22) = 10*SXY*P14 + 12*SY*P23 + 2*SX*Y5$$

$$KS(18,23) = 14*SXY*P24 + 12*SY*P33 + 4*SX*P15$$

$$KS(18,24) = 18*SXY*P34 + 12*SY*P43 + 6*SX*P25$$

$$KS(19,19) = 16*SXY*P33 + 8*SY*P42 + 8*SX*P24$$

$$KS(19,20) = 20*SXY*P43 + 8*SY*P52 + 12*SX*P34$$

$$KS(19,21) = 12*SXY*P14 + 12*SY*P23$$

$$KS(19,22) = 16*SXY*P24 + 12*SY*P33 + 4*SX*P15$$

$$KS(19,23) = 20*SXY*P34 + 12*SY*P43 + 8*SX*P25$$

$$KS(19,24) = 24*SXY*P44 + 12*SY*P53 + 12*SX*P35$$

$$\begin{aligned}
KS(20,20) &= 24*SXY*P53 + 8*SY*P62 + 18*SX*P44 \\
KS(20,21) &= 18*SXY*P24 + 12*SY*P33 \\
KS(20,22) &= 22*SXY*P34 + 12*SY*P43 + 6*SX*P25 \\
KS(20,23) &= 26*SXY*P44 + 12*SY*P53 + 12*SX*P35 \\
KS(20,24) &= 30*SXY*P54 + 12*SY*P63 + 18*SX*P45 \\
KS(21,21) &= 18*SY*Y4 \\
KS(21,22) &= 6*SXY*Y5 + 18*SY*P14 \\
KS(21,23) &= 12*SXY*P15 + 18*SY*P24 \\
KS(21,24) &= 18*SXY*P25 + 18*SY*P34 \\
KS(22,22) &= 12*SXY*P15 + 18*SY*P24 + 2*SX*Y6 \\
KS(22,23) &= 18*SXY*P25 + 18*SY*P34 + 4*SX*P16 \\
KS(22,24) &= 24*SXY*P35 + 18*SY*P44 + 6*SX*P26 \\
KS(23,23) &= 24*SXY*P35 + 18*SY*P44 + 8*SX*P26 \\
KS(23,24) &= 30*SXY*P45 + 18*SY*P54 + 12*SX*P36 \\
KS(24,24) &= 36*SXY*P55 + 18*SY*P64 + 18*SX*P46
\end{aligned}$$

In der Schriftenreihe des Instituts für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der Technischen Universität Braunschweig, die im Selbstverlag herausgegeben wird, sind bisher erschienen: (ISSN 0178-5796)

- Heft 1: Über das Verdunstungsverhalten und den Nachweis öligler Holzschutzmittel (Dissertation). (1962)
von Rolf Deters -vergriffen-
- Heft 2: Das Verhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen unter Feuerangriff. (1963)
von Karl Kordina -vergriffen-
- Heft 3: Zur Stabilitätsfrage des Zweigelenkbogens mit biegeweichem Zugband und schlaffen Hängestangen (Diss.) (1963).
von Josef Eibl -vergriffen-
- Heft 4: Ein Verfahren zur Bestimmung des Vorspannverlustes infolge Schlupf in der Verankerung.
Zur Frage der Temperaturbeanspruchung von kreiszylindrischen Stahlbetonsilos. (1964)
von Karl Kordina und Josef Eibl -vergriffen-
- Heft 5: Über den Schalungsdruck von Frischbeton (Diss.). (1964)
von Helmut Ertingshausen
- Heft 6: Transportphänomene in Betonporen (Diss.). (1966)
von Nils Valerian Waubke
- Heft 7: Ein Beitrag zur rechnerischen Bemessung von brandbeanspruchten balkenartigen Stahlbetonbauteilen. (Diss.) (1967).
von Herbert Ehm -vergriffen-
- Heft 8: Möglichkeiten der Bestimmung der kritischen Last von Stab- und Flächentragwerken mit Hilfe ihrer Eigenfrequenz (Diss.). (1967)
von Joachim Steinert -vergriffen-
- Heft 9: Untersuchungen an dammschichtbildenden Feuer-
schutzmitteln (Diss.). (1967)
von Axel Lämmke -vergriffen-
- Heft 10: Beitrag zur Frage der Kippstabilität aufgehängter Balkenträger und gerader, flächenartiger Träger (Diss.) (1968).
von Kamal Fouad Rafla -vergriffen-
- Heft 11: Die Traglast von offenen, kreisförmigen Stahlbetonquerschnitten - Brazier-Effekt - (Diss.). (1968)
von György Iványi -vergriffen-
- Heft 12: Brandverhalten verschiedener Bauplatten aus Baustoffen der Klassen A und B, insbesondere aus Baustoffen der Klasse A 2. (1969)
von Claus Meyer-Ottens -vergriffen-

- Heft 13: Zum Tragverhalten von kreisförmigen Doppelsilos unter Berücksichtigung der Eigensteifigkeit des Füllgutes. (Diss.) (1969).
von Günther Fuchs -vergriffen-
- Heft 14: Wände aus Holz und Holzwerkstoffen unter Feuerangriff. (1970)
von Claus Meyer-Ottens -vergriffen-
- Heft 15: Beurteilung von Bauwerksfestigkeiten an Hand von Betongütewürfeln und -bohrproben (Diss.). (1970)
von Ralf Lewandowski -vergriffen-
- Heft 16: Untersuchungen zur Frage der Rissesicherung von leichten Trennwänden aus Gips-Wandbauplatten. (Diss.) (1970).
von Fritz Joachim Neubauer -vergriffen-
- Heft 17: Brandverhalten von Bauteilen aus dampfgehärtetem Gasbeton. (1970)
von Claus Meyer-Ottens und Karl Kordina
- Heft 18: Die Stahlblech-Holz-Nagelverbindung und ihre Anwendung - Grundlagen und Bemessungsvorschläge -. (Diss.) (1971).
von Wilfried Bödeker
- Heft 19: Bauaufsichtliche Brandschutzvorschriften - Beispiele für ihre Erfüllung bei Wänden, Brandwänden und Decken -. (1971)
von Claus Meyer-Ottens -vergriffen-
- Heft 20: Das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbrückenpfeilern mit Rollenlagern (Diss.). (1972)
von Kurt Liermann
- Heft 21: Zum Trag- und Verformungsverhalten ebener Stockwerksrahmen aus Stahlbeton. (Diss.) (1972).
von Béla Jankó
- Heft 22: Zur Frage des Spannungsrißkorrosionsverhaltens kohlenstoffarmer Betonstähle in Nitratlösungen unter Berücksichtigung praxisnaher Verhältnisse (Diss.). (1972)
von Ulf Nürnberger
- Heft 23: Zur Frage der Abplatzungen an Betonbauteilen aus Normalbeton bei Brandbeanspruchung. (Diss.) (1972).
von Claus Meyer-Ottens -vergriffen-
- Heft 24: Über die Steinkohlenflugasche und ihre Wirkung auf die Eigenschaften von Leichtbeton mit geschlossenem Gefüge im frischen und festen Zustand (Diss.). (1973)
von Hassan Taha El-Arousy

- Heft 25: Mechanismen der Spannungskorrosion von Spannstählen im Hinblick auf ihr Verhalten in Spannbetonkonstruktionen (Diss.). (1973)
von Günter Rieche
- Heft 26: Beitrag zur rechnerischen Ermittlung von Zwangsschnittgrößen unter Berücksichtigung des wirklichen Verformungsverhaltens des Stahlbetons (Diss.). (1974)
von Eckhard Tennstedt
- Heft 27: Zur Kinetik festigkeitsmindernder Reaktionen in Normalbetonen bei hohen Temperaturen (Diss.) (1973).
von Ulrich Schneider -vergriffen-
- Heft 28: Ein dreiparametrisches, komplexes Ultraschall-Prüfverfahren für die zerstörungsfreie Materialprüfung im Bauwesen (Diss.). (1974)
von Jürgen Neisecke -vergriffen-
- Heft 29: Traglastermittlung an Stahlbeton-Druckgliedern. (1974)
von Karl Kordina, Peter Maack und Olaf Hjorth
- Heft 30: Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit von Randbalken bei Stahlbetondecken. (1974)
von Josef Eibl und György Iványi -vergriffen-
- Heft 31: Stabilitätsnachweise von Rahmensystemen im Stahlbetonbau. (1974)
von Karl Kordina und Béla Jankó
- Heft 32: Ein Beitrag zur Frage der Festigkeiten und des Verbundverhaltens von Stahl und Beton bei hohen Beanspruchungsgeschwindigkeiten (Diss.) (1976).
von Olaf Hjorth -vergriffen-
- Heft 33: Traglastberechnung instationär thermisch belasteter Stahlbetondruckglieder mittels zwei- und dreidimensionaler Diskretisierung. (Diss.) (1976).
von Wolfram Klingsch -vergriffen-
- Heft 34: Thermische Zerstörung natürlicher Zuschlagstoffe im Beton (Diss.). (1977)
von Farid Djamous -vergriffen-
- Heft 35: Zur Frage des Trag- und Verformungsverhaltens ebener Stahlbetonrahmen im Brandfall (Diss.). (1977)
von Ataman Haksever -vergriffen-
- Heft 36: Ein Beitrag zur Traglastermittlung von vierseitig gelagerten Stahlbetonwänden (Diss.) (1977).
von Karl-Heinz Storkebaum
- Heft 37: Zur thermischen Beanspruchung von Außenstützen im Brandfall (Diss.). (1977)
von Rolf Bechtold

- Heft 38: Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit von Kiesbeton aus dem Wassereindringverhalten. (1978)
von Joachim Steinert
- Heft 39: Ein haufwerkstheoretisches Modell der Restfestigkeit geschädigter Betone (Diss.) (1978).
von Rolf Weiß
- Heft 40: Zum Schwingkriechen von Beton (Diss.). (1978)
von Willi Alda
- Heft 41: Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken mit rechteckigem Querschnitt unter kombinierter Beanspruchung aus Biegung, Querkraft und Torsion (Diss.). (1979)
von Manfred Teutsch
- Heft 42: Ein Beitrag zur Frage des Kriechens und der Relaxation von Beton unter hohen Temperaturen. (Habil.-Schr.)(1979).
von Ulrich Schneider -vergriffen-
- Heft 43: Veröffentlichungen 1967 - 1979.(1979).
- Heft 44: Druckmessungen in Silozellen mit einer neu entwickelten Sonde. (1979)
von Karl Kordina und Helmut Fröning
- Heft 45: Ein Beitrag zur Zuverlässigkeit frei gelagerter Stahlbetonstützen unter genormter Brandeinwirkung. (Diss.) (1980).
von Volker Henke -vergriffen-
- Heft 46: Wärmebilanzrechnungen für Brandräume mit unterschiedlichen Randbedingungen (Teil I). (1981)
von Ulrich Schneider und Aysen Haksever -vergriffen-
- Heft 47: Partiiell brandbeanspruchte Stahlbetondecken - Berechnung des inneren Zwanges mit einem Scheibenmodell - (Diss.). (1981)
von Robert Walter
- Heft 48: Zum Verformungsverhalten gerissener Stahlbetonbalken unter Einschluß der Mitwirkung des Betons auf Zug in Abhängigkeit von Last und Zeit (Diss.). (1981)
von Björn Svensvik
- Heft 49: Veröffentlichungen 1967 - 1981.(1981).
- Heft 50: Die Steifigkeit und das Verformungsverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken unter kombinierter Beanspruchung aus Torsion, Biegemoment, Querkraft und Axialkraft. (1982)
von Surendra K. Ojha
- Heft 51: Zusammenstellung und Anwendung Bayes'scher Verfahren bei der Stichprobenbeurteilung. (1982)
von Volker Henke

- Heft 52: Stahlbetonstützen mit Rechteckquerschnitten bei natürlichen Bränden (Habil.-Schr.TU Istanbul). (1982)
von Ataman Haksever
- Heft 53: Untersuchung des Reiß- und Verformungsverhaltens segmentärer Spannbetonbauteile (Diss.). (1982)
von Viggo Weber ISBN 3-89288-017-4
- Heft 54: Zur Tragfähigkeit von Verklebungen zwischen Baustahl und Beton - Geklebte Bewehrung -. (Diss.) (1982).
von Ernst-Holger Ranisch ISBN 3-89288-010-7
- Heft 55: Zum Einfluß tiefer Temperaturen auf Festigkeit und Verformung von Beton. (Diss.) (1982).
von Günter Wiedemann -vergriffen-
- Heft 56: Ein geometrisch und physikalisch nichtlineares Rechenmodell zur optimalen Biegebemessung ebener Stahlbetonrahmen(Diss.)(1982).
von Reiner Timm ISBN 3-89288-018-2
- Heft 57: Untersuchungen über den Verbund zwischen Stahl und Beton bei hohen Temperaturen (Diss.). (1983)
von Ulrich Diederichs ISBN 3-89288-019-0
- Heft 58: Wärmebilanzrechnungen in Verbindung mit Versuchen in Brandräumen (Teil II). (1983)
von Ulrich Schneider ISBN 3-89288-020-4
- Heft 59: Wärmebilanzrechnungen in Brandräumen unter Berücksichtigung der Mehrzonenmodellbildung (Teil III). (1983)
von Dobbernack; Schneider ISBN 3-89288-021-2
- Heft 60: Verbesserungen und Erweiterungen von Ultraschallprüfverfahren zur zerstörungsfreien Fehlstellen- und Qualitätskontrolle von Betonbauteilen (Diss.). (1983)
von Wolfgang Hillger ISBN 3-89288-014-X
- Heft 61: Zur Wirklichkeitsnähe der Lastannahmen in Silovorschriften für Zellen aus Stahlbeton und Spannbeton. (Diss.)(1984).
von Franz Blume ISBN 3-89288-013-1
- Heft 62: Das Durchstanzen von Platten aus Stahlbeton - Tragverhalten, Berechnung, Bemessung - (Diss.). (1984)
von Diedrich Nölting ISBN 3-89288-012-3
- Heft 63: Tragverhalten von Stahlbetonplatten im baupraktischen Einbauzustand bei Brandbeanspruchung (Diss.). (1985)
von Jürgen Wesche ISBN 3-89288-009-3
- Heft 64: Untersuchungen zur Technologie des Gleitschalungsbau (Diss.). (1985)
von Siegfried Droese ISBN 3-89288-000-X

- Heft 65: Forschungsarbeiten 1978 -1983. (1984)
Hrsg.: Inst. für Baustoffe ISBN 3-89288-001-8
- Heft 66: Einfluß der Verbundart auf die Grenztragfähigkeit
von Spannbetonbalken. (Diss.)(1985).
von Josef Hegger ISBN 3-89288-002-6
- Heft 67: Zum Tragverhalten von Verankerungen für hochfeste
Stäbe aus Glasfaserverbundwerkstoff als Bewehrung
im Spannbetonbau (Diss.). (1985)
von Bernhard Kepp ISBN 3-89288-003-4
- Heft 68: Zum Einfluß hoher Temperaturen auf das Verbund-
verhalten von einbetonierten Bewehrungsstäben
(Diss.). (1985)
von Helmut Sager ISBN 3-89288-004-2
- Heft 69: Zur praxisgerechten brandschutztechnischen Beur-
teilung von Stützen aus Stahl und Beton (Diss.).
(1986)
von Rüdiger Haß ISBN 3-89288-005-0
- Heft 70: 17. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschus-
ses für Stahlbeton. März 1986. Kurzfassungen
der Beiträge. (1986) ISBN 3-89288-006-9
- Heft 71: Versuche zur Festigkeit und Verformung von Beton
unter zweiachialer Beanspruchung und hohen Tempe-
raturen. (Diss.) (1986).
von Christian Ehm ISBN 3-89288-007-7
- Heft 72: Zum Riß- und Verformungsverhalten von stahlfaser-
verstärkten Stahlbetonstäben unter Längszug.
(Diss.). (1986).
von Kurt Hartwich ISBN 3-89288-008-5
- Heft 73: Zum Einfluß tiefer Temperaturen auf Verbund und
Rißbildung von Stahlbetonbauteilen. (Diss.).
(1987).
von Jochen Scheuermann ISBN 3-89288-011-5
- Heft 74: Strukturorientierte Analyse und Modellbeschrei-
bung der thermischen Schädigung von Beton.
(Diss.). (1987).
von Konrad Hinrichsmeyer ISBN 3-89288-015-8
- Heft 75: Fachseminar Neue Bemessungsregeln durch Änderung
der Stahlbeton- und Spannbetonvorschriften DIN
1045, DIN 4227. Kurzfassungen der Beiträge.
(1986). ISBN 3-89288-022-0
- Heft 76: Zum Einfluß erhöhter Temperatur auf Festigkeit
und Verformung von Beton mit unterschiedlichen
Feuchtegehalten. (Diss.). (1987).
von Harald Budelmann ISBN 3-89288-016-6

- Heft 77: Spannungen und bruchmechanische Vorgänge im Normalbeton unter Zugbeanspruchung. (Diss.). (1987).
von Fritz Großmann ISBN 3-89288-023-9
- Heft 78: Zum Einfluß des Verbundkriechens auf die Rißbreitenentwicklung sowie auf die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen. (Diss.). (1987).
von Annette Rohling ISBN 3-89288-024-7
- Heft 79: Zwangrißbildung und Bewehrung von Stahlbetonwänden auf steifen Unterbauten. (Diss.). (1987).
von Wolfgang Henning ISBN 3-89288-025-5
- Heft 80: Zur Berechnung der Biegetragfähigkeit brandbeanspruchter Spannbetonbauteile unter Berücksichtigung geeigneter Vereinfachungen für die Materialgesetze. (Diss.). (1987).
von Ekkehard Richter ISBN 3-89288-026-3

