

**INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRAUNSCHWEIG**

Amtliche Materialprüfungsanstalt für das Bauwesen

Prof. Dr.-Ing. K. Kordina

**Möglichkeiten der Bestimmung der kritischen Last
von Stab- und Flächentragwerken
mit Hilfe ihrer Eigenfrequenz**

von

JOACHIM STEINERT

HEFT 8 · BRAUNSCHWEIG · MÄRZ 1967

~~XXI 266-2~~

21-0200/001

**INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRAUNSCHWEIG**

Amtliche Materialprüfungsanstalt für das Bauwesen

Prof. Dr.-Ing. K. Kordina



**Möglichkeiten der Bestimmung der kritischen Last
von Stab- und Flächentragwerken
mit Hilfe ihrer Eigenfrequenz**

von

JOACHIM STEINERT

HEFT 8 . BRAUNSCHWEIG . MÄRZ 1967

DK 624.072.2 : 624.074.5

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Theoretische Grundlagen	2
2.1 Synthetische Methode	2
2.2 Energiemethode	8
2.3 Rotationsträgheit und Schub	15
2.4 Schlußfolgerungen für die technische Anwendung	16
2.5 Erzeugung und Messung von erzwungenen und Eigen- schwingungen	23
3. Ergebnisse des Literaturstudiums	27
4. Besondere Einflüsse auf Knicklast und Eigenfrequenz	33
4.1 Material	36
4.2 Ausmittigkeit und Vorverformung	40
5. Experimentelle Untersuchungen	46
5.1 Erläuterungen zum Untersuchungsprogramm und zur Auswahl der Versuchsstützen	46
5.2 Versuchsdurchführung	53
5.2.1 Erzeugung der Belastung und Messung der Deformationen	53
5.2.2 Die Lagerung der Stützen	55
5.2.3 Erzeugung der Wechselkraft und Messung der Schwingbeschleunigung	59
6. Darstellung der Meßergebnisse	61
7. Diskussion der Meßergebnisse	63
7.1 Die Lastabhängigkeit der Resonanzfrequenz	63
7.1.1 Ausmittig belastete Stahlbetonstützen	63
7.1.2 Mittig belastete Stahlbeton- und Stahlstützen	64
7.1.3 Der typische Verlauf der gemessenen Frequenz- kurven	65
7.2 Die Abweichungen von der Linearität im oberen Lastbereich	66
7.3 Bestimmung der kritischen Last aus der Eigengeraden	70
7.4 Die Bestimmung der kritischen Last aus der Mittendurchbiegung	74

	Seite
7.5 Die Bestimmung der kritischen Last ohne Zusatzlasten	75
8. Diskussion von Sonderfragen	78
8.1 Die Schwingungsform von Stützen	78
8.2 Die Lastabhängigkeit der Randbedingungen	80
8.3 Einfluß der Belastung auf die Dämpfung von Stahlbetonstützen	82
8.4 Der Einfluß der nichtlinearen Arbeitslinie von Stahlbeton auf die Bestimmung der Resonanzfrequenz	84
8.5 Untersuchungen an Schalenmodellen	87
9. Zusammenfassung	91

Verzeichnis der verwendeten Symbole und
Abkürzungen

Einige Symbole müssen doppelsinnig verwendet werden, da sie sowohl im Bauwesen als auch in der Schwingungstechnik fest eingebürgert sind, vgl. DIN 1311 und DIN 1080.

Symbol	Größe
\underline{A}	Feldmatrix
A_{ij}	Matrixelement
A, B, C, D	konstante Größen
B	Biegesteifigkeit
B_n	Fourierkoeffizient
E	Elastizitätsmodul
F	Querschnittsfläche
F_E	Energie pro Längeneinheit
G	Schubmodul
I	Flächenträgheitsmoment
J	Wert bestimmter Integrale
M	Biegemoment
M_O, M_L	Masse bzw. Lagermasse
N	Einspannbeiwert
P	Axiallast
P_E	Eulerlast
$P_K, \tilde{P}_K, \bar{P}_K$	kritische Last, dynamisch ($\tilde{\quad}$) oder statisch ($\bar{\quad}$) ermittelt
P_V	Traglast
Q, Q_S	Querkraft, Spitzenwert der Wechselkraft
T	Engelberscher Knickmodul n.DIN 4114
T	Abklingzeit
V	dynamischer Beiwert
W	Widerstandsmoment
W_{28}	Druckfestigkeit des Betons nach 28 Tagen

Symbol	Größe
a	Abstand der Bewehrung von der Stützenmitte
a	Maximalwert der Vorverformung
a, a_S	Beschleunigungsamplitude, ggf. Spitzenwert
a_i	Konstanten bei mehrgliedrigem Ritz-Ansatz
b	Breite
c	Federsteifigkeit
c_α	Federsteifigkeit bei lastabhängiger Einspannung
d	Verlustfaktor
d_o	Abstand des Druckrandes von der Schwerelinie der Modellschalen
e	Ausmittigkeit
f	Eigen- oder Resonanzfrequenz
f_o, f_{oo}	Frequenz ($P = 0$), gemessen oder berechnet
$f_1, f_2, f_3 \dots f_n$	Eigenfrequenz Harmonischer n ter Ordnung
f_R	Resonanzfrequenz, in Abschn. 2.5 zur Unterscheidung von der Eigenfrequenz
g	Erdbeschleunigung
h	Dicke
i	Trägheitsradius
i	imaginäre Einheit
j, n	Ordnung bzw. Laufzahl ($j = 1, 2, 3 \dots$)
k	Kernweite
k	Wellenzahl, in Kap. 2
kl	Schwingungs-Eigenwert, in Kap. 2
l	Länge
l_K	Knicklänge
m	Ausmittigkeit, auf die Kernweite e bezogen
n	Verhältnis der Elastizitätsmoduli, in Abschn. 4.1
n_{xK}	Beulspannung

Symbol	Größe
q	Quotient
r	Konstante, insb. Dämpfungs- konstante
r_o	Schalenradius
s	Nichtlinearitätsfaktor
t	Zeit
u	zulässige Funktion (Variations- funktion)
v, v_S	Momentanwert des Schwingweges, auch Spitzenwert der gemessenen Amplitude
\underline{w}	Spaltenvektor
w	Schwingungsform
w_e	statische Durchbiegung bei ausmittiger Belastung
x, y	Längenkoordinaten
y	zulässige oder Vergleichs- funktion, auch beliebige Funktion
Λ	log. Dekrement
Π	Energie
$\tilde{\Pi}$	Näherung für die Energie
Φ	Momentanwert des Schwingweges
α	Abklingkonstante, Abschn. 2.5
α	Knickzahl
α_l	Eigenwerte des belasteten, ruhenden Systems
β_p	Prismenfestigkeit
δ	Mittenausbiegung
ε	Parameter
$\varepsilon, \varepsilon_p$	Stauchung
ε_M	Biegeverformung
η	Verstimmung
φ	Winkel der Querschnittsdrehung bei Biegebeanspruchung
α	Knick-Wellenzahl
α	Abminderungszahl für den Elasti- zitätsmodul von Stahl nach DIN 4114

Symbol	Größe
λ	Schlankheit
μ	Bewehrungsgehalt
ν	Poisson-Konstante
ξ	Faktor
ρ	Dichte
σ	Spannung
σ_P, σ_F	Proportionalitäts- bzw. Fließgrenze
σ_K, σ_E	kritische Spannung bzw. Euler-spannung
φ	Phasenwinkel
ψ	Einspannbeiwert
ω	Kreisfrequenz
ω_n	Kreisfrequenz von Harmonischen n ter Ordnung
ω_S	Kreisfrequenz einer Saitenschwin-gung
ω_0, ω_{00}	Kreisfrequenz (P = 0)

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Möglichkeit, die kritische Last von Stab- und Flächentragwerken durch Messung ihrer Eigenfrequenz experimentell zu bestimmen. Das untersuchte schwingungstechnische Verfahren beruht darauf, daß bei dem zweiparametrischen Knick-Schwingungs-Problem die untersten Eigenkurven exakt oder angenähert Geraden sind und somit ein linearer Zusammenhang zwischen Last und Quadrat der Eigenfrequenz besteht.

Nach einer kurzen Darstellung der theoretischen Grundlagen werden die Gesichtspunkte einer praktischen Anwendung erörtert und die Ergebnisse der schwingungstechnischen Untersuchungen ausführlich behandelt. Die Einflüsse der Lagerung, Lasteintragung und Verformung sowie der Einfluß des Baustoffes Stahlbeton werden eingehend untersucht.

Anhand der Meßergebnisse wird gezeigt, daß die lineare Abhängigkeit des Quadrates der Eigenfrequenz von der Last zwar in gewissen Lastbereichen besteht, jedoch mit zunehmender Belastung unvermeidbare, durch Biegeverformungen bedingte Abweichungen auftreten, die als ein Kriterium für den Übergang vom Stabilitäts- zum Gleichgewichtsproblem (Spannungsproblem) angesehen werden können.

2. Theoretische Grundlagen

Nachfolgend wird am Beispiel des Stabes gezeigt, daß für das kombinierte Schwingungs-Knick-Problem die zur Grundschiwingung und zur 1. Oberschiwingung gehörenden Eigenkurven exakt oder angenähert Geraden sind. Den Betrachtungen wird ein Stab der Länge l mit konstantem Querschnitt F , konstanter Dichte ρ und konstanter Biegesteifigkeit $B = E \cdot I$ zugrunde gelegt.

2.1 Synthetische Methode

Wird ein derartiger Stab einer über den Querschnitt gleichmäßigen Druckbeanspruchung ausgesetzt, dann gilt bekanntlich für die statische Ausbiegung $w = w(x)$ die Differentialgleichung:

$$(2.1) \quad EI w''(x) + P w(x) = 0$$

und, wenn der so belastete Stab zusätzlich Biegeschwingungen ausführt, die Differentialgleichung für die Schwingungsamplitude $v(x,t)$:

$$(2.2) \quad EI v''''(x,t) + P v''(x,t) + \rho F \ddot{v}(x,t) = 0 .$$

Hierbei sind mit dem Zeichen ' Ableitungen nach dem Ort und mit \cdot Ableitungen nach der Zeit bezeichnet.

Mit dem Separationsansatz

$$(2.3) \quad v(x,t) = w(x) \Phi(t)$$

erhält man die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(2.4) \quad \ddot{\Phi}(t) - \omega^2 \Phi(t) = 0 ,$$

mit der Lösung $\Phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ für die Zeitfunktion der ungedämpften freien Schwingungen der Kreisfrequenz ω , sowie

$$(2.5) \quad EI w''''(x) + P w''(x) - \omega^2 \rho F w(x) = 0 .$$

Diese kann mit den Abkürzungen

$$(2.6) \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI} \quad \text{und} \quad k^4 = \omega^2 \frac{\rho F}{EI}$$

wie folgt umgeformt werden kann:

$$(2.7) \quad w'''' + \alpha^2 w'' - k^4 w = 0 .$$

Die Lösung $w(x)$ dieser Gleichung ist die lastabhängige Schwingungsform, die für $k \rightarrow 0$ in die Knickfunktion und für $\alpha \rightarrow 0$ in die Amplitudenfunktion übergeht. Man erhält die allgemeine Lösung durch den Ansatz $w(x) = w_0 e^{\bar{x}x}$.

Die charakteristische Gleichung

$$(2.8) \quad \bar{x}^4 + \alpha^2 \bar{x}^2 - k^4 = 0$$

besitzt 4 Wurzeln:

$$(2.9) \quad \bar{x}_{1...4} = \pm i(\alpha_{1/2}) = \pm i \left(\sqrt{k^4 + \frac{\alpha^4}{4}} \pm \frac{\alpha^2}{2} \right) .$$

Deshalb lautet die allgemeine Lösung:

$$(2.10) \quad w(x) = A \cos \alpha_1 x + B \sin \alpha_1 x + C \operatorname{ch} \alpha_2 x + D \operatorname{sh} \alpha_2 x .$$

Spezielle Lösungen gewinnt man durch Vorgabe der 4 zugehörigen Randbedingungen. Drückt man die 4 Konstanten A, B, C, D durch die Randwerte für Ausbiegung, Verdrehung, Biegemoment und Querkraft am linken Rand aus, so erhält man für die genannten Größen folgende Matrizendarstellung:

$$(2.11) \quad \underline{w}(x) = \underline{\underline{A}}(x) \cdot \underline{w}(0) ,$$

deren Elemente aus Tafel 1 zu ersehen sind. Für spezielle homogene Randwerte findet man aus den Elementen A_{ij} der Feldmatrix eine transzendente Bedingung, die Frequenzgleichung, für die Existenz nichttrivialer Lösungen. Diese Bedingung kann nur für bestimmte Werte α, k erfüllt werden (zweiparametrisches Eigenwertproblem), die auf einer Kurve, der Eigenkurve, liegen. Die Behauptung, daß die Eigenkurven $k^4(\alpha^2) \sim \omega^2(P)$ exakt oder näherungsweise Geraden sind, wird im folgenden an drei Beispielen für die Grundschwingung und die erste Oberschwingung bewiesen.

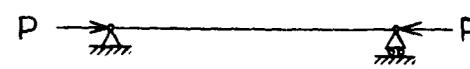
Tafel 1: $\underline{w}(x) = \underline{A}(x) \cdot \underline{w}(o)$

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ w'(x) \\ EIw''(x) \\ EIw'''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2^2 \cos \alpha_1 x + \alpha_1^2 \operatorname{ch} \alpha_2 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\alpha_2^3 \sin \alpha_1 x + \alpha_1^3 \operatorname{sh} \alpha_2 x}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} & \frac{\operatorname{ch} \alpha_2 x - \cos \alpha_1 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 x - \alpha_2 \sin \alpha_1 x}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \\ \alpha_1 \alpha_2 \frac{\alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 x - \alpha_2 \sin \alpha_1 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\alpha_2^2 \cos \alpha_1 x + \alpha_1^2 \operatorname{ch} \alpha_2 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\alpha_1 \sin \alpha_1 x + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\operatorname{ch} \alpha_2 x - \cos \alpha_1 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \\ \alpha_1^2 \alpha_2^2 \frac{\operatorname{ch} \alpha_2 x - \cos \alpha_1 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \alpha_1 \alpha_2^2 \frac{\alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 x - \alpha_2 \sin \alpha_1 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\alpha_1^2 \cos \alpha_1 x + \alpha_2^2 \operatorname{ch} \alpha_2 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\alpha_1 \sin \alpha_1 x + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \\ \alpha_1^2 \alpha_2^2 \frac{\alpha_1 \cos \alpha_1 x + \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_2 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \alpha_1^2 \alpha_2^2 \frac{\operatorname{ch} \alpha_2 x - \cos \alpha_1 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\alpha_2^3 \operatorname{sh} \alpha_2 x - \alpha_1^3 \sin \alpha_1 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \frac{\alpha_1^2 \cos \alpha_1 x + \alpha_2^2 \operatorname{ch} \alpha_2 x}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w(o) \\ w'(o) \\ EIw''(o) \\ EIw'''(o) \end{pmatrix}$$

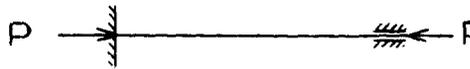
Differentialgleichung:

$$w'''' + \alpha^2 w'' - k^4 w = 0$$

$$\alpha_{1/2}^2 = \sqrt{k^4 + \frac{\alpha^4}{4}} \pm \frac{\alpha^2}{2}$$

Fall a:  an beiden Enden gelenkig gelagert

Fall b:  an einem Ende eingespannt und am anderen gelenkig gelagert

Fall c:  an beiden Enden eingespannt (genauer: an einem Ende eingespannt, am anderen nur in Richtung der Stabachse verschieblich)

Fall a

$$\begin{matrix} w(l) = 0 & w(0) = 0 \\ EIw''(l) = 0 & EIw''(0) = 0 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & A_{12} & x & A_{14} \\ x & x & x & x \\ x & A_{32} & x & A_{34} \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Nicht verwendete Matrixelemente sind durch x bezeichnet.

Frequenzgleichung: $\begin{vmatrix} A_{12} & A_{14} \\ A_{32} & A_{34} \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$

(2.12) $\sin \alpha_1 l \operatorname{sh} \alpha_2 l = 0$, d. h. nach (2.9)

(2.13) $\alpha_1 l = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{\alpha^4}{4}} + \frac{\alpha^2}{2}} = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$

oder umgeformt:

(2.14) $k^4 = \frac{(n\pi)^4}{l^4} - \alpha^2 \frac{(n\pi)^2}{l^2}$.

Unter Beachtung von 2.6 folgt daraus:

(2.15) $\omega^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\rho F} - (n\pi)^2 \frac{P}{\rho Fl} = \frac{(n\pi)^4}{l^4} \frac{EI}{\rho F} \left(1 - \frac{P}{(n\pi)^2 \frac{EI}{l}}\right)$.

Da sich aus (2.15) für $P \rightarrow 0$ das Quadrat der Eigenkreisfrequenz

(2.16) $\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\rho F}$

und für $\omega^2 \rightarrow 0$ die Eulerlast

(2.17) $P_{En} = (n\pi)^2 \frac{EI}{l^2}$

ergibt, kann man die Eigenkurve, Gleichung (2.14), auch in der Form:

$$(2.18) \quad \omega^2 = \omega_n^2 \left(1 - \frac{P}{P_{En}}\right)$$

anschreiben, die im Hinblick auf die praktischen Anwendungen interessiert. Damit ist bewiesen, daß bei gelenkiger Lagerung eines Stabes für die Schwingungsformen beliebiger Ordnung ein linearer Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Eigenfrequenz und der Druckkraft besteht.

Es soll betont werden, daß die Einführung der Eulerlast nicht zwingend ist, sondern formal erfolgt. Wie bereits in (2.15) angedeutet ist, kann die Eigenfrequenzänderung durch die Belastung auch mit Hilfe einer "Korrektur"-Frequenz ω_p beschrieben werden:

$$(2.19) \quad \omega_p^2 = \frac{C}{M_0} = \frac{(n\pi)^2 \frac{P}{l}}{M_0} ; \quad M_0 = \rho Fl \quad \text{Stabmasse.}$$

Fall b

$$\begin{array}{l} w(l) = 0 \\ EI w''(l) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & A_{13} & A_{14} \\ x & x & x & x \\ x & x & A_{33} & A_{34} \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

Frequenzgleichung: $\begin{vmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{33} & A_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow$

$$(2.20) \quad \alpha_2 \tan \alpha_1 l = \alpha_1 \tanh \alpha_2 l .$$

Für die Sonderfälle des reinen Knickens oder Schwingens, d. h. $\alpha_2 = 0$ bzw. $\alpha_1 = \alpha_2$, erhält man aus (2.20) die Knickbedingung:

$$(2.21) \quad \tan \alpha_n l = \alpha_n l$$

mit den niedrigsten Eigenwerten $\alpha_1 l = 4,4934$ und $\alpha_2 l = 7,7253$, und die Frequenzgleichung

$$(2.22) \quad \tan k_n l = \tanh k_n l$$

mit den niedrigsten Eigenwerten $k_1 l = 3,9266$ und $k_2 l = 7,0686$.

Die zum allgemeinen Fall $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$ gehörenden Eigenkurven sind für die Grundschwingung und die erste Oberschwingung in Bild 1 dargestellt, aus dem man ersehen kann, daß die Abweichungen von einem linearen $\omega^2(P)$ -Gesetz nur gering sind.

Fall c

$$\begin{array}{l} w(l) = 0 \quad w(0) = 0 \\ w'(l) = 0 \quad w'(0) = 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & A_{13} & A_{14} \\ x & x & A_{23} & A_{24} \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

Frequenzgleichung: $\begin{vmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{23} & A_{24} \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$

(2.23) $2 \alpha_1 \alpha_2 l (1 - \cos \alpha_1 l \operatorname{ch} \alpha_2 l) - [(\alpha_1 l)^2 - (\alpha_2 l)^2] \sin \alpha_1 l \operatorname{sh} \alpha_2 l = 0.$

Die bekannten Sonderfälle, das Knickproblem für den ruhenden Stab und das Schwingungsverhalten des unbelasteten Stabes erhält man wie in Fall b.

(2.24) Knickbedingung: $2 (1 - \cos \alpha_n l) - \alpha_n l \sin \alpha_n l = 0$ und

(2.25) Frequenzgleichung $1 - \cos k_n l \operatorname{ch} k_n l = 0.$

Die ersten Eigenwerte lauten hier bekanntlich:

$\alpha_1 l = 2 \pi$, $\alpha_2 l = 8,987$ bzw. $k_1 l = 4,730$, $k_2 l = 7,853.$

Auch im allgemeinen Fall des beidseitig eingespannten, unter Belastung schwingenden Stabes kann die Abhängigkeit des Quadrates der Eigenfrequenz von der Belastung als nahezu linear angesehen werden, vgl. Bild 2.

Auf Grund dieser Beispiele wird angenommen, daß man bei beliebigen Randbedingungen und auch bei beliebigem Steifigkeitsverlauf $EI(x)$ bzw. beliebiger Massenbelegung $q(x) \cdot F(x)$ für die Grundschwingung einen linearen Zusammenhang zwischen ω^2 und P erwarten kann.

Die bisher angeschriebenen Gleichungen gelten nicht nur für Druck-, sondern auch für Zugbeanspruchung, obwohl sich das Fun-

damentalsystem ändert. Hieraus und aus der Tatsache, daß P_E als eine vom Knickvorgang unabhängige Bezugsgröße aufgefaßt werden kann, folgt die kurios anmutende Möglichkeit, die "Knicklast" aus einem Zugversuch zu bestimmen, wie sie in einigen Versuchen bestätigt wurde.

Bild 3 zeigt am Beispiel eines beidseitig eingespannten Stahlflachstabes die gute Übereinstimmung zwischen dem Experiment und der Beziehung

$$(2.26) \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{P}{P_E} .$$

Im Falle eines gelenkig gelagerten Stabes geht diese Gleichung für $P \gg P_E$ in die Formel für die Eigenfrequenz ω_s einer Seite über:

$$(2.27) \quad \omega_s^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{\sigma}{\rho} \hat{=} \omega_p^2 .$$

Die Genauigkeit ist - wie wiederholt an Modellstäben festgestellt wurde - bei einem Zugversuch so groß, daß in Umkehrung der Problemstellung bei bekanntem ω_0 und P_E die Zugkraft $-P$ aus einem gemessenen Wert ω ermittelt werden kann.

Es sei noch in Erinnerung gebracht, daß die Eulersche Knicklast in ähnlicher Weise auch in andere Gleichgewichtsprobleme, wie z. B. die Biegung ausmittig belasteter Stützen, als Bezugsgröße eingeht. Davon wird bei der Auswertung der Meßergebnisse Gebrauch gemacht.

2.2 Energiemethode

Bei dem Näherungsverfahren nach Rayleigh-Ritz zur Abschätzung der Eigenwerte wird für die Schwingungsform ein Ansatz

$$(2.28) \quad \tilde{w}(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots = \sum_{i=1}^n a_i y_i(x)$$

gemacht, der zumindest die wesentlichen (geometrischen) Randbedingungen erfüllen muß /1/. Die zunächst noch freien Parameter a_i der zulässigen Funktionen y_i werden so bestimmt, daß die Extremalforderung:

$$(2.29) \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (EI w''^2 - P w'^2 - \omega^2 \rho F w^2) dx \Rightarrow \text{Extremum}$$

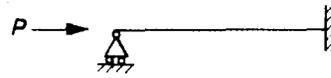
$$(k \cdot l)^4 = \frac{\omega^2 \rho F}{E \cdot I} = (k_n \cdot l)^4 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

Bild: 1

Frequenzgleichung

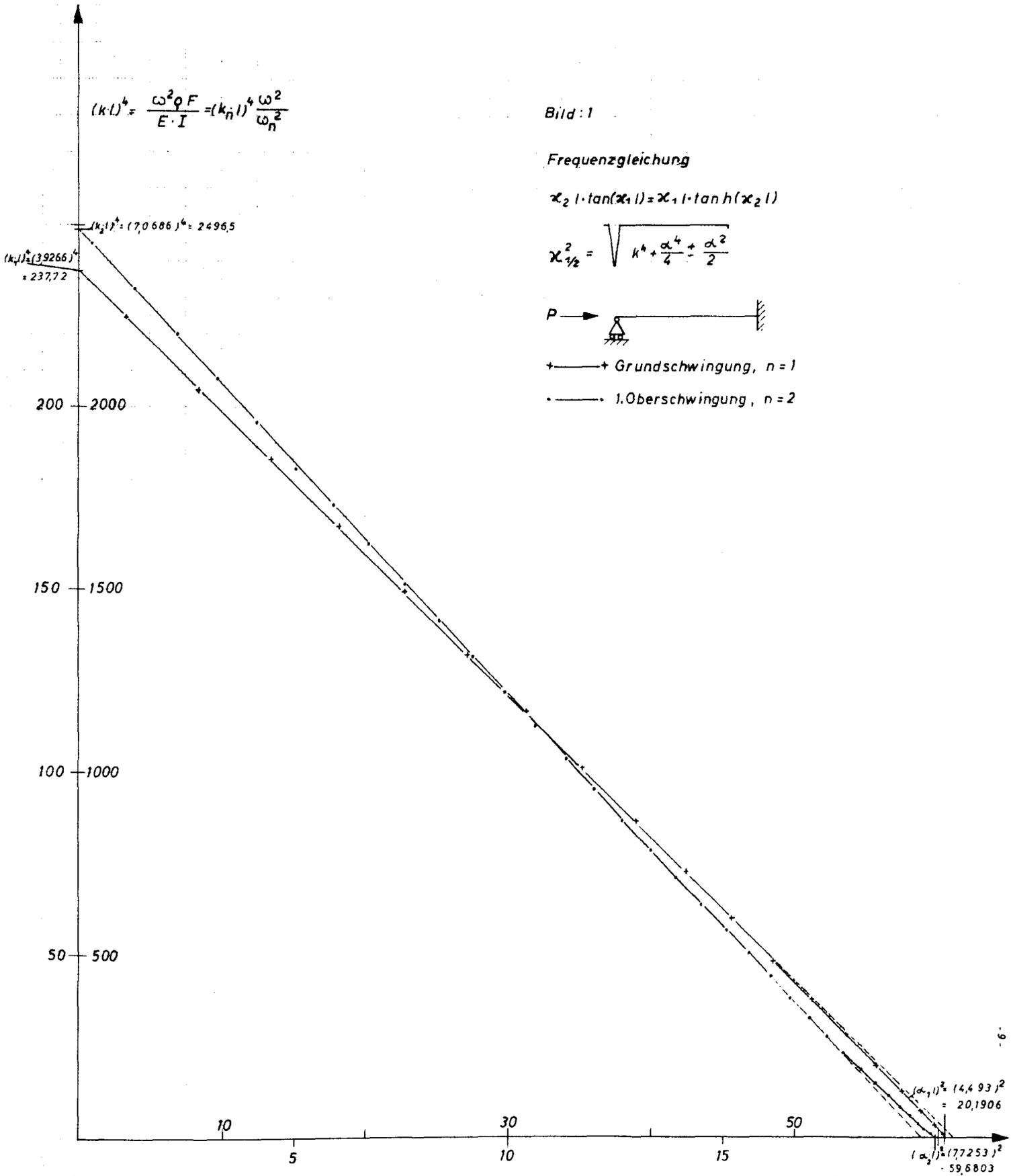
$$\alpha_2 \cdot 1 \cdot \tan(\alpha_2 \cdot 1) = \alpha_1 \cdot 1 \cdot \tanh(\alpha_2 \cdot 1)$$

$$\alpha_{1/2}^2 = \sqrt{k^4 + \frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^2}{2}}$$

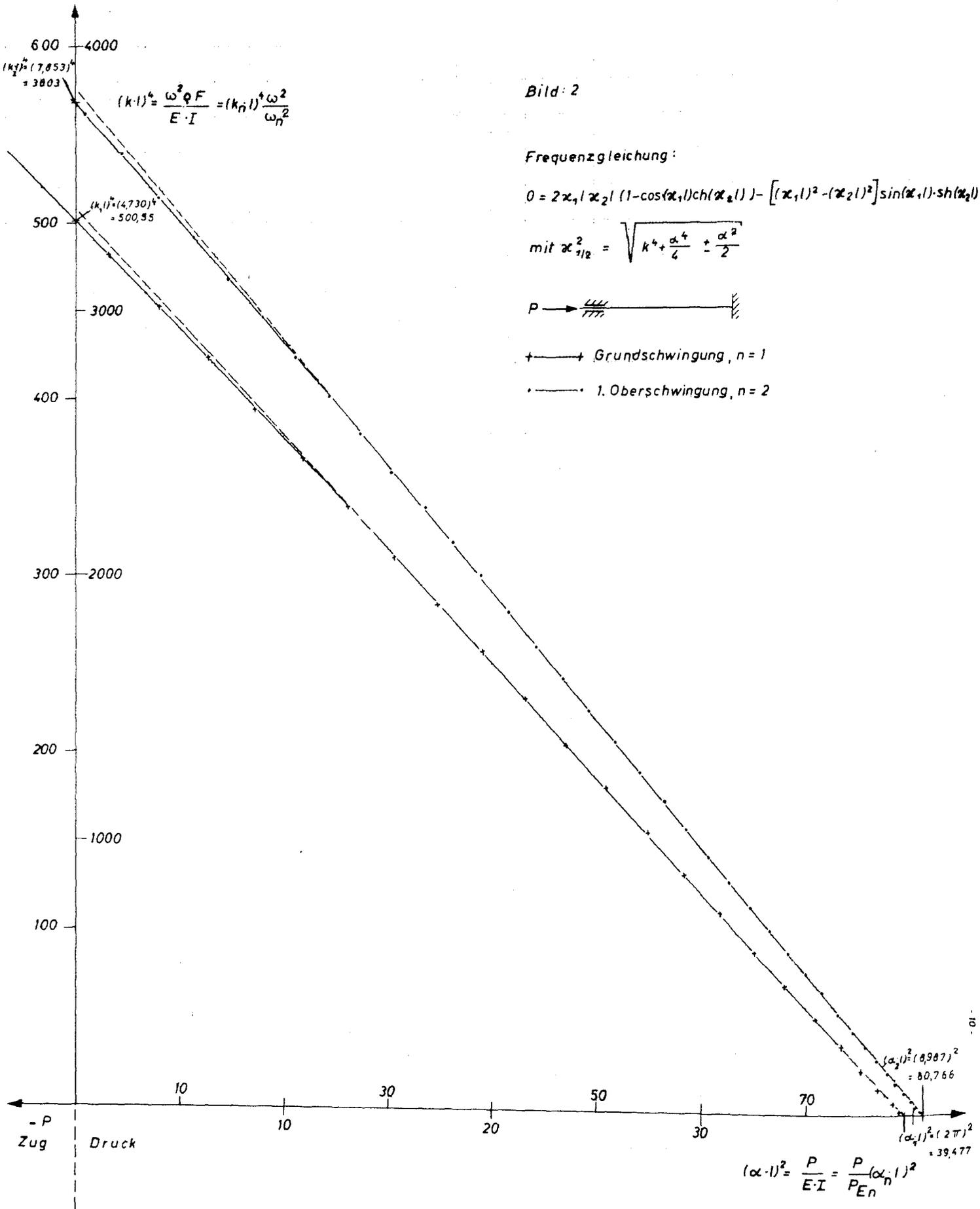


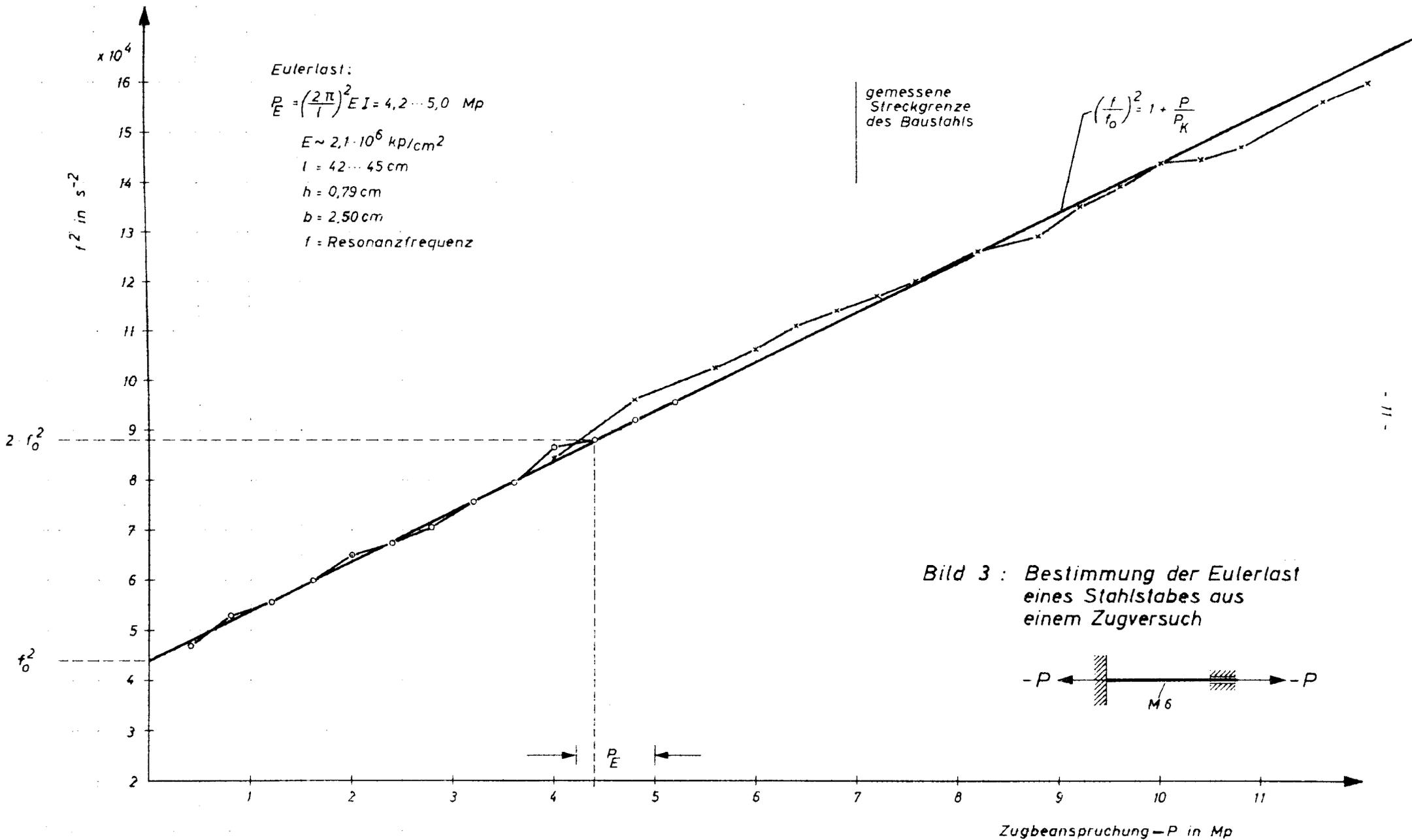
+ — + Grundschiwingung, n = 1

• — • 1. Oberschiwingung, n = 2



$$(\alpha_1)^2 = \frac{P}{E \cdot I} = \frac{P}{P \cdot E n} (\alpha_n \cdot l)^2$$





erfüllt wird. Das ist gleichbedeutend mit den notwendigen Bedingungen:

$$(2.30) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left[EI (\sum a_i y_i)''^2 - P (\sum a_i y_i)'^2 - q F \omega^2 (\sum a_i y_i)^2 \right] dx = 0,$$

die für die Koeffizienten a_i insgesamt i lineare Gleichungen liefern, aus deren Koeffizientendeterminante die Eigenwerte bzw. die Eigenkurven zu berechnen sind. Dieses Gleichungssystem ist somit eine finite Übersetzung der Differentialgleichung (2.5).

Für technische Zwecke ist ein eingliedriger Ritz-Ansatz $\tilde{w}(x) = \alpha y(x)$ ausreichend, besonders, wenn man für $y(x)$ - last-unabhängige-Vergleichsfunktionen ansetzt.

Für die in Abschnitt 2.1 exakt untersuchten Fälle wurden die Eigenkurven auch näherungsweise mit der Energiemethode bestimmt, wobei als Vergleichsfunktionen die exakten Schwingungsformen für die Sonderfälle $\alpha^2 = 0$ bzw. $k^4 = 0$ (Knickfunktion) gewählt wurden. Auf diese Weise erhält man einen Eindruck von der Lastabhängigkeit der Schwingungsform. Die Vergleichsfunktionen und die Rechenergebnisse sind in Tafel 2 zusammengestellt.

Beispiel:

Im Fall c lautet die Knickfunktion:

$$(2.31) \quad y(x) = 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} .$$

Damit erhält man aus Gleichung (2.27)

$$(2.32) \quad \alpha \left[l P_E \left(1 - \frac{P}{P_E} - \frac{3}{16} \left(\frac{4,73}{\pi} \right)^4 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right] = 0$$

mit $P_E = \frac{(2\pi)^2 EI}{l^4}$ und $\omega_0^2 = \frac{(4,73)^4}{l^4} \cdot \frac{EI}{qF}$

oder wegen $\alpha \neq 0$ und $l P_E \neq 0$:

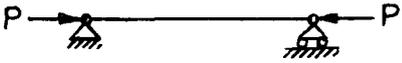
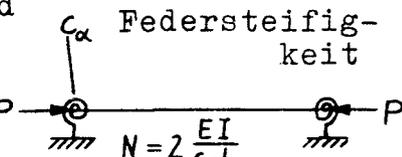
$$(2.33) \quad 1 - q_P \frac{P}{P_E} - q_{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0 .$$

Die Faktoren q_P und q_{ω^2} sind in Tafel 2 angegeben; im vorliegenden Beispiel ist $q_P = 1$ und $q_{\omega^2} = \frac{3}{16} \left(\frac{4,73}{\pi} \right)^4 = 0,9639$.

Tafel 2

Ergebnisse der nach der Energiemethode, Gleichung (2.30),
ermittelten Näherungen für das Frequenz-Last-Gesetz:

$$1 - q_P \frac{P}{E} - q_{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0$$

Fall	Vergleichsfunktion	Ordnung n	q_P	q_{ω^2}
a 	1. Schwingungsform $y(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$ 2. hermitesche Interpolationspolynome achter Ordnung, nach Falk /3/	beliebig 1 2	1 0,99999979 0,99999397	1 0,99999952 0,99993975
b 	1. Knickfunktion $y = \sin 4,4934 \frac{x}{l} - \frac{x}{l} \sin 4,4934$ 2. Schwingungsform $y = \frac{\sin 3,9266 \frac{x}{l}}{\sin 3,9266} - \frac{\text{sh } 3,9266 \frac{x}{l}}{\text{sh } 3,9266}$	1 1	1 0,9778	0,9675 1
c 	1. Knickfunktion $y = 1 - \cos \frac{2\pi x}{l}$ 2. Schwingungsform $y = A \left(\sin 4,73 \frac{x}{l} - \text{sh } 4,73 \frac{x}{l} \right) - B \left(\cos 4,73 \frac{x}{l} - \text{ch } 4,73 \frac{x}{l} \right)$ 3. Biegelinie für konstante Streckenlast $\tilde{w} = a_1 \left[\left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] + a_2 \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \left[\dots \right]$	1 1 1 2	1 0,9704 0,9390 0,8974	0,9639 1 0,9932 0,9604
d 	Biegelinie für konstante Streckenlast $y = \left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \frac{1}{1+N} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^2 + N \left(\frac{x}{l} \right) \right]$ N → ∞: gelenkig - Fall a - N → 0: eingespannt - Fall c -	1	$\frac{(2\pi)^2 (2+9N+51N^2)}{84(1+2N+6N^2)}$	$\frac{(4,73)^4 (1+11N+31N^2)}{504(1+2N+6N^2)}$

Abschließend wird gezeigt, daß aus der Extremalforderung (2.26) durch Anwendung des Variationsprinzips die Differentialgleichung (2.5) folgt.

Stellt man die zulässige Funktion $\tilde{w}(x)$ in folgender Form dar:

$$\tilde{w}(x) = w(x) + \epsilon u(x) ,$$

wobei $w(x)$ die exakte Lösung und $u(x)$ eine beliebig zu variierende Funktion ist, die jedoch die wesentlichen homogenen Randbedingungen $u(0)=u(l)=0$ erfüllt, und ϵ einen freien Parameter bedeutet, dann ergibt sich aus der Forderung (2.29) als notwendige Bedingung

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 ,$$

die auf die folgende Gleichung führt:

$$(2.34) \quad EI \int_0^l (w''(x) u''(x) - \alpha^2 w'(x) u'(x) - k^4 w(x) u(x)) dx = 0 .$$

Durch partielle Integration erhält man aus (2.34):

$$(2.35) \quad \int_0^l u [EI w'''' + P w'' - \omega^2 g F w] dx + u' [EI w''']_0^l = 0 .$$

Da $u(x)$ so zu variieren ist, daß $w(x)$ die Gesamtheit aller zulässigen Funktionen erfaßt, kann die Gleichung (2.35) nur erfüllt werden, wenn jeder der Klammerausdrücke für sich verschwindet. Damit ergibt sich die Differentialgleichung (2.5) sowie restliche Randbedingungen für das Biegemoment /1/.

Ganz allgemein erhält man die Differentialgleichung (2.5), indem man die Eulersche Differentialgleichung

$$(2.36) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F_E}{\partial w''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_E}{\partial w'} \right) + \frac{\partial F_E}{\partial w} = 0 ,$$

die eine notwendige Bedingung dafür darstellt, daß der Ausdruck Π , (2.29), extremal wird, auf den Integranden

$$F_E = EI w''^2 - P w'^2 - \omega^2 g F w^2$$

angewendet /2/.

2.3 Rotationsträgheit und Schub

Es ist bekannt, daß der - bisher vernachlässigte - Schubeinfluß sowohl für die Eigenfrequenz als auch für die kritische Last von Einzelstäben ohne praktische Bedeutung ist, insbesondere bei schlanken knickgefährdeten Bauteilen. Das gleiche gilt in noch stärkerem Maße für die Rotationsträgheit der Stabquerschnitte. Trotzdem soll im folgenden am Beispiel des gelenkig gelagerten Stabes gezeigt werden, welchen Einfluß beide Größen auf das Last-Frequenz-Gesetz haben.

Anstelle der Differentialgleichung (2.2) erhält man /4/5/:

$$(2.37) \quad EI \left(1 - \frac{P}{rFG} \right) v'''' + P v'' - g I \left(1 + \frac{E}{rG} \right) \ddot{v}'' + g F \dot{v} + \frac{g^2 I}{rG} \ddot{v} = 0 .$$

Hierbei ist durch die Glieder mit dem Schubmodul G der Schubeinfluß berücksichtigt; r ist ein von der Querschnittsform abhängiger Faktor, der für Rechteckquerschnitte ca. 0,89 beträgt. Das zusätzliche Trägheitsglied ist durch Unterstreichung herausgehoben.

Für zeitlich harmonische Beanspruchung ergibt sich mit dem die Randbedingungen befriedigenden Ansatz $v(x,t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \sin \pi \frac{x}{l}$ unmittelbar die Gleichung der Eigenkurve:

$$(2.38) \quad 1 - \left(1 + \xi \frac{\pi^2}{\lambda^2} \right) \frac{P}{P_E} - \left(1 + (1 + \xi) \frac{\pi^2}{\lambda^2} \right) \frac{\omega^2}{\omega_{00}^2} + \frac{\pi^4}{\lambda^4} \frac{\omega^4}{\omega_{00}^4} \xi = 0 .$$

Hierbei wurden zur Abkürzung die Eigenkreisfrequenz ω_{00} und die Eulerlast P_E , gemäß (2.16) bzw. (2.17), sowie die Schlankheit des Stabes

$$(2.39) \quad \lambda = \frac{l}{i} = \frac{l}{\sqrt{I_F}} \quad \begin{array}{l} i \text{ Trägheitsradius} \\ \xi = \frac{1}{r} \frac{E}{G} = \frac{2}{r} (1 + \mu) \end{array}$$

verwendet. Rotationsträgheit und Schub führen zu einer nur geringfügigen Beeinflussung der Eigenkreisfrequenz, $\frac{\pi^4}{\lambda^4} \frac{\omega_{00}^4}{\omega_{00}^4} \xi \approx 0$:

$$(2.40) \quad \omega_o^2 = \omega_{00}^2 \left(1 + (1 + \xi) \frac{\pi^2}{\lambda^2} \right)^{-1}$$

und der Eulerlast

$$(2.41) \quad P_K = P_E \left(1 + \xi \frac{\pi^2}{\lambda^2} \right)^{-1},$$

wie man leicht aus (2.38) für $P \rightarrow 0$ bzw. $\omega \rightarrow 0$ ersehen kann. Mit (2.40) und (2.41) kann deshalb die Gleichung der Eigenkurve näherungsweise auf die bekannte Form

$$(2.42) \quad 1 - \frac{P}{P_K} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0$$

gebracht werden.

2.4 Schlußfolgerungen für die technische Anwendung

Bei einer experimentellen Bestimmung der Eulerlast wird man bestrebt sein, unmittelbar den linearen Zusammenhang zwischen Quadrat der Eigenfrequenz und Belastung auszunutzen, der allerdings nur dann erwartet werden kann, wenn die im Rahmen dieser Arbeit gefundenen Voraussetzungen erfüllt sind. Bei gegebener Linearität bestehen keine Schwierigkeiten: Die Bestimmung der kritischen Last kann theoretisch durch Messung der Frequenzen bei nur zwei Laststufen P_1, P_2 erfolgen, die zur Erzielung einer größeren Genauigkeit möglichst unterschiedlich sein sollten.

Im allgemeinen darf man jedoch nicht davon ausgehen, daß die notwendigen technischen Einrichtungen für einen größeren Lastbereich, $0 < P < P_E$, zur Verfügung stehen. Außerdem ist es möglich, daß sich bei der Belastung keine meßbare Frequenzänderung ergibt, z. B. für $P \ll P_E$, oder daß überhaupt keine Belastung des Tragwerkes erfolgen kann, z. B. aus Gründen der Unzugänglichkeit. Auch in diesen Fällen erhält man u. U. durch Messungen der Eigenfrequenz Aufschluß über die Knicklast.

Ist die Belastung nur gering, dann kann die gemessene Frequenz, $f \approx f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ näherungsweise als die Frequenz des unbelasteten Systems angesehen werden. Dann aber ist eine Abschätzung der Eulerlast direkt durch die Verknüpfung von ω_0^2 und P_E möglich. Beispielsweise gilt für die praktisch interessierenden Lagerungsfälle mit transversal unverschieblichen Enden:

1. Fall a:

zweiseitig gelenkig

$$P_E = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EI}{\rho F}$$

2. Fall b:

einseitig eingespannt,
anderes Ende gelenkig

$$P_E = 2,05 \frac{EI}{l^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{(3,927)^4}{l^4} \frac{EI}{\rho F}$$

3. Fall c:

zweiseitig eingespannt

$$P_E = (2\pi)^2 \frac{EI}{l^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{(4,73)^4}{l^4} \frac{EI}{\rho F}$$

Durch Elimination der Biegesteifigkeit, deren Ermittlung unsicherer ist als die der Masse, erhält man den Ausdruck:

$$(2.46) \quad P_E = \frac{(\alpha l)^2}{(kl)^2} \rho F l^2 \omega_0^2 = q M_0 l \omega_0^2,$$

$$\text{mit } 0,0785 \leq q \leq 0,101 \quad ,$$

Das wesentliche Merkmal dieser Gleichung ist die relativ geringe Abhängigkeit von den Randbedingungen, die hiernach nur etwa 22 % beträgt. Als auf der sicheren Seite liegende Näherung kann deshalb die folgende "Faustformel" angesehen werden:

$$(2.47) \quad P_E \approx 0,3 M_0 l f_0^2$$

Euler- last P_E	Masse M_0	System- länge l	Quadrat der Frequenz f_0^2
kp	kg	m	s ⁻²

Knickprobleme treten nur bei schlanken Bauteilen auf, $\lambda > 100$, deren bautechnisch interessante Eigenfrequenzen etwa zwischen 5 und 15 Hz liegen.

In diesem Frequenzbereich bestehen häufig Schwierigkeiten sowohl hinsichtlich einer sauberen Anregung als auch bei der Analyse der gemessenen Schwingungen. Deshalb interessiert die Frage, inwieweit es möglich ist, aus den wesentlich einfacher zu erzeugenden und zu analysierenden Oberschwingungen auf die Knicklast zu schließen. Aus Gleichung (2.15) folgt, daß bei gelenkiger Lagerung auch für alle Oberschwingungen gilt:

$$\omega^2 = (n\pi)^4 \frac{EI}{8Fl^4} \left(1 - \frac{Pl^2}{(n\pi)^2 EI} \right) = \omega_n^2 \left(1 - \frac{P}{P_{En}} \right) .$$

Es sind also Eigenfrequenzen und Knicklasten gleicher Ordnung miteinander verkoppelt; das heißt, daß bei der ersten Eulerlast ausschließlich die Eigenfrequenz der Grundschwingung verschwindet, nicht die der Oberschwingungen. Anderenfalls wäre eine größere Lastabhängigkeit der Oberschwingungen vorhanden und damit eine genauere Bestimmung der kritischen Last möglich.

Da man bei gleichen Randbedingungen im allgemeinen etwa die Systemmitte zur Erzeugung der Schwingungen wählen wird, interessiert die dritte Harmonische mit $n = 3$ am meisten. Bei $P = P_{E1}$ folgt für $n = 3$ aus obiger Gleichung $\omega^2 = 0,89 \omega_3^2$.

Die Frequenzabnahme im baupraktisch interessanten Bereich $P \leq P_E$ ist also recht gering und erscheint deshalb für die Bestimmung der kritischen Last aus der Geraden $\omega_3^2 (P_{E3})$ ungeeignet. Für andere Randbedingungen als die gelenkige Lagerung ist außerdem das Linearitätsgesetz noch nicht bewiesen.

Im Fall gelenkig gelagerter Stützen bzw. Stäbe besteht allerdings die Möglichkeit, mit Hilfe der Eigenfrequenzen von Harmonischen unterschiedlicher Ordnung die unterste Eulerlast abzuschätzen. Aus Gleichung (2.18) berechnet man leicht den Ausdruck:

$$(2.48) \quad P_E = P_0 \frac{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - n^2}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - n^4} = P_0 \frac{\frac{f_3^2}{f_1^2} - 9}{\frac{f_3^2}{f_1^2} - 81} .$$

Dieser Weg bietet zudem den Vorteil, daß das Tragwerk mit einer beliebigen, jedoch bekannten Vorlast P_0 beaufschlagt sein darf und eine Zusatzbelastung nicht erforderlich ist.

Abschließend soll die Lastabhängigkeit der Randbedingungen behandelt werden, die zu einem nichtlinearen $k^4 (\alpha^2) \triangleq \omega^2 (P)$ -Gesetz führt. Hierzu wurde ein Übergang zwischen Gelenklagerung und Einspannung näherungsweise untersucht.

Prinzipiell kann man dieses Problem mit der Differentialgleichung (2.5) exakt behandeln, beispielsweise indem man die allgemeine Lösung den Randbedingungen für eine elastische Lagerung anpaßt (Fall d). Dabei ist die Federkonstante der Einspannung c_α (P) eine Funktion der Belastung.



$$\begin{aligned} w(l) &= 0 \\ w'(l) &= \frac{EI}{c_\alpha} w''(l) \\ w(0) &= 0 \\ w'(0) &= -\frac{EI}{c_\alpha} w''(0) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{EI}{c_\alpha} w''(l) \\ EI w''(l) \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ x & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ x & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{EI}{c_\alpha} w'' \\ EI w'' \\ x \end{pmatrix}$$

Frequenzgleichung:

$$A_{14} \left[\frac{1}{c_\alpha^2} \frac{A_{32}}{1} - \frac{1}{c_\alpha} (A_{22} + A_{33}) + A_{23} \right] - \left(A_{24} - \frac{A_{34}}{c_\alpha} \right) \left(-\frac{A_{12}}{c_\alpha} + A_{13} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} (2.49) \left(\frac{c_\alpha}{EI} \right)^2 & \left[2 \alpha_1 l \alpha_2 l (\cos \alpha_1 l \operatorname{ch} \alpha_2 l - 1) + (\alpha_1^2 l^2 - \alpha_2^2 l^2) \sin \alpha_1 l \operatorname{sh} \alpha_2 l \right] \\ & + 2 \frac{c_\alpha}{EI} (\alpha_1^2 l^2 + \alpha_2^2 l^2) \left[\alpha_2 l \sin \alpha_1 l \operatorname{ch} \alpha_2 l - \alpha_1 l \cos \alpha_1 l \operatorname{sh} \alpha_2 l \right] \\ & - (\alpha_1^2 l^2 + \alpha_2^2 l^2)^2 \sin \alpha_1 l \operatorname{sh} \alpha_2 l = 0. \end{aligned}$$

Die numerische Berechnung der Eigenkurven $k^4(\alpha^2, c_\alpha)$ für diverse Parameter c_α bereitet mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Auch bei bekannter Lösung ist man aber nicht der Mühe enthoben, für die Lastabhängigkeit der Einspannkonstanten einen quantitativen Ansatz zu machen, wenn man ein spezielles Frequenz-Last-Gesetz für lastabhängige Randbedingungen aufsuchen will.

Deshalb wurde diese Frage, deren Lösung im Hinblick auf die Auswertung der Meßergebnisse interessiert, mit der Energiemethode behandelt, wobei als Vergleichsfunktion die Biegelinie für konstante Streckenlast

$$(2.50) \quad y(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{1+N} \left(\left(\frac{x}{l}\right)^2 + N \left(\frac{x}{l}\right) \right)$$

mit der Abkürzung $N = 2 \frac{EI}{c_\alpha l}$ gewählt wurde; für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich gelenkige Lagerung und für $N \rightarrow 0$ feste Einspannung. Die Näherung für die Eigenkurve, die das technisch interessante Frequenz-Last-Gesetz beinhaltet, wurde bereits in Tafel 2 mit angegeben:

$$\frac{\omega^2}{\omega_N^2} = \frac{1}{9\omega^2} \left(1 - 9\psi \frac{P}{P_E} \right)$$

oder ausführlich, wenn ω_N und P_E auf den Fall der gelenkigen Lagerung bezogen werden:

$$(2.51) \quad \frac{\omega}{\omega_N^2} = 31 \frac{\frac{1}{6} - \frac{2}{51} \frac{P}{P_E} + N \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{17} \frac{P}{P_E} \right) + N^2 \left(1 - \frac{P}{P_E} \right)}{1 + 11N + 31N^2} .$$

Hinsichtlich der Lastabhängigkeit der Einspannung wurde zunächst angenommen, daß diese der Belastung proportional sei:

$$(2.52) \quad c_\alpha \sim P \rightarrow \frac{1}{N} \sim \frac{P_E l}{2EI} \cdot \frac{P}{P_E} \rightarrow \frac{1}{N} = \psi \frac{P}{P_E} .$$

Dieser Ansatz beruht auf der Überlegung, daß die axialgerichtete Kraft nicht nur in zunehmendem Maße das seitliche Ausweichen der Stützen verhindert, sondern daß infolge der nicht infinitesimalen Lagerabmessungen auch Zwängungsmomente auftreten, die mit zunehmender Belastung eine Verdrehung der Stützenenden erschweren. Der Einspann-Beiwert $\psi = \frac{P_E}{P_0}$ hängt demzufolge von den Lagerabmessungen ab und muß experimentell ermittelt werden.

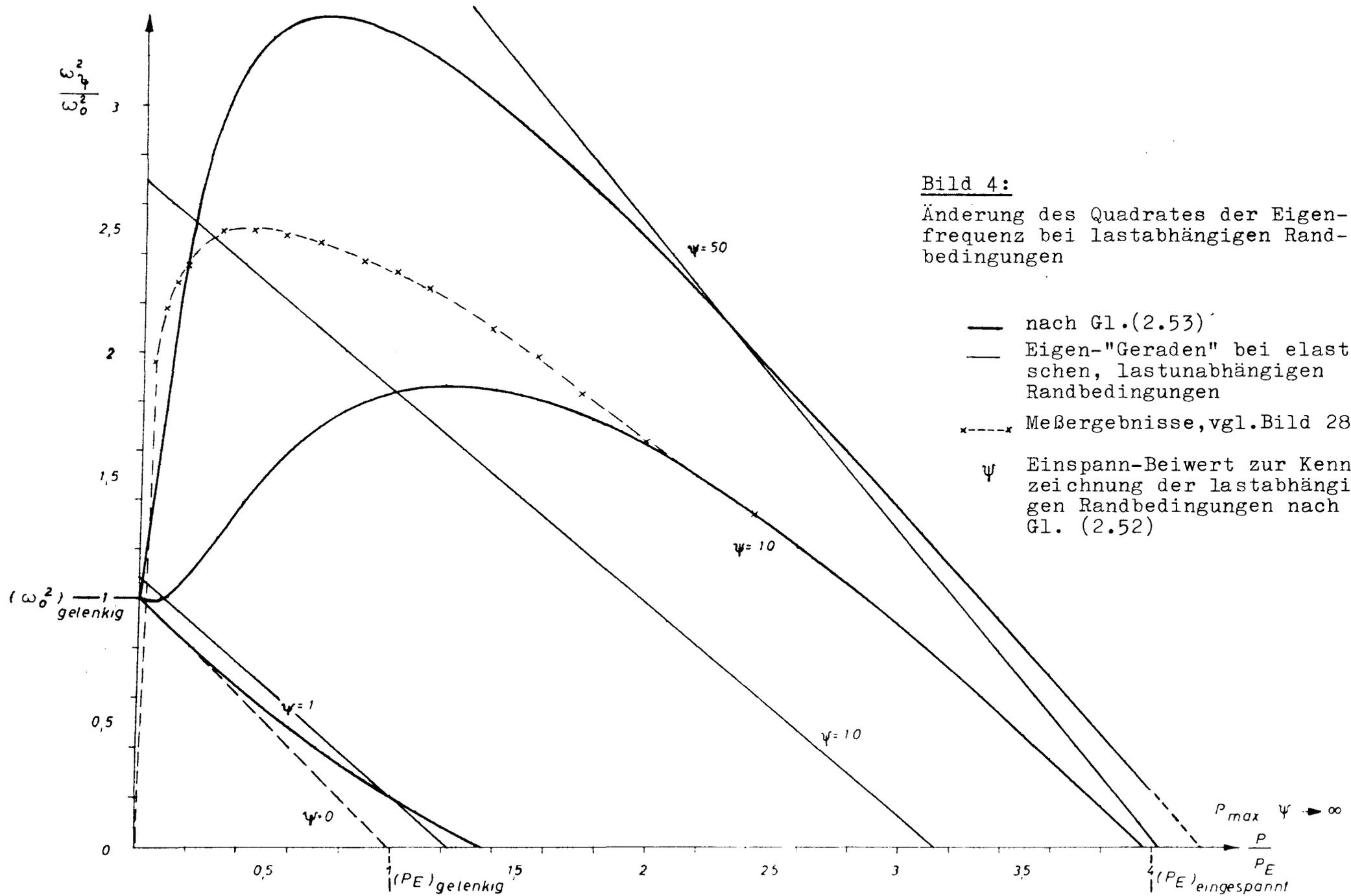
Führt man (2.52) in (2.51) ein, so erhält man eine Näherung für die Eigenkurven bei lastabhängigen Randbedingungen:

$$(2.53) \quad \frac{\omega_\psi^2}{\omega_0^2} = 31 \frac{\psi^2 \left(\frac{P}{P_E} \right)^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{51} \frac{P}{P_E} \right) + \psi \left(\frac{P}{P_E} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{17} \frac{P}{P_E} \right) + 1 - \frac{P}{P_E}}{\psi^2 \left(\frac{P}{P_E} \right)^2 + \psi 11 \frac{P}{P_E} + 31} .$$

Diese Gleichung ist für $\Psi = 1, 10$ und 50 in Bild 4 aufgetragen. Für nahezu gelenkige Lagerung mit nur geringem Einspanneffekt erhält man einen konkav und für nicht ganz starre Einspannung einen konvex gekrümmten Frequenzverlauf, wie der auch von Lurie /6/ am Fachwerk beobachtet wurde. Das Maximum der jeweiligen Kurven liegt offenbar umso näher an $P = 0$, je lastempfindlicher die Einspannung ist.

Unter der Annahme, daß die Linearität zwischen ω^2 und P bei beliebiger, jedoch lastunabhängiger Einspannelastizität c_α gilt, können die zu den jeweiligen Werten Ψ gehörenden Eigenwerte $(kl)_\Psi^4 = \omega_\Psi^2 \frac{qFl^4}{EI}$ und $(\alpha l)_\Psi^2 = P_\Psi \frac{L^2}{EI}$ ebenfalls durch Eigengeraden verbunden werden, vgl. Bild 4.

Es sei abschließend noch erwähnt, daß diese Betrachtung im Zusammenhang mit der in dieser Arbeit verfolgten Problemstellung nur für Werte $\Psi < 1$, also kleine Abweichungen von der Gelenklagerung, und für einige spezielle Fälle mit nahezu starrer Einspannung $\Psi \rightarrow \infty$ interessiert. Eine tatsächlich lastproportionale Einspannung über einen derart großen Lastbereich, $0 < P < P_E$, dürfte in der Praxis kaum anzutreffen sein. Aufgrund der Meßergebnisse, vgl. Abschn. 8.2, kann angenommen werden, daß der versuchsweise Ansatz $c_\alpha \sim P$ den Einspanneffekt überbewertet und mit $c_\alpha \sim \sqrt{P}$ eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch zu erzielen ist.



2.5 Erzeugung und Messung von erzwungenen und Eigenschwingungen

Bisher wurden ausschließlich freie Schwingungen betrachtet. Zur dynamischen Prüfung der kritischen Last müssen die Schwingungen jedoch in irgendeiner Weise angeregt werden. Zwar interessieren für das hier behandelte Problem vorwiegend die Grunschwingungsformen, aber auch die alleinige Anregung dieser Schwingungen kann theoretisch mit Schwierigkeiten verbunden sein.

Die gebräuchlichsten Arten der Schwingungserregung sind die Stoßanregung und die Anregung mit periodischen Signalen, vorwiegend mit harmonischen Schwingungen. Bei der Stoßanregung werden bekanntlich alle Eigenschwingungen, deren Schwingungsformen an der Stoßstelle einen Schwingungsbauch besitzen, angefacht. Da kein stationärer Zustand entsteht, müssen die Schwingungen mit schnellaufenden Registriergeräten aufgezeichnet werden, was zu zeitraubenden Auswertungsarbeiten führt und noch andere Nachteile mit sich bringt.

Aber auch bei harmonischer Anregung mit einer Einzelkraft $Q = Q_0 \sin \omega t$ an der Stelle $x = x_0$ setzt sich die Gesamt-Schwingungsform aus allen Schwingungseigenformen zusammen, die bei x_0 keinen Schwingungsknoten besitzen; vgl. hierzu die Arbeit von Hübner und Lübcke /31/. Bei gelenkiger Lagerung gilt z. B. im eingeschwungenen Zustand, $\frac{\omega}{\omega_0} \neq n^4$, für den Momentanwert

$$(2.54) \quad v(x,t) = \frac{2Q_0 l^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi x_0}{l} \sin n \frac{\pi x}{l}}{n^4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin \omega t,$$

bzw. für $x_0 = \frac{l}{2}$

$$(2.55) \quad v(x,t) = w \left(\frac{l}{2} \right) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sin n \frac{\pi x}{l}}{n^4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)} \sin \omega t.$$

Allerdings verhalten sich die Amplituden bei gleicher Verstimmung $\frac{\omega}{\omega_n} = 1 + \eta$; $\eta \ll 1$ gegen die jeweiligen Resonanzfrequenzen ω_n wie $n^4 : (n+2)^4$; man erhält z. B. bei Anregung in der Nähe der niedrigsten Eigenfrequenz $\omega \approx \omega_1$:

$$(2.56) \quad v(x,t) = w \left(\frac{l}{2} \right) \left\{ \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{-2\eta} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{80-2\eta} + \dots \right\} \sin \omega_1 t.$$

In hinreichender Resonanznähe, d. h. $\eta \approx 0$, wird das erste Glied wesentlich größer als alle anderen und die gewünschte Eigenschwingungsform nahezu unverfälscht gemessen. Eine exakte Anregung einer Eigenschwingungsform ist jedoch nur möglich, wenn Belastungsfunktion $Q(x, t_0)$ und Schwingungsform identisch sind. Diese Forderung ist technisch kaum zu erfüllen und für normale Anwendungsfälle überspitzt.

Gleiche Verhältnisse gelten bei hinreichend kleiner Dämpfung auch für gedämpfte Schwingungs-Systeme. Die Dämpfung bewirkt das Abklingen der freien Schwingungen und die endliche Resonanzüberhöhung der erzwungenen Schwingungen. Sie kann verschiedene Ursachen haben. Üblicherweise ist für die Berücksichtigung der Dämpfung ein geschwindigkeitsproportionaler Ansatz für die Dämpfungskraft geeignet, der zwar nicht durch die physikalischen Ursachen der Dämpfung begründet ist, jedoch eine einfache mathematische Behandlung erlaubt und für schwach gedämpfte, lineare Systeme im allgemeinen gut mit Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Die Messungen ergaben für die Dämpfung einen Verlustfaktor $d \leq 0,05$. Damit ist nicht nur die Anregung einer sauberen Grundswingungsform durch eine sinusförmige Einzellast in Systemmitte gewährleistet, sondern auch der Unterschied zwischen der Resonanzfrequenz $f_R^2 = f_\infty^2 \left(1 - \frac{d^2}{2}\right)$ und der Eigenfrequenz $f_0^2 = f_\infty^2 \left(1 - \frac{d^2}{4}\right)$ einer gedämpften Schwingung geringer als 1 % und somit vernachlässigbar. Eine geringe Dämpfung ist fernerhin auch erforderlich, um einer bestimmten Frequenz das Resonanzmaximum zuzuordnen zu können, sofern anstelle der Schwingungsamplitude der Verschiebung (Schwingweg) die der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung gemessen werden.

Unter diesen Gesichtspunkten gewinnt man die Lösung $v(x, t, P)$ der Grundswingungsform aus der erweiterten Differentialgleichung

$$(2.57) \quad EI v'''' + Pv'' + r\dot{v} + gF\ddot{v} = Q(x, t)$$

für den Fall gelenkiger Lagerung wie folgt:

Die anregende Kraft $Q(x,t)$ wird als Fourierreihe dargestellt:

$$(2.58) \quad Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} ,$$

wobei für eine harmonisch veränderliche Einzellast $Q(x_0,t) = Q_0 \sin \omega t$ für die Koeffizienten $B_n(t)$ gilt:

$$(2.59) \quad B_n = \frac{2Q_0}{l} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \omega t .$$

Danach wird die Differentialgleichung durch den Ansatz

$$(2.60) \quad v(x,t) = \phi_n(t) \cdot w(x) = \phi_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

für jedes Reihenglied getrennt gelöst. Man erhält für die Grundswingungsform, $n = 1$; $x_0 = \frac{l}{2}$:

$$(2.61) \quad \left(\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2 P}{l^2} \right) \phi_1 + r \dot{\phi}_1 + g F \ddot{\phi}_1 = \frac{2Q_0}{l} \sin \omega t .$$

Das ist die Schwingungsgleichung für einen Schwinger mit einem Freiheitsgrad und hat für die stationäre Schwingung die Lösung

$$(2.62) \quad \phi_1(t) = \frac{2Q_0}{M_0} \frac{\sin(\omega t + \psi_1)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

mit

$$(2.63) \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EI}{gF} - \frac{\pi^2 P}{l^2 gF} = \omega_{00}^2 \left(1 - \frac{P}{P_E} \right) \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{r}{2gF} .$$

Die Abklingkonstante α bestimmt man aus den freien abklingenden Schwingungen, in dem entweder die Abklingzeit $T = \frac{3 \ln 10}{\alpha}$ oder das log. Dekrement $\Lambda \approx 2\pi \frac{\alpha}{\omega_0}$ gemessen wird.

Im Resonanzfall gilt bei kleiner Dämpfung für die Phase $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ und für die Amplitude des Schwingweges

$$(2.64) \quad \phi_{10} = \frac{2Q_0}{M_0} \frac{1}{2\alpha\omega_0} = \frac{2Q_0}{d M_0 \omega_0^2} = 2 \frac{Q_0}{M_0 d} \frac{1}{\omega_{00}^2 \left(1 - \frac{P}{P_E} \right)} .$$

Es sei nur kurz erwähnt, daß aus Gleichung (2.64) für $P \rightarrow 0$ folgt: $\phi_{10} = \frac{w(1/2)}{d}$, d. h. der Verlustfaktor d ist der Kehrwert des häufig zur Beschreibung der Resonanzüberhöhung verwendeten dynamischen Beiwerts. Mit den obigen Beziehungen erhält man

$$(2.65) \quad d = \frac{2,2}{f_0 \cdot T} \approx \frac{\Lambda}{\pi} .$$

Bei lastunabhängiger Abklingkonstante gilt

$$(2.66) \quad d = \frac{d_0}{\sqrt{1 - \frac{P}{P_E}}} .$$

Mit zunehmender Belastung sollte sich also ein durch die Last bedingter, nicht vom Material herrührender Anstieg des Verlustfaktors bzw. des log. Dekrements zeigen.

Analog berechnet man für die Beschleunigungsamplitude bei Resonanz

$$(2.67) \quad a = \frac{2Q_0}{dM_0} = \omega_0^2 \phi_{10} .$$

Diese Größe ist besonders wichtig, da Schwingungsmeßgeräte, die eine ^{der} Schwingbeschleunigung proportionale elektrische Spannung abgeben, sehr verbreitet sind.

Die vollständige Gesamtlösung von (2.57), die aus den erörterten Gründen hier nicht interessiert, ist die Summe der Partikulärlösungen aller Schwingungsformen und der zugehörigen, von den Anfangsbedingungen abhängenden Lösungen der homogenen Gleichungen. Werden andere Randbedingungen als die einer gelenkigen Lagerung betrachtet, so ist eine allgemeine Lösung schwieriger, jedoch besteht für den Fall der Resonanz immer die Möglichkeit, ein Schwingungsgebilde - mit geringer Dämpfung - durch ein System mit einem Freiheitsgrad anzunähern.

3. Ergebnisse des Literaturstudiums

Die Differentialgleichung (2.5) für den axial belasteten, schwingenden Stab und auch die Eigenkurve für gelenkige Lagerung (2.18) werden in einer Reihe von Veröffentlichungen angegeben oder abgeleitet. Aber nur wenige Autoren äußerten die Meinung, daß der bekannte Zusammenhang zwischen Frequenz und Belastung zugleich ein technisch interessantes Verfahren zur experimentellen Bestimmung der Knicksicherheit sein könnte. Insofern verwundert es nicht, daß Untersuchungen, wie sie in der vorliegenden Arbeit beschrieben werden, bisher nicht bekannt geworden sind.

Verfasser von Arbeiten, die sich mit dem Frequenz-Last-Gesetz beschäftigten und eine technische Anwendbarkeit vermuten, sind Hohenemser-Prager /7/, Schleicher /8/, Kolousek /9/10/, Dulácska /11/ und Lurie /6/. Im allgemeinen wird angenommen, daß die Frequenzmessung bei nur wenigen Laststufen als ein Verfahren zur Bestimmung der Knicksicherheit von Stäben und Stabwerken /6/7/8/9/ unter beliebigen Lagerungsbedingungen und bei beliebigem Steifigkeitsverlauf sowie als ein Verfahren zur Abschätzung der Beulsicherheit bzw. -last von Platten und Schalen /6/11/ anzusehen ist. Einschränkend wird auf die Gültigkeit dieser Zusammenhänge nur für den elastischen Bereich hingewiesen.

Durch theoretische Arbeiten von Chwalla /12/ und Heilig /13/ ist bekannt, daß bei Stäben mit steigender Belastung nicht nur eine Abnahme der Biegeeigenfrequenzen erfolgt, sondern daß sich auch die Eigenfrequenz der Torsionsschwingungen entsprechend Gleichung (2.18) vermindert. Ferner haben Stüssi /14/ und Federhofer /15/ mit Näherungsverfahren die Eigen-"Geraden" auch für die antimetrischen und symmetrischen Grundschwingungen von Zwei- und Dreigelenkbogen bzw. eingespannte Bogen berechnet.

Kolousek /9/ hat für einen dreistöckigen Rahmen die Knicksicherheit und die Eigenfrequenz mit und ohne Belastung gerechnet und danach durch Anwendung von Gleichung (2.18) die Knicksicherheit abgeschätzt und mit der berechneten verglichen. Bei dem gewählten Beispiel ergab sich zwischen den beiden Werten eine Abweichung von nur 15 %.

Sofern angenommen wird, daß die Eigenkurven für Stäbe bei beliebigen Randbedingungen Geraden sind /6/, /10/, wird unter Verwendung der Energiemethode - sinngemäß - wie folgt argumentiert:

Mit einem eingliedrigen Ritz-Ansatz (2.28) folgt aus der Extremalforderung (2.29) als finite Übersetzung die algebraische Gleichung:

$$(3.1) \quad \alpha \left[EI \int_0^l y''^2 dx \left(1 - \frac{\int_0^l y'^2 dx}{\int_0^l y^2 dx} \frac{P}{EI} - \frac{gF\omega^2}{EI} \frac{\int_0^l y^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx} \right) \right] = 0,$$

mit den Konstanten:

$$\int_0^l y''^2 dx, \quad \int_0^l y'^2 dx, \quad \int_0^l y^2 dx.$$

Führt man die bereits früher verwendeten Abkürzungen

$$(3.2) \quad q_P \Big|_{\omega^2=0} = \frac{P}{P_K} = \frac{\int_0^l y'^2 dx}{\int_0^l y^2 dx} \frac{P}{EI} \quad q_{\omega^2} \Big|_{P=0} = \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}_0^2} = \frac{\int_0^l y^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx} \frac{gF}{EI} \omega_0^2$$

in (3.1) ein, erhält man:

$$(3.3) \quad 1 - q_P \frac{P}{P_K} - q_{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{P}{P_K} - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_0^2} = 0,$$

also näherungsweise immer Eigen-"Geraden". Die Brauchbarkeit der Näherung kann anhand der Abweichungen zwischen den exakten Werten für P_K bzw. ω_0^2 und den nach (3.1) ermittelten, \tilde{P}_K bzw. $\tilde{\omega}_0^2$, beurteilt werden.

Experimentelle Modelluntersuchungen zur Bestätigung der Ableitungen von Stüssi über die Knicksicherheit und die Grundschwingungszahl vollwandiger Bogen wurden von Kollbrunner /16/17/ durchgeführt. Aufgrund der guten Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch wird gefolgert, daß eine rechnerische Vorherbestimmung sowohl der Eigenfrequenz als auch der Knicklast von Bogenträgern zuverlässig möglich ist. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß die Materialkennwerte und Randbedingungen bekannt sind bzw. den Voraussetzungen entsprechen.

Die Schlußfolgerung, daß auch aus der experimentell bestimmten Grundschwingungszahl eine Vorhersage der Knicklast erfolgen kann, wurde von Kollbrunner nicht gezogen.

Eine teilweise Wiedergabe des Meßmaterials erfolgt auf Bild 5. Die Prüfung des linearen Zusammenhanges zwischen Last und Quadrat der Eigenfrequenz wurde durch Berücksichtigung der mit-schwingenden Prüfmasse nachvollzogen. Die Linearität ist als sehr gut zu bezeichnen, wobei allerdings nicht unerwähnt bleiben darf, daß Anfangsverformungen durch Zusatzmassen ausgeglichen und damit eine wesentliche Fehlerquelle beseitigt wurde.

Kollbrunner hat die Frequenz seiner sehr tief abgestimmten Bögen mit der Stoppuhr gemessen und die freien Schwingungen beim einfachen Bogenträger durch eine horizontale Anfangsauslenkung im Viertelpunkt erzeugt.

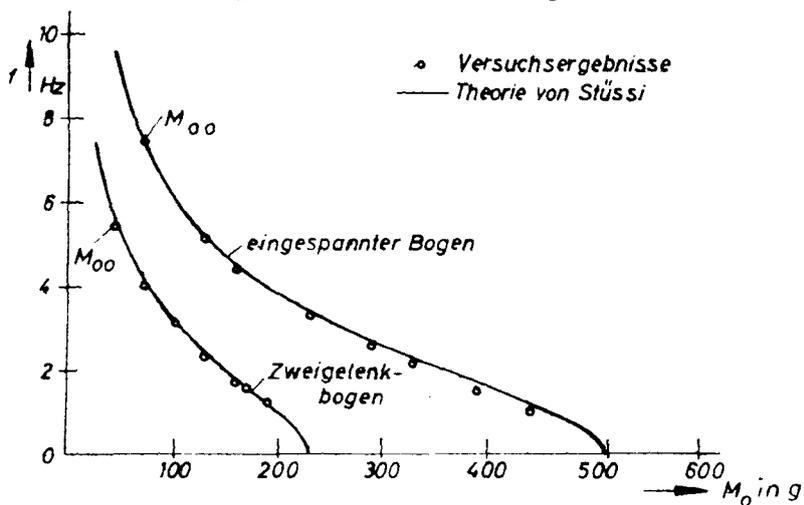
Abschließend sollen noch die Versuche von Lurie /6/ besprochen werden, die dem Verfasser nach Abschluß der hier vorgelegten Messungen bekannt wurden. Lurie hat an Rahmen- und Fachwerkmodellen Schwingungsuntersuchungen durchgeführt, um die kritische Last zu bestimmen. Die theoretischen Ausführungen von Lurie bringen keine neuen Gesichtspunkte. Die Ableitung des linearen Zusammenhanges zwischen kritischer Last und dem Quadrat der Eigenfrequenz für Platten beruht - wie auch bei Dulácska - auf der entsprechenden Differentialgleichung und deren Lösung für den allseitig unterstützten Rand, ist also nicht allgemeingültig.

Die Untersuchungen der Fachwerke mit biegesteifen Knoten wurden durchgeführt, um den infolge der Änderung der Endeinspannung mit zunehmender Belastung zu erwartenden nichtlinearen Verlauf zwischen ω^2 und P nachzuweisen. Auch in der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß lastabhängige Randbedingungen zu einer derartigen Frequenzabhängigkeit führen können.

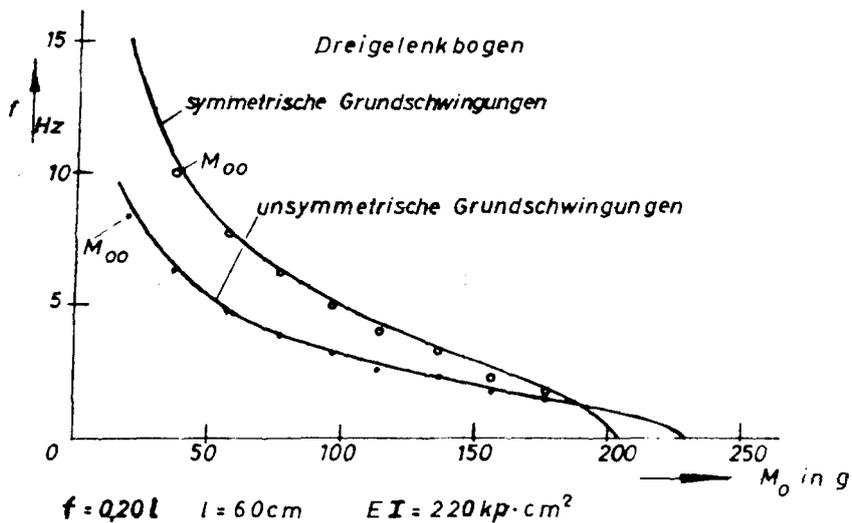
Lurie verwendete zur Erzeugung der fremderregten Schwingungen ein elektromagnetisches bzw. elektrodynamisches Anregungssystem und zur Messung der Frequenz sowie der Schwingungsform Dehnungsmeßstreifen.

Die an den Rahmen und Fachwerken erzielten Ergebnisse sind in Bild 6 wiedergegeben. Auf die Abweichung von der Linearität bei Kurve "A-1" wird besonders hingewiesen.

Belastung durch mitschwingende Massen



$f = 0,20 \cdot l$ $l = 60 \text{ cm}$ $E I = 220 \text{ kp} \cdot \text{cm}^2$



$f = 0,20 l$ $l = 60 \text{ cm}$ $E I = 220 \text{ kp} \cdot \text{cm}^2$

Belastung durch Kräfte

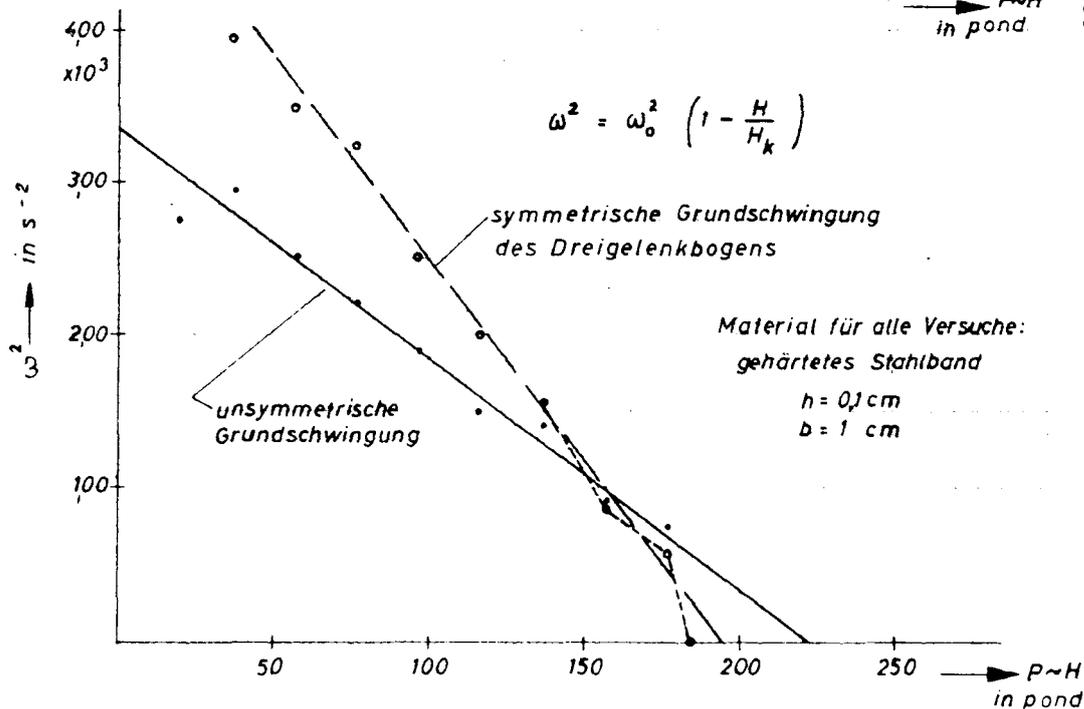
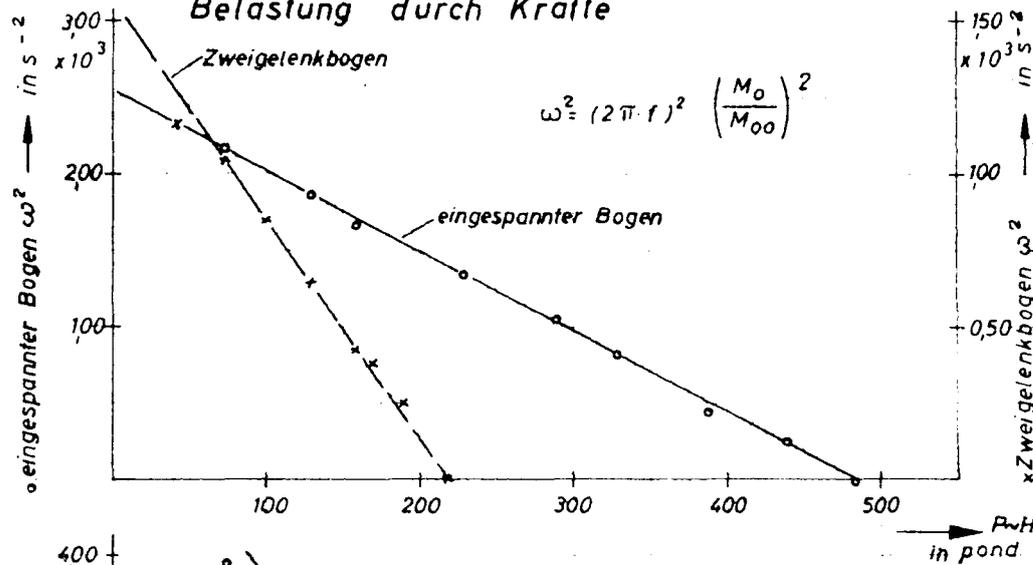
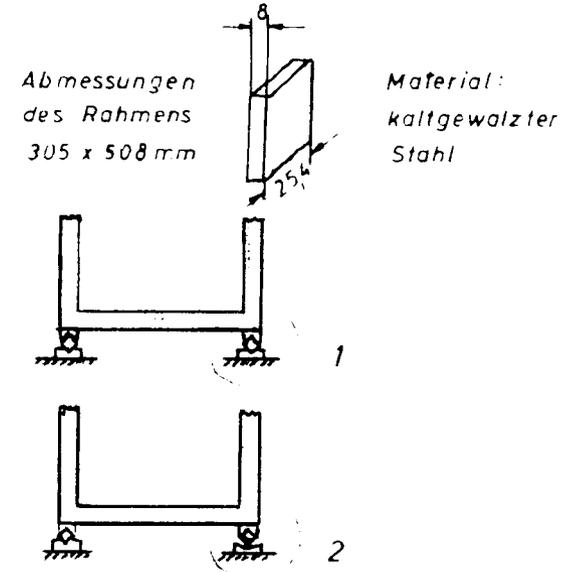
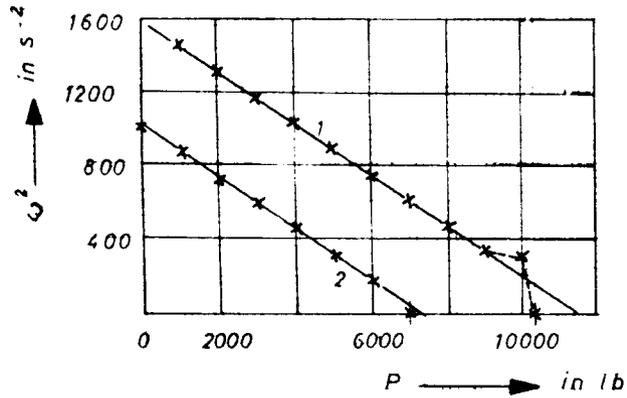


Bild 5 Wiedergabe und Auswertung der Versuche von Kollbrunner /16/17/

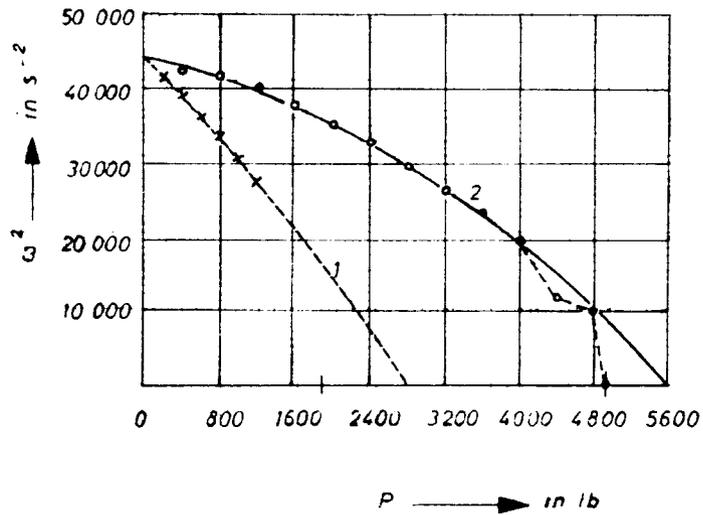
A. RAHMEN



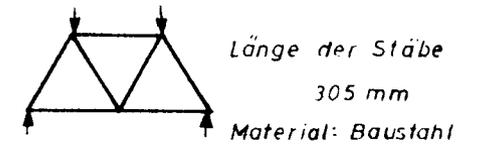
	kritische Last P_K		
	gerechnet	"gemessen"	erreicht
A,1	11,360 lb	11,450 lb	10,250 lb
A,2	7,330 lb	7,330 lb	6,950 lb
B,1	2,075 lb	2,800 lb	1,880* lb
B,2	4,150 lb	5,600 lb	4,950 lb

* Versagen durch Kippen

B. FACHWERK



1: Querschnitt 6,35 x 6,35 mm²



2: Querschnitt 6,35 x 12,7 mm²

Bild 6: Ergebnisse der Untersuchungen von Lurie /6/.

Von den bisher angeführten Arbeiten unabhängig sind zwei Veröffentlichungen, die sich mit den dynamischen Eigenschaften von Spannbeton befassen, dabei aber den Einfluß der Vorspannung auf die Eigenfrequenz nicht berücksichtigen.

Denkhaus und Dück /18/ sowie Fritz de la Orta /19/ untersuchten horizontal gelagerte Spannbetonbalken mit verbundfreier mittiger Vorspannung. Diese Spannbetonbalken stellen nach außen kräftefreie Systeme dar; durch die Spannseile bzw. -stähle werden jedoch die Stahlbeton-"Rohre" auf Druck beansprucht, so daß ein Ausknicken möglich ist.

Fritz hatte bei einer Versuchsserie die Vorspannung bis zur Würfeldruckfestigkeit getrieben und dabei die erste Eulerlast weit überschritten, ohne daß ein instabiles Verhalten auftrat bzw. überhaupt in Erwägung gezogen wurde. Wahrscheinlich lag infolge der horizontalen Lagerung der Spannseile im Mittelbereich der Versuchskörper an.

In beiden Arbeiten ist statt der zu erwartenden Abnahme eine Zunahme der Eigenfrequenz beobachtet worden, und zwar bei Denkhaus und Dück bei einem Spannungszuwachs von 0 auf 76 kp/cm^2 im Verhältnis 1 : 1,5 und bei Fritz bei Vorspannung im Bereich von 0 bis 356 kp/cm^2 im Verhältnis 1 : 1,06. Hand in Hand mit dieser Frequenzzunahme, die gemäß der bekannten Proportionalität als Zunahme des Elastizitätsmoduls gedeutet wird, geht eine Abnahme der Dämpfung. Während Fritz in seiner Arbeit das Verhalten des Spannbetons auf Mikrorisse zurückführt, werden in der anderen Arbeit ganz allgemein Risse als Ursache ausdrücklich als unwahrscheinlich abgelehnt; ob hierbei auch Risse in der Gefügestruktur (Mikrorisse) eingeschlossen sein sollten, ist unklar.

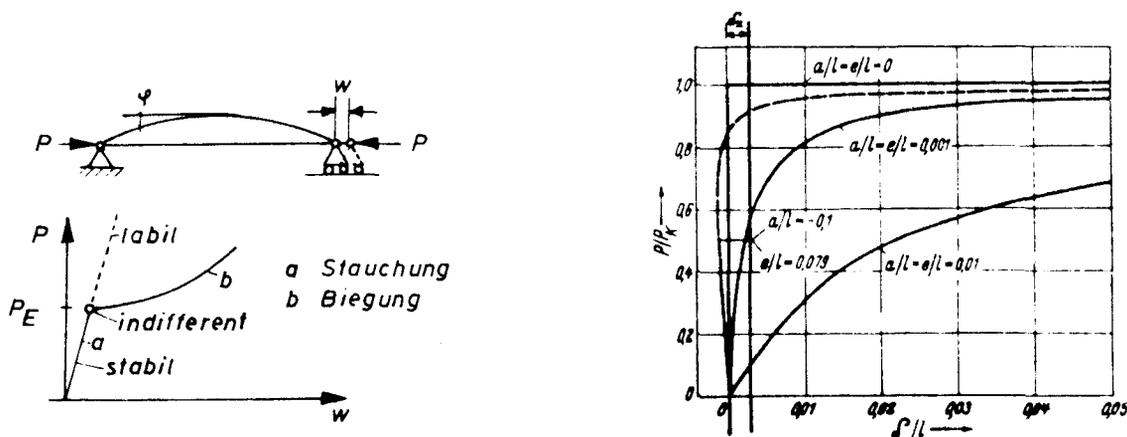
Für die Vermutung von Mikrorissen spricht, daß bei Fritz, der einen vernünftigen Elastizitätsmodul von ca. $2,5 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$ ermittelt hat, die wesentlichen Frequenz- und Dämpfungsänderungen schon im Bereich bis 5 kp/cm^2 erfolgen, während sie bei Denkhaus und Dück, die den außerordentlich geringen Anfangselastizitätsmodul von $5,8 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2$ angeben, erst bei ca. 50 kp/cm^2 eingetreten sind.

Es scheint also zumindest im Bereich baupraktisch uninteressant niedriger Laststufen ein "Homogenisierungseffekt" bzw. ein überlineares $\sigma - \epsilon$ -Verhalten zu existieren, das möglicherweise durch die Annahme von Schwindrissen im Mikrobereich seine Erklärung finden kann, dann aber auch auf rein statischem Wege nachweisbar sein müßte.

Die von Fritz ermittelten Werte für die Dämpfung $\Delta \approx \pi \cdot d$ für $35 < f/\text{Hz} < 85$ sind in Bild 23 mit aufgenommen. Die Übereinstimmung mit den eigenen Messungen ist erstaunlich gut, zumal die Werte mit einem anderen Meßverfahren ermittelt wurden und auch in einem anderen Frequenzbereich liegen.

4. Besondere Einflüsse auf Knicklast und Eigenfrequenz

Es ist zu erwarten, daß das unter den einschränkenden Bedingungen ideal elastischen Verhaltens und genau zentrischer Beanspruchung abgeleitete Frequenz-Last-Gesetz exakt in den Fällen gilt, in denen ein Ausknicken, d. h. der Stabilitätsverlust bei der berechneten Knicklast oder Eulerlast eintritt. Bei einem derartigen Stabilitätsverlust, für den auch der Begriff "Verzweigungsproblem" verwendet wird, findet ein Wechsel von einer in eine andere, der ersten energetisch benachbarten Gleichgewichtslage statt. Das zeigen die hier wiedergegebenen Darstellungen von Pflüger /20/ für den Zusammenhang zwischen Last und Lagerverschiebung bzw. Mittendurchbiegung $\frac{\delta}{l}$ beim Druckstab recht anschaulich.



Unter Eulerlast wird im Bauingenieurwesen der folgende, allgemeine Ausdruck verstanden

$$(4.1) \quad P_E = \frac{\pi^2}{l_K^2} \cdot E(\sigma) \cdot I$$

- l_K Knicklänge,
 $E(\sigma)$ Elastizitätsmodul,
 I Flächenträgheitsmoment in Bezug auf die Achse, um die die Querschnitte gedreht werden.

Nur bei gelenkiger Lagerung von Stäben mit konstantem Querschnitt sind Stab- und Knicklänge identisch. Bei Anwendung von (4.1) für beliebige Stab-, Bogen- oder andere Tragwerke muß die von den Randbedingungen abhängige Knicklänge jeweils gesondert berechnet werden; das Werkstoffverhalten kann man gegebenenfalls durch einen spannungsabhängigen Elastizitätsmodul beschreiben.

Den Bauingenieur interessiert jedoch vorwiegend ein ganz anderes Stabilitätsproblem, nämlich das Traglastproblem. Traglast ist diejenige "kritische Last", bei der das Tragvermögen erschöpft ist. Die Traglast ist weniger system- als vielmehr werkstoffbedingt; sie hängt entscheidend von den Imperfektionen hinsichtlich Form und Lagerung ab. Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen Eigenfrequenz und Traglast ist ebensowenig zu erwarten wie zwischen Traglast und Eulerlast. Die Differenz zwischen Traglast und Eulerlast ist umso größer, je größer die planmäßigen oder die ungewollten Ausmittigkeiten sind.

Bei geringen Belastungen können die Verformungen trotz bestehender Ausmittigkeiten so gering sein, daß man von einer quasi-mittigen Belastung sprechen kann. Das bedeutet, daß zumindest im Bereich dieser "geringen" Belastungen immer ein lineares $\omega^2(P)$ -Gesetz erwartet und somit auch die Eulerlast experimentell ermittelt werden kann. Für die Fixierung eventuell vorhandener Abweichungen vom linearen Verlauf der Eigenkurven bei größeren Belastungen sollte sich eine noch zu findende, von der Vorverformung und der Exzentrizität abhängige Mittenausbiegung δ_x oder Biegeverformung ϵ_M angeben lassen, wie sie bereits als Beispiel in das rechte Dia-

gramm eingetragen wurde. Danach wäre eine $f^2(P)$ -Linearität, je nach Größe der Imperfektionen bis $P/P_E \approx 0,1, 0,5$ oder $0,9$ gewährleistet. Es wird sich zeigen, daß in der Tat die Ausbiegung δ/l bzw. das Verhältnis der Verformungen $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_P}$ in Systemmitte als Maß für die obere Grenze des Linearitätsbereichs- und damit gewissermaßen als eine Grenze zwischen Stabilitäts- und Spannungsproblem - geeignet ist.

Ein weiteres mit der Traglast zusammenhängendes Problem besteht in der Extrapolation ermittelter Meßwerte über den Meßbereich hinaus. Die Gesetzmäßigkeit zwischen Frequenz und Normalkraft gilt zunächst nur im Bereich linearer Abhängigkeit zwischen Spannung und Verformung. Eine Erweiterung auf den nichtlinearen Elastizitätsbereich des Materials, der normalerweise außerhalb des Meßbereichs bei höheren Belastungen liegen wird, ist möglich, da die Biegesteifigkeit EI ebenso wie die Last P als Parameter variiert werden darf, jedoch ist durch das Ende des Linearitätsbereichs grundsätzlich eine Grenze für "extrapolierende Aussagen" gesetzt. Eine bei niedriger Last experimentell bestimmte Eulerlast P_E hat nur dann einen "Vorhersage"-Wert, wenn das Versagen des Bauteiles durch Stabilitätsverlust bei P_E und nicht durch Materialerschöpfung bei einer Traglast $P_V < P_E$ eintritt.

Hierbei wird unter Stabilitätsverlust diejenige Instabilität verstanden, die beim Übergang zwischen den beiden Gleichgewichtszuständen auftritt. Der bei ausmittiger Belastung und nichtlinearem Spannungs-Dehnungs-Gesetz, wie es z. B. bei Stahlbeton vorliegt, mögliche Stabilitätsverlust durch unterschiedlich raschen Anstieg vom äußeren und inneren Moment wird nicht ausdrücklich ausgeschlossen, jedoch stellt dieser keinen eigentlichen Anwendungsfall der hier behandelten Fragestellung dar.

Diese Überlegungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Ein Verfahren zur experimentellen Vorherbestimmung der realen Tragfähigkeit gibt es nicht und kann es, streng genommen, nicht geben. Die Traglast ist durch einen Gleichgewichtszustand bestimmt und stets geringer als die Eulerlast und kann grundsätzlich genau nur dann angegeben werden, wenn sie tatsächlich ermittelt wurde, was per definitionem nicht zerstörungsfrei durchführbar ist. Daher

schien es dem Verfasser vernünftig, sich auf den einfach meßbaren, linearen Zusammenhang zwischen Quadrat der Eigenfrequenz und Knicksicherheit oder Knicklast zu beschränken. Eine grobe Abschätzung der Traglast oder -sicherheit kann unter Bezug auf die gemessenen Eulerlasten durch entsprechende Sicherheitszuschläge und unter Beachtung der Ansätze für ungewollte Ausmitigkeiten /21/22/ vorgenommen werden.

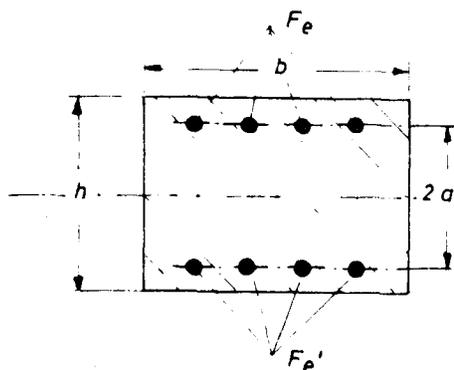
In den folgenden beiden Abschnitten werden weitere Gesichtspunkte der wichtigsten Einflüsse auf die Linearität der Eigenkurven, nicht ideales, also belastungsabhängiges Materialverhalten und geometrische Imperfektionen, diskutiert.

4.1 Material

Während der Elastizitätsmodul von Stahl im $\sigma - \epsilon$ -Proportionalitätsbereich einen außerordentlich konstanten, von den Festigkeitseigenschaften unabhängigen Wert, $E = (1 \pm 0,05) \cdot 2,1 \cdot 10^6$ kp/cm², besitzt, kann man Gleichartiges von Beton nicht sagen. Die Arbeitslinie des Betons hängt wesentlich von Zusammensetzung, Alter, Nachbehandlung, Lagerung und Beanspruchung des Betons ab; sie verläuft bis ca. 2 ‰ Stauchung als Parabel, wobei der Scheitel bei ca. 0,8 W₂₈ liegt. Deshalb besteht bei Beton ein Zusammenhang zwischen Festigkeit und Elastizitätsmodul.

Wegen der großen Unterschiede, ca. 7 : 1, zwischen Druck- und Zugfestigkeit wird bei der Bemessung auf Biegung die Zugfestigkeit des Betons überhaupt nicht berücksichtigt und auf der Zugseite nur der Stahl in Ansatz gebracht. Zwischen der rechnerischen Biegesteifigkeit für ausschließliche Druckbeanspruchung bzw. ungerissene Zugseite (Zustand I) eines Rechteck-Querschnitts

$$(4.2) \quad EI = E_b \frac{bh^3}{12} \left[1 + \mu_g \left(12 n \frac{a^2}{h^2} - 1 \right) \right] \quad , \quad \mu_g = \mu + \mu'$$



$$\mu = \frac{F_e}{F_b}; \mu' = \frac{F_e'}{F_b}; n = \frac{E_e}{E_b}$$

und der tatsächlichen Biegesteifigkeit z. B. einer auf der Zugseite gerissenen Stütze (Zustand II) können erhebliche Unterschiede bestehen^{*)}. Um hiervon einen Eindruck zu vermitteln, sind im Anhang, Bild 1 A und 2 A, dem σ - ϵ -Diagramm für Zugbeanspruchung entsprechende M- γ -Arbeitslinien für das Biegemoment als Funktion der Querschnittsverdrehung angegeben.

Diese Werte sind Rechenwerte für die Versuchsstützen 3 und 4; sie beruhen auf Arbeiten von Rüschi /23/ und Rao /24/ über die Spannungsverteilung in der Biegedruckzone und wurden im Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau in dieser Form der praktischen Anwendung zugänglich gemacht. Die M- γ -Werte sind auf die Querschnittsabmessungen bezogen!

Die Biegesteifigkeit B wird als das Verhältnis

$$(4.3) \quad B = \frac{M}{\gamma} = \frac{\iint y \cdot \sigma(y, \epsilon_M) \cdot dF}{\frac{2}{h} \epsilon_M} = \frac{\iint y \left(2 \frac{\gamma}{h} E \epsilon_M \right) dF}{\frac{2}{h} \epsilon_M} = EI$$

definiert; damit erhält man also für eine lineare Spannungsverteilung - und nur für diesen Fall - den bekannten Wert $B = EI$. Bei nichtlinearer und von der Größe des Biegemomentes abhängiger Arbeitslinie und lastabhängigen Querschnittsabmessungen (Zustand II) ist es nicht möglich, Elastizitätsmodul und Biegesteifigkeit zu trennen. Mit den Kurven nach Bild 1 A bzw. 2 A ist eine Korrektur der Eigengeraden analog Gleichung (4.5) zwar prinzipiell durchzuführen, jedoch benötigt man je nach Betonfestigkeit und Bewehrungsgehalt andere Daten, so daß man besser versuchen sollte, die maximale Steifigkeitsänderung abzuschätzen.

*) An dieser Stelle scheint es geraten, ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß im Gegensatz zu DIN 1080 die Dicke des Gesamtquerschnitts mit h und nicht mit d bezeichnet wird; d wird entsprechend DIN 1311 als Symbol für den Verlustfaktor verwendet.

In den Bildern 1 A und 2 A sind zu jeder Normalspannung $\frac{P}{F}$ jeweils zwei Kurven aufgetragen. Die ausgezogenen Kurven berücksichtigen entsprechend der Bemessungsvorschrift die Zugfestigkeit nicht; für geringe Normalspannungen ergibt sich daher eine geringere Biegesteifigkeit als bei höheren Belastungen. Die gestrichelten Kurven gehen dagegen von einem realen Wert der Biegezugfestigkeit aus und nähern sich erst bei größeren Verdrehungen $h\vartheta = 2\varepsilon_M$ den anderen Kurven an. Bei kleinen Biegemomenten dürften die gestrichelten Kurven und bei größeren die ausgezogenen der Wirklichkeit besser entsprechen. Da bei hohem Bewehrungsgehalt die Biegezugfestigkeit des Betons für die Gesamtfestigkeit von geringerer Bedeutung ist als bei schwacher Bewehrung, sind im ersteren Fall auch die Unterschiede zwischen diesen beiden Kurven weniger ausgeprägt.

Es handelt sich bei den Diagrammen um das Verformungsverhalten eines einzelnen Querschnitts. Bei einer Anwendung auf Stützen müßte eine Summation der dem tatsächlichen Momentenverlauf längs der Stütze entsprechenden Anteils erfolgen. Da jedoch für die Verformung und die Eigenfrequenz die geringste Biegesteifigkeit entscheidend sind, wird man für eine Abschätzung den Wert für das größte Moment verwenden und damit auf der sicheren Seite liegen.

Wie bereits besprochen wurde, bewirken die Imperfektionen, worunter bei Stahlbeton auch Schwinden und Kriechen und besonders die durch fehlerhafte Bewehrungsführung bedingten Ausmittigkeiten zu rechnen sind, daß auch bei gewollt mittiger Beanspruchung das Stabilitätsproblem mit zunehmender Last zum Spannungsproblem (Gleichgewichtsproblem) wird. Man trägt dem durch Ansatz einer ungewollten Ausmittigkeit Rechnung, zum Beispiel für Stahlbeton nach Kordina /21/: $m = 0,15 + \frac{\lambda}{300}$. Das bezogene ungewollte Biegemoment beträgt damit für einen Rechteck-Querschnitt bei der größten, nach DIN 4225 zulässigen Schlankheit:

$$(4.4) \quad \frac{M}{F \cdot h} = \frac{P}{F} \cdot \frac{1}{6} \left(0,15 + \frac{\lambda}{300} \right) \Bigg|_{\lambda=280} = 0,18 \frac{P}{F} .$$

Bei Druckspannungen z.B. von $\frac{P}{F} = 0, 50$ bzw. 100 kp/cm^2 erhält man für die bezogene Biegesteifigkeit B in kp/cm^2 aus Bild 1 A bzw. 2 A.

$\frac{P}{F}$ in kp/cm^2	Bewehrung	Bewehrung
	$\mu = \mu' = 0,005$	$\mu = \mu' = 0,025$
0	$3,0 \cdot 10^4$	$3,9 \cdot 10^4$
50	$2,5 \cdot 10^4$	$3,8 \cdot 10^4$
100	$1,9 \cdot 10^4$	$3,7 \cdot 10^4$

Man muß also bei sehr schlanken, gering bewehrten Stützen aus Beton B 270 ... 370 damit rechnen, daß sich im Bereich der größten Biegemomente die Biegesteifigkeit infolge ungewollter Ausmittigkeit mit der Belastung um maximal 30 % vermindert.

Als eine weitere Möglichkeit für materialbedingte Abweichungen der Eigenkurven vom linearen $\omega^2(P)$ -Gesetz ist der dynamische Elastizitätsmodul zu erwähnen. Nach Kristen und Müller /25/ können folgende Werte erwartet werden:

	Frequenz $f > 50 \text{ Hz}$:	
Beton, unbewehrt:	$E_{\text{stat}} = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$	$E_{\text{dyn}} = 3,1 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$
Beton, bewehrt; $\mu = 0,01$:	$E_{\text{stat}} = 2,8 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$	$E_{\text{dyn}} = 3,2 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$

Für stark bewehrten Beton dürften die Unterschiede zwischen den beiden Elastizitätsmoduli geringer sein.

Im Zusammenhang mit den dynamischen Eigenschaften von Beton ergibt sich die Frage, ob Gefügeveränderungen infolge Belastung zu einer Änderung der Schwingungsdämpfung führen. Falls z. B. die Rißbildung im Beton oder auch das Fließen des Stahles anhand des Verlustfaktors nachgewiesen werden könnten, wäre damit ein wichtiger Indikator zum Erkennen der beginnenden Materialerschöpfung gewonnen.

Das Verhalten von Stahl verdient noch eine besondere Beachtung, da hier auch außerhalb des elastischen Bereichs die Eigenkurve in geschlossener Form angegeben werden kann. So ist zum Beispiel bei Stahl St 37 nach DIN 4114 mit einem konstanten Elastizitätsmodul bis $\sigma_P = 1920 \text{ kp/cm}^2$ zu rechnen. Für höhere Spannungen - bis zur Fließgrenze $\sigma_F = 2400 \text{ kp/cm}^2$ - ist die Knickspannung dem

Knickmodul T entsprechend vermindert /22/. Diese, dem tatsächlichen Verlauf der Arbeitslinie von Baustahl entsprechende Korrektur wird durch den Beiwert $\hat{\alpha} = \frac{T}{E} = \frac{\sigma_K}{\sigma_E}$ vorgenommen; daher lautet die Gleichung der Eigenkurve:

$$(4.5) \quad \omega^2 = \hat{\alpha} \omega_0^2 \left(1 - \frac{\sigma}{\hat{\alpha} \sigma_E}\right).$$

Das Versagen der Tragfähigkeit tritt also - bei exakt mittiger Beanspruchung - bei der geringeren Spannung

$$(4.6) \quad \sigma_K = \hat{\alpha} \sigma_E = \hat{\alpha} \frac{\pi^2}{\lambda^2} E$$

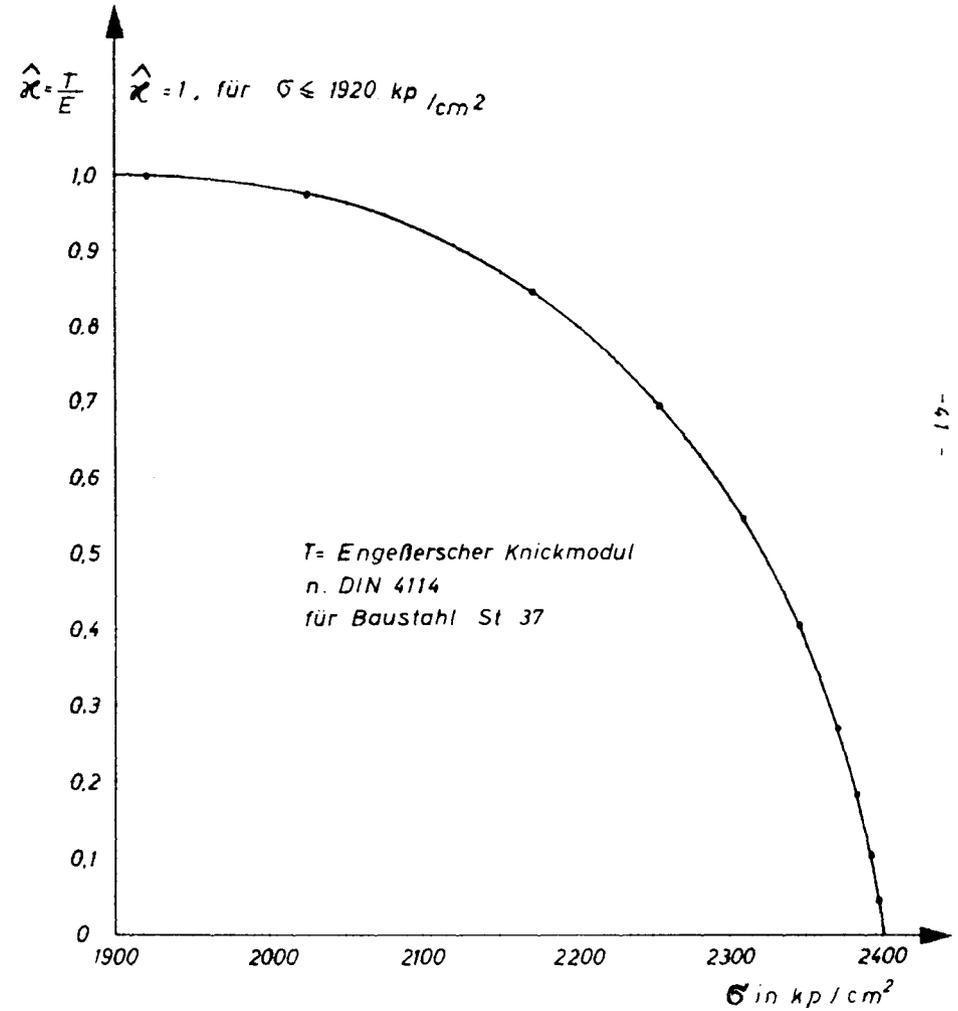
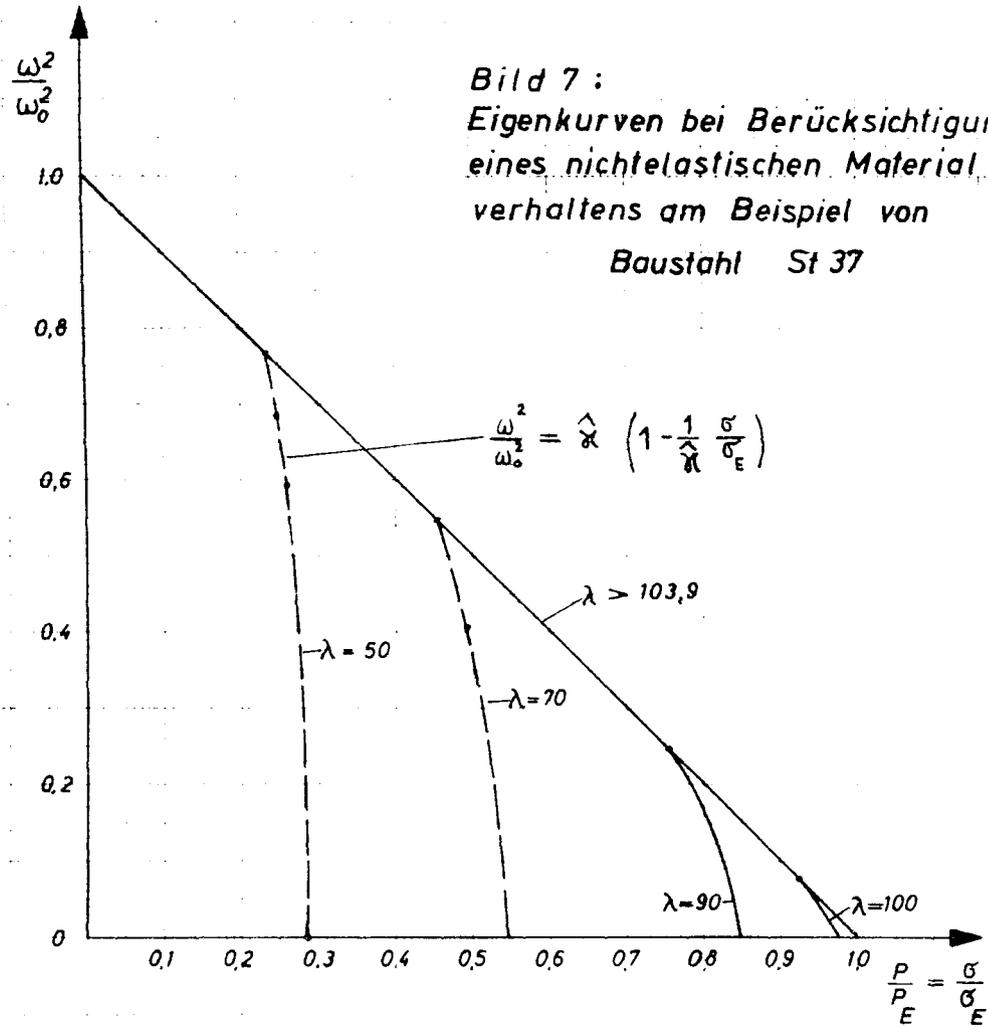
ein, wobei diese Grenze von der Schlankheit $\lambda = l \sqrt{\frac{E}{I}}$ abhängt.

In Bild 7 wurde als Beispiel $\omega^2(\sigma)$ und $\hat{\alpha}(\sigma)$ für St 37 aufgetragen. Es ist zu beachten, daß das Verformungsverhalten beim Eintritt in den Fließbereich zeitabhängig wird und deshalb kurzfristig durchaus Überschreitungen der angegebenen Traglast möglich sind. Das gilt besonders für gedrungene Bauteile, während z. B. bei Stützen mit $\lambda > 100$ die Imperfektionen nach einer örtlichen Überschreitung der Fließgrenze immer zur Biegung Anlaß geben werden. Die danach vorhandene Beanspruchung durch das rasch wachsende Biegemoment hat mit der hier behandelten Fragestellung nichts mehr zu tun. Die Frequenz $\omega \rightarrow 0$, die grundsätzlich zur kritischen Last gehört, dürfte ohne reale Bedeutung sein; es wird bezweifelt, ob sie in einem Versuch auch nur angenähert ermittelt werden kann.

4.2 Ausmittigkeit und Vorverformung

Imperfektionen, vor allem exzentrische Lasteintragung und Vorverformung der Stützen, sind in gewissem Umfang unvermeidbar und teilweise auch ohne besondere Hilfsmittel nicht nachweisbar, wie z. B. nicht planmäßige Bewehrungsführung in Stahlbetonbauteilen. Daher muß untersucht werden, ob sich solche Abweichungen von der idealen Belastung oder der vorausgesetzten Geradheit der Stäbe grundsätzlich auf die Linearität der Eigengeraden auswirken können. Dabei sollte es genügen, den statisch einfachsten Fall mit symmetrisch ausmittiger Lasteintragung und sinusförmiger Vorverformung zu betrachten. Für die Ausbiegung $w_e(x)$ eines derartigen gelenkig gelagerten Stabes kann folgende Differentialgleichung

Bild 7:
Eigenkurven bei Berücksichtigung
eines nichtelastischen Material-
verhaltens am Beispiel von
Baustahl St 37



angeschrieben werden:

$$(4.7) \quad EI w_e''(x) + P \left(a \sin \pi \frac{x}{l} + e + w_e(x) \right) = 0.$$

Mit den Randbedingungen: $w_e(0) = w_e(l) = 0$ erhält man die Lösung

$$(4.8) \quad w_e(x) = \frac{a}{\frac{P_k}{P} - 1} \sin \pi \frac{x}{l} + \frac{e}{\sin \alpha l} \left[\sin \alpha x + \sin \alpha (x-l) - \sin \alpha l \right]$$

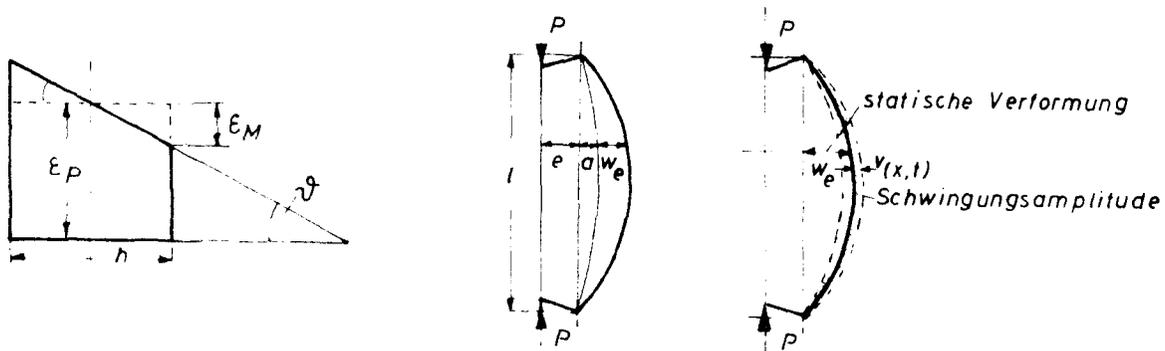
und speziell für die Mittenausbiegung des Stabes

$$(4.9) \quad \delta = w_e\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{a}{\frac{P_k}{P} - 1} + e \left(\frac{1}{\cos \alpha \frac{l}{2}} - 1 \right).$$

Für die Auswertung wird aus den angegebenen Gründen das Verhältnis $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_P}$ von Biegeverformung (Querschnittsdrehung) ϵ_M zu Druckverformung (Stauchung) ϵ_P benötigt, das direkt aus der Differentialgleichung (4.7) abgeleitet werden kann. Die Voraussetzung einer über die Querschnitte linearen Spannungsverteilung ist bereits in (4.7) enthalten:

$$(4.10) \quad \frac{\epsilon_M}{\epsilon_P} = \frac{\frac{1}{E} \cdot \frac{M}{W}}{\frac{1}{E} \cdot \frac{P}{F}} = -\frac{1}{k} \frac{EI w_e''}{P} = \frac{w_e}{k} + \frac{a}{k} \sin \pi \frac{x}{l} + m$$

$m =$ auf die Kernweite $k = \frac{W}{F}$ bezogene Ausmittigkeit e .



Für den Fall einer Schwingungsbeanspruchung vorverformter oder ausmittig belasteter Stäbe tritt insofern eine Besonderheit auf, als die Schwingungen mit der Amplitude $v(x,t)$ um die verformte Stabachse $w_e(x)$ erfolgen, die bei Belastung nicht mehr mit der ursprünglichen Systemachse zusammenfällt. In erster Näherung kann man jedoch weiterhin die mit einem durch die Vorverformung

bedingten Störglied $\frac{\alpha P}{l^2} \pi^2 \sin \pi \frac{x}{l}$ ergänzte Differentialgleichung (2.5) als gültig annehmen. Die maximale Gesamtdurchbiegung muß allerdings in der Form

$$(4.11) \quad v_e(x,t) = w_e(x) + v(x,t)$$

angesetzt werden, wobei $w_e(x)$ die statische Durchbiegung gemäß (4.8) und $v(x,t) = \sin \frac{\pi x}{l} (a \cos \omega t + b \sin \omega t)$ die Amplitudenfunktion bedeuten; die Randbedingungen einer gelenkigen Lagerung sind bei allen Funktionen erfüllt. Für das hinsichtlich $v(x,t)$ vollhomogene Problem ergeben sich wiederum die Eigengeraden (2.18).

Damit scheint eine Besonderheit bei Biegung mit Längskraft nicht vorzuliegen, wie sich auch aus einer anderen Betrachtungsweise des Problems ergibt.

Es besteht bekanntlich die Möglichkeit, die Eigenfrequenz von Feder-Masse-Systemen, deren elastische Eigenschaften auf der Formsteifigkeit beruhen, aus der statischen Durchbiegung δ mit Hilfe der Geiger-Formel zu bestimmen:

$$(4.12) \quad f^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{c}{M_0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{g \cdot M_0}{\delta \cdot M_0} \approx \frac{25}{\delta/cm}$$

c Federkonstante

M_0 Einzelmasse

$\delta = \frac{P}{c}$ Durchbiegung des Systems - in Schwingungsrichtung - unter der Last $P = M_0 g$.

Bei Anwendung von (4.12) auf Systeme mit verteilter Masse ist zu beachten, daß man bei der Wahl eines Ersatzsystems mit konzentrierter Masse $\bar{M}_0 = gFl$ noch einen Faktor q zu berücksichtigen hat, der z. B. für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab $q = 0,5$ beträgt, wie man unmittelbar aus einem Vergleich zwischen exakt (2.16) und nach (4.12) angenähert gültiger Eigenfrequenz ersehen kann:

$$(4.13) \quad (2\pi f)^2 = \frac{c}{\bar{M}_0} = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EI}{gF} \approx \frac{48}{1} \frac{EI}{gFl}$$

Für andere Randbedingungen gelten andere Faktoren.

Im folgenden soll auf diesem Wege die Eigenfrequenz für den axial exzentrisch und zusätzlich transversal mit einer Einzelast beanspruchten Stab abgeleitet werden. Es gelten folgende Differentialgleichungen:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} EI w'' + Pw &= -\frac{Q}{2}x & : 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad , \\ EI w'' + Pw &= +\frac{Q}{2}(x-l) & : \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad . \end{aligned}$$

Die Anpassung der bekannten Lösungen an die Rand- und Verträglichkeitsbedingungen bereitet keine Schwierigkeiten. Man erhält für die Mittenausbiegung den folgenden Ausdruck:

$$(4.15) \quad \delta = \delta_a + \delta_M = \frac{Ql^3}{48EI} \frac{3(\tan u - u)}{u^3} \pm \frac{ePl^2}{8EI} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}$$

wobei für $u^2 = \left(\frac{ql}{2}\right)^2 = \frac{Pl^2}{4EI} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{P}{P_E}$ zu setzen ist.

Die Mittenausbiegung kann also aus den beiden Anteilen superponiert werden /4/8/, obgleich der erste Anteil von der Querlast und der zweite Biegepfahl von der elastischen Ausbiegung infolge der Ausmittigkeit abhängt. Der lineare Zusammenhang zwischen Transversalkraft und Ausbiegung geht deshalb für höhere Axialkräfte verloren.

Entwickelt man in Gleichung (4.15) die trigonometrischen Funktionen in Reihen, so erhält man die Näherung:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \delta &= \frac{Ql^3}{48EI} \left(1 + \frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{P}{P_E}\right) \pm \frac{ePl^2}{8EI} \left(1 + \frac{5\pi^2}{48} \cdot \frac{P}{P_E}\right) \\ &\approx \frac{l^2}{8EI} \left(\frac{QL}{6} \pm eP\right) \left(1 + \frac{P}{P_E}\right) . \end{aligned}$$

Dabei liegt der Fehler der Näherung bis $\frac{P}{P_E} = 0,9$ unter 2 %. Für die Frequenzbestimmung interessiert der die jeweilige dynamische Ruhelage $w_e(x)$ bestimmende Anteil δ_M nicht. Mit der Federkonstanten $c = \frac{Q}{\delta_Q} \approx \frac{48}{l^3} EI \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)$ folgt - unter Berücksichtigung von $\frac{M_Q}{l} = \frac{1}{2} qF$ - für die Eigenfrequenz auch aus der Mittenausbiegung:

$$(4.17) \quad \omega^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{P}{P_E}\right) .$$

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß die Abschätzung der kritischen Last auch auf statischem Wege, nämlich durch Aufbringen einer Prüf-Querkraft Q , erfolgen kann. Die gemessene Durchbiegung δ ist ebenfalls ein Maß für die Eulerlast bzw. die Knicksicherheit. Aufgrund der Proportionalität zwischen δ und ω^2 ist ein derartiges Verfahren prinzipiell dem schwingungstechnischen gleichberechtigt, jedoch in der praktischen Handhabung letzterem unterlegen.

Vorverformung und Ausmittigkeit lassen in erster Näherung keine Beeinträchtigung des linearen Frequenzquadrat-Last-Gesetzes erwarten.

5. Experimentelle Untersuchungen

Art und Umfang der Untersuchungen standen aufgrund der Zielsetzung, die Linearität der Eigenkurven experimentell zu bestätigen bzw. den Gültigkeitsbereich des Frequenz-Last-Gesetzes abzugrenzen, weitgehend fest.

Im Rahmen der vorgelegten Arbeit wurden an insgesamt 10 Stützen normaler Größe und an 6 kleineren Modellstützen sowie an einem Zylinderschalen-Modell Untersuchungen des Schwingungsverhaltens in Abhängigkeit von der statischen Belastung durchgeführt.

Angaben über das bei den einzelnen Stützen angestrebte Versuchsziel können aus Tafel 3 ersehen werden. In Tafel 4 sind die allgemeinen technischen Daten für alle Stützen und in Tafel 5 die Zusammensetzung und Festigkeit des für die Stahlbetonstützen verwendeten Betons angegeben.

In den nachfolgenden Abschnitten werden Einzelheiten über die geprüften Stützen mitgeteilt, die Versuchsdurchführung besprochen und mit dem Meßverfahren zusammenhängende Ergebnisse diskutiert.

5.1 Erläuterungen zum Untersuchungsprogramm und zur Auswahl der Versuchsstützen

A. Stahlbetonstützen normaler Größe

Die ersten Messungen an den ausmittig gelenkig gelagerten Stützen 1 und 2 mit der Schlankheit $\lambda = 104$ ergaben, daß die Knicklänge zu vergrößern sei, um eine stärkere Frequenzabhängigkeit von der Belastung zu erhalten. Unter Verwendung der vorhandenen Schalung wurden daraufhin 4 Stahlbeton-Versuchsstützen, 3 bis 6, mit $\lambda \approx 128$ betoniert, wobei der Bewehrungsgehalt $\mu = \mu' = 0,005$ und $\mu = \mu' = 0,025$ betrug.

Durch die unterschiedliche Bewehrung sollte geprüft werden, ob sich das verschiedenartige Tragverhalten - bei schwacher Bewehrung Versagen durch Fließen des Stahles auf der Zugseite und bei hoher Bewehrung Versagen durch Überschreitung der Betonfestigkeit auf der Druckseite - im dynamischen Verhalten widerspiegelt.

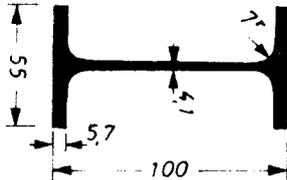
Tafel 3

Übersicht zur Durchführung der experimentellen Untersuchungen

Stütze	Material	Lagerung	Versuchsziel
1 2	Stahlbeton	gelenkig	Frequenz in Abhängigkeit von der Last bei ausmittiger Beanspruchung
3 4 5 6	Stahlbeton	gelenkig	Frequenz in Abhängigkeit von der Last bei mittiger Beanspruchung Parameter: Bewehrung
7	Stahlbeton	bauüblich eingespannt	Randbedingungen und Schwingungsform
8 9 10 a	Stahl	gelenkig	Frequenz in Abhängigkeit von der Last bei mittiger Beanspruchung Parameter: Schlankheit
10 b		ohne besondere Vorkehrungen	Frequenzverlauf bei lastabhängigen Randbedingungen
M 1 M 2 M 3	Stahl	gelenkig	Frequenz in Abhängigkeit von der Last Parameter: planmäßige Ausmittigkeit
M 4 M 5	Stahl	gelenkig bis eingespannt	Frequenzverlauf bei lastabhängigen Randbedingungen
		ohne besondere Vorkehrungen	
M 6	Stahl	eingespannt	Frequenz in Abhängigkeit von der Last bei Zugbeanspruchung

Tafel 4

Technische Daten der geprüften Stützen und Stäbe

Stütze	Material	Länge l in cm	Breite b in cm	Dicke h in cm	Knicklänge l _K in cm	Kernweite k in cm	Querschnitt F in cm ²	Trägheitsmoment I* in cm ⁴
1	Stahlbeton	289	15,4	10,0	298,5	1,67	154	1,285 · 10 ³
2		289	15,4	10,0	298,5	1,67	154	1,285 · 10 ³
3		288	15,7	8,1	297,6	1,33	127	0,695 · 10 ³
4		290	15,9	8,1	299,4	1,33	129	0,704 · 10 ³
5		291	15,8	8,1	298,6	1,33	128	0,700 · 10 ³
6		290	15,8	8,1	297,6	1,33	128	0,700 · 10 ³
8	mittelbreite Träger I PE 100 DIN 1025 mit parallelen Flanschen	300			307,6	0,562	10,3	15,9
9		225			232,6	0,562	10,3	15,9
10a		150			157,6	0,562	10,3	15,9
10b		150			150	0,562	10,3	15,9
M 1	Baustahl blank gezogen	26	2,5	0,79	25,74	0,132	1,98	0,104
M 2		26	2,5	0,79	25,74	0,132	1,98	0,104
M 3		26	2,5	0,79	25,76	0,132	1,98	0,104
M 4		28	2,5	0,60	28,05	0,100	1,49	4,46 · 10 ⁻²
M 6		50	2,5	0,79	42...45	0,132	1,98	0,104
M 5	Rippentor- stahl St. III b	28	1,8 ∅	1,8 ∅	28,00	0,225	2,54	0,513

* bei Beton ohne Berücksichtigung der Bewehrung

Fortsetzung Tafel 4: Technische Daten der geprüften Stützen und Stäbe

Stütze	Schlankheit λ^*	Biegesteifigkeit in $\text{kp} \cdot \text{cm}^2$ B	Masse in kg M_0	Lagermasse in kg M_L	Bewehrungsgehalt $\mu = \mu'$	Prüfalter Tage
1	104	$3,88 \cdot 10^8$	115	21,5	0,005/St I	44
2	104	$4,90 \cdot 10^8$	115	21,5	0,005/St I	64
3	127	$2,60 \cdot 10^8$	98	21,5	0,025/St I	28
4	128	$2,16 \cdot 10^8$	89	9,9	0,005/St I	59
5	128	$2,55 \cdot 10^8$	98,8	9,9	0,025/St I	187
	Biegesteifigkeit im Zustand II:	$1,08 \cdot 10^8$				
6	127	$2,37 \cdot 10^8$	88,8	9,9	0,005/St I	50
	Biegesteifigkeit im Zustand II:	$1,74 \cdot 10^8$				
8	248	$3,34 \cdot 10^7$	24,3	10,4		
9	188	$3,34 \cdot 10^7$	18,2	10,4		
10a	127	$3,34 \cdot 10^7$	12,2	11,4		
10b	111	$3,34 \cdot 10^7$	12,2			
M 1	112	$2,18 \cdot 10^5$	0,402			
M 2	112	$2,18 \cdot 10^5$	0,402			
M 3	111	$2,18 \cdot 10^5$	0,400			
M 4	163	$9,4 \cdot 10^4$	0,326			
M 5	62	$1,08 \cdot 10^6$	0,538			
M 6	190	$2,18 \cdot 10^5$				

* bei Beton ohne Berücksichtigung der Bewehrung

Tafel 5

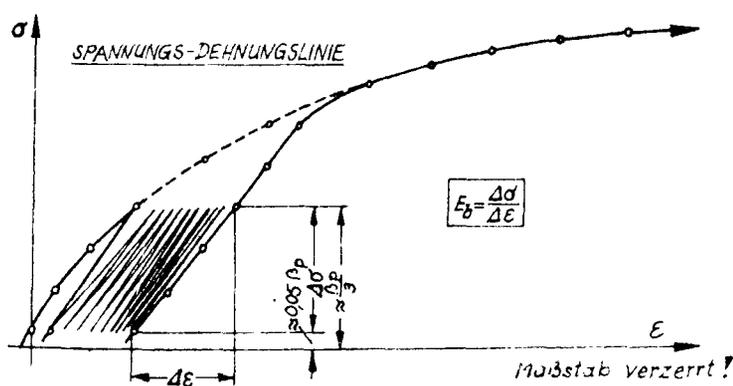
Zusammensetzung und Festigkeit des Betons

Stütze	1	2	3	4	5	6	Einheit
<u>Zusammensetzung</u>							
Zement	291	325	283	340	287	352	kg/m ³
W/Z-Faktor	0,72	0,66	0,83	0,67	0,674	0,56	
Körnung	0 - 15	0 - 15	0 - 15	0 - 15	0 - 15	0 - 15	
Sieblinie	D/E	D/E	D/E	D/E	D/E	D/E	
Mischung N I	3,0 %	5,0 %	5,0 %	5,0 %	5,0 %	5,0 %	
0 - 3	30,0 %	29,0 %	29,0 %	29,0 %	29,0 %	29,0 %	
3 - 7	37,0 %	36,0 %	36,0 %	36,0 %	36,0 %	36,0 %	
7 - 15	30,0 %	30,0 %	30,0 %	30,0 %	30,0 %	30,0 %	
<u>Festigkeit</u>							
Biegezugfestigkeit	36,5	50,0	35,4	30,0	30,0	-	kp/cm ²
Dichte des Betons	2,25	2,28	-	2,40	-	-	kg/dm ³
Druckfestigkeit W ₂₈	364	402	269	367	266	433	kp/cm ²
Prismenfestigkeit $\beta_{P 28}$	311	317	248	319	229	389	kp/cm ²
Elastizitätsmodul	2,66	3,25	2,57	2,34	2,51	3,04	· 10 ⁵ kp/cm ²
Druckfestigkeit am Prüftage	363,5	436,3	-	435	314,3	509	kp/cm ²
Prismenfestigkeit am Prüftage	313	-	-	350,7	259,6	395,6	kp/cm ²
Elastizitätsmodul am Prüftage	2,65	3,35	-	2,86	2,44	3,15	· 10 ⁵ kp/cm ²

Die Anordnung der Bewehrung und die genaue Stützenform sind aus Bild 3 A, Anhang, ersichtlich.

Zur Untersuchung einer Stütze mit bauüblichen Lagerungsbedingungen wurde eine zum Institutsgebäude gehörende Stahlbetonstütze ausgesucht, deren Schlankheit ohne Berücksichtigung der Durchdringung $\lambda = 38$ beträgt. Die Stütze ist an einem Ende mit einem Fundament unbekannter Abmessungen verbunden und am anderen an einem Unterzug angeschlossen, vgl. die Skizze auf S. 79 .

Die in Tafel 5 angegebenen Werte für Druckfestigkeit und Biegezugfestigkeit sind nach DIN 1048 ermittelt worden. Zur Berechnung der Eulerlast und der Eigenfrequenz wurde der Elastizitätsmodul des verwendeten Betons durch getrennte Versuche wie folgt bestimmt. An einem von drei zusammen mit den Stützen hergestellten Prismen mit den Abmessungen 15/15/70 wurde zunächst die Prismenfestigkeit β_p festgestellt und danach an den beiden anderen Prismen der Elastizitätsmodul aus der Arbeitslinie als Differenzenquotient $E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$ entnommen, nachdem die Prismen einer zehnmaligen, zwischen 0,05 und 0,33 β_p geführten Schwellbeanspruchung ausgesetzt worden waren.



Unter Verwendung der so bestimmten Elastizitätsmoduli wurden die in Tafel 4 angegebenen Biegesteifigkeiten und damit wiederum die Eulerlasten, vgl. Tafel 7, berechnet.

Die Biegesteifigkeit der Stützen 5 und 6 wurden auch direkt nach Durchführung der Schwingungsversuche aus

der Durchbiegung der liegend angeordneten Stützen unter einer Einzellast von 10 kp gemessen. Die Abweichungen dieser Meßwerte von den Rechenwerten ist bedeutend. Zur Erklärung kann in erster Linie angenommen werden, daß die Stützen unter der Maximallast bei den Versuchen oder durch unsachgemäße Behandlung beim Aufbau in Zustand II geraten sind; als weniger wahrscheinlich wird ein unterschiedlicher Elastizitätsmodul bei Prüfprismen und Stützen angesehen.

B. Stahlstützen

Weitere Knickversuche wurden aus folgenden Gründen an Stahlstützen durchgeführt:

1. Bis zum Eintritt in den Fließbereich lineare Spannungsverteilung über den Querschnitt, somit kein Zustand II, d. h. im elastischen Bereich konstante Biegesteifigkeit.
2. Die Möglichkeit, die Knicklänge an einer bestimmten Stütze zu variieren.
3. Vermutlich kleinere Anfangsverformungen und keine inneren Exzentrizitäten.

Bei den Stahlstützen sollte zugleich untersucht werden, ob ein Einfluß der Querschnittsform auf das Schwingungs- oder Knickverhalten vorhanden ist. Deshalb wurde ein offener Querschnitt, und zwar wegen der geringeren Profiltoleranzen mittelbreite Träger mit parallelen Flanschflächen I PE 100, gewählt. Da es nicht möglich war, vom Walzwerk eine engere als die übliche Toleranz von 0,3 % Maximalabweichung gegenüber der geraden Achse garantiert zu bekommen und auch für ein nachträgliches Richten keine Werkstatt gefunden wurde, blieb nur die Auswahl einer geeigneten Stütze unter mehreren gleichartigen (6) übrig. In Bild 4 A, Anhang, sind die Anfangsverformungen von 3 Stützen aufgetragen. Die Verformungen lagen zwischen 1,15 und 2,1 mm, wobei Verdrillung vorherrschend ist.

C. Modellstützen

Zur Beantwortung einzelner durch die Meßergebnisse an normal großen Stützen aufgeworfener Fragen wurden Untersuchungen an Modellstützen unterschiedlicher Schlankheit aus blankgezogenem Baustahl - in einem Fall auch Rippentorstahl - durchgeführt. Infolge der geringeren Stablänge ergibt sich eine höhere Eigenfrequenz, die mit noch größerer Genauigkeit als die normal großer Stützen ermittelt werden kann.

Die Modellstützen M 2 und M 3 wurden planmäßig ausmittig mit $m = 0,6$ und $2,0$ belastet. Hierzu wurden in die Stabenden keilförmige Nuten von 120° Öffnungswinkel gefräst und als Widerlager gehärtete 90° -Stahlschneiden benutzt.

Bei dem Stützenmodell M 4 wurde versucht, lastabhängige Randbedingungen mit einem Übergang vom Gelenklager zu starrer Einspannung nachzubilden. Daher wurden die Stabenden zylindrisch abgerundet, Radius etwa 3 mm, und die zugehörigen Lagersteine mit einer zylindrisch geformten Nut von etwa 5 mm Radius versehen.

Das Verhältnis von Breite zu Dicke der Modellstützen wurde etwa 4 : 1 gewählt, um die Lagerungsungenauigkeiten herabzusetzen.

D. Modellschale

In die Untersuchungen konnte das Modell eines Kreiszylinderschälendachs aus Plexiglas einbezogen werden. Insbesondere war daran zu prüfen, ob auch hier die Eigenkurven Geraden sind und ob durch Schwingungsmessungen geklärt werden kann, wann ein Stabilitätsfall vorliegt und wann der Verlust der Tragfähigkeit auf die mit zunehmender Flächenbelastung erfolgende Abnahme des Trägheitsmoments der Schale zurückzuführen ist. Deshalb wurde die Originalschale (Schale 1) nach dem ersten Teil der Messungen durch Abschneiden des Randträgers in einen Balken mit Kreissegment-Querschnitt (Schale 2) überführt.

5.2 Versuchsdurchführung

In den nachfolgenden drei Abschnitten werden Einzelheiten zum Versuchsablauf angegeben und besondere Gesichtspunkte bei der Durchführung derartiger Messungen besprochen.

5.2.1 Erzeugung der Belastung und Messung der Deformationen

Für die Durchführung des Versuchsprogramms standen eine Reihe von druckerzeugenden Baustoffprüfmaschinen sowie eine variable "Preßtopf"-Anlage zur Verfügung. Es handelt sich hierbei um kommerzielle Geräte, deren technische Daten zusammen mit denen der elektrischen Meßgeräte im Anhang, Tafel A, zu finden sind. Einen Eindruck von der Versuchsanordnung bzw. typischen Aufbauten und den verwendeten Lagern sollen die Bilder 8 bis 11 vermitteln.

Zur Prüfung der Stahlbetonstützen 1 bis 4 wurde ein 20 Mp-Preßtopf verwendet, wie er in Bild 8 am hinteren Riegel des Prüfgerüsts erkennbar ist. Das transportable Reglerpult, rechts im Bild, enthält die zugehörige Pumpe und das Manometer. Die Lasteintragung erfolgte zwischen den beiden I-Stahlträgern von oben. Die schwingungstechnischen Meßgeräte wurden jeweils kurz unterhalb der Traglastgrenze zum Schutze gegen eine etwaige Zerstörung abgebaut.

Die Stützen 1 bis 3 dienten vorwiegend der Traglastermittlung und standen deshalb für Schwingungsuntersuchungen jeweils nur kurzfristig zur Verfügung, während an Stütze 4 und allen weiteren ausführliche Versuche durchgeführt werden konnten. Dabei stellte sich heraus, daß die Preßtopfanlage für derartige Messungen wegen des zu großen transversalen Spiels des Kolbenstempels unzweckmäßig ist. Deshalb wurden die weiteren Versuche mit einer 600-Mp-Baustoffprüfmaschine durchgeführt.

Die Messung der Durchbiegung erfolgte mit einer 1/100 mm-Meßuhr in Systemmitte bzw. mit einer zweiten Uhr am unteren Viertelpunkt. Außerdem wurden zumindest in der Mitte der Stützen auf beiden senkrecht zur Bieigungs- und Schwingungsrichtung liegenden Seiten 150 mm lange Dehnungsmeßstreifen angebracht und damit die Verformungen in Abhängigkeit von der Last ermittelt. Bei den Stahlstützen wurden die Meßstreifen auf dem Steg befestigt; damit ist eine wesentlich genauere Ermittlung der Druckverformungen als der Biegeverformungen möglich.

Die einzelnen Stützen wurden mit Wasserwaage und Lot unter einer Vorlast von etwa 1 bis 5 % der Eulerlast justiert.

Es wurde i. a. für jede Laststufe ein anderes Meßprogramm hinsichtlich Schwingungsform, Spannungslinearität, Spektrum, Verformung, Dämpfung und Oberschwingungen gewählt. Insgesamt wurden zwischen unbelastetem Zustand und berechneter Eulerlast etwa 20 Laststufen vorgesehen. Lediglich die Eigen- oder die Resonanzfrequenz wurde bei jeder Laststufe ermittelt. Zur Vermeidung von Kriechinflüssen wurde die Meßdauer bei einer Laststufe auf etwa 15 min begrenzt; sofern längere Unterbrechungen unvermeidbar waren, wurde die Last zeitweilig herabgesetzt.

Bei den vier planmäßig mittig belasteten Stahlbetonstützen wurden mindestens zwei voneinander unabhängige Meßreihen durchgeführt. Zwischen diesen Reihen wurden die Stützen aus den Lagern entfernt bzw. völlig abgebaut; die Zeitdifferenz zwischen den einzelnen Messungen ist auf den Diagrammen vermerkt. Unter diesen Umständen darf die Reproduzierbarkeit der Meßwerte gewiß als gut bezeichnet und die gemessene Frequenzabhängigkeit als typisch angesehen werden.

Die Belastung der Schalenmodelle, vgl. Bild 12, erfolgte als Flächenlast an $2 \times 8 + 2 \times 9 = 34$ Punkten durch Stahlplatten von 100 bis 400 g Masse. Die Platten wurden entweder in abgehängten Behältern untergebracht oder - zur Vermeidung von Saitenresonanzen - direkt punktweise auf der Schalenfläche befestigt.

5.2.2 Die Lagerung der Stützen

Aus versuchstechnischen Gründen mußte auf die Untersuchung starr eingespannter Stützen verzichtet werden, obwohl diesen die größere praktische Bedeutung beizumessen ist. Erfahrungsgemäß ist eine Vorrichtung zur Erzielung einer starren Einspannung ausreichend, wenn ihre Masse etwa hundertmal größer als die des schwingenden Systems ist. Derartige Vorrichtungen sind bei einem Stützensgewicht von ca. 100 kg überhaupt nicht zu installieren. Allerdings ist auch am Bauwerk die Masse an der Durchdringungsstelle bzw. dem Fundament nie derart groß im Vergleich zur Stützenmasse. Durch die gegenüber gelenkiger Lagerung viermal höhere Knicklast würden sich weitere Schwierigkeiten ergeben. Um die gleiche kritische Spannung bei beiderseitiger Einspannung zu erzielen, ist eine Verdoppelung der Schlankheit erforderlich, die bei Herabsetzung des Querschnitts zu technologischen Problemen und bei Vergrößerung der Länge zu erheblich erhöhtem Versuchsaufwand führt.

Gelenklager müssen jedoch nicht nur statisch, sondern auch schwingungstechnisch wirksam sein. Die zuerst verwendeten Lager genügte zwar den statischen Anforderungen, jedoch bestanden hinsichtlich der dynamischen Eignung Bedenken. Insbesondere war zunächst nicht klar, ob der ansteigende Frequenzverlauf bei höheren Laststufen auf lastabhängige Randbedingungen zurückgeführt werden

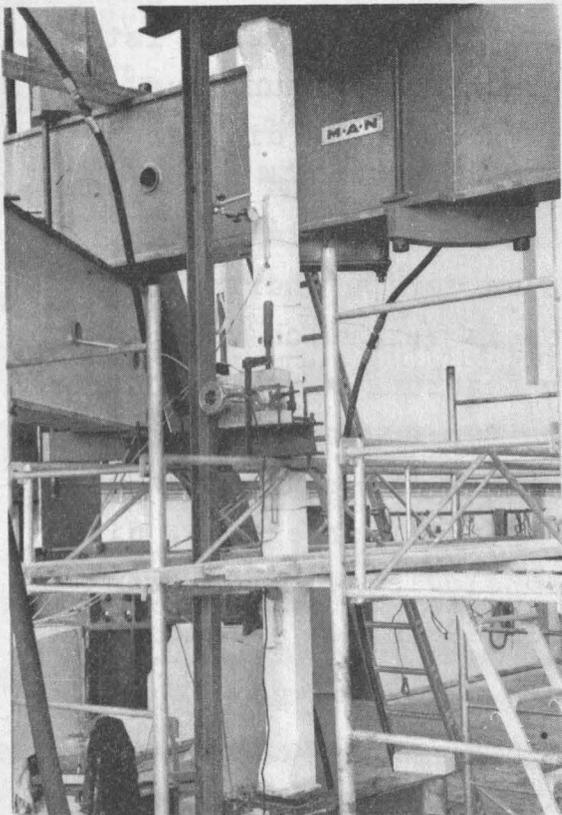
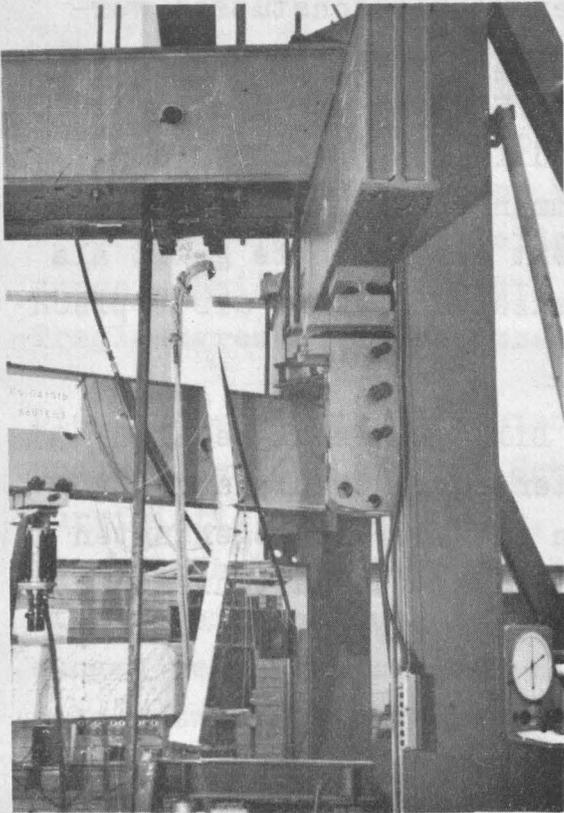


Bild 8 und 9:

Stütze 2 bzw. 1
Versuchsaufbau mit
"PreStopf"-Anlage

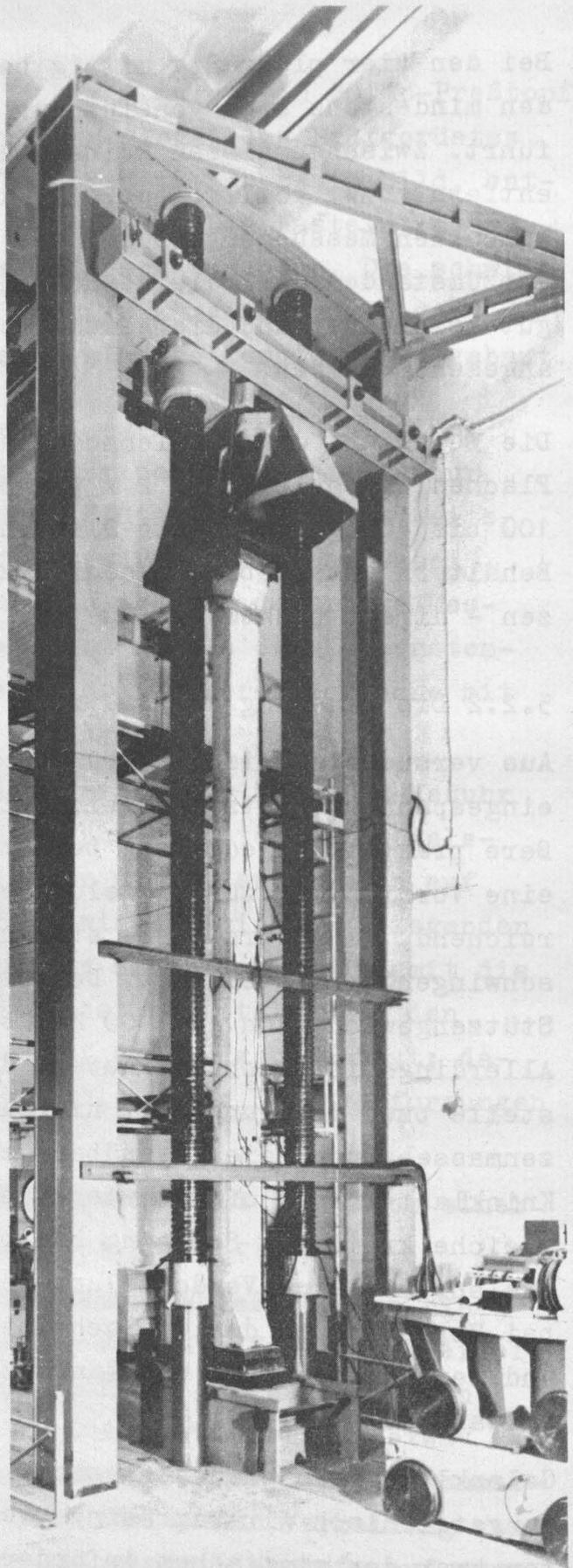


Bild 10:

600 Mp-Baustoffprüf-
maschine mit gelenkig
gelagerter Stütze,
 $\lambda = 100$

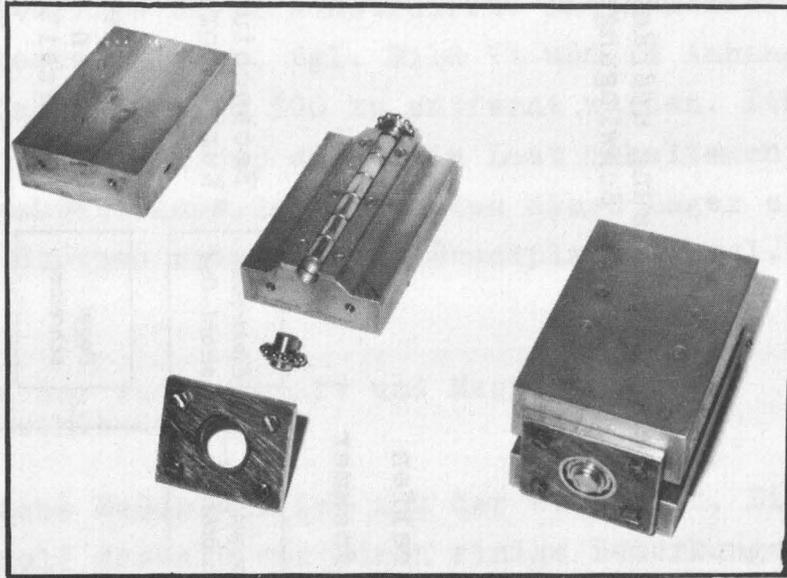


Bild 11: Gelenklager für schwingungstechnische Untersuchungen an axial belasteten Stützen

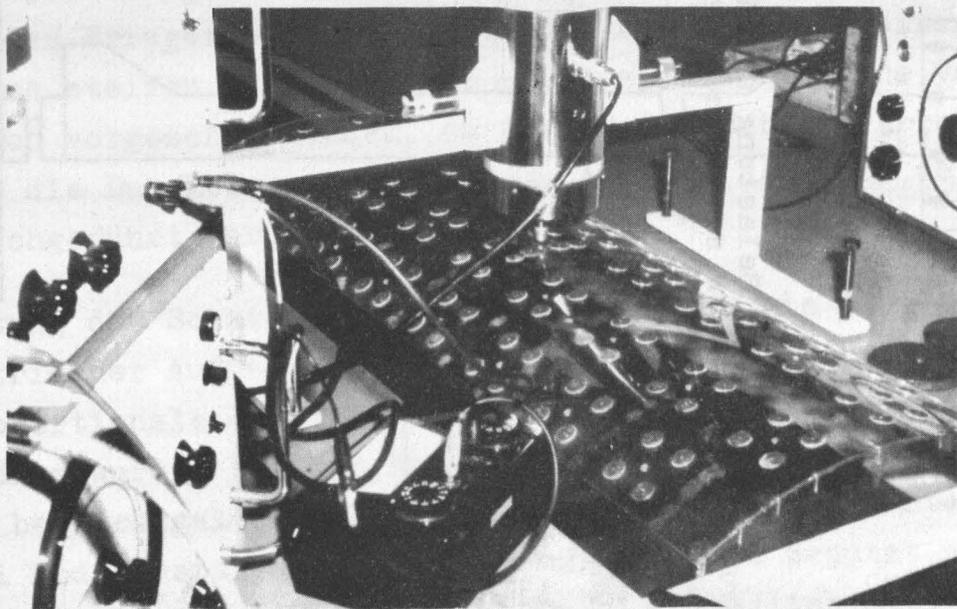


Bild 12: Anordnung zur Messung des Schwingungsverhaltens belasteter Modellschalen

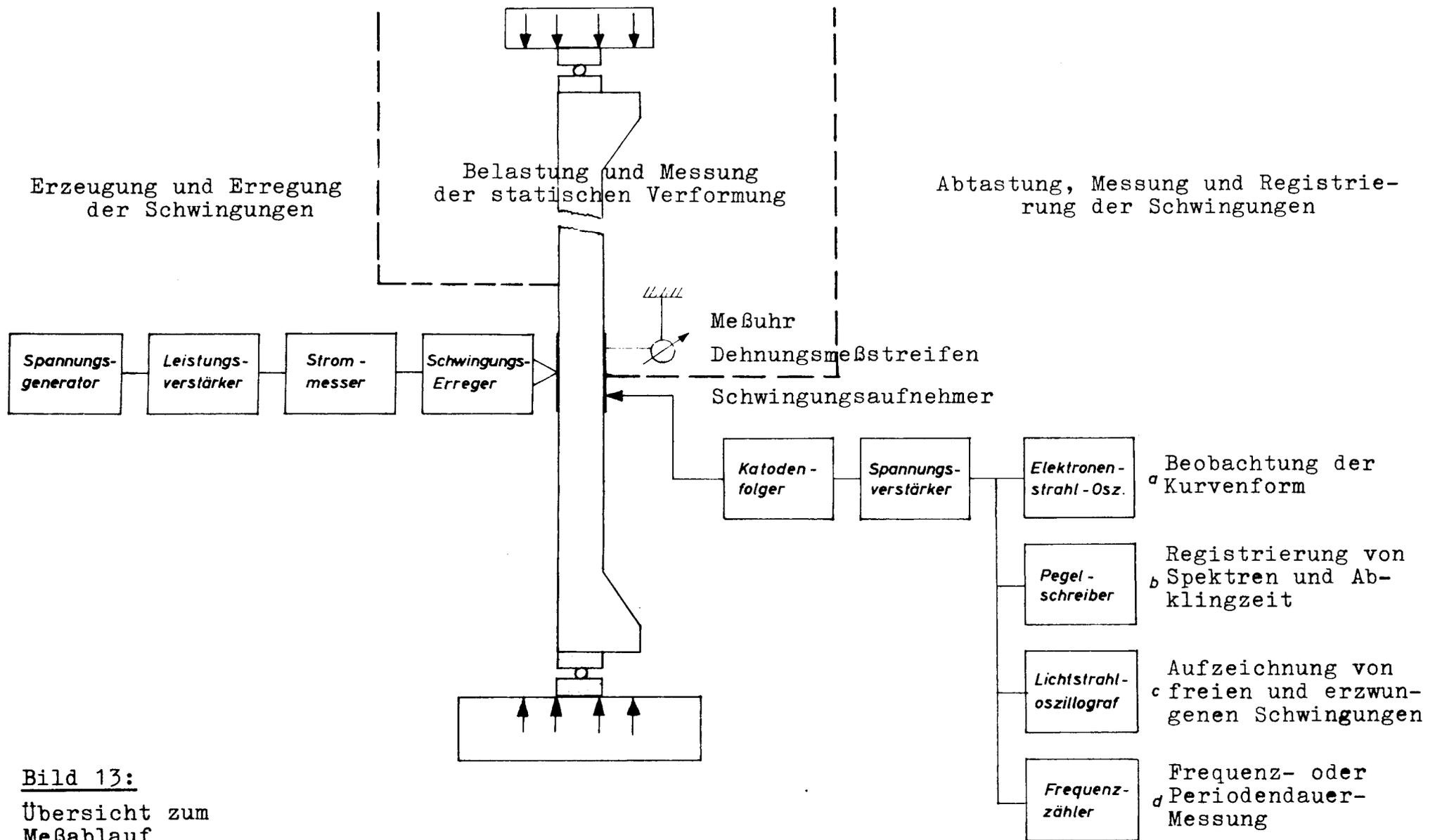


Bild 13:
 Übersicht zum
 Meßablauf

mußte, obwohl die Messungen der Schwingungsform keinen Anhaltspunkt für diese Vermutung ergaben. Sicherheitshalber wurden jedoch neue, zweiteilige Lager konstruiert. Die Zentrierung erfolgte durch Schulterkugellager, vgl. Bild 11 und im Anhang Bild 5 A, die bei einer Last von etwa 500 kp entfernt wurden. Ein seitliches Auswandern der dann nur durch die Last gehaltenen Stützen wurde nie beobachtet. Außerdem erlaubten diese Lager ein freies Aufstellen der Stützen zwischen den Druckplatten, vgl. Versuch b mit Stütze 10.

5.2.3 Erzeugung der Wechselkraft und Messung der Schwingbeschleunigung

Der grundsätzliche Meßablauf ist aus der Übersicht, Bild 13, ersichtlich und soll deshalb nur durch einige Bemerkungen erläutert werden.

Der in Systemmitte angebrachte Schwingungserreger liefert eine dem elektrischen Strom proportionale Wechselkraft, die bei den Versuchen grundsätzlich weniger als 0,8 kp betrug. Da die statische Zusatzbelastung durch den Erreger jedoch noch unter 0,3 kp lag, mußte die Erregerspitze an den Stützen befestigt werden. Die Halterung des Erregertopfes erfolgte, von den Stützen getrennt, in besonders steifen Aufbauten. Es mußte allerdings eine variable Konstruktion vorgesehen werden, da der Maximalhub des Erregers geringer als die Durchbiegung der Stütze war und der Topf deshalb ständig nachgeführt werden mußte.

Zur Abtastung der Schwingungen wurde vorwiegend ein 33 g schwerer piezoelektrischer Aufnehmer verwendet, dessen der Schwingbeschleunigung proportionale elektrische Spannung einem Frequenzanalysator zugeführt wurde. Bei den Modelluntersuchungen wurde die Schwingungsform berührungslos abgetastet. Die Analysiereinrichtung konnte nur bei Modellversuchen bzw. Oberschwingungen benutzt werden, da eine Filterung der Spannung erst ab 20 Hz möglich ist. Die Registrierung der Spektren bei der ersten und auch bei einigen höheren Laststufen erfolgte deshalb mit einem Terzfilteranalysator, dessen unterer Filterbereich die Mittenfrequenz 12,5 Hz besitzt.

Eine Notwendigkeit zur Verwendung von Filtern bestand nicht, da die erzeugte Schwingbeschleunigung weit - 20 bis 40 dB - über dem Störpegel lag, der im wesentlichen durch die Ölpumpen der Prüfmaschinen bedingt war.

Als Resonanzfrequenz wurde die am Generator zur Erzielung von Spannungsresonanz eingestellte Frequenz abgelesen. Durch die Verwendung eines elektronischen Frequenzzählers ergab sich, insbesondere bei den Stützen mit tiefer Eigenfrequenz, keine Genauigkeitssteigerung, da die Genauigkeit infolge der geringen Dämpfung durch die Einstellunsicherheit der Resonanz begrenzt wird.

Zur Messung der Eigenfrequenz und der Abklingzeit - über 60 dB - wurden freie Schwingungen durch Abschalten der Erregung bzw. Entfernen der Erregerspitze oder durch Anschlagen der Stützen erzeugt, mit dem Schleifenzillografen registriert und anschließend ausgewertet.

Während jedes Versuchs wurde die Schwingbeschleunigung (Empfangsspannung) in Abhängigkeit von der Wechselkraft (Erregerstrom) bei mehreren Laststufen aufgenommen und dann die verwendete Anregungsstärke so eingestellt, daß ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen den beiden Größen vorhanden war. Diese Linearität, die eine wesentliche Voraussetzung für derartige Versuche darstellt, war erwartungsgemäß bei den Stahlstützen besser als bei den Stahlbetonstützen, vgl. hierzu Bild 6 A im Anhang.

6. Darstellung der Meßergebnisse

Die Meßergebnisse werden vorzugsweise in Form von Diagrammen mitgeteilt, die als Bilder 14 bis 31 am Schluß dieser Arbeit, vor dem Anhang, zusammengestellt sind.

Der Inhalt der einzelnen Diagramme kann aus Tafel 6 ersehen werden.

Bei der Besprechung der Meßergebnisse wird die kritische Last, d. i. die experimentell bestimmte Eulerlast, unterschiedlich gekennzeichnet, und zwar mit

- \tilde{P}_K , bei Ermittlung aus der Eigen- oder Resonanzfrequenz bzw. der Eigengeraden,
- \bar{P}_K , bei Ermittlung aus der Mittendurchbiegung,
- P_E , bei Berechnung aus Knicklänge und Biegesteifigkeit nach Tafel 3; Eulerlast.

Die kritische Last, die man aus den gemessenen Frequenzkurven durch einfache Verlängerung der Eigengeraden bis $f^2 = 0$ findet, kann aus den entsprechenden Bildern wegen der gewählten Darstellungsweise nicht unmittelbar entnommen werden. Es ist jedoch jeweils der Wert $P = \frac{P_K}{4}$ eingezeichnet; der sich für $f^2 = 0,75 f_0^2$ ergibt. Dabei ist f_0^2 der Schnittpunkt der Eigengeraden mit der Ordinatenachse. Rechenwerte für die Frequenz werden mit f_{00} bezeichnet.

Die Eigengeraden wurden zeichnerisch festgelegt. Eine Berechnung von Regressionsgeraden, wie sie in Einzelfällen sinnvoll erscheinen mag, würde die Genauigkeit von \tilde{P}_K nur unwesentlich verbessern, da in keinem Fall die Summe aller gemessenen Werte zur Bestimmung von \tilde{P}_K Verwendung finden kann, sondern der Linearitätsbereich mehr oder weniger willkürlich abgegrenzt werden muß.

Tafel 6

Zusammenstellung der Meßergebnisse
(zugehörige Darstellungen am Ende der Arbeit)

Bild

- 14 Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen ϵ_M/ϵ_P von der Belastung P, ausmittig belastete Stahlbetonstützen 1 und 2
- 15 Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen ϵ_M/ϵ_P von der Belastung P, mittig belastete Stahlbetonstützen 3 und 5, $\mu = \mu' = 0,025$
- 16
- 17 Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen ϵ_M/ϵ_P von der Belastung P, mittig belastete Stahlbetonstützen 4 und 6, $\mu = \mu' = 0,005$
- 18
- 19 Zusammenfassende Darstellung der relativen Abweichungen von der $f^2(P)$ -Linearität als Funktion der bezogenen Mittendurchbiegung δ/k
- 20 Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f_3^2 der dritten Harmonischen von der Belastung P, Stahlbetonstützen 5 und 6
- 21 Schwingungsform in Abhängigkeit von der Belastung P, Stahlbetonstützen 5 und 6
- 22 Schwingungsform in Abhängigkeit von der Belastung P, Stahlbetonstütze 7 und Stahlstütze 10, gelenkig gelagert
- 23 Verlustfaktor d von Stahlbetonstützen in Abhängigkeit von der Belastung $\sigma = \frac{P}{F}$
- 24 Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen ϵ_M/ϵ_P von der Belastung P, mittig belastete Stahlstützen 8, 9 und 10
- 25 Einspanneffekt der "frei" aufgestellten Stahlstütze 10 (Lagerung ohne besondere Vorkehrungen)
- 26 Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 und der Ausbiegung δ von der Belastung P, Modellstützen M 1, M 2 und M 3
- 27 Änderung der Schwingungsform bei ausmittiger Belastung, Modellstütze M 3, Ausmittigkeit $m = 2,0$
- 28 Untersuchung des Einspanneffektes von Modellstützen
- 29 Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 und der Mittendurchbiegungen δ_S, δ_R von der Belastung P, Modellschale 1 - mit Randträger
- 30 Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 und der Mittendurchbiegung δ von der Belastung P, Modellschale 2 - ohne Randträger
- 31 Schwingungsform der Modellschalen, ohne Zusatzbelastung

Frequenzverlauf und Ausbiegung bzw. Deformation wurden in Abhängigkeit von der Last in ein und dasselbe Diagramm eingetragen, um den Zusammenhang zwischen Ausbiegung bzw. Deformation und den Abweichungen von der theoretisch zu erwartenden Eigengeraden zu verdeutlichen.

7. Diskussion der Meßergebnisse

7.1 Die Lastabhängigkeit der Resonanzfrequenz

7.1.1 Ausmittig belastete Stahlbetonstützen

Bei den Stützen 1 und 2 ist eine deutliche Abnahme des Frequenzquadrates mit zunehmender Last überhaupt nicht erkennbar, sondern im Gegenteil eine Zunahme vorhanden, die bei Stütze 1 bereits im Bereich geringer Lasten und bei Stütze 2 im mittleren Lastbereich auftritt, vgl. Bild 14. Dieses Ergebnis überrascht, da zunächst auch bei nicht mittig belasteten Stützen eine gewisse Frequenzabnahme bis zum Eintreten größerer Durchbiegungen bzw. Verformungen erwartet worden war. Die hier vorhandenen planmäßigen Ausmittigkeiten $m = 1,2$ und $0,9$ sind also bereits viel zu groß, um noch einen Übergang vom Stabilitäts- zum Gleichgewichtsproblem feststellen zu können.

Von weiteren Versuchen mit planmäßig ausmittig belasteten Stützen normaler Größe wurde deshalb abgesehen.

Bei Stütze 2 und anderen wurden die Messungen bis zum Erreichen des Bruchzustandes durchgeführt. Wie aus Bild 14 zu ersehen ist, konnte damit die mit dem stärkeren Aufreißen des Betons auf der Zugseite (Zustand II) eintretende Abnahme der Biegesteifigkeit - ca. ab 10 Mp - gut verfolgt werden. Oberhalb von 14,0 Mp war bei Stütze 2 ein stabiles Gleichgewicht nicht mehr vorhanden; die Deformationen nahmen unbeschränkt zu, d. h. $B \rightarrow 0$. Auch durch Lastverringern von $P = 14,2$ auf 12 Mp konnte die Stabilität nicht wiedergewonnen werden, sondern bei 12,3 Mp trat der Bruch ein. Dieser Versuch ist ein Beispiel für das bei ausmittig be-

lasteten Stahlbetonstützen mögliche Instabilitätsverhalten durch unterschiedlich raschen Anstieg von äußerem und innerem Moment. Die Frequenzabhängigkeit zeigt deutlich, daß diese Art "Gleichgewichtsunmöglichkeit" ein anderes als das durch Verzweigung gekennzeichnete Stabilitätsproblem darstellt.

7.1.2 Mittig belastete Stahlbeton- und Stahlstützen

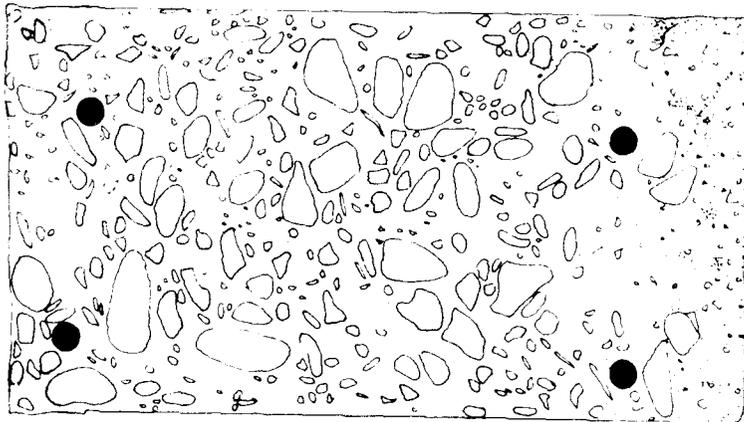
Die mittig gedrückten Stützen sind - unabhängig vom Material - ebenfalls durch ein nichtlineares oder auch nichtmonotones Frequenzverhalten ausgezeichnet, vgl. Bild 15 bis 18. Wenngleich gewisse Bereiche einen linearen Zusammenhang zwischen Quadrat der Frequenz und Last erkennen lassen, so sind doch andererseits größere Abweichungen bei geringen und bei hohen Lasten so ausgeprägt vorhanden, daß der für eine schwingungstechnische Vorhersage der Knicklast erforderliche Linearitätsbereich zu gering erscheint.

Bei den Stahlstützen, deren Schlankheit im Verhältnis 1 : 2 variiert, fällt der Zusammenhang zwischen Linearitätsbereich und der Größe der Ausbiegung bzw. dem Verhältnis der Verformungen besonders auf, Bild 24. Auch bei den Stahlbetonstützen, deren Schlankheit etwa 130 beträgt, wird der Linearitätsbereich umso größer, je geringer die Ausbiegung und somit das äußere Moment ist. Deshalb darf aus dem Verhalten der Stahlstützen nicht der Schluß gezogen werden, daß es sich hierbei um eine Abhängigkeit von der Schlankheit handelt. Die Schlankheit ist nur insoweit von Bedeutung, als die Größe ungewollter Vorverformungen proportional mit der Stützenlänge, d. h. der Schlankheit wächst und damit die Realisierung eines Stabilitätsproblems immer unwahrscheinlicher wird.

Ein besonderes Frequenzverhalten wurde bei Stütze 4 beobachtet. Diese Stütze weist zwei Linearitätsbereiche auf, die durch einige Laststufen mit zunehmender Eigenfrequenz verbunden sind. Wie aus der Mittendurchbiegung hervorgeht, handelt es sich offenbar um eine Stütze, die gegensinnig zu einer inneren Exzentrizität belastet wurde. Diese Erklärung ergibt sich aus der Reproduzierbarkeit von drei Versuchen, zwischen denen die Belastungseinrichtung verändert wurde; bei äußerer Exzentrizität

ist unter diesen Umständen eine gleichbleibende Richtung der Ausbiegung nicht zu erwarten.

Nach dem Bruch der Stütze wurde festgestellt, daß die Bewehrung einseitig lag und die Betonüberdeckung ca. 100 % von den Sollwerten abwich. Die Skizze zeigt den Querschnitt an der Bruchstelle, etwa 20 cm unterhalb der Stützenmitte.



Eine Ausdeutung des Versuchs erscheint unter diesen Umständen müßig. Es ist jedoch bemerkenswert, daß der geringe Linearitätsbereich bei etwa 5 Mp ausreicht, um die Eulerlast recht genau zu bestimmen.

Im allgemeinen wird man aber das "richtige" Linearitätsintervall kaum kennen, und deshalb ist in derartigen Fällen weder eine Aussage über die Knicklast, noch über das Vorhandensein innerer Exzentrizität mit Sicherheit möglich.

7.1.3 Der typische Verlauf der gemessenen Frequenzkurven

Aufgrund des vorgefundenen Frequenzverhaltens im geprüften Lastbereich, vgl. Bild 15 bis 18, 24 und 26, erscheint es zweckmäßig, an den einzelnen Kurven drei Bereiche zu unterscheiden.

A. Einspannbereich

Nichtlinearer Frequenzverlauf im Bereich geringer Lasten bis zum Übergang in die Eigengerade, vgl. insbesondere Bild 15 und 24.

Dieser nichtlineare Bereich, dem im Hinblick auf das Ziel dieser Arbeit nur eine geringe Bedeutung zukommt, wird auf anfängliche Einspanneffekte zurückgeführt. Die Konstruktion der Lager erlaubt bei geringer Last ein gewisses transversales Spiel; die Randbedingungen $w(0,l) = 0$ werden somit erst oberhalb einer bestimmten Mindestlast erfüllt.

B. Linearitätsbereich

Bereich mittlerer Lasten, mit einer zur Bestimmung der Eulerlast ausreichenden Linearität.

C. Biegebereich

Bereich hoher Lasten mit nichtlinearer Frequenzzunahme.

Dieser Bereich hängt eindeutig von der Größe der Mittendurchbiegung bzw. dem Verhältnis der Verformungen ab, vgl. Stützen 1, 2, 3, 5, 8 und 9, aber auch Stützen 6 und 10.

Der Wiederanstieg der Frequenz kann keinesfalls mit der Arbeitslinie in Verbindung gebracht werden. Wegen der grundsätzlich bzw. im Fließbereich vorhandenen unterlinearen $\sigma - \epsilon$ -Charakteristik aller homogener Baustoffe ist bei hohen Materialbeanspruchungen mit einer verstärkten Frequenzabnahme zu rechnen, wie sie bei Stütze 2 auch nachgewiesen werden konnte.

Da dieser Bereich die Bestimmung der Eulerlast von Stützen durch Messung ihrer Eigenfrequenz stark einschränkt, wurde er durch gesonderte Untersuchungen eingehend studiert.

7.2 Die Abweichungen von der Linearität im oberen Lastbereich

Nachdem bei den planmäßig ausmittig belasteten Stützen im quasielastischen Bereich nahezu keine Frequenzabnahme ermittelt werden konnte und bei den mittig belasteten Stahlbetonstützen und Stahlstützen im oberen Lastbereich eine mehr oder weniger starke jedoch immer deutlich meßbare Frequenzzunahme festgestellt wurde, lag die Vermutung nahe, daß es sich hierbei um den gleichen, durch zusätzliche Biegemomente verursachten Effekt handelt.

Der Zusammenhang zwischen Frequenzanstieg und Ausbiegung wurde an Stütze 8 auch unmittelbar wie folgt nachgewiesen:

Mit einem schlaffen Kunststoffband wurde - bei einer Belastung von $P \approx 2500$ kp - in Systemmitte eine Querkraft aufgebracht, die die Ausbiegung von 7,9 mm auf 4,3 mm verringerte. Danach hatte die Resonanzfrequenz um 1 Hz, d. h. um etwa 13 %, abgenommen, vgl. Bild 24.

Die Untersuchungen mit den Modellstützen M 1 bis M 3 haben den Zusammenhang zwischen Ausmittigkeit und Frequenzanstieg im Biegebereich nochmals bestätigt und erlauben eine Erklärung dieses Verhaltens.

Der Linearitätsbereich verringert sich offensichtlich mit wachsender Ausmittigkeit. Die Frequenzzunahme kann keinesfalls auf lastabhängige Randbedingungen zurückgeführt werden, da erstens die Lagerung für alle drei Modellstützen gleich ist und zweitens die Frequenzzunahme bereits bei geringsten Lasten beobachtet wird, wenn die Ausmittigkeit hinreichend groß ist.

Das verwendete Meßverfahren, die Messung der Resonanzfrequenz fremderregter Schwingungen anstelle der Ermittlung der Eigenfrequenz freier Schwingungen, ist übrigens ebenfalls keine Erklärung für den Biegebereich. Auch die mit einem berührungslosen Aufnehmer beim Abklingvorgang aus dem eingeschwungenen Zustand registrierten Oszillogramme ergaben eine Frequenzzunahme bei annähernd gleichen Eigenfrequenzen.

Erst die Messung der Schwingungsform erlaubt eine qualitative Deutung des Frequenzanstiegs.

Im Gegensatz zur mittig belasteten und sich daher unter Last nur geringfügig verformenden Stützen erweist sich die Schwingungsform eines stark exzentrisch gedrückten Stabes als stark lastabhängig. Das in Bild 27 dargestellte Versuchsergebnis zeigt, daß mit zunehmender Belastung die Amplitude der Grundschiwingung abnimmt und dagegen die Amplitude der 1. Oberschiwingung wächst. Da die Anregung etwa in Systemmitte erfolgte, wo für die Grundschiwingung ein Schwingungsbauch und für die 1. Oberschiwingung ein Schwingungsknoten vorhanden ist, würden die Verhältnisse bei Anregung in einem Viertelpunkte noch deutlicher werden.

Im Gegensatz zur Eigenfrequenz der Grundschwingung wurde die Frequenz der Oberschwingung von der Belastung so gut wie gar nicht beeinflusst ($\pm 2\%$)!

Ein Vergleich der gemessenen Schwingungsformen mit den für gelenkige Lagerung und Einspannung gerechneten Formen beweist wiederum, daß "Einspanneffekte" keine befriedigende Erklärung liefern.

Die Ursache des Frequenzenanstieges wird vielmehr darin gesehen, daß mit zunehmender Biegung die 0-Knotenschwingung als unterste Eigenschwingungsform verschwindet und die 1-Knotenschwingung mit ihrer höheren Eigenfrequenz diese Stelle einnimmt. Damit findet ein Übergang im Schwingungsverhalten vom Stab zum Bogen statt, wie er vom Parabelbogen her bekannt ist /15/.

Im folgenden soll untersucht werden, ob ein fester Zusammenhang zwischen Biegung und Verformung einerseits und derjenigen im Versuch gut reproduzierbaren Frequenz, die Linearitäts- und Biegebereich voneinander trennt, besteht. Hierzu werden zunächst die auf die Frequenzquadrate der unbelasteten Stützen bezogenen Abweichungen von der Eigengeraden $\frac{\Delta f^2}{f_0^2}$ den auf die Kernweite bezogenen Mittenausbiegungen $\frac{\delta}{k}$ gegenübergestellt. Dabei tritt die Last nur noch als impliziter Parameter auf. Als Bezugswerte f_0^2 wurden die in Tafel 7 aufgeführten, durch Extrapolation auf $P = 0$ gewonnenen Werte verwendet.

Die aus sieben Versuchen an Stahlbetonstützen, Stahlstützen mit offenem Querschnitt und Modellstäben berechneten Abweichungen, die in Bild 19 dargestellt sind, zeigen, daß die Frequenzzunahme - von einem Übergangsbereich abgesehen - in erster Näherung eine lineare Funktion der Durchbiegung ist. Im Bereich der ausgeprägten Frequenzzunahme $\frac{\Delta f^2}{f_0^2} > 0,20$ lautet die Gleichung der Geraden: $\frac{\Delta f^2}{f_0^2} = \left(\frac{\delta}{k}\right)_0 + 0,38 \frac{\delta}{k}$. Die Anfangskrümmung dieser Kurven ist konkav, wenn wesentliche Abweichungen erst bei $\frac{\delta}{k} \geq 1$ auftreten und wird konvex, falls die Frequenzabweichungen schon bei geringen Verformungen vorhanden sind. Der letztere Fall dürfte nur eintreten, wenn größere Imperfektionen oder planmäßige Ausmittigkeiten vorhanden sind, z. B. bei Modellstütze M 3 und wahrscheinlich auch bei Stütze 5.

Geht man von dieser linearen Gesetzmäßigkeit aus, dann bezeichnet der Schnittpunkt der extrapolierten Geraden mit der Abszissenachse $(\frac{\delta}{k})_0$; d. h. $\Delta f_0 = 0$, den Beginn des Frequenzanstieges im Biegebereich bzw. die obere Grenze für die Linearität der Eigenkurven.

Mit diesem fiktiven Anfangswert ergibt sich für das Verhältnis der Verformungen $\frac{\epsilon_m}{\epsilon_p}$ der exzentrisch gedrückten Stützen bzw. Stäbe, die hinsichtlich der Deformationen eindeutige Ergebnisse liefern:

Stütze	$m^*)$	+	$(\frac{\delta}{k})_0$	=	$\frac{\epsilon_m}{\epsilon_p}$
2	0,9	+	0,2	=	1,1
M 2	0,6	+	0,4	=	1,0
M 3	2,0	-	0,8	=	1,2
Mittelwert				=	1,1

*) Die Angabe von m ist schätzungsweise um $\Delta m = \pm 0,3$ wegen ungewollter Ausmittigkeit unbestimmt.

Wesentliche Abweichungen von der Linearität der Eigengeraden sind also zu erwarten, wenn die statische Biegeverformung größer als die mittlere Druckverformung wird oder, was dasselbe bedeutet, wenn - idealelastischer Werkstoff vorausgesetzt - Zugspannungen im Querschnitt auftreten.

In dieses Schema paßt Stütze 5 nicht, obgleich bei großen Abweichungen die Steigung der Tangente der von Stab M 3 entspricht.

Mit $\frac{\epsilon_m}{\epsilon_p} = 1,1$ und $(\frac{\delta}{k})_0 = -0,3$ ergäbe sich eine Anfangsbiegung bzw. Ausmittigkeit von $m = 1,4$ bzw. $e = 1,87$ cm, die beim Versuch nicht unbemerkt geblieben wäre, während sich aus dem bei $P = 4800$ kp gemessenen Verhältnis der Verformungen und der Mittenausbiegung nur $m = 0,45 - 0,135 \approx 0,3$ ergibt. Allerdings ist es möglich, daß auch bei Stütze 5 der Frequenzverlauf durch innere Exzentrizitäten bestimmt ist, die nicht an der Ausbiegung oder der Verformung in Systemmitte erkennbar zu sein brauchen.

Aufgrund dieser ungeklärten Ausnahme muß die Gültigkeit eines linearen Zusammenhanges zwischen Last und Quadrat der Eigenfrequenz vorläufig auf den Wert $\frac{\epsilon_H}{\epsilon_P} \leq 0,3$ eingeschränkt werden.

Zusammenfassung 7.2

Die Begrenzung der Linearität im oberen Lastbereich beruht auf dem Übergang im Schwingungsverhalten vom Stab zum Bogen.

Bei konstanter Schwingungsanregung nimmt die Amplitude der Grundschwingungsform ab, während die durch eine antimetrische Schwingungsform ausgezeichnete 2. Harmonische mit zunehmender Belastung stärker hervortritt.

Aufgrund des ungünstigsten Meßergebnisses muß mit dem Beginn des Biegebereichs, d. h. mit dem Ende des Linearitätsintervalles gerechnet werden, wenn das in Systemmitte gemessene Verhältnis der Verformungen $\frac{\epsilon_H}{\epsilon_P}$ etwa 0,3 beträgt, d. h., wenn die Verdrehung des Querschnittes $\gamma = \frac{2}{h} \epsilon_H$ größer als etwa 30 % der Stauchung ϵ_P wird.

7.3 Bestimmung der kritischen Last aus der Eigengeraden

In Tafel 7 sind die aus den gemessenen Eigengeraden ermittelten kritischen Lasten \tilde{P} und die Quadrate der Resonanzfrequenz f_o^2 für alle Stützen zusammengestellt. Außerdem sind die unter Verwendung der in Tafel 4 angegebenen Biegesteifigkeiten und Knicklängen berechneten Eulerlasten P_E , Frequenzquadrate f_o^2 sowie die aus der gemessenen Mittendurchbiegung statisch bestimmten Knicklasten \bar{P}_K , s. Abschnitt 7.4, mit aufgeführt. Verschiedene, an ein und derselben Stütze durchgeführte Messungen sind mit "a" bzw. "b" bezeichnet.

Im einzelnen ist zu den Ergebnissen folgendes zu bemerken:

1. Stütze 5 und 6: Experimentell ermittelte Resonanzfrequenz und kritische Last \tilde{P}_K sowie auch \bar{P}_K liegen niedriger als die Rechenwerte (eingeklammert).

Als Ursache wird die bereits angegebene Minderung der Biegesteifigkeit angesehen. Bei Stütze 6, vgl. Bild 18, ist diese Verringerung vermutlich während oder nach der ersten Belastung erfolgt, da anfangs für $P \rightarrow 0$ wesentlich höhere Resonanzfrequenzen gemessen wurden, die auf den in Tafel 7 angegebenen Wert führen.

2. Stütze 4: Der nicht eingeklammerte Wert für \tilde{P}_K wurde aus dem ersten Linearitätsbereich ermittelt, die anderen aus dem zweiten, vgl. Bild 17.
3. Stütze 8: Die Steigung ist nicht eindeutig. Das richtige Wertepaar kann leicht mit Hilfe der Faustformel (2.47) ermittelt werden.
4. Die extrapolierten Resonanzfrequenzen f_0 sind ausnahmslos niedriger als die berechneten f_{00} , und zwar beträgt die auf die Rechenwerte bezogene Differenz ca. 5 bis 10 %, bei Stütze 3 sogar 15 %. Dieser Sachverhalt wird nachfolgend erklärt:

Nach den theoretischen Überlegungen (vgl. Bild 4, $\psi = 1$) ergibt sich für eine gelenkige Lagerung mit geringem Einspanneffekt eine Frequenzabhängigkeit, die im mittleren bis hohen Lastbereich durch höhere Eigenfrequenzen und eine etwas höhere Knicklast ausgezeichnet ist. Wird aus einer derartig durchhängenden Eigenkurve die Eigen-"Gerade" als Tangente im mittleren Lastbereich bestimmt, so ergibt sich ein zu geringer Wert für f_0 .

Die Ursache dieser systematischen Abweichungen ist nicht etwa in der bei der Berechnung von f_{∞}^2 vernachlässigten Lagermasse zu suchen. Eine Abschätzung für den ungünstigsten Fall, Stütze 10, ergibt, daß der Einfluß der zusätzlichen Trägheitswirkung auf die Eigenfrequenz weniger als 2 % ausmacht.

Zwischen den in Tafel 7 angegebenen, dynamisch bestimmten und gerechneten Eulerlasten bestehen folgende relative Differenzen $\frac{\tilde{P}_K - P_E}{P_E}$:

Stütze	Messung a	Messung b
3	- 0,03	- 0,01
4	- 0,01	- 0,01
5	\pm 0	+ 0,06
8	- 0,02	
9	\pm 0	
10	+ 0,03	

Stütze 6 wurde wegen der fraglichen Biegesteifigkeit weder hierbei noch in Abschnitt 7.4 berücksichtigt.

Nach dieser Übersicht liegen die Abweichungen zwischen - 3 und + 6 %. Dieses optimistische Ergebnis steht offensichtlich im Widerspruch zu den Versuchsergebnissen, sofern man den Frequenzverlauf im gesamten Lastbereich betrachtet. Grundsätzlich ist es zwar möglich, die Eulerlast von Stützen durch Messung ihrer Eigen- oder Resonanzfrequenz etwa innerhalb der Rechengenauigkeit anzugeben, jedoch nur dann, wenn eine lineare Beziehung zwischen der Belastung und dem Quadrat der Frequenz in einem ausreichend großen Lastbereich vorhanden ist.

Tafel 7

Eigenfrequenzen und kritische Lasten

Erläuterungen und Besprechung der eingeklammerten Werte im Text, S.70/71

Stütze/ Messung	f_{00}^2 f_{00} in Hz	f_o^2 f_o in Hz	P_E in Mp	\tilde{P}_K in Mp	\bar{P}_K in Mp	P_V^* in Mp
1	299	290	42,9	nicht meßbar	52,8	11,9
2	377	355	54,2	43,4	52,6	12,3 $P_{max}=14,2$
3/a 3/b	237	164 149,5	28,95	28,0 28,8	26,1	13,9
4/a 4/b	213	165	23,75	23,6(a,b) (33,8(a)) (40,6(b))	nicht auswert- bar	12,8
5/a 5/b	(229)	199 122	16,4 (28,2)	16,4 17,4	14,7	> 12
6/a 6/b	239	209,5 209,5	19,4 (26,4)	28,3 26,4	19,7	> 13,2
8	111	104 (92,5)	3,48	3,40 (4,32)	3,03	-
9	345	288	6,09	6,1	5,12	-
10	1670	1365	13,26	13,6	12,05	-
M 1/a	$7,66 \cdot 10^4$	$7,75 \cdot 10^4$	3,25	4,80		-
M 1/b		$7,55 \cdot 10^4$		3,72	3,23	-
M 2	$7,66 \cdot 10^4$	$7,70 \cdot 10^4$	3,25	4,16	3,20	-

* P_V ist die Traglast

In welchem Maße die praktische Anwendbarkeit einer derartigen Methode überhaupt aussichtsreich erscheint, geht aus Tafel 8 hervor, in der die einzelnen Bereiche zusammengestellt sind. In dieser Tafel sind die einzelnen Werte als Spannungen eingetragen, um zu verdeutlichen, daß Einspannbereich und der Bereich ansteigender Frequenz nicht an bestimmte Spannungszustände gebunden und somit nicht materialbedingt sind.

In Tafel 8 bedeuten:

$$\sigma_K = \frac{\bar{P}_K}{F} \text{ die aus } \tilde{P}_K, \text{ Tafel 7, ermittelte kritische Spannung,}$$

σ_A , die zum Übergang von Einspann-in den Linearitätsbereich gehörende Spannung,

σ_B , die zum Übergang von Linearitäts- in den Biegebereich gehörende Spannung.

Die Lasten bzw. Spannungen für die Übergangsstellen zwischen den einzelnen Bereichen wurden anhand der Diagramme 14 bis 18 bzw. 24 und 26 festgelegt.

Tafel 8

Zusammenstellung der typischen Frequenzbereiche

Stütze	kritische Spannung σ_K in kp/cm ²	Einspannbereich		Biegebereich		Linearitätsbereich $\frac{\sigma_B - \sigma_A}{\sigma_K}$
		σ_A in kp/cm ²	$\frac{\sigma_A}{\sigma_K}$	σ_B in kp/cm ²	$\frac{\sigma_B}{\sigma_K}$	
Spalte	1	2	3	4	5	6
St 1	-	19,4	0,37	-	-	-
St 2	282	3,9	0,05	19,5	0,07	0,27
St 3a	220	55	0,25	86,5	0,39	0,14
St 3b	225	7,8	0,04	62,5	0,28	0,24
St 4	183	31	0,17	42,5	0,23	0,06
St 5	128	3,1	0,03	37,5	0,29	0,29
St 6	225	12,5	0,12	103	0,46	0,34
St 8	330	107	0,32	185	0,54	0,22
St 9	592	58	0,10	310	0,53	0,43
St 10	1320	390	0,30	875	0,66	0,36
M 1	1880	252	0,13	1110	0,59	0,46
M 2	2100	252	0,12	605	0,29	0,17

Der Linearitätsbereich kann günstigstenfalls, d. h. je nach Verformung der Stützen, zwischen dem niedrigsten Wert des Einspannbereichs (Spalte 3) und dem höchsten Wert des beginnenden Biegebereichs (Spalte 5), also zwischen $0,03$ und $0,66 \frac{\tilde{P}}{P_k} = \frac{\sigma}{\sigma_k}$ erwartet werden. Die obere Grenze des Linearitätsintervalls lag bei den mittig gedrückten Stahlbetonstützen zwischen $0,23$ und $0,46 \frac{\tilde{P}}{P_k}$ und bei den Stahlstützen zwischen $0,54$ und $0,66 \frac{\tilde{P}}{P_k}$. Wegen der weit streuenden Bereichsgrenzen wird es also im allgemeinen nicht möglich sein, die kritische Last mit Hilfe einer einzigen Probelast - bei einer beliebigen Vorlast - aus nur zwei Frequenzmessungen zu bestimmen.

Zusammenfassung 7.3

Die kritische Last kann trotz eines geringen Linearitätsbereichs recht genau aus den Eigengeraden ermittelt werden; die obere Grenze des Linearitätsbereichs liegt bei Stahlstützen der Schlankheit $125 < \lambda < 250$ bei ca. $0,55$ bis $0,65 \frac{\tilde{P}}{P_k}$, dagegen bei Stahlbetonstützen, deren Schlankheit etwa $\lambda = 130$ beträgt, nur bei ca. $0,25$ bis $0,45 \frac{\tilde{P}}{P_k}$.

7.4 Die Bestimmung der kritischen Last aus der Mittendurchbiegung

Bei allen bisherigen Überlegungen war vorausgesetzt worden, daß mit dem Nachweis eines linearen Frequenz-Last-Gesetzes auch der Beweis für die Richtigkeit des extrapolierten Wertes für die kritische Last erbracht ist.

Für die praktische Anwendung des Verfahrens interessiert allein die statisch wirksame kritische Last \bar{P}_k , die deshalb aus der bei den Versuchen mitgemessenen Mittendurchbiegung δ ermittelt wurde. Allerdings ist solch eine Berechnung nur bei einer eindeutigen Ausbiegung möglich; je besser ein Verzweigungsproblem versuchs-technisch realisiert werden kann, umso ungenauer ist diese Rechnung.

Im folgenden wird auf Gl. (4.9), S. 42, Bezug genommen, wobei $e = 0$ angenommen wird.

Mit Hilfe der Meßwerte δ_1, δ_2 bei 2 Laststufen P_1 und $P_2 < P_1$ kann a eliminiert werden, und man erhält:

$$(7.1) \quad P_E \approx \bar{P}_k = P_1 \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 - \frac{P_1}{P_2} \delta_2} .$$

Bei Anwendung dieser Formel ist zu berücksichtigen, daß aufgrund des Fehlerfortpflanzungsgesetzes die Differenzen $\delta_1 - \delta_2$ und $\delta_1 - \frac{P_1}{P_2} \delta_2$ möglichst groß gewählt werden sollten, da sonst - weitgehend unabhängig von den absoluten Fehlern der Meßwerte - eine erhebliche Unsicherheit von \bar{P}_K auftritt. Außerdem muß aber auch die geringe Genauigkeit bei der Bestimmung der Ausbiegung im Anfangsbereich und der durch Fließen des Stahles oder Reißen des Betons bedingte Biegezuwachs bei Laststeigerung von P_2 nach P_1 beachtet werden, der zu einer scheinbaren Verringerung von \bar{P}_K führen kann. Der Anwendungsbereich von Gleichung (7.1) ist also wesentlichen Einschränkungen unterworfen.

Die Auswertung der Messungen ergab die mit in Tafel 7 angegebenen kritischen Lasten \bar{P}_K , die zum Teil erheblich niedriger als die dynamisch bestimmten Werte \tilde{P}_K sind.

Die relativen Abweichungen $\frac{\tilde{P}_K - \bar{P}_K}{\bar{P}_K}$ zwischen statisch und dynamisch ermittelter Last wurden auch hier für einige Stützen berechnet:

Stütze	3	5	8	9	10	M 1
	0,07	0,12	0,12	0,19	0,13	0,13

Der Mittelwert der relativen Abweichungen beträgt 0,13.

Zusammenfassung 7.4

Die relativen Abweichungen einer dynamisch bestimmten Eulerlast von der statischen ermittelten liegen etwa zwischen 10 und 20 %.

7.5 Die Bestimmung der kritischen Last ohne Zusatzlasten

An den Stützen 5 und 6 wurde bei einigen Laststufen auch die Lastabhängigkeit der Resonanzfrequenz der zweiten Oberschwingung untersucht. Besonders die in Abschnitt 2.4 beschriebene Möglichkeit, die kritische Last ohne jede statische Zusatzbelastung messen zu können, sollte dabei geprüft werden.

Die Ergebnisse sind ebenso unterschiedlich wie bei den Grundschwingungsformen, vgl. Bild 20. In beiden Fällen wurde keine Frequenzabnahme trotz steigender Last gefunden. Damit ist nachgewiesen, daß eine Extrapolation der ersten Eulerlast aus der Bestimmungsgeraden $f_3(P_{E3})$ nicht möglich ist. Trotzdem erhält man aus dem Verhältnis $\frac{f_3}{f_1}$ bei Auswertung nach Gleichung (2.48) für Stütze 6 brauchbare Werte, wie aus Tafel 9 ersehen werden kann.

Tafel 9

Bestimmung der kritischen Last aus den Resonanzfrequenzen von Grundschwingung und zweiter Oberschwingung

	Stütze 5			Stütze 6			
P in Mp	f_1^2 in s ⁻²	$f_3^2 \cdot 10^{-3}$ in s ⁻²	\tilde{P}_K in Mp	P in Mp	f_1^2 in s ⁻²	$f_3^2 \cdot 10^{-4}$ in s ⁻²	\tilde{P}_K in Mp
400	118,81	7,96	0	0,8	219,04	1,36	0
1600	96,04	(9,51)	(8,0)	2,8	187,69	1,69	25,2
	96,04	8,6	15,2	4,8	174,24	1,71	26,2
4000	90,25	10,18	13,0	6,8	160,02	1,72	25,2
5200	88,36	11,05	13,4	9,2	141,61	1,76	24,0
6400	92,16	11,62	16,6	11,2	126,56	1,73	25,9
10000	90,25	(13,09)	(21,2)	2,0	184,50	1,60	27,2
	90,25	14	19,7	6,0	161,50	1,68	24,8
Mittelwert $\tilde{P}_K = 15,6$ Mp				Mittelwert $\tilde{P}_K = 25,5$ Mp			

Anmerkung: Stütze 5: Die eingeklammerten Meßwerte wurden durch Punkte der Geraden ersetzt, vgl. Bild 20.

Stütze 6: Die beiden letzten Werte entstammen der Messung b.

Die Übereinstimmung mit \tilde{P}_K nach Tafel 7 ist noch als gut zu bezeichnen, besonders bei Stütze 6, da hier auch ohne Ausgleich geringe Streuungen vorhanden sind. Die Abweichungen betragen etwa - 5 bis - 10 %. Da an Stütze 6 eine gute $f_1^2(P)$ -Linearität und für die Frequenzen f_3 nahezu Frequenzkonstanz - wenn auch keine Frequenzabnahme - ermittelt wurde, konnten brauchbare Ergebnisse erwartet werden. Der Verlauf bei Stütze 5 ist mit dem vorliegenden

Meßmaterial nicht zu erklären; aufgrund der Schwingungsform scheiden Einspanneffekte aus. Wegen des bereits unterhalb von 4 Mp vorhandenen Anstiegs, der in ähnlicher Weise auch bei Stütze 6 beobachtet wird, scheint eine Verbindung mit dem Biegebereich nicht zu bestehen. Allerdings ist anzunehmen, daß sich der Übergang zum bogenähnlichen Verhalten auf alle symmetrischen Schwingungsformen auswirkt.

Zusammenfassung 7.5

Besteht zwischen Last und Quadrat der Eigenfrequenz ein linearer Zusammenhang, dann kann die Eulerlast einer gelenkig gelagerten Stütze auch aus dem Verhältnis $\frac{f_3^2}{f_1^2}$ bei einer beliebigen, konstanten Last ermittelt werden.

8. Diskussion von Sonderfragen

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse spezieller Untersuchungen an Stützen erörtert, die mit der Aufgabenstellung im Zusammenhang stehen, sich jedoch nicht unmittelbar auf die Bestimmung der Knicklast beziehen. Außerdem werden auch die an den Schalen ermittelten Ergebnisse angegeben und diskutiert.

8.1 Die Schwingungsform von Stützen

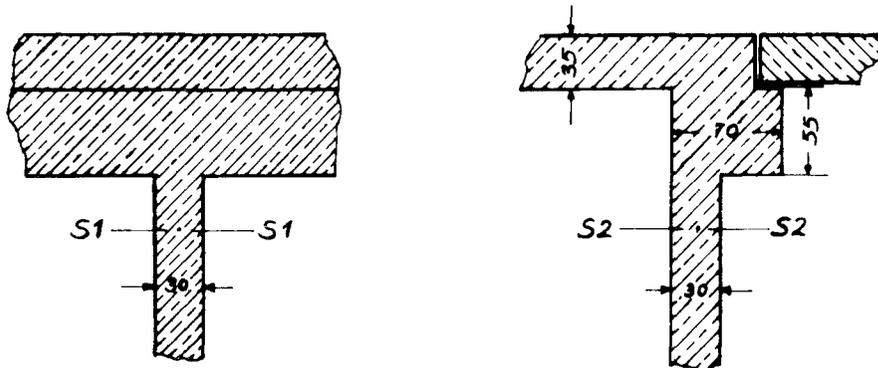
Bereits im theoretischen Teil der Arbeit war festgestellt worden, daß die Schwingungsform nur geringfügig von der Belastung und der Art der Schwingungserregung abhängig ist. Diese Behauptung konnte durch Meßergebnisse bestätigt werden, vgl. Bild 21. Während bei Stütze 6 die Schwingungsform exakt lastunabhängig ist, wurden bei Stütze 5 im Biegebereich gewisse Unregelmäßigkeiten festgestellt, die nicht als Einspanneffekt gedeutet werden können. Auch bei sämtlichen anderen Stützenversuchen wurde zur Kontrolle bei mehreren Laststufen die Schwingungsform abgetastet und stets eine gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Verlauf nachgewiesen, solange ein lineares Frequenz-Last-Gesetz vorhanden war; nur im Einspann- sowie im Biegebereich wurden Abweichungen gefunden. Als Beispiel für die Lastabhängigkeit im Einspannbereich seien die Messungen an der gelenkig gelagerten Stütze 10 angegeben, Bild 22, die in Ergänzung zu Bild 25 erkennen lassen, daß bei gelenkiger Lagerung bis 8 Mp keine Veränderungen auftraten.

Ein interessantes Ergebnis erbrachte die Messung der Resonanzfrequenz bzw. die Abtastung der zugehörigen Grundschwingungsform von Stahlbetonstütze 7, die eigens ausgewählt wurde, um die Möglichkeit einer Anregung von Biegeschwingungen gedrungener Stützen unter Baubedingungen zu prüfen.

Obgleich diese Stütze einen quadratischen Querschnitt besitzt, wurden in beiden Richtungen unterschiedliche Resonanzfrequenzen ermittelt:

$$\begin{array}{ll} \text{S 1 - S 1: } f_{11} = 93,5 \text{ Hz} & f_{31} = 465 \text{ Hz} \\ \text{S 2 - S 2: } f_{12} = 84,5 \text{ Hz} & f_{32} = 447 \text{ Hz} . \end{array}$$

Aufgrund dieser Werte könnte man zunächst annehmen, daß die Biegesteifigkeit der Stütze in den beiden Richtungen verschieden ist. Diese Erklärung erweist sich jedoch nach Abtastung der Schwingungsform als unbegründet. Wie man aus Bild 22 entnimmt, ist vielmehr die Stütze als ein System aufzufassen, dessen Länge von der Schwingungsrichtung abhängig ist. Während die Stütze in Richtung 1 bei ca. $l_0 + 15 \text{ cm} \approx l + \frac{h}{2}$ endet, kann das Stützenende für Richtung 2 bei ca. $l_0 + 38 \text{ cm} \approx l + h$ extrapoliert werden.



Diesen Unterschied in der Systemlänge wird man auch ohne derartige Messungen erwarten, wenn man sich die geometrischen Verhältnisse am Stützenkopf veranschaulicht. Es erscheint jedoch bemerkenswert, daß durch Messung und optimale Anpassung einer gerechneten Schwingungsform an die Meßwerte die Durchdringung auch experimentell ermittelt werden kann.

An Stütze 7, deren Beanspruchung durch die "ständige Last" erheblich unter der Eulerlast liegt, so daß die gemessene Resonanzfrequenz als unbeeinflußt von der Last angenommen werden kann, wurde auch die Näherung (2.47) geprüft. Mit den gemessenen Werten für Eigenfrequenz und Systemlänge ergibt sich für die Eulerlast

$$P_K = 7,02 \cdot 10^3 \text{ Mp}$$

während man durch Rechnung mit $E \approx 3 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ erhält:

$$P_E = 6,70 \cdot 10^3 \text{ Mp} .$$

Bei einem Vergleich der beiden Werte ist zu beachten, daß für die Rechnung Annahmen über die Randbedingungen gemacht werden mußten, für die Auswertung der Messung jedoch nicht. Die Bruchfestigkeit dieser Stütze beträgt - ohne Berücksichtigung der Bewehrung - nur etwa $0,22 \cdot 10^3 \text{ Mp}$, d. h. die Eulerlast ist in diesem Fall ohne praktische Bedeutung.

Zusammenfassung 8.1

Die Grundswingungsform, die auch zur Bestimmung der Systemlänge geeignet ist, erweist sich im Versuch so lange als lastunabhängig, wie Linearität zwischen Quadrat der Eigenfrequenz und Last vorliegt.

8.2 Die Lastabhängigkeit der Randbedingungen

Bei der Erläuterung der Versuchsdurchführung war bereits ausführlich dargelegt worden, daß im Rahmen dieser Arbeit von experimentellen Untersuchungen zur Abhängigkeit der Eigenfrequenz bei belasteten, eingespannten Stützen abgesehen wird. Allerdings wurden einige Versuche mit gewollt lastabhängiger Lagerung zur Interpretation der an gelenkig gelagerten Stützen beobachteten Abweichungen durchgeführt, deren Ergebnisse nachfolgend diskutiert werden. Die Lastabhängigkeit wurde bei Stütze M 4 durch die Formgebung der Lagerschalen und der Stützenenden und bei den Stützen 10 und M 5 durch freie Aufstellung zwischen den Druckstempeln der Prüfmaschinen erreicht.

Bei der ohne Gelenkplatten geprüften Stütze 10 ergibt sich ein völlig anderer Frequenzverlauf als im Falle der gelenkigen Lagerung zwischen den Zylinderrollen, vgl. Bild 25. Nach einer geringfügigen Anfangsabnahme steigt die Frequenz mit zunehmender Last bei ca. 8,4 Mp sprunghaft bis zu einem Maximalwert bei ca. 15 Mp an, um dann etwa linear abzunehmen. Bei Entlastung werden die Frequenzen des Anfangslastbereiches wieder erreicht. An der gleichen, jedoch gelenkig gelagerten Stütze war zuvor ein linearer Frequenzverlauf ermittelt worden; dabei wurde allerdings der Versuch bei 9 Mp wegen der geplanten Wiederverwendung der Stütze beendet.

Es wird angenommen, daß die Stütze am oberen Ende bis zu der genannten Laststufe nicht mit dem vollen Querschnitt auf der Lagerplatte auflag und damit die aussteifende Wirkung der Flansche zunächst nicht vorhanden war.

Zur Klärung der Veränderung der Einspannung wurde die Schwingungsform in Schritten von 0,2 Mp abgetastet. Es zeigte sich im Bereich bis 2,4 Mp eine nur unwesentliche Abhängigkeit von der Last. Die Schwingungsform entspricht für die obere Stützhälfte einer

gelenkigen und für die untere der erwarteten drehsteifen Lagerung. Im Bereich der sprunghaften Frequenzzunahme zwischen 6 und 16 Mp ändert sich, wie ersichtlich, die Schwingungsform in der oberen Hälfte der Stütze bis die symmetrische Schwingungsform für beidseitig eingespannte Lagerung vorliegt.

Eine besondere Bedeutung kommt dieser Messung deshalb zu, weil sie deutlich macht, daß aus der Linearität der Eigenkurve in einem Teillastbereich zwar auf irgendeine Knicklast geschlossen werden kann, daß jedoch schon bei recht einfachen Systemen keine über den Meßbereich hinausgehende Aussage möglich ist. Das zeigt diese Messung ebenso wie der an Stütze 4 durchgeführte und der durch Kippen des Fachwerks vorzeitig beendete Versuch von Lurie /6/.

Die Untersuchungen an den beiden Modellstützen M 4 und M 5 haben bestätigt, daß der Einspannbereich durch lastabhängige Randbedingungen verursacht ist. Der Einspannbereich scheint in einem festen Verhältnis zur Eulerlast zu stehen; deshalb kann sich bei gedrungenen Stützen dieser Bereich bis zur Fließ- oder Bruchgrenze des Materials erstrecken und somit jeden Rückschluß auf die Eulerlast unmöglich machen. Die Ergebnisse an der gedrungenen Modellstütze M 5 geben hierfür ein Beispiel.

An Stütze M 4 konnte wiederum gezeigt werden, daß die Eigengerade zur Ermittlung der Eulerlast brauchbar ist, die extrapolierte Frequenz infolge der Lastabhängigkeit der Randbedingungen jedoch keinem bestimmten Rechenwert, z. B. der Eigenfrequenz bei starrer Einspannung, zugeordnet werden kann.

In das Diagramm, Bild 28 oben, wurde auch eine nach Abschn. 2.4 errechnete Eigenkurve für lastabhängige Lagerung eingetragen. Allerdings wurde für den Einspann-Beiwert $\frac{1}{N}$ nach einigem Probieren der Ansatz $\frac{1}{N} \sim \psi \sqrt{P}$ mit $\psi = 15$ gewählt und damit eine bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten erzielt als mit dem ursprünglichen Ansatz, Gleichung (2.52).

Es ist noch besonders hervorzuheben, daß der Biegebereich auch bei eingespannten Stützen auftritt, wie die Messung an Stütze M 4 beweist. Durch Einspann- und Biegebereich wird bei dieser Art relativ undefinierter Lagerung der Linearitätsbereich auf etwa

0,32 \tilde{P}_K begrenzt. Die Traglastgrenze der Modellstütze lag im Fließbereich des Materials bei $\sigma_v = 2150 \text{ kp/cm}^2$.

Zusammenfassung 8.2

Bei lastabhängiger Lagerung ist der Frequenzverlauf erwartungsgemäß nicht proportional zur Belastung. Durch Messung der Schwingungsform kann man sich jedoch leicht Aufschluß über die tatsächlichen Randbedingungen verschaffen.

8.3 Einfluß der Belastung auf die Dämpfung von Stahlbetonstützen

Die an den mittig gedrückten Stützen 3 bis 6 aus Abklingzeit oder log. Dekrement erhaltenen Werte des Verlustfaktors sind in Bild 23 aufgetragen. Die Dämpfungswerte wurden also aus Abklingkurven bestimmt und sind deshalb nur für kleine Amplituden gültig, was wegen des nichtlinearen Verhaltens von Beton besonders hervorzuheben ist. Zusätzlich sind angegeben:

1. Die am Bauwerk, Stütze 7, ermittelten Werte,
2. Die von Kristen und Müller /25/ im Frequenzbereich zwischen 59 und 1070 Hz für schwach bewehrten, $\mu = 0,011$, und unbewehrten Beton gemessenen Werte,
3. Ergebnisse für Spannbeton nach Fritz de la Orta /19/ und Müller /27/ ohne und mit nachträglichem Verbund.

Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Im unteren bis mittleren Lastbereich ist bei schwacher Bewehrung mit zunehmender Druckspannung eine geringfügige Abnahme des Verlustfaktors zu beobachten, während sich bei starker Bewehrung keine Lastabhängigkeit erkennen läßt. Die Abnahme des Verlustfaktors wird mit einer Verminderung der Materialdämpfung erklärt /19/.

Im oberen Lastbereich steigt der gemessene Verlustfaktor d an. Diese Zunahme ist system- und nicht materialbedingt; sie entspricht in etwa Gleichung (2.66), wie anhand von Tafel 10 gezeigt wird.

Tafel 10

Einfluß der Last auf den Verlustfaktor

Stütze 6				Stütze 5			
σ in kp/cm^2	$\frac{P}{P_E}$	d	$d_0 = d \sqrt{1 - \frac{P}{P_E}}$	σ in kp/cm^2	$\frac{P}{P_E}$	d	$d_0 = d \sqrt{1 - \frac{P}{P_E}}$
58,5	0,39	0,0171	0,0134	38	0,31	0,0276	0,023
72	0,47	0,0171	0,0124	85	0,67	0,0366	0,021
84	0,56	0,0192	0,0128	93	0,73	0,0401	0,0208
97	0,64	0,0248	0,0149				
103	0,68	0,0248	0,0140				
Mittelwerte			0,0137	0,022			

Die innere Dämpfung der Stützen ist also auch dann noch als etwa konstant anzusehen, wenn angenommen werden muß, daß sich die Stützen bereits im Zustand II befinden. Deshalb ist die Dämpfung nicht als ein geeignetes Kriterium für das Erreichen der Traglast anzusehen.

Die innere Dämpfung von bruchgefährdeten bzw. gerissenen Stahlbeton-Bauteilen soll trotzdem über den Rahmen dieser Arbeit hinaus weiter untersucht werden. Im Gegensatz zu unter Normalkraft stehenden Bauteilen müßten sich bei biegebeanspruchten Stützen oberhalb der Biegezugfestigkeit des Betons deutliche Unterschiede in der Schwingungsform der Oberschwingungen zeigen. Inwieweit als Ursache einer erhöhten Anfangsdämpfung Schwindrisse /19/ infrage kommen, könnte auch durch Zugversuche geklärt werden, bei denen sich dann eine erhöhte Dämpfung ergeben müßte.

Die an schlanken unbelasteten Balken - unter Vermeidung jeglicher Zusatzdämpfung durch Anregung, Abtastung und Aufhängung - von Kristen und Müller bestimmten Verlustfaktoren liegen beträchtlich unter bauüblichen Werten.

Auffällig ist die Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Fritz, die als sehr gut bezeichnet werden darf. Allerdings ist daraus der Schluß zu ziehen, daß nicht nur Spannbetonbauteile unter dyna-

mischen Einwirkungen, insbesondere Erdbeben, stark beansprucht werden, sondern auch normale Stahlbetontragwerke mit schlaffer Bewehrung, die unter mäßiger Druckspannung stehen. Auch der von F. P. Müller in /27/ angegebene Wert paßt noch gut zu den angegebenen Meßwerten.

Die Berechtigung, mittig vorgespannte Balken mit bewehrten Stahlbetonbalken unter Druckspannung zu vergleichen, ergibt sich aus der Tatsache, daß durch die Bewehrung zwar die Biegesteifigkeit erhöht, jedoch durch die geringe Dämpfung der Stahleinlagen in beiden Fällen die innere Dämpfung des Betons nicht wesentlich verändert wird.

Nach Rausch /26/ soll für die Bemessung von Stahlbeton-Turbinen-Fundamenten im Resonanzfall der dynamische Beiwert mit $V = \frac{1}{d} = 10 \dots 30$ angesetzt werden. Die vorliegenden Ergebnisse lassen diese Werte im allgemeinen für gerechtfertigt erscheinen, für schwach bewehrte Druckglieder sind jedoch sicherheitshalber Vergrößerungswerte von $V = 30 \dots 50$ zu empfehlen.

Zusammenfassung 8.3

Die innere Dämpfung von Stahlbetonstützen mit schwacher Bewehrung nimmt mit der Belastung zunächst materialbedingt ab, bis etwa $d_0 = 0,013$ bei $\mu = \mu' = 0,005$, während stark bewehrte Stützen eine nahezu konstante Dämpfung besitzen, $d_0 = 0,02$ bei $\mu = 0,05$. Die systembedingte Lastabhängigkeit des Verlustfaktors $d = d_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{P}{P_E}}}$ konnte nachgewiesen werden. Die innere Dämpfung ist kein geeignetes Kriterium für das Erreichen der Traglast.

8.4 Der Einfluß der nichtlinearen Arbeitslinie von Stahlbeton auf die Bestimmung der Resonanzfrequenz

In Abschnitt 5.2.3 wurde bereits erwähnt, daß eine der grundlegenden Voraussetzungen für die Möglichkeit, die kritische Last von Bauteilen durch Messung ihrer Eigenfrequenz zu bestimmen, ein linearer Zusammenhang zwischen Schwingungsanregung Q und -amplitude v ist. Wegen der nichtlinearen Arbeitslinie von Stahlbeton ist diese Voraussetzung nur näherungsweise erfüllt, wie beispielsweise anhand der auf Bild 6 A, Anhang, dargestellten Meßergebnisse ersehen

werden kann. Diese Nichtlinearität führt zu einer Verformung der Resonanzkurven bzw. zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenz und damit zu einem Fehler bei der Bestimmung der Eulerlast. Deshalb wurden die Frequenzabweichungen bei den Stützen 5 und 6 im Rahmen einer noch sinnvoll erscheinenden Variation der dynamischen Prüflast ermittelt und sowohl in die Bilder 16 und 18 eingezeichnet als auch in Tafel 11 zusammengestellt.

Tafel 11

Einfluß der Wechselkraft auf die Resonanzfrequenz

	stat.Last	Wechselkraft	Schwingwegamplitude	Resonanzfrequenz	Mittendurchbiegung
	P in kp	Q _s in p	v _s in mm	f in Hz	δ in mm
Stütze 5	4.800	56,5	0,159	9,30	1,86
		90,6	0,242	9,15	
		178	0,432	9,00	
	10.400	29,4	0,108	9,50	8,00
		56,5	0,174	9,40	
		109	0,276	9,35	
178		0,430	9,20		
Stütze 6	5.600	90,6	0,122	13,0	0,28
		178	0,233	13,0	
		356	0,456	13,0	
		712	0,811	12,8	
	7.200	90,6	0,171	12,7	0,38
		178	0,322	12,65	
		356	0,600	12,60	
		712	1,048	12,40	

*) die nichtganzzahligen Werte für Q_s ergeben sich durch den Übertragungsfaktor des elektrodynamischen Schwingungserregers

Q_s Spitzenwert der Wechselkraft

v_s Spitzenwert des Schwingweges

Der Einfluß dieser Frequenzabweichungen führt näherungsweise zu einer Parallelverschiebung der Eigengeraden. Der hierdurch bei der Ermittlung von \tilde{P}_K entstehende Fehler ist also nicht nur vom Betrag der Frequenzverschiebung, sondern auch von der Steigung der Geraden abhängig.

Müller /27/ hat zur quantitativen Erfassung der Nichtlinearität für den Elastizitätsmodul E den folgenden Ansatz benutzt

$$(8.1) \quad E = E_p (1 - s^2 v_s) ,$$

v_s Schwingwegamplitude,

E_p Elastizitätsmodul bei $v_s = 0$, P beliebig,

s Faktor zur Beschreibung der Nichtlinearität.

Müller erhielt bei seinen Versuchen für s den Wert $s \approx 0,57 \text{ mm}^{-2}$, während man aus Tafel 11 über die Proportionalität von f^2 und E für Stütze 5 den der Größenordnung nach vergleichbaren Wert $s \approx 0,35 \text{ mm}^{-2}$, jedoch für Stütze 6 nur $s \approx 0,045 \text{ mm}^{-2}$ abschätzen kann. Das ist umso bemerkenswerter, als Stütze 6 wesentlich stärker angeregt wurde als Stütze 5. Bei etwa gleicher axialer Belastung war die Durchbiegung von Stütze 5 wesentlich größer und infolge des größeren Biegemoments die Arbeitslinie bei Stütze 5 erheblich mehr ausgefahren. Der Einfluß der nichtlinearen Arbeitslinie von Stahlbeton auf die Resonanzfrequenz nimmt also erwartungsgemäß mit dem statischen Biegemoment zu. Nimmt man an, daß die ermittelten Frequenzabweichungen, die etwa 3 % betragen, gerade noch vertretbar sind, so kann man zu einer allgemeinen Aussage über die zulässige dynamische Anregung kommen, wenn man anstelle der Schwingungsamplitude v_s die maximale dynamische Zusatzspannung σ_s bzw. das dynamische Moment M_s vorgibt.

$$(8.2) \quad \sigma_s = \frac{|M_s|}{W} = \frac{h(EI v_s'')}{I_2} \approx h \frac{\pi^2 E}{2l^2} v_s .$$

Unter Zugrundelegung einer Amplitude von $v_s = 0,4 \text{ mm}$ ergibt sich die maximal zulässige Spannung $\sigma_s = 5 \text{ kp/cm}^2$.

Zusammenfassung 8.4

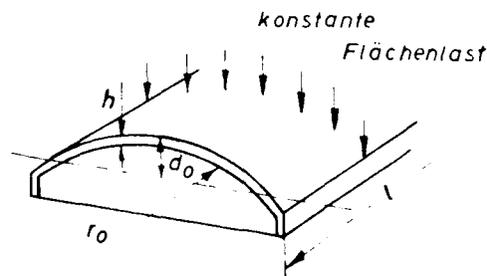
Die Stärke der Schwingungsanregung muß zur Bestimmung der kritischen Last von Stahlbetonbauteilen, um zusätzliche Frequenzfehler zu vermeiden, so gering wie möglich gewählt werden. Die maximale dynamisch bedingte Zusatzspannung sollte weniger als 5 kp/cm^2 betragen.

8.5 Untersuchungen an Schalenmodellen

Angaben hinsichtlich der Durchführung dieser Messungen sind in Abschnitt 5.2 zu finden bzw. aus Bild 12 ersichtlich. Die Abmessungen der Schale können aus Bild 7 A, Anhang, entnommen werden.

Die theoretischen Stabilitätskriterien sind für Schalen und noch mehr für Schalenstreifen durch komplizierte mathematische Ausdrücke gegeben. Man versucht deshalb, im praktischen Gebrauch mit vereinfachten Beziehungen oder empirischen Formeln auszukommen. Für die Beulspannung n_{xK} langer Zylinderschalen gibt beispielsweise Lundgren /28/ den folgenden Ausdruck an:

$$(8.3) \quad n_{xK} \leq 0,2 \frac{E h^2}{r_o}$$



Faßt man die Schalen als gelenkig gelagerten Balken auf, dann erhält man mit (8.3) die folgende Näherung für die Beullast:

$$(8.4) \quad P_B = 1,6 \frac{I \cdot E}{r_o \cdot l} \cdot \frac{h}{d_o}$$

Analog läßt sich die Eigenfrequenz abschätzen.

Die Meßergebnisse für die Schalen sind in Tafel 12 zusammen mit den Rechenwerten angegeben. Wegen der plastischen Eigenschaften von Plexiglas wurde mit verschiedenen Werten für den Elastizitätsmodul gerechnet:

$$\begin{aligned} E &= 3,2 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2 && \text{für } P \approx 0, \\ E &= 3,0 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2 && \text{für } P \approx P_B. \end{aligned}$$

Die Masse M_{00} bezieht sich auf die Laststufe, bei der die ersten Frequenzmessungen durchgeführt wurden. Die zugehörigen gemessenen Schwingungsformen sind in Bild 31 aufgetragen.

Bei Belastung eines Tragwerkes durch mitschwingende Massen werden nicht nur die beabsichtigten Spannungen im Material hervorgerufen, sondern ungewollterweise auch die Eigenfrequenzen herabgesetzt. Die gemessenen Frequenzen wurden deshalb entsprechend der Propor-

tionalität $\omega^2 \sim \frac{1}{M_0}$ mit dem Faktor $\frac{M_0}{M_{00}}$ korrigiert, s. auch Bild 5.

Tafel 12

Rechen- und Meßwerte für kritische Last und Eigenfrequenz

	gerechnet		gemessen		
	P_B in kp	$f_{00}^{+)}$ in Hz	P_V in kp	$f_{11}^{*})$ in Hz	$f_{10}^{**})$ in Hz
Schale 1 mit Randträger $M_{00} = 3,36$ kg	106	36,2	103	41	54
Schale 2 mit Randträger $M_{00} = 1,77$ kg	63,5	36,4	64,6	50	36

+) f_{00} Eigenfrequenz, aus Balkenalogie berechnet

*) f_{11} Resonanzfrequenz der untersten Schalenschwingsform mit zwei Knotenlinien entlang der Erzeugenden

**) f_{10} Resonanzfrequenz der Balkenschwingsform

Die experimentell bestimmten Traglasten P_V waren gut reproduzierbar; 0,1 % Laständerung führt bei Schale 2 bereits zum "Beulen". Allerdings wurden die Schalen nach dem Verlust der Tragfähigkeit sofort abgefangen und somit ein endgültiges Durchschlagen, das zweifellos zur Zerstörung der Schale geführt hätte, verhindert. Die Scheiteldurchbiegung bei $x = \frac{1}{2}$ läßt das Einsetzen des Beulens bei Schale 1 besser als bei Schale 2 erkennen.

Die an der Schale 1 erhaltenen Meßwerte für die Frequenz der Schalengrundschwingung, s. Bild 29, bestätigen, daß grundsätzlich auch bei beulgefährdeten Schalen eine Lastabhängigkeit der Eigenfrequenz bzw. Resonanzfrequenz besteht und daß aus dieser auf eine kritische Last, vermutlich die Beullast, geschlossen werden kann.

Die Frequenzabnahme der untersten Schalenschwingungsform führt - sowohl bei Schale 1 als auch bei Schale 2 - zur kritischen Last $P_K = 129 \text{ kp}$.

Der extrapolierte Wert für die kritische Last wird vermutlich infolge der plastischen Eigenschaften des Plexiglases nicht erreicht. Im Bereich niedriger Laststufen sind Abweichungen vorhanden, die den bei Stützen beobachteten entsprechen.

Die zweite Eigenfrequenz ist mit $f_{10} = 54 \text{ Hz}$ relativ dicht benachbart. Aufgrund ihrer Schwingungsform muß sie als die unterste Balken-Eigenschwingung angesehen werden. Die Lastabhängigkeit dieser Schwingung wurde nicht geprüft; nach dem Ergebnis an Schale 2 wird angenommen, daß sich diese Eigenfrequenz als lastunabhängig erwiesen hätte.

Durch das Abschneiden der Randbalken wird die Tragfähigkeit bedeutend herabgesetzt. Diese Veränderung ist in der Schwingungsform und der Lage der Eigenfrequenzen, Bild 30, erkennbar. Nunmehr gehört nämlich die Balkenschwingung zur untersten Eigenfrequenz, während die Eigenfrequenz der einfachsten Schalen-Schwingungsform praktisch unverändert erhalten bleibt. Nur die Frequenz der Schalen-Eigenfrequenz ist lastabhängig! Die Resonanzfrequenz der Balkenschwingung steigt mit der Last an.

Durch Umrechnung auf gleiche Massen $M_0 = 1770 \text{ g}$, die Masse der Schalenhaut mit Metallplättchen, jedoch ohne Giebelscheiben und Randträger, erhält man folgende Frequenzen:

mit Randträger	$f_{10} = 74,5 \text{ Hz}$	$f_{11} = 56,5 \text{ Hz}$
ohne Randträger	$f_{10} = 36 \text{ Hz}$	$f_{11} = 50 \text{ Hz}$

Hieraus ergibt sich:

1. Die Schaleneigenfrequenz f_{11} und auch die Schwingungsform der Schalen-Grundschiwingung wird von den Randträgern nur geringfügig beeinflusst. Die Schalenschwingungsform ist ein Abbild der Beulfigur einer Zylinderschale unter Druckbeanspruchung in Richtung der Erzeugenden. Da die Traglast wesentlich von der Existenz bzw. Gestaltung der Randträger

abhängt (Verminderung des Brazier-Effektes), darf also auch bei Schalen aus der extrapolierten kritischen Last nicht auf die Traglast geschlossen werden.

2. Die Balkenfrequenz f_{10} wird vom Randträger vergrößert, und zwar derart, daß $f_{10} > f_{11}$; damit wird also entsprechend der konstruktiven Absicht durch den Randträger der Übergang vom Balken zur Schale vollzogen. Das erkennt man auch an den Schwingungsformen der Balkenschwingung, die bei Schale 1 und 2 nur näherungsweise gleich sind. Mit Randträger sind die Amplituden am Schalenrand geringer als die längs des Scheitels, während ohne Randträger das Umgekehrte der Fall ist.
3. Die Traglast wird mit und ohne Randträger bei nahezu denselben Werten für die Scheitelsenkung erreicht. Diese "kritische Durchbiegung", die den Beginn des Durchschlagens kennzeichnet, kann anhand von Schwingungsmessungen nicht erkannt werden.

Zusammenfassung 8.5

Auch bei den untersuchten Zylinderschalen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen dem Quadrat der untersten Schalen-Eigenfrequenz und der Last. Durch Messung der Lastabhängigkeit der untersten Eigenfrequenz und Abtastung ihrer Schwingungsform kann ebenfalls entschieden werden, ob ein Stabilitätsproblem vorliegt.

9. Zusammenfassung

Durch Berechnung der Eigenkurven von statisch axial belasteten, transversal schwingenden Stäben mit unterschiedlichen Randbedingungen wurde nachgewiesen, daß die Eigenkurven exakt oder angenähert Geraden sind und somit ein linearer Zusammenhang zwischen der Belastung und dem Quadrat der Eigenfrequenz besteht. Es wurde deshalb untersucht, ob es möglich ist, die Eulerlast belasteter und unbelasteter, auf Druck beanspruchter Bauteile experimentell durch schwingungstechnische Verfahren zu bestimmen.

Bei der Behandlung des Themas wurden insbesondere Überlegungen zum Einfluß der Lagerung, des Materials und der Imperfektionen hinsichtlich Form und Lasteintragung angestellt.

Durch Versuche an Stahlbetonstützen und Stahlstützen in wirklichkeitsnaher Größe sowie an Modellen für Stützen und Schalen konnte nachgewiesen werden, daß in gewissen Lastbereichen die Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Belastung zur Bestimmung der kritischen Last (Eulerlast) von Stützen und Schalen grundsätzlich geeignet ist. Die Genauigkeit der aus der Eigengeraden ermittelten Eulerlast entspricht etwa der Genauigkeit der im Bauwesen üblichen Rechenannahmen. Für die experimentelle Ermittlung der Eulerlast sind jedoch Material, Größe und Querschnittsform ohne wesentlichen Einfluß.

Einschränkend muß gefordert werden, daß die Randbedingungen lastunabhängig sind und Vorverformungen sowie Ausmittigkeiten bei der Lasteintragung auf ein Minimum beschränkt werden können. Lineare Abhängigkeit des Quadrates der Eigenfrequenz - oder, bei geringer Dämpfung, der Resonanzfrequenz - kann nur dann erwartet werden, wenn das Verhältnis der Verformungen durch Biegung und Stauchung in Systemmitte unter 30 % liegt. Übersteigen die Verformungen diesen Wert, muß bei weiterer Belastung mit einer Frequenzzunahme gerechnet werden, die durch den Übergang vom stab- zum bogenähnlichen Verhalten zu erklären ist. Diese Abweichung von der Linearität entspricht einem Übergang vom Stabilitäts- zum Spannungsproblem. Hierdurch wird es praktisch unmöglich, die Eulerlast durch Messung der Eigenfrequenz bei nur zwei Laststufen zu ermitteln, wie bisher vielfach angenommen wurde.

Das nichtlineare Spannungs-Dehnungsverhalten von Stahlbeton sowie unterschiedlicher Bewehrungsgehalt machen sich bei mittlerer Beanspruchung bis zu etwa einem Drittel der Prismenfestigkeit nicht bemerkbar. Allerdings ist der Linearitätsbereich bei Stahlbetonstützen, vermutlich durch Abweichungen von der planmäßigen Bewehrungsführung, wesentlich geringer als bei Stahlstützen.

Sofern keine Einspanneffekte zu erwarten sind, kann die Eulerlast - bei geringer Beanspruchung der Druckglieder - auch bei unbekanntem Lagerungsbedingungen und unbekannter Biegesteifigkeit allein aus der Eigenfrequenz der Grundschwingung näherungsweise ermittelt werden. Ferner ist es unter der Voraussetzung eines linearen Zusammenhanges zwischen Quadrat der Eigenfrequenz und Belastung möglich, die kritische Last gelenkig gelagerter Stützen ohne Verwendung von Zusatzlasten aus dem Frequenzverhältnis von dritter Harmonischer und Grundschwingung abzuschätzen.

Als ein weiteres Ergebnis der durchgeführten Untersuchungen ist der Nachweis des Anstiegs von Verlustfaktor, log. Dekrement oder Dämpfungsmaß mit zunehmender Belastung zu erwähnen. Die Vergrößerung dieser Maßzahlen für die Schwingungsdämpfung war aufgrund theoretischer Überlegungen erwartet worden; sie ist lastbedingt und hat nichts mit der inneren oder äußeren Dämpfung der Werkstoffe zu tun.

Es ist nicht möglich, allein durch schwingungstechnische Untersuchungen auf die Traglast zu schließen. Hierzu ist grundsätzlich das Festigkeitsverhalten der Werkstoffe mit zu berücksichtigen.

Die Eulerlast ist eine Größe, die als Bezugswert auch in statische Berechnungen eingeht und daher z. B. auch durch Messung der Mittendurchbiegung infolge statischer Querkräfte oder aus der Eigenfrequenz zugbeanspruchter Bauteile ermittelt werden kann. Die durch Schwingungsuntersuchungen an Druckgliedern bestimmte Eulerlast darf nur als Rechenwert für den geprüften Lastbereich verwendet werden.

Neben der Messung der Eigenfrequenz ist die Bestimmung der Schwingungsform von gleichrangiger Bedeutung. Sie ist näherungsweise lastunabhängig und gibt deshalb Aufschluß über Systemlänge und Randbedingungen, und zwar auch bei gedrunenen Stützen oder minimalen Verformungen, die mit statischen Meßverfahren noch nicht nachweisbar sind.

Weitere Untersuchungen sind an Rahmen geplant, da hier die Lasteintragung einfach zu variieren ist und somit eine genauere Bestimmung der in dieser Arbeit verwendeten maximal zulässigen Verformungsgrenzen durchgeführt werden kann.

Außerdem erscheint es wichtig, auch an Schalentragerwerken weiterhin den Einfluß der Last auf die Eigenfrequenz bzw. Schwingungsform zu studieren; durch Untersuchungen an einem speziellen Schalenmodell konnte bereits der lineare Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Eigenfrequenz der Schalen-Grundschiwingung und der Belastung nachgewiesen werden.

Die schwingungstechnischen Untersuchungen zu dieser Arbeit, die Herr Dr.-Ing. J. Eibl, Abteilungsvorsteher und Professor, anregte, wurden in den Jahren 1963 bis 1966 im Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau, Braunschweig, durchgeführt. Dem Institutsdirektor, Herrn Professor Dr.-Ing. K. Kordina, möchte ich für die Bereitstellung der finanziellen Mittel und für die Förderung dieser Arbeit herzlich danken.

Herrn Professor Dr.-Ing. S. Falk - durch dessen Mitarbeiter die numerische Auswertung der Frequenzgleichungen erfolgte - und Herrn Professor Dr. phil. E. Lübcke habe ich für die Übernahme der Referate und für wertvolle Hinweise zu danken.

Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Instituts, die diese Arbeit durch ihre Diskussionsbereitschaft, die Anfertigung der Versuchskörper und nicht zuletzt durch ihre Mithilfe bei den Messungen gefördert haben.

Literaturverzeichnis

- /1/ Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.
- /2/ Szabó, J.: Höhere Technische Mechanik. 3. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960.
- /3/ Falk, S.: Das Verfahren von Rayleigh-Ritz mit hermiteschen Interpolationspolynomen. ZAMM 43 (1963) Nr. 4/5, S. 149/166.
- /4/ Timoshenko, S.: Theory of Elastic Stability. New York und London 1936.
- /5/ Timoshenko, S.: Schwingungsprobleme der Technik. Berlin 1932.
- /6/ Lurie, H.: Lateral Vibrations as Related to Structural Stability. Journ. of Appl. Mech. (1952) Nr. 6, S. 195.
- /7/ Hohenemser, K.H. und Prager, W.: Dynamik der Stabwerke. Berlin 1933.
- /8/ Schleicher, F.: Taschenbuch für Bauingenieure. 1. und 2. Auflage. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1949 und 1955.
- /9/ Koloušek, V.: Baudynamik der Durchlaufträger und -rahmen. Leipzig 1953.
- /10/ Koloušek, V.: Dynamik der Baukonstruktionen. Berlin 1962.
- /11/ Dulácska, E.: Experimental Determination of the Critical Load of Shell Structures. Vortrag auf dem internationalen Symposium über Schalenbauwerke in der Ingenieur-Praxis. Budapest 3.9.1965.
- /12/ Chwalla, E.: Über die gekoppelten Biegungs- und Torsionsschwingungen belasteter Stäbe mit offenem, einfach symmetrischem Querschnitt. Oesterr. Bauzeitschr. 5 (1950) S. 60 und S. 79.
- /13/ Heilig, R.: Torsions- und Biegeschwingungen von dünnwandigen Trägern mit beliebiger offener Profil-Form bei Anwesenheit von Vorlasten. Ing.-Arch. 19 (1951), S. 231
- /14/ Stüssi, F.: Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis. Schweizerische Bauzeitung 106 (1935) Nr. 12, S. 132.
- /15/ Federhofer, K.: Über Eigenschwingungen und Knicklasten des parabolischen Zweigelenkbogens. Sitzungsberichte d. Akad. zu Wien, Mat. Nat. Kl., Abt. II a, Wien (1934) S. 131.

- /16/ Kollbrunner, F.: Versuche über die Knicksicherheit und die Grundschnitzungszahl vollwandiger Bogen. Die Bautechnik 14 (1936) Nr. 12, S. 186.
- /17/ Kollbrunner, F.: Versuche über die Knicksicherheit und die Grundschnitzungszahl vollwandiger Dreigelenkbogen. Schweizerische Bauzeitung 120 (1942) Nr. 10, S. 113.
- /18/ Denkhaus, G. und Dück, G.: Über das Verhalten von Spannbetonbalken bei Biegeschwingungen. Beton und Stahlbau 47 (1952) S. 59.
- /19/ Fritz-de la Orta, G.O.: Über das Verhalten von Stahlbeton-Bauteilen bei dynamischen Beanspruchungen, insbesondere bei Erdbeben. TH München 1958 (Dissertationsauszug).
- /20/ Pflüger, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964.
- /21/ Kordina, K.: Knicksicherheits-Nachweis ausmittig belasteter Druckglieder. Beton und Stahlbetonbau 59 (1964) 8.
- /22/ DIN 4114: Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung), Ausgabe Juli 1952.
- /23/ Rüsck, H.: Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone. Schriftenreihe DAfStb. (1955), Heft 120.
- /24/ Rao, P.S.: Umlagerung der Schnittkräfte in Stahlbetonkonstruktionen. Schriftenreihe DAfStb. (1966), Heft 177.
- /25/ Kristen, Th. und Müller, H.W.: Bestimmung des dynamischen Elastizitätsmoduls und des Verlustfaktors verbreiteter Baustoffe. Berichte aus der Bauforschung Reihe B, Heft 13: Körperschall in Gebäuden. (1960).
- /26/ Rausch, E.: Maschinenfundamente und andere dynamisch beanspruchte Baukonstruktionen. 3. Aufl. Düsseldorf 1959.
- /27/ Müller, F.P.: Die Ermittlung der Abweichung vom linearen Formänderungsgesetz sowie die Dämpfung von Spannbeton durch Ausschwingversuche. Beton und Stahlbau 54 (1959) Nr. 11, S. 276.
- /28/ Girkmann, K.: Flächentragwerke. 4. Auflage. Wien 1956.
- /29/ Flüge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.

/30/ Geiger, H. und
Scheel, K.:

Handbuch der Physik. Band 6: Mechanik
der elastischen Körper. Berlin 1928.

/31/ Hübner, G. und
Lübcke, E.:

Zur Einwirkung von periodischen, räum-
lich verteilten Kräften auf die Schwin-
gungen mechanischer Schwingungsgebilde.
Zeitschr. f. Naturforschung 11 a (1956)
Nr. 6, S. 492/498.

Beton-Kalender 1966. Berlin, München
1966.

M e ß e r g e b n i s s e

u n d

A n h a n g

Bild 14: Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 ,
 der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_P}$ von der Belastung P
 - ausmittig belastete Stahlbetonstützen -

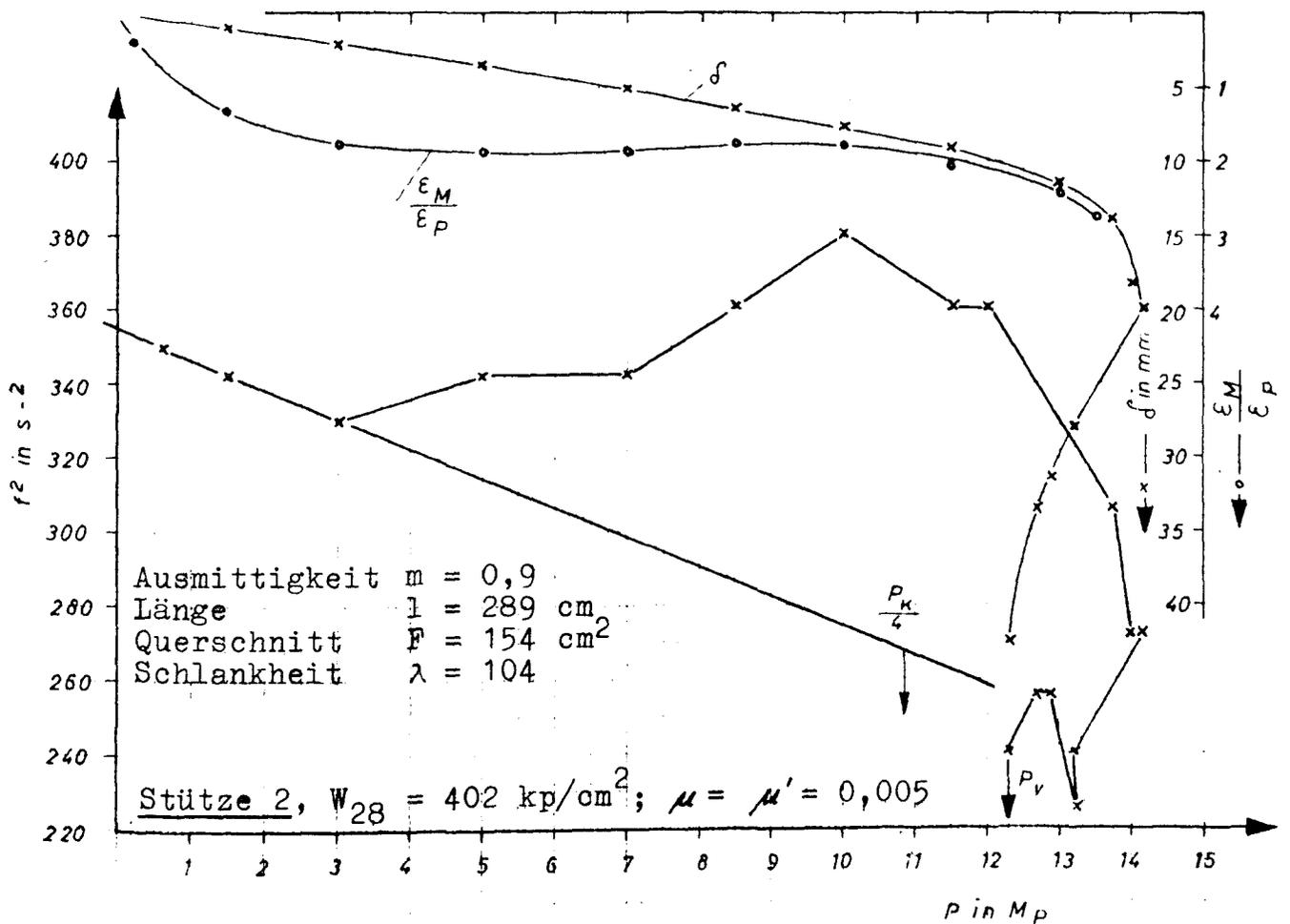
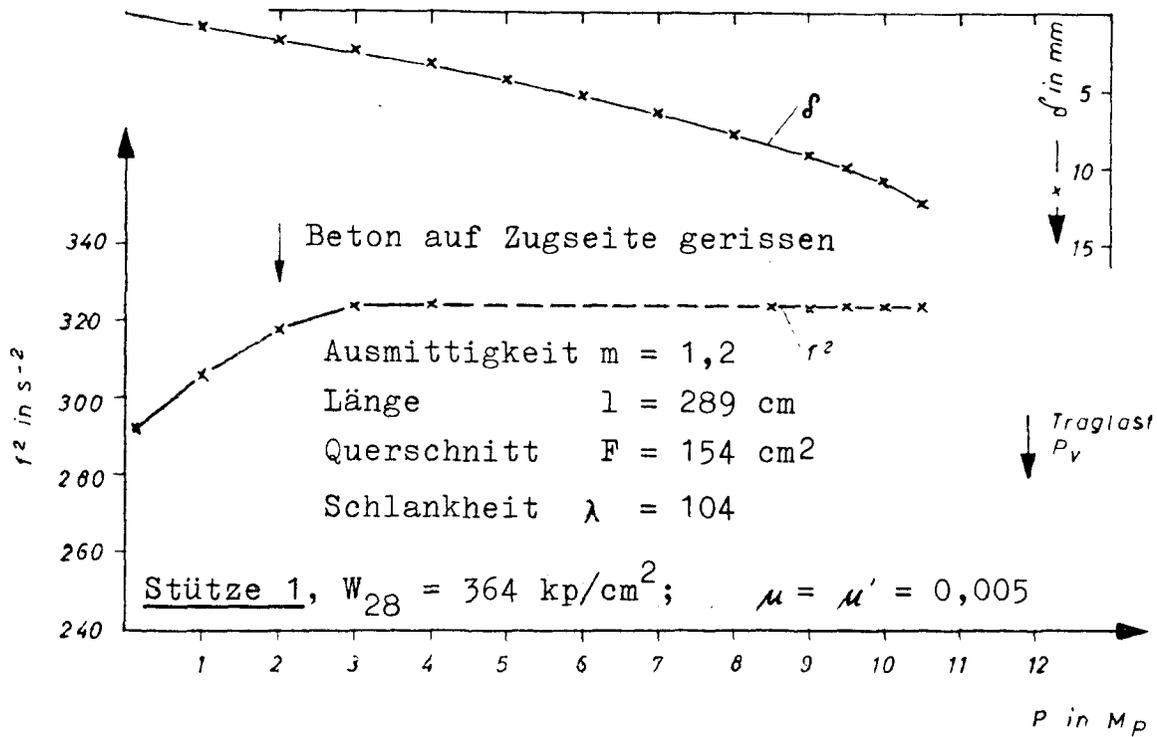
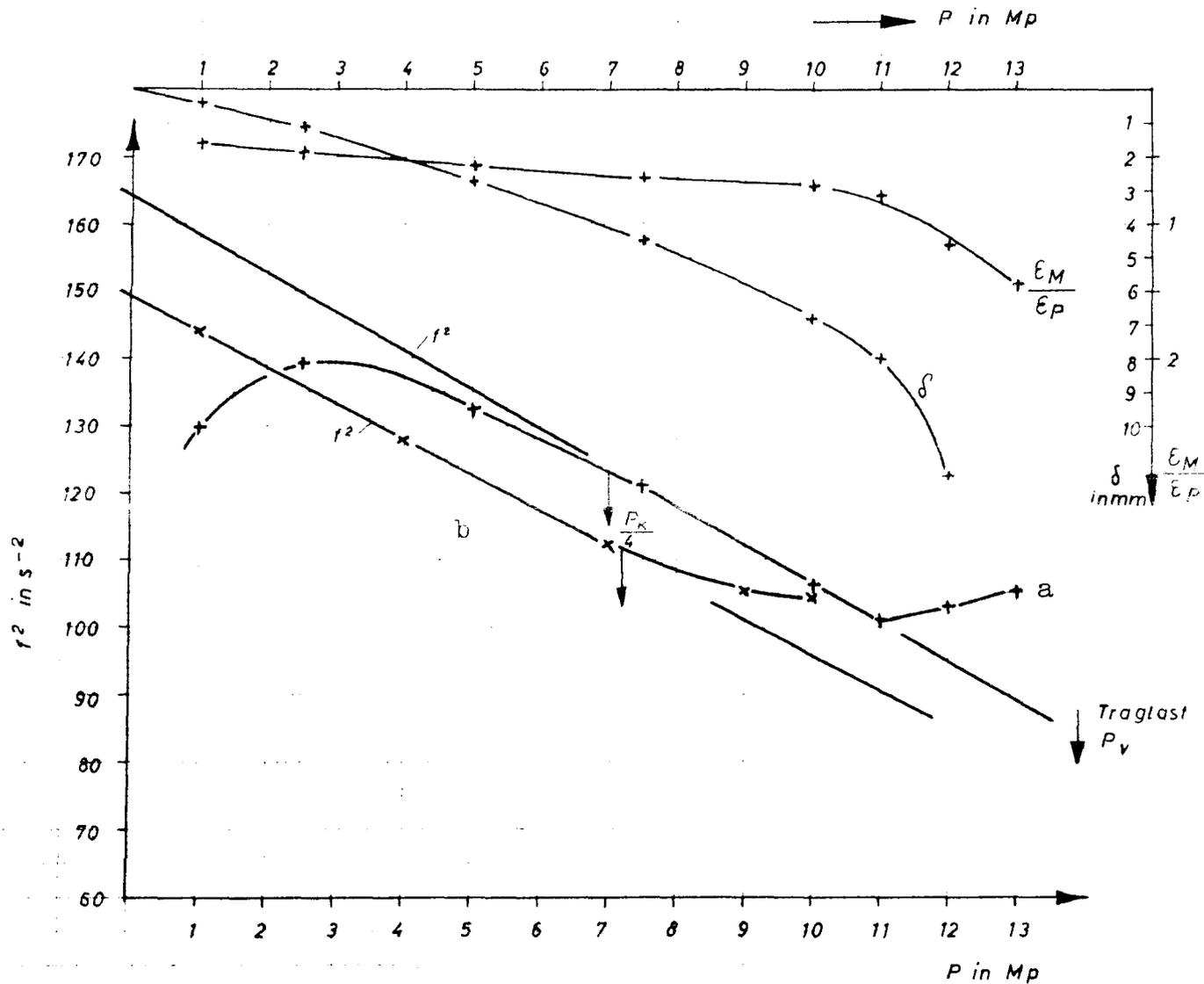


Bild 15: Stütze 3

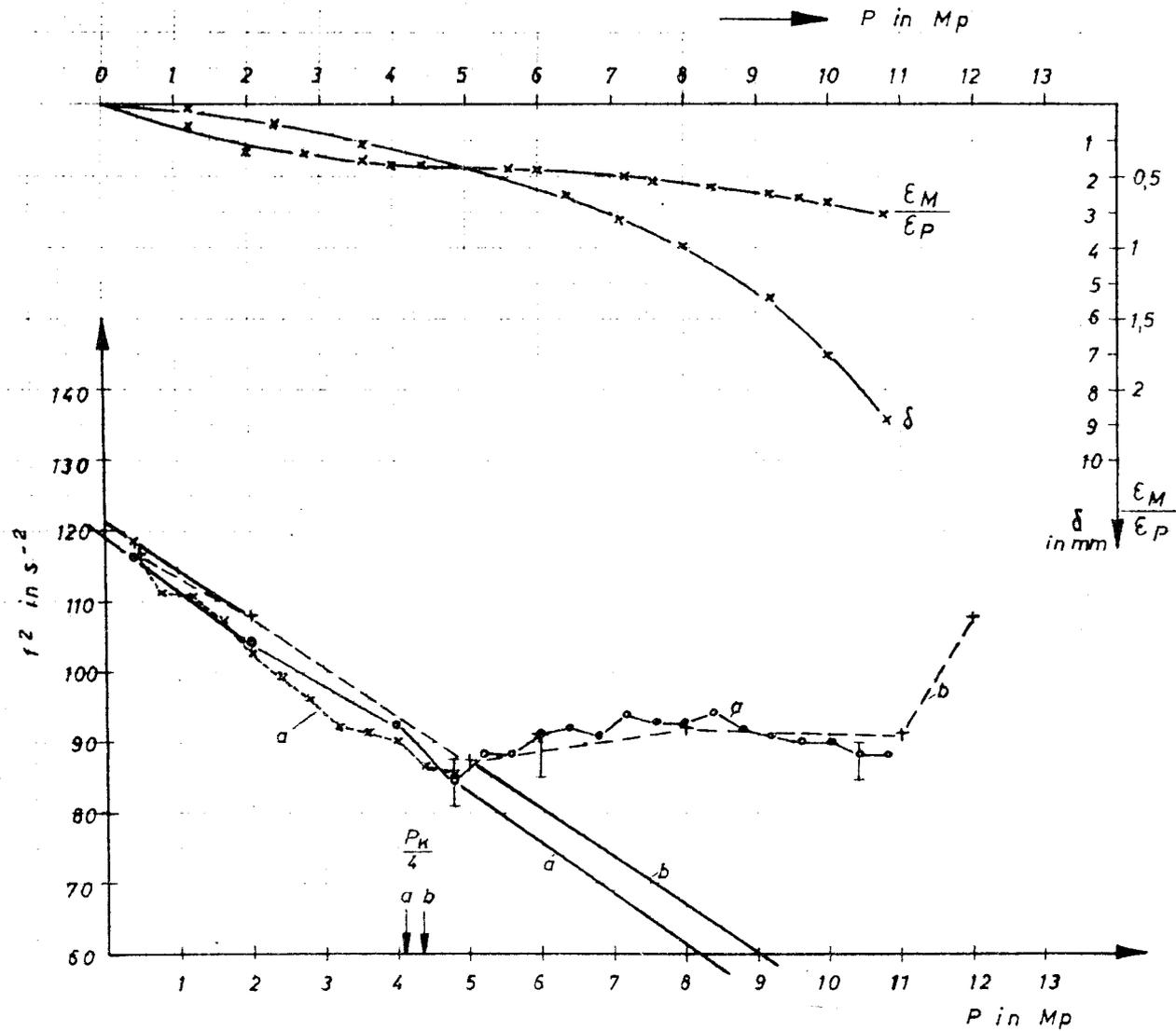
Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_P}$ von der Belastung P , mittig belastete Stahlbetonstütze, $W_{28} = 269 \text{ kp/cm}^2$
 $\mu = \mu' = 0,025$

Länge $l = 288,2 \text{ cm}$
 Querschnitt $F = 127 \text{ cm}^2$
 Schlankheit $\lambda = 127$



Zeitdifferenz zwischen den Messungen a und b: 6 Tage

Bild 16: Stütze 5



Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_P}$ von der Belastung P , mittig belastete Stahlbetonstütze
 $W_{28} = 266 \text{ kp/cm}^2$
 $\mu = \mu' = 0,025$

Zeitdifferenz zwischen den Messungen a und b: 2 Tage

• aus freien Schwingungen ermittelt

! Frequenzvariation bei Änderung der dynamischen Prüflast
 $0,02 < Q_s \text{ in } kp < 0,18$

Länge $l = 291 \text{ cm}$
 Querschnitt $F = 128 \text{ cm}^2$
 Schlankheit $\lambda = 128$

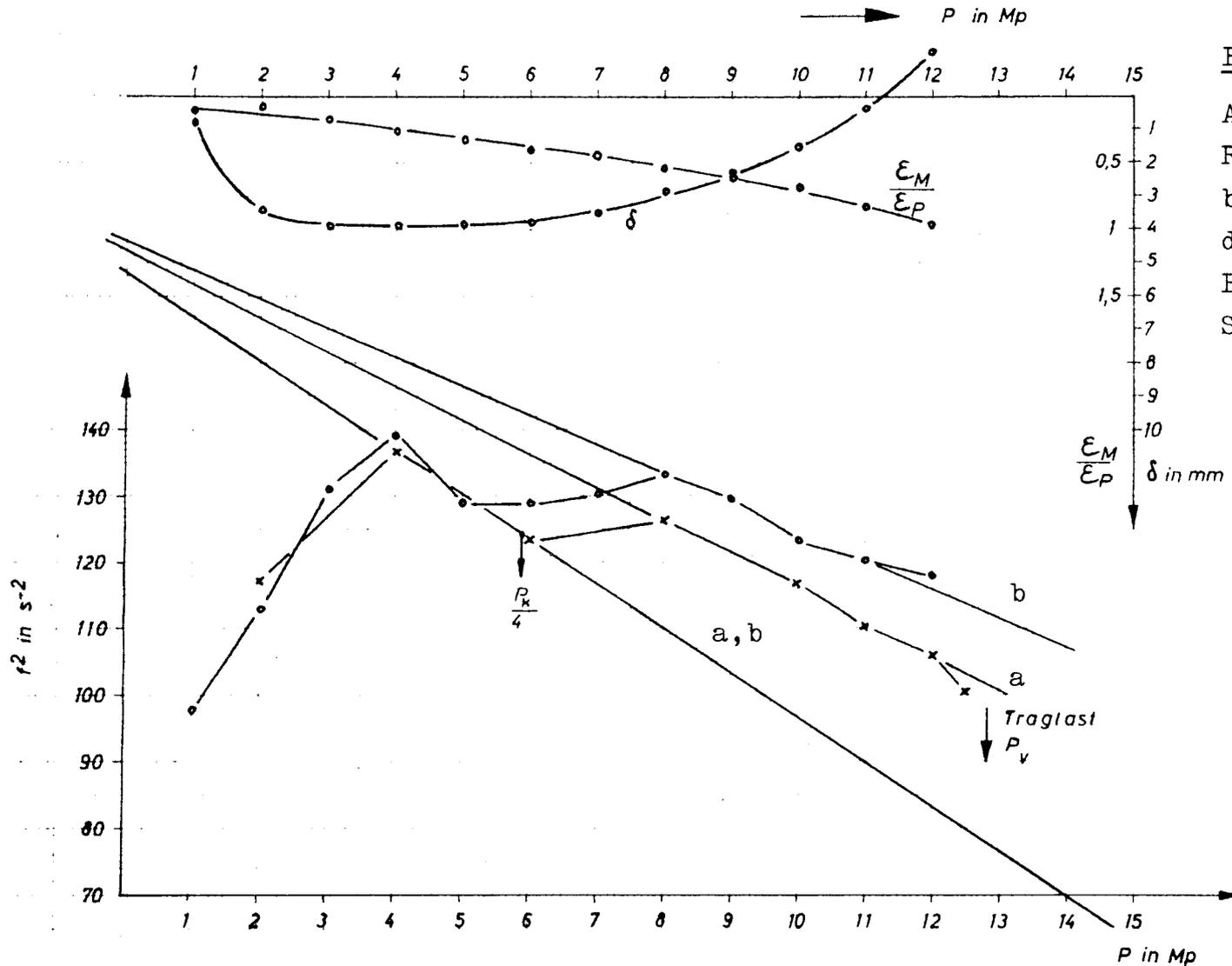


Bild 17: Stütze 4

Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_P}$ von der Belastung P , mittig belastete Stahlbetonstütze, $W_{28} = 367kp/cm^2$
 $\mu = \mu' = 0,005$

Zeitdifferenz zwischen den Messungen a und b: 17 Tage

Länge $l = 290,3 \text{ cm}$
 Querschnitt $F = 129 \text{ cm}^2$
 Schlankheit $\lambda = 128$

An der Bruchstelle wurden wesentliche Abweichungen von der geplanten Bewehrungsführung festgestellt, vgl. Skizze auf Seite 65

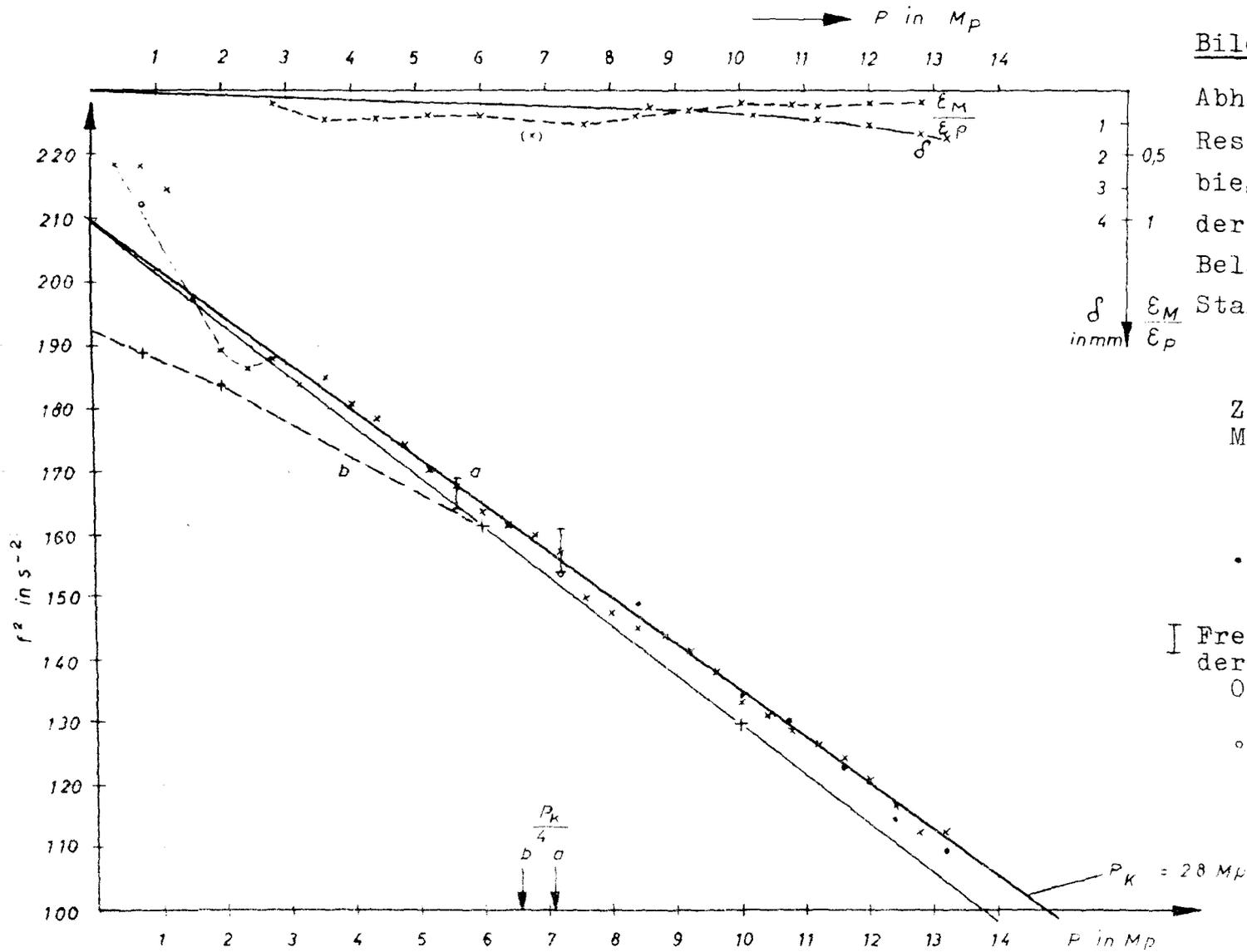


Bild 18: Stütze 6

Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_P}$ von der Belastung P , mittig belastete Stahlbetonstütze; $W_{28} = 433 \text{ kp/cm}^2$
 $\mu = \mu' = 0,005$

Zeitdifferenz zwischen den Messungen a und b: 1 Tag

• aus freien Schwingungen ermittelt

▮ Frequenzvariation bei Änderung der dynamischen Prüflast
 $0,02 < a_s \text{ in kp} < 0,8$

◦ Werte bei Entlastung, Messung a, ermittelt

Länge $l = 290 \text{ cm}$
 Querschnitt $F = 128 \text{ cm}^2$
 Schlankheit $\lambda = 127$

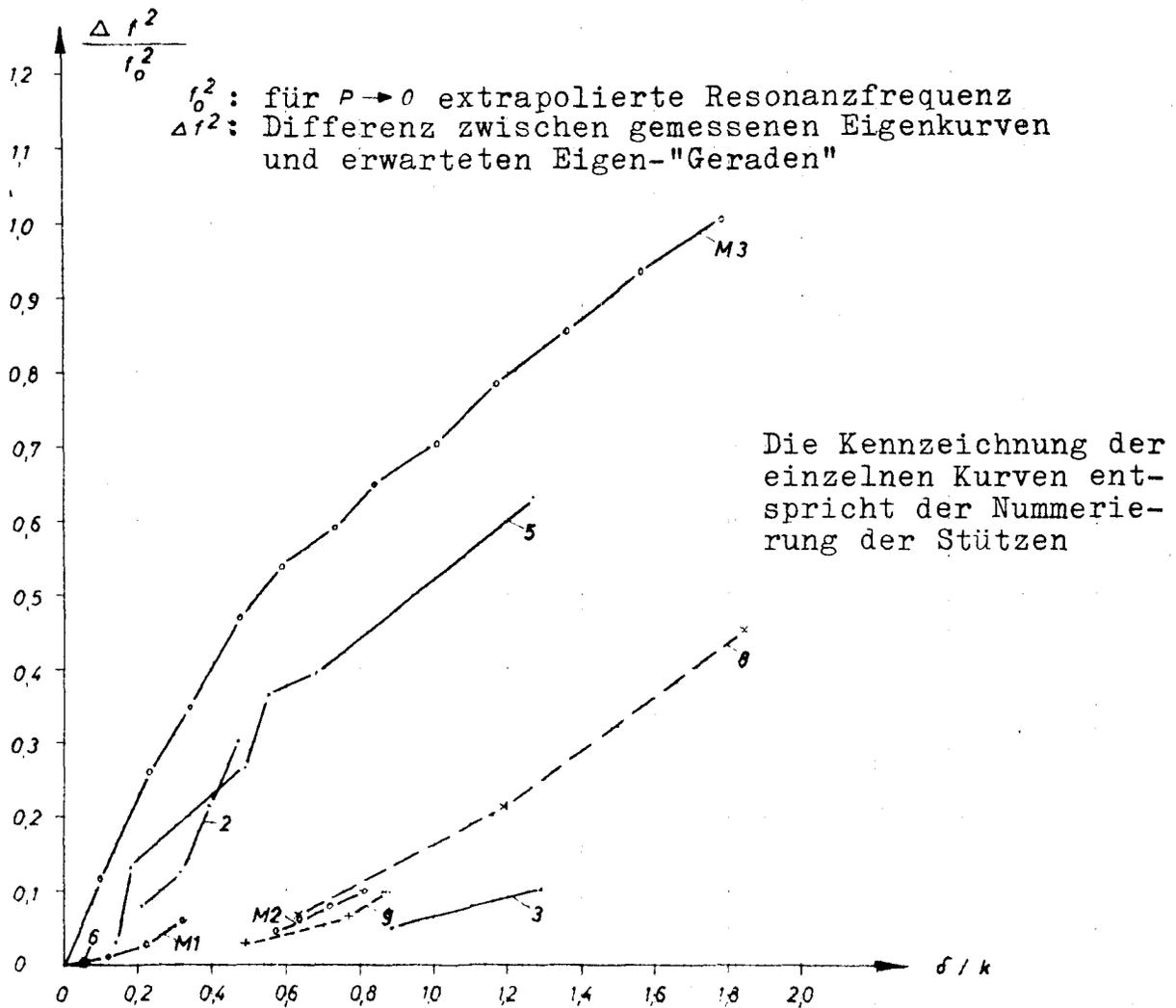


Bild 19: Zusammenfassende Darstellung der relativen Abweichungen von der $f^2(P)$ -Linearität als Funktion der bezogenen Mittendurchbiegung $\frac{\delta}{k}$.

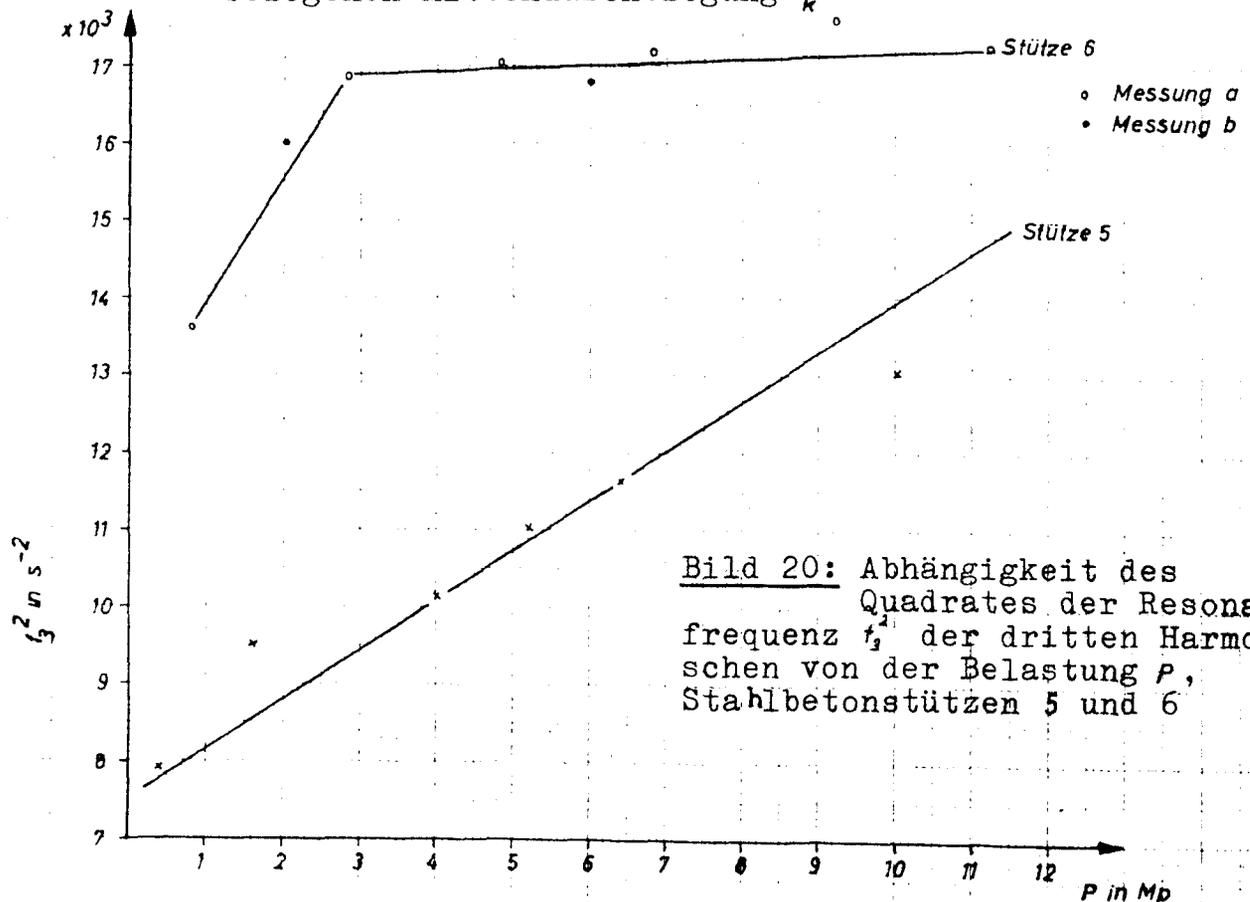


Bild 20: Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f_3^2 der dritten Harmonischen von der Belastung P , Stahlbetonstützen 5 und 6

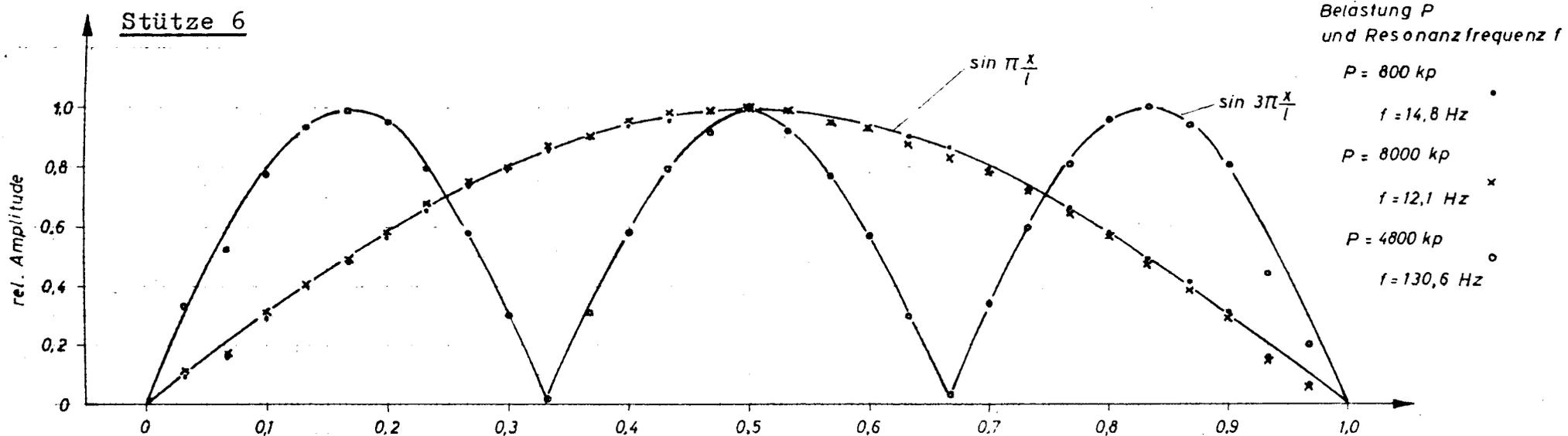


Bild 21: Schwingungsform in Abhängigkeit von der Belastung P
Stahlbetonstützen 5 und 6

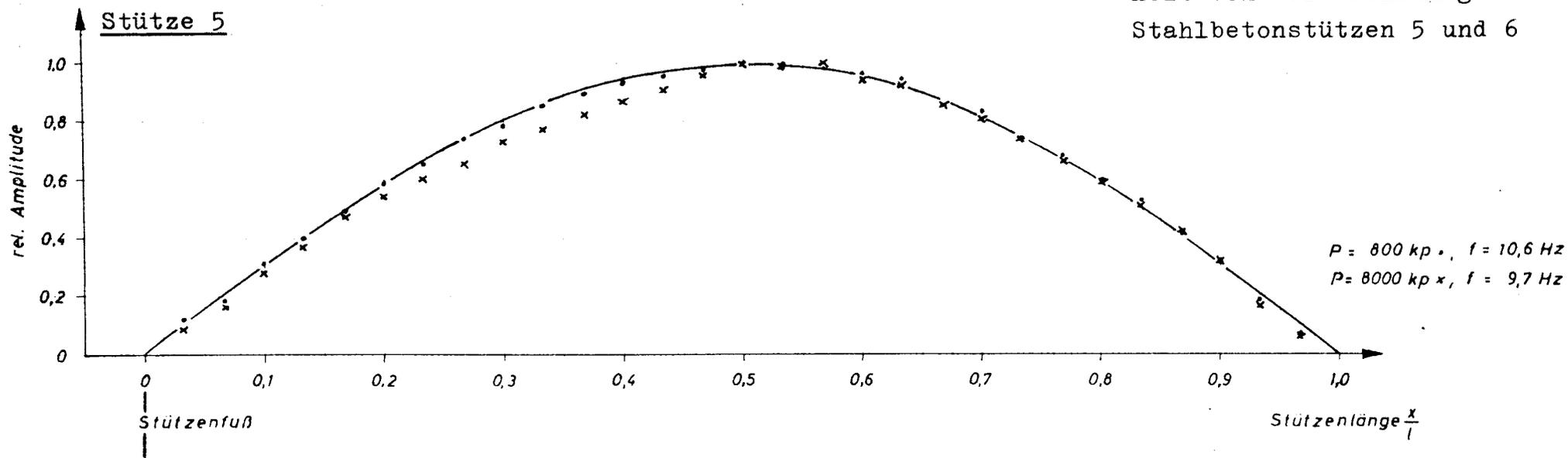


Bild 22: Schwingungsform in Abhängigkeit von der Belastung P , Stahlbetonstütze 7 und Stahlstütze 10, gelenkig gelagert

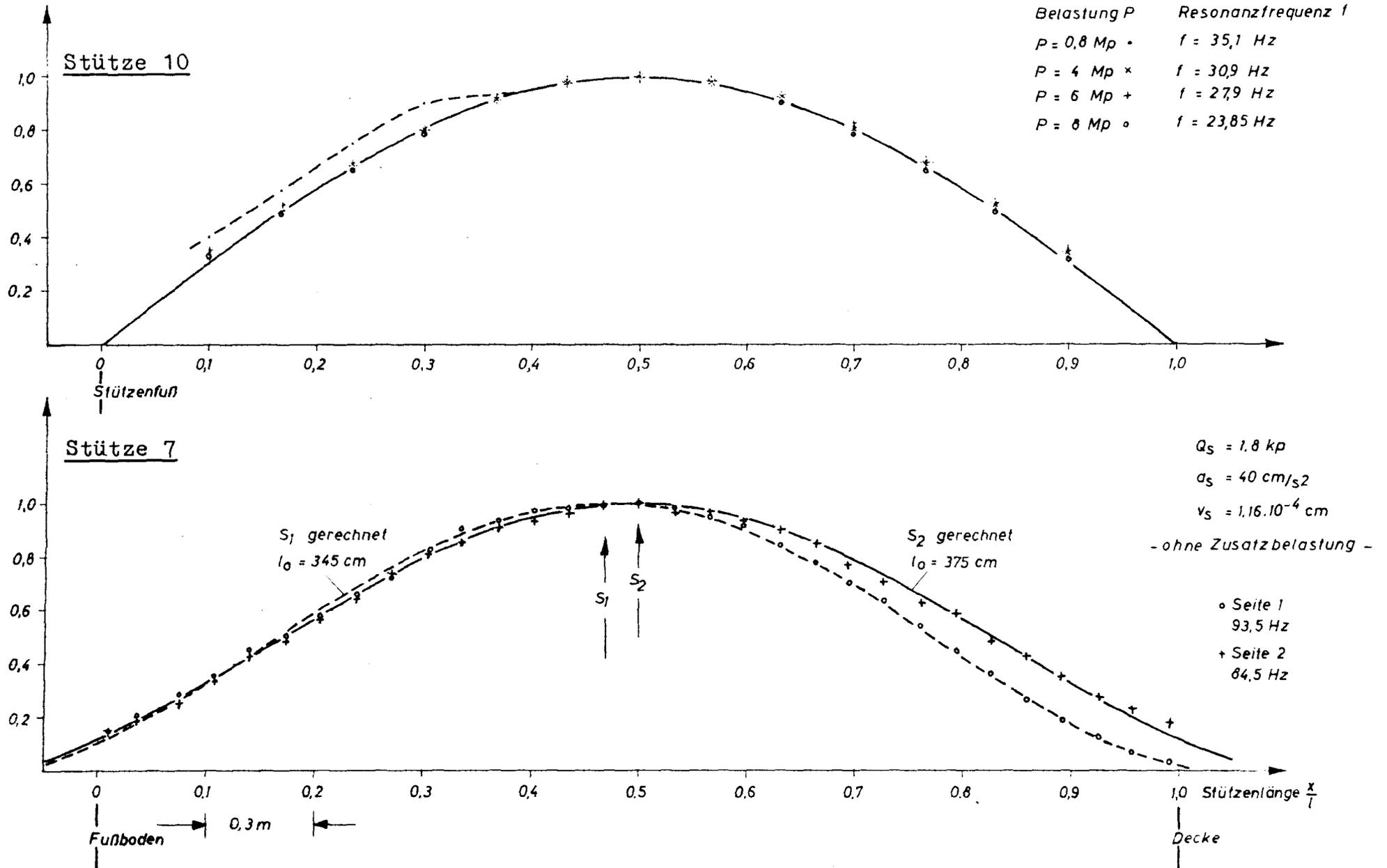
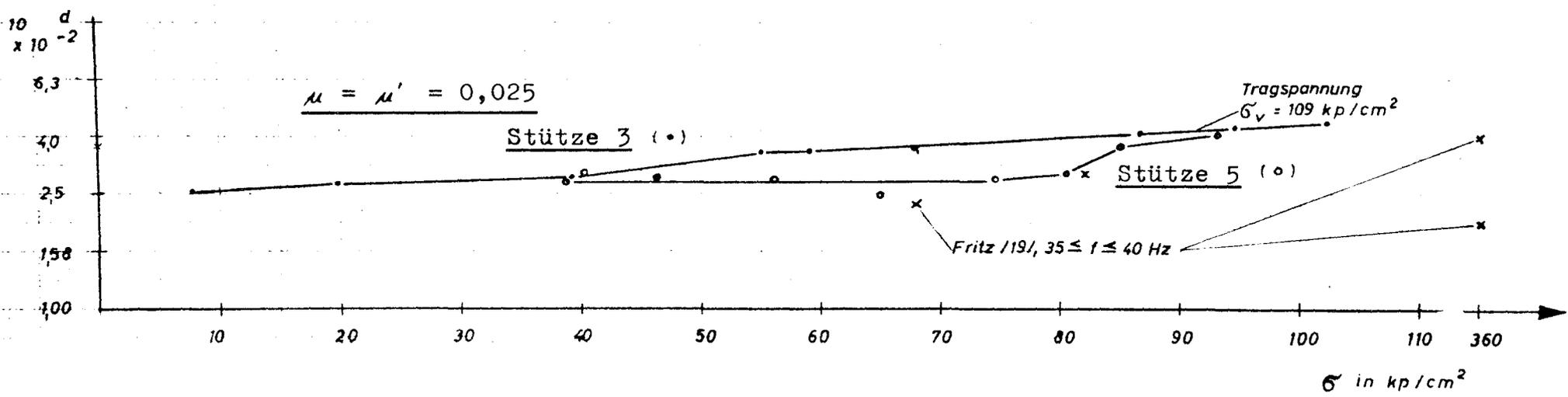
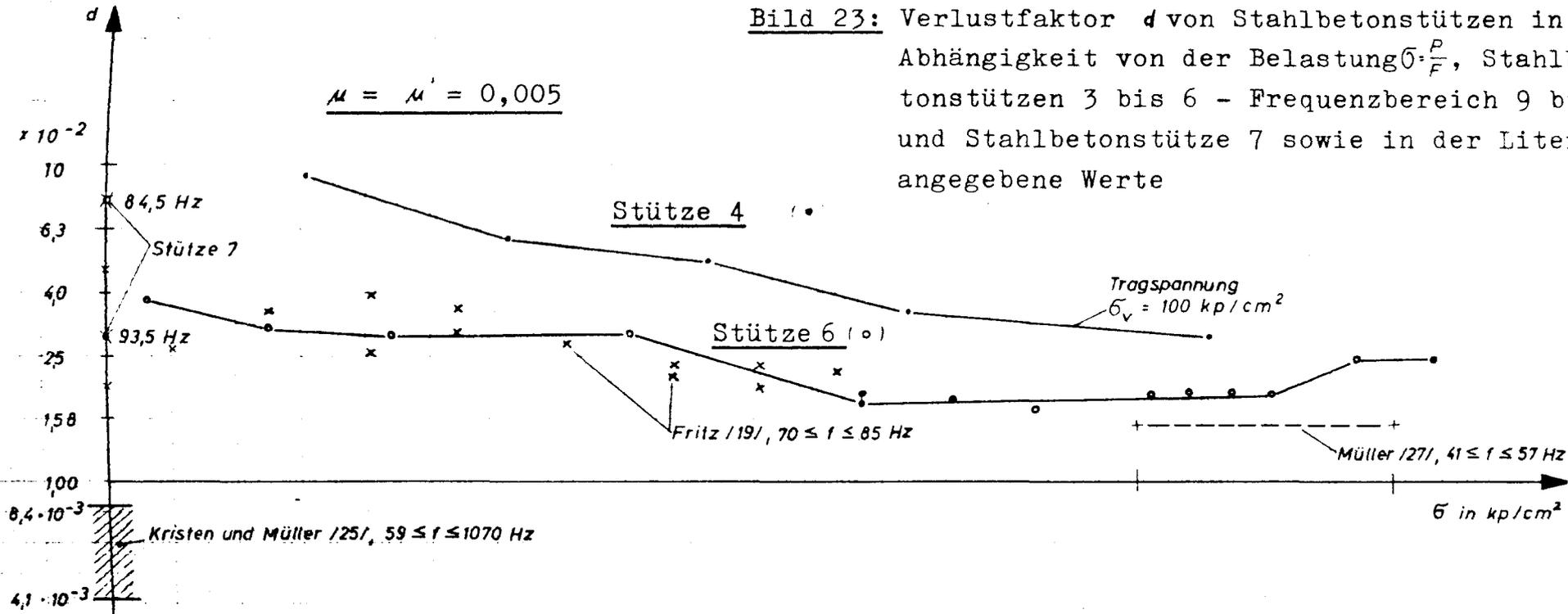


Bild 23: Verlustfaktor d von Stahlbetonstützen in Abhängigkeit von der Belastung $\sigma \cdot \frac{P}{F}$, Stahlbetonstützen 3 bis 6 - Frequenzbereich 9 bis 15 Hz - und Stahlbetonstütze 7 sowie in der Literatur angegebene Werte



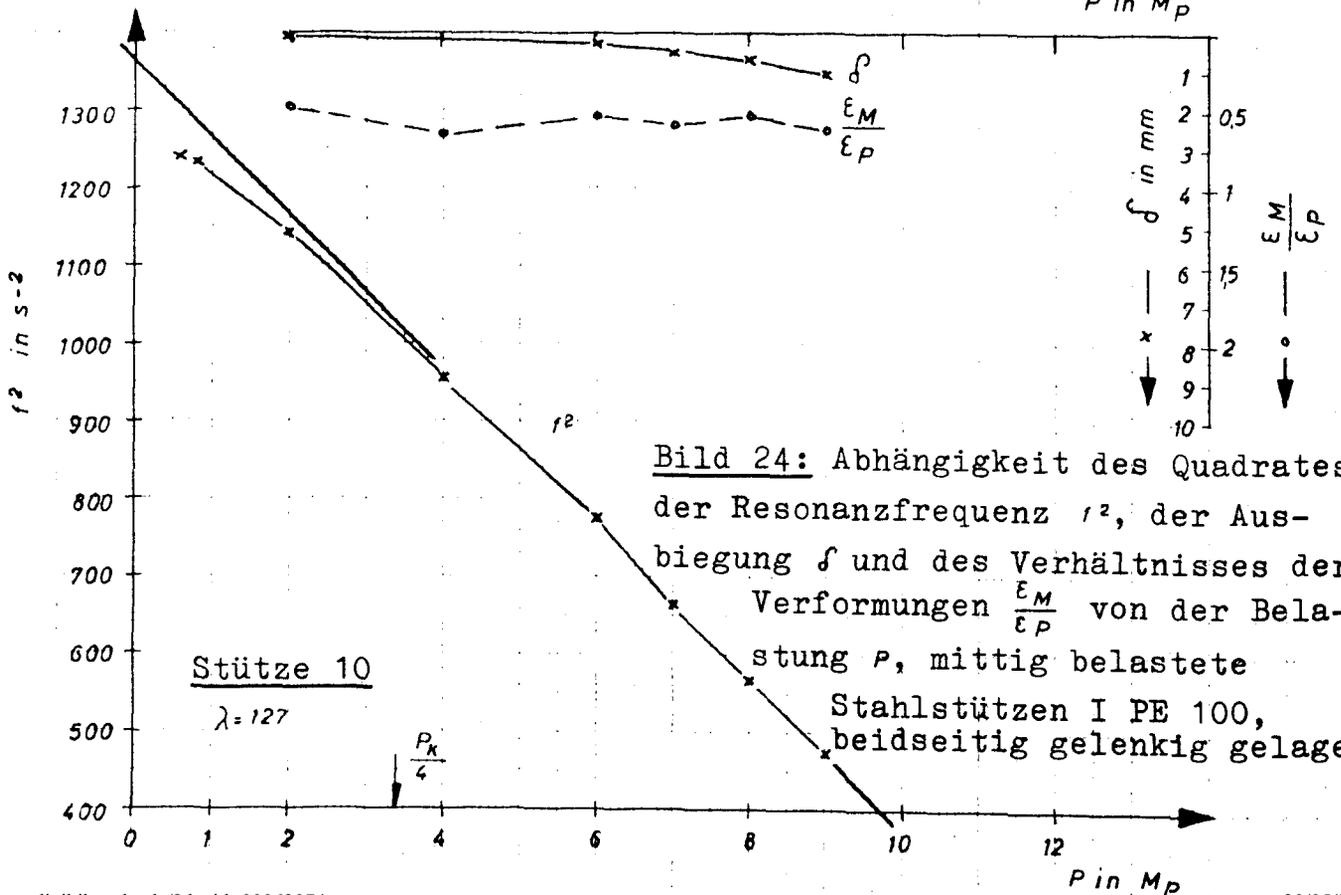
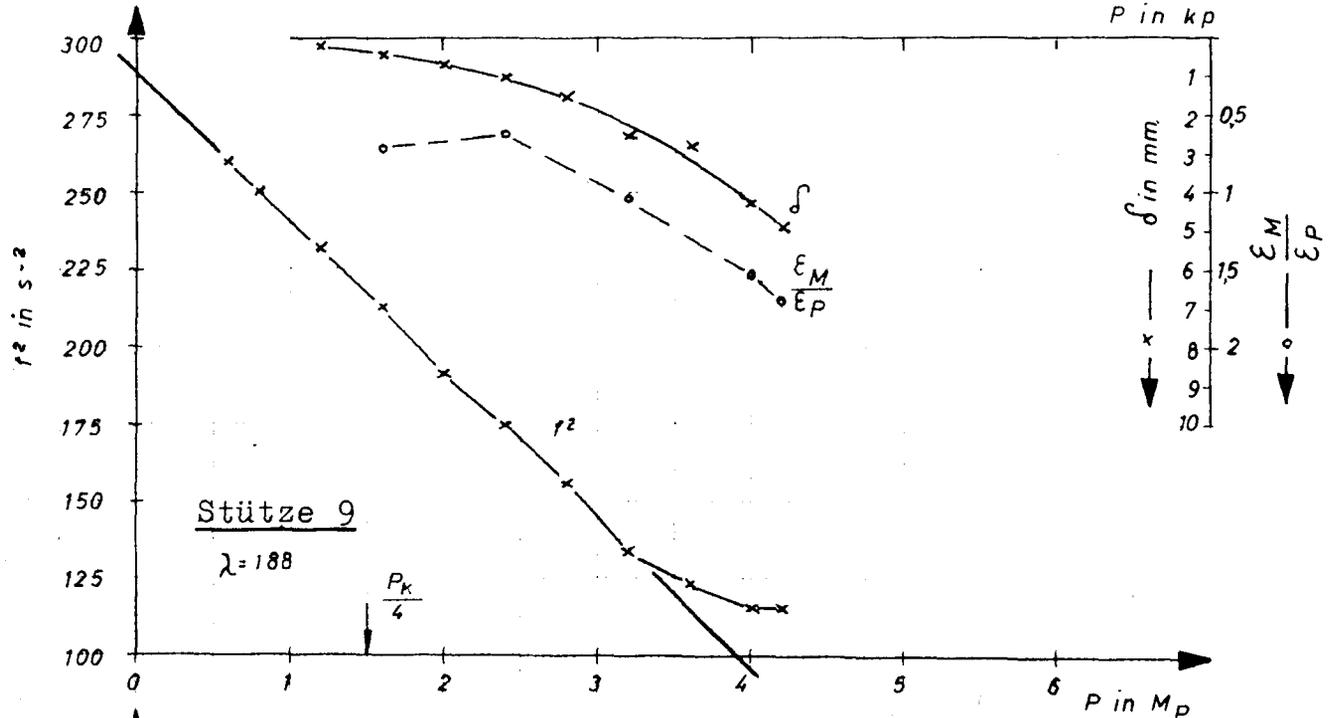
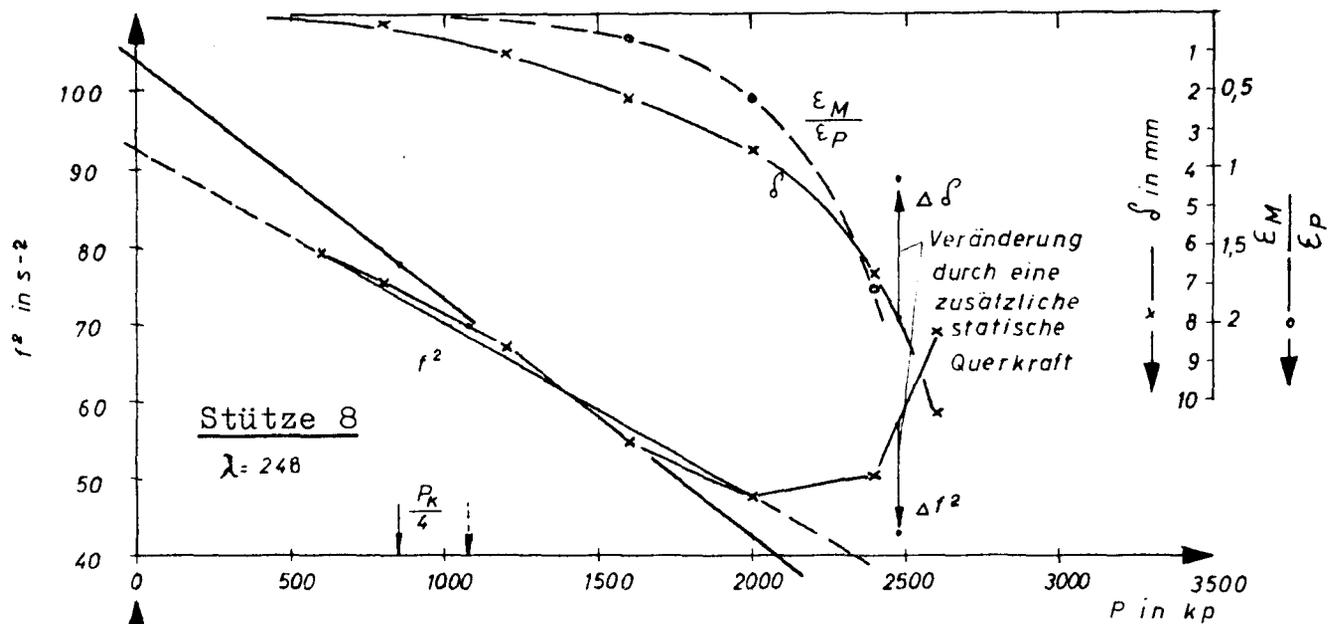


Bild 24: Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 , der Ausbiegung δ und des Verhältnisses der Verformungen $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_P}$ von der Belastung P , mittig belastete Stahlstützen I PE 100, beidseitig gelenkig gelagert

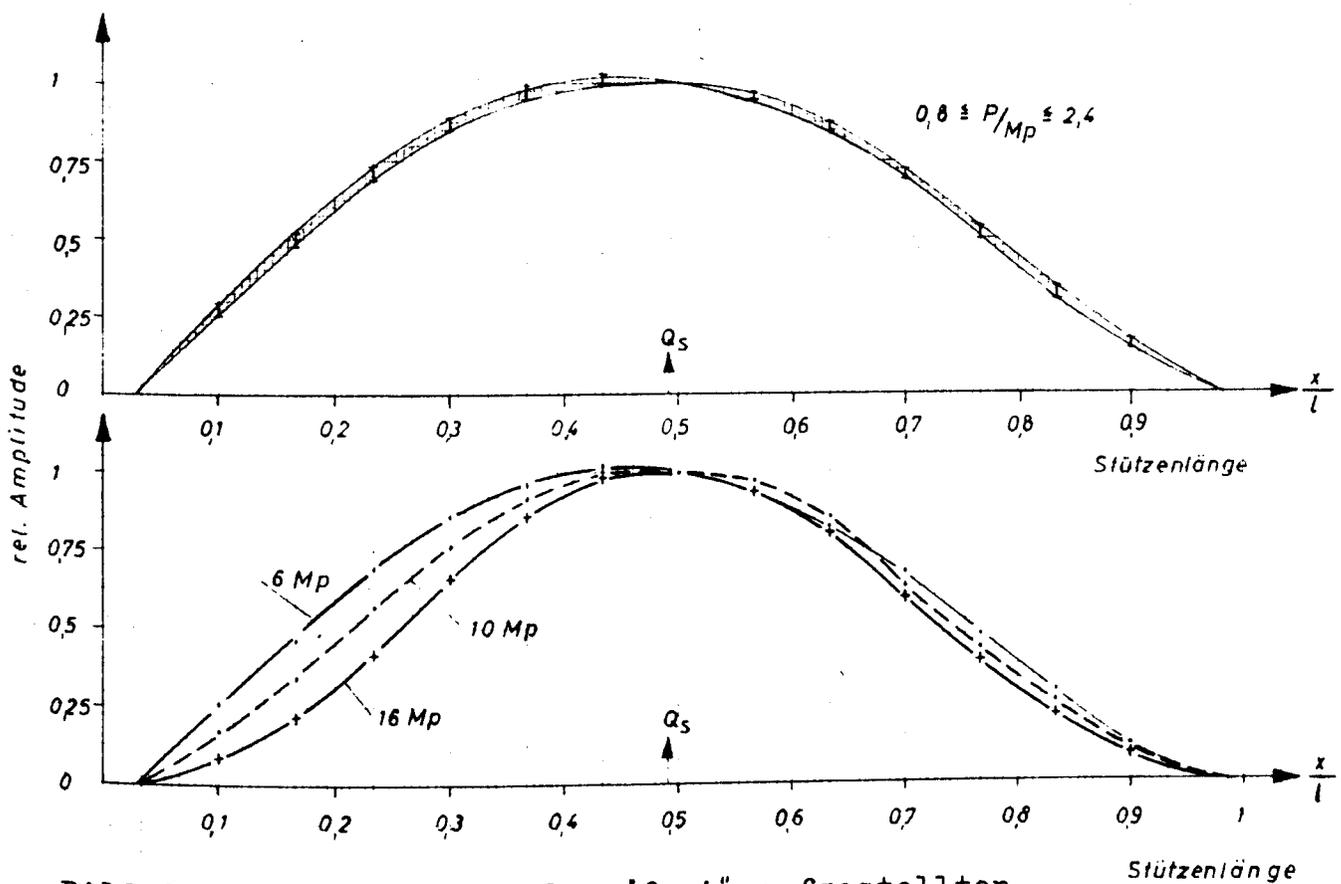
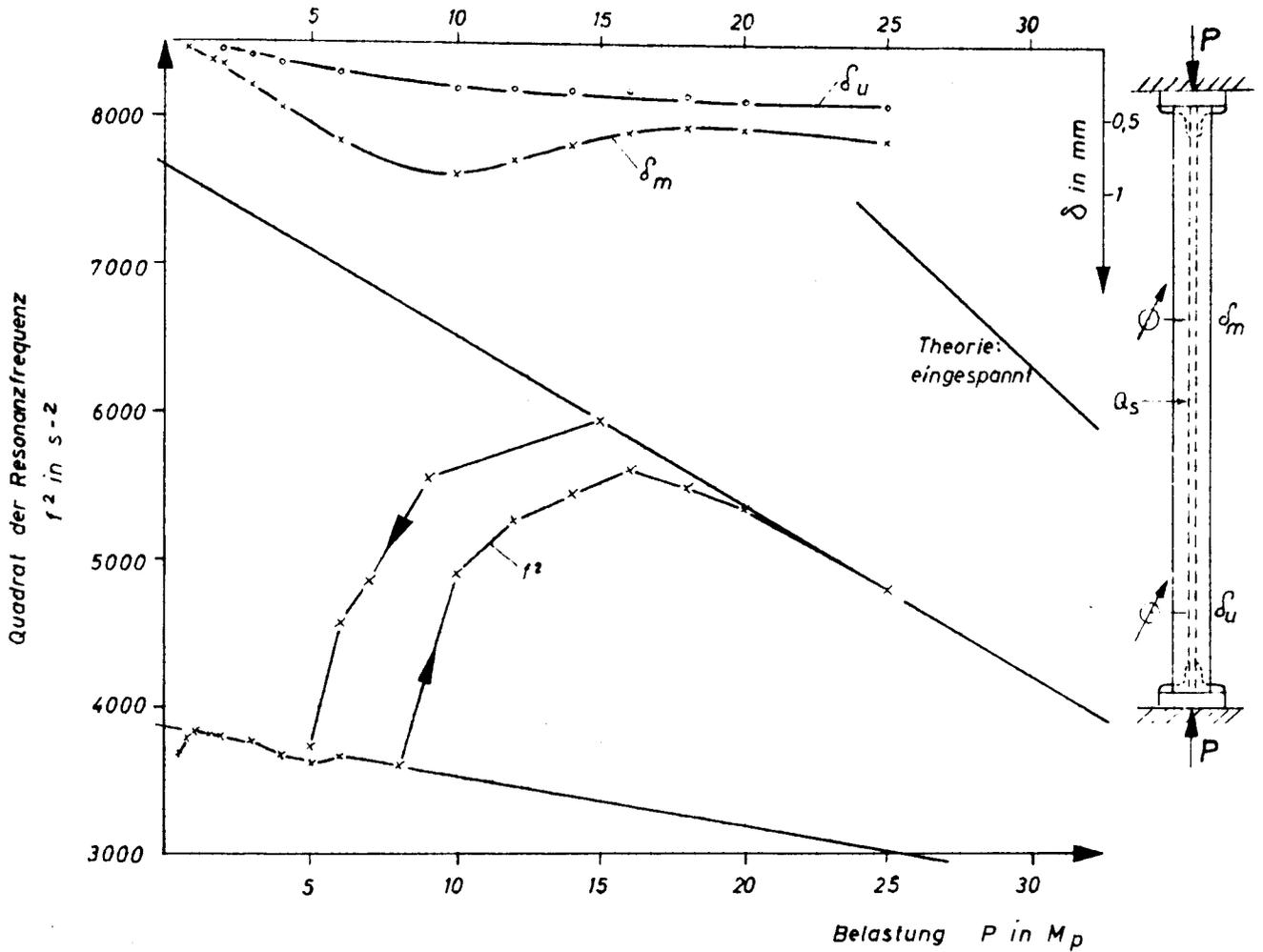


Bild 25: Einspanneffekt der "frei" aufgestellten Stahlstütze 10 (Lagerung ohne besondere Vorkehrungen)

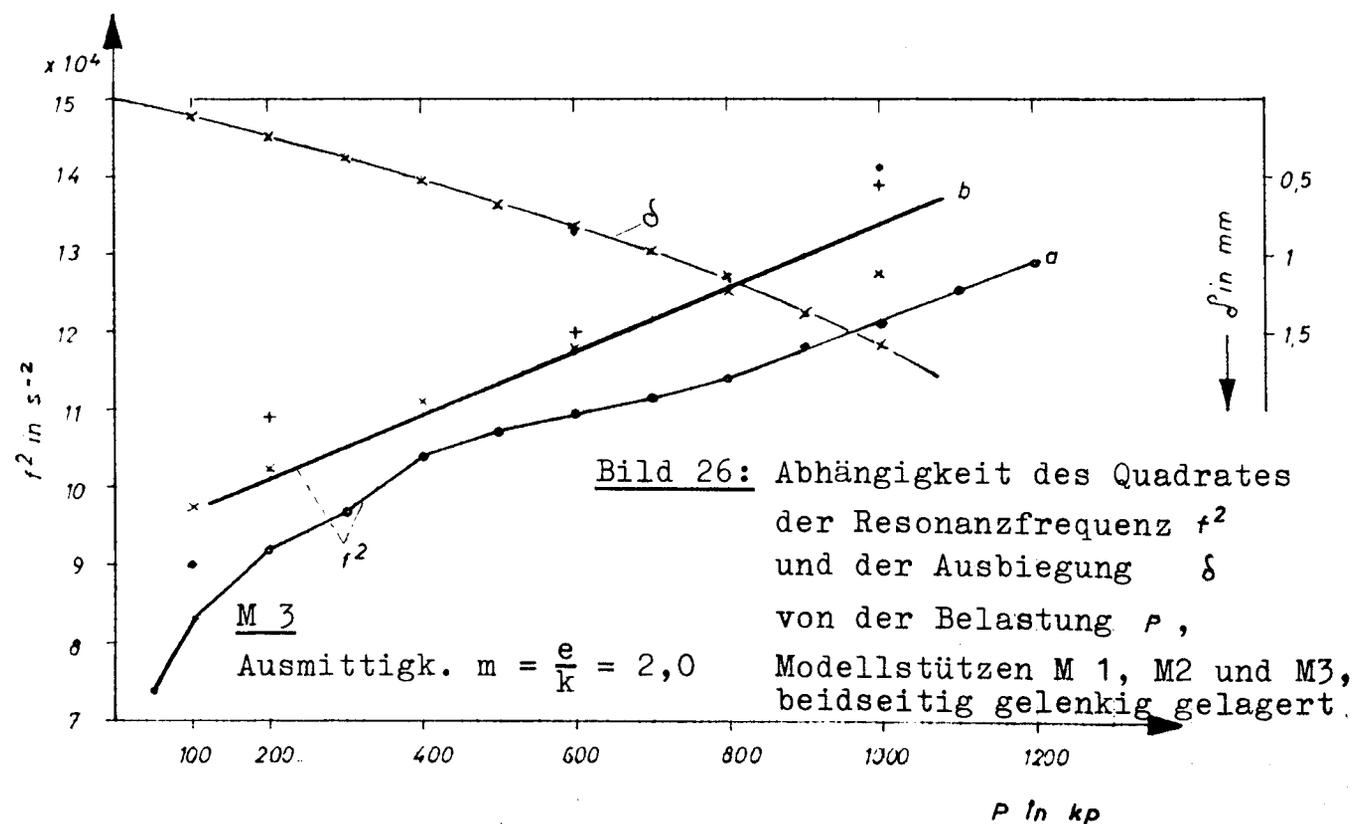
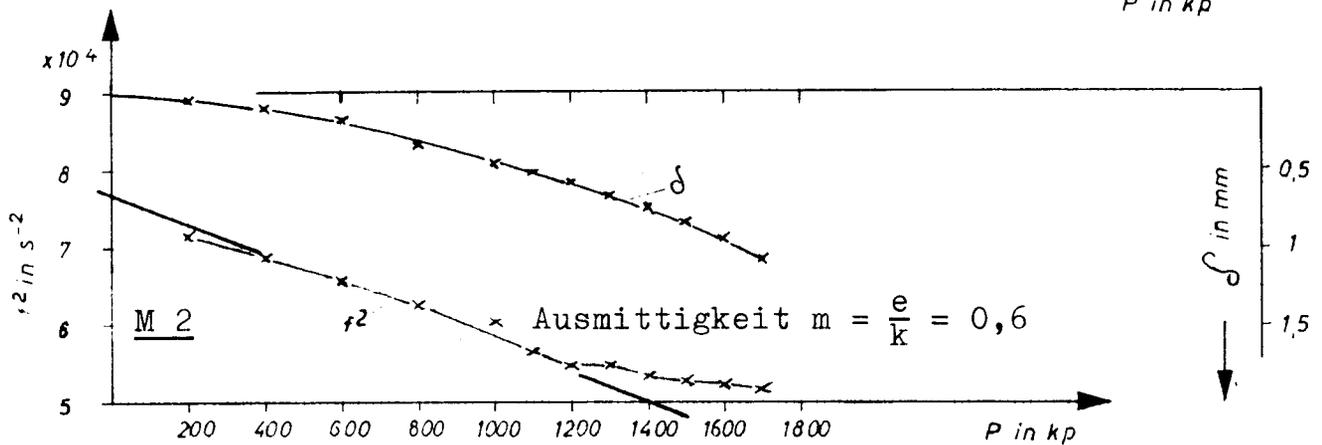
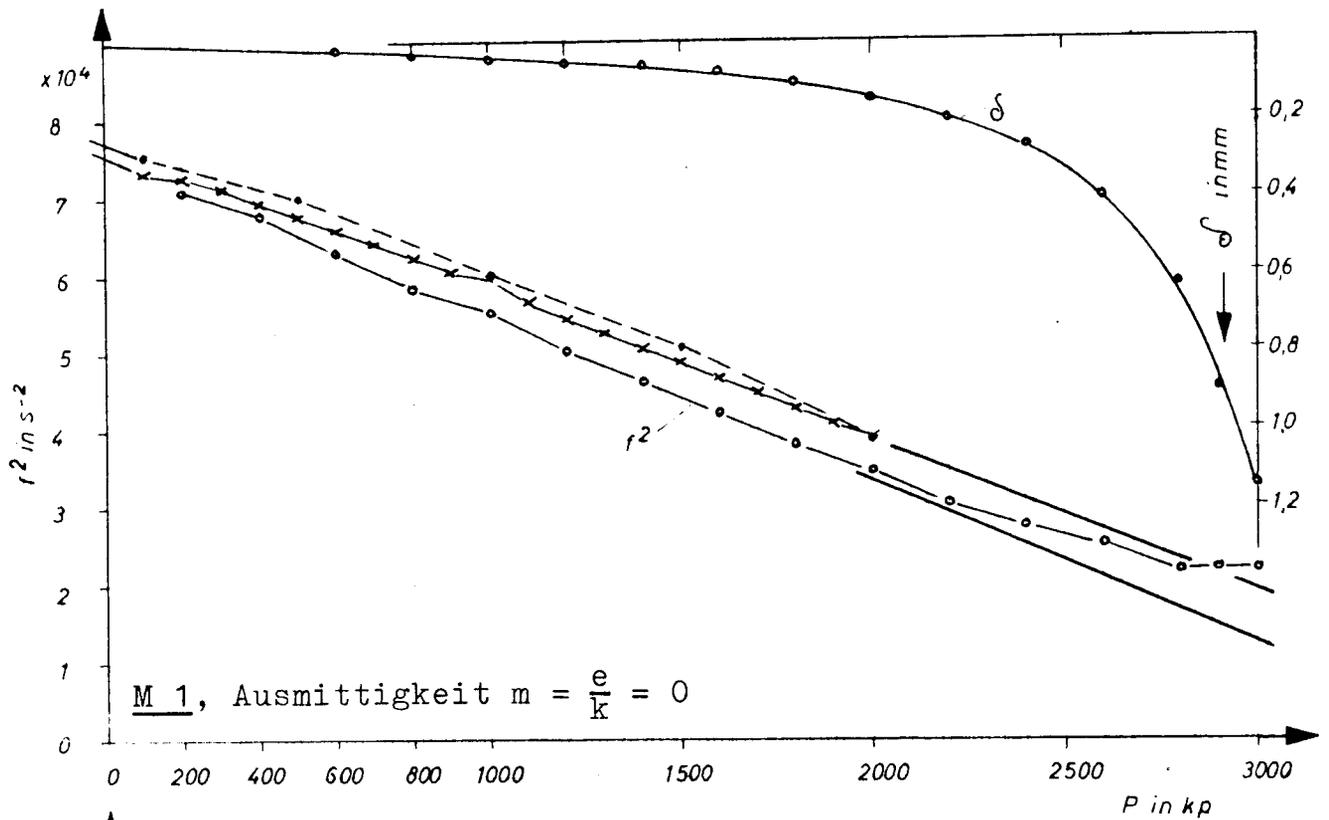


Bild 26: Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 und der Ausbiegung δ von der Belastung P , Modellstützen M 1, M2 und M3, beidseitig gelenkig gelagert.

Material: Baustahl; Länge $l = 26$ cm, Querschnitt $F = 1,98$ cm²

Material: Baustahl, blank gezogen
 Länge $l = 26 \text{ cm}$
 Querschnitt $F = 1,98 \text{ cm}^2$
 Schlankheit $\lambda = 111$

Belastung und Resonanzfrequenz
 $P = 200 \text{ kp}$



Anregungsstelle $Q_s = 33 \text{ pond}$

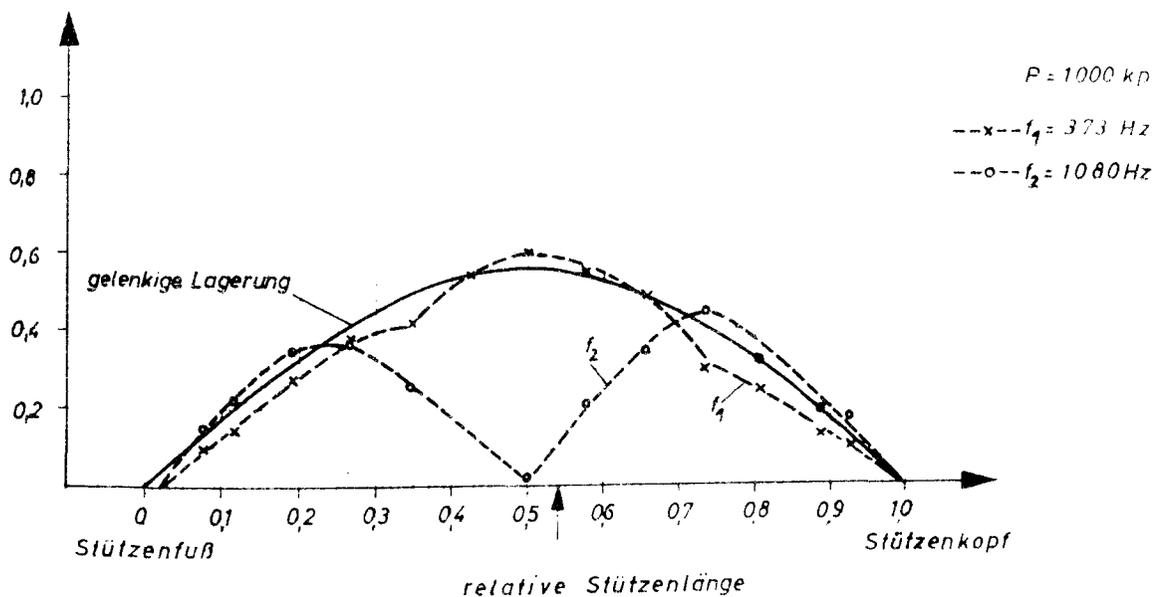
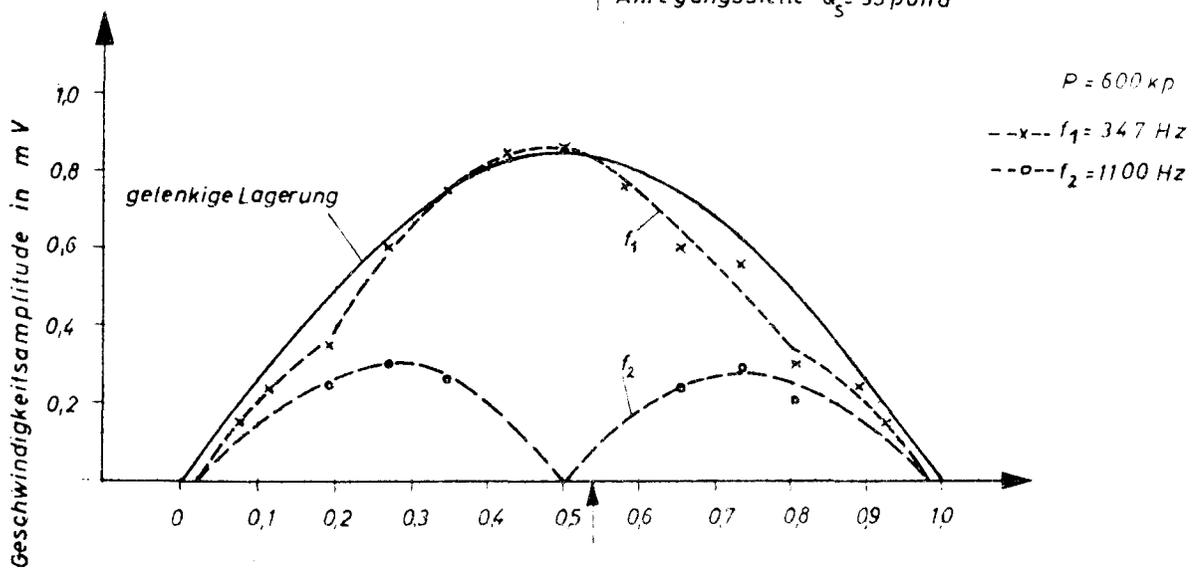


Bild 27: Änderung der Schwingungsform bei ausmittiger Belastung, Modellstütze M 3, Ausmittigkeit $m = 2,0$

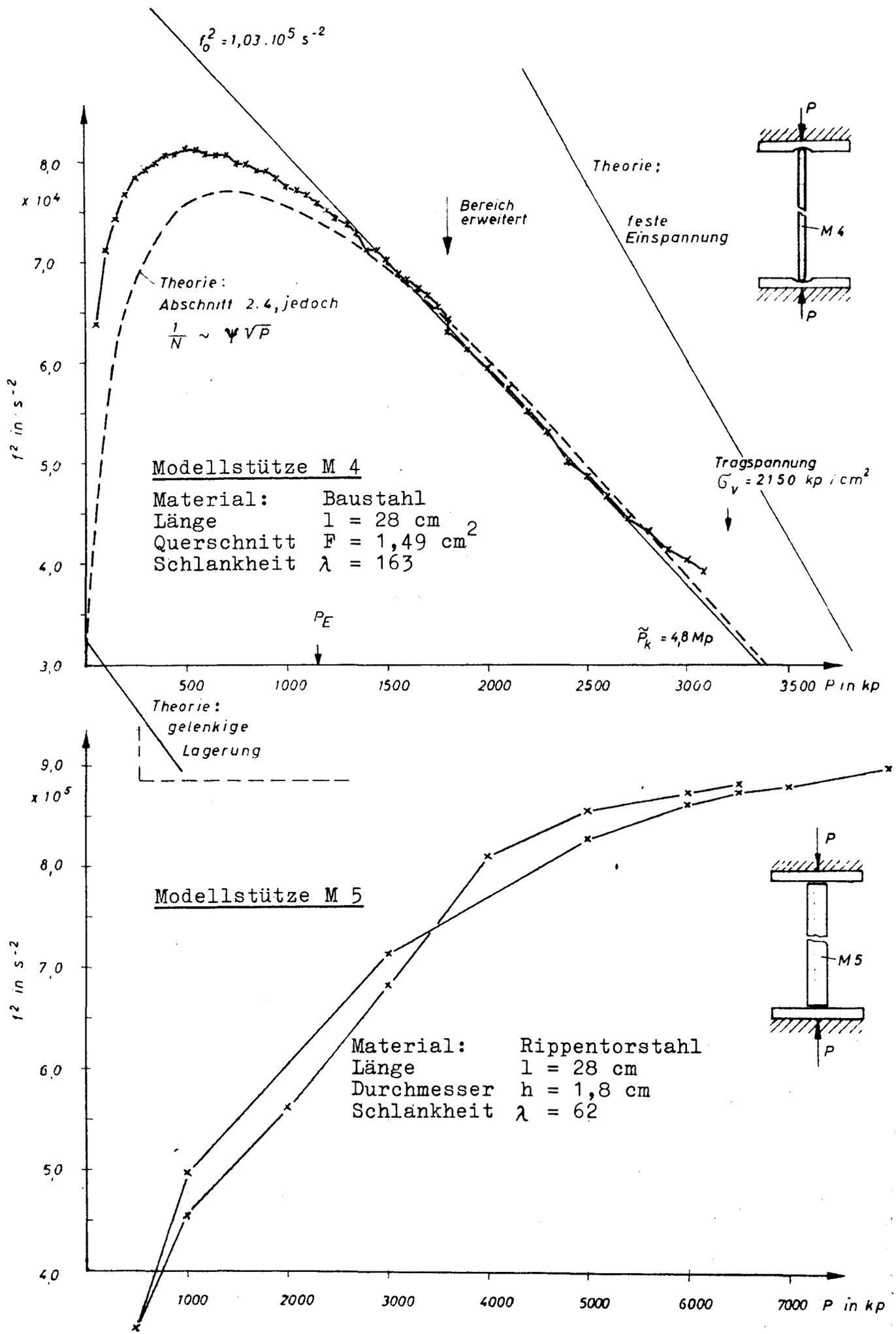


Bild 28: Untersuchung des Einspanneffektes von Modellstützen

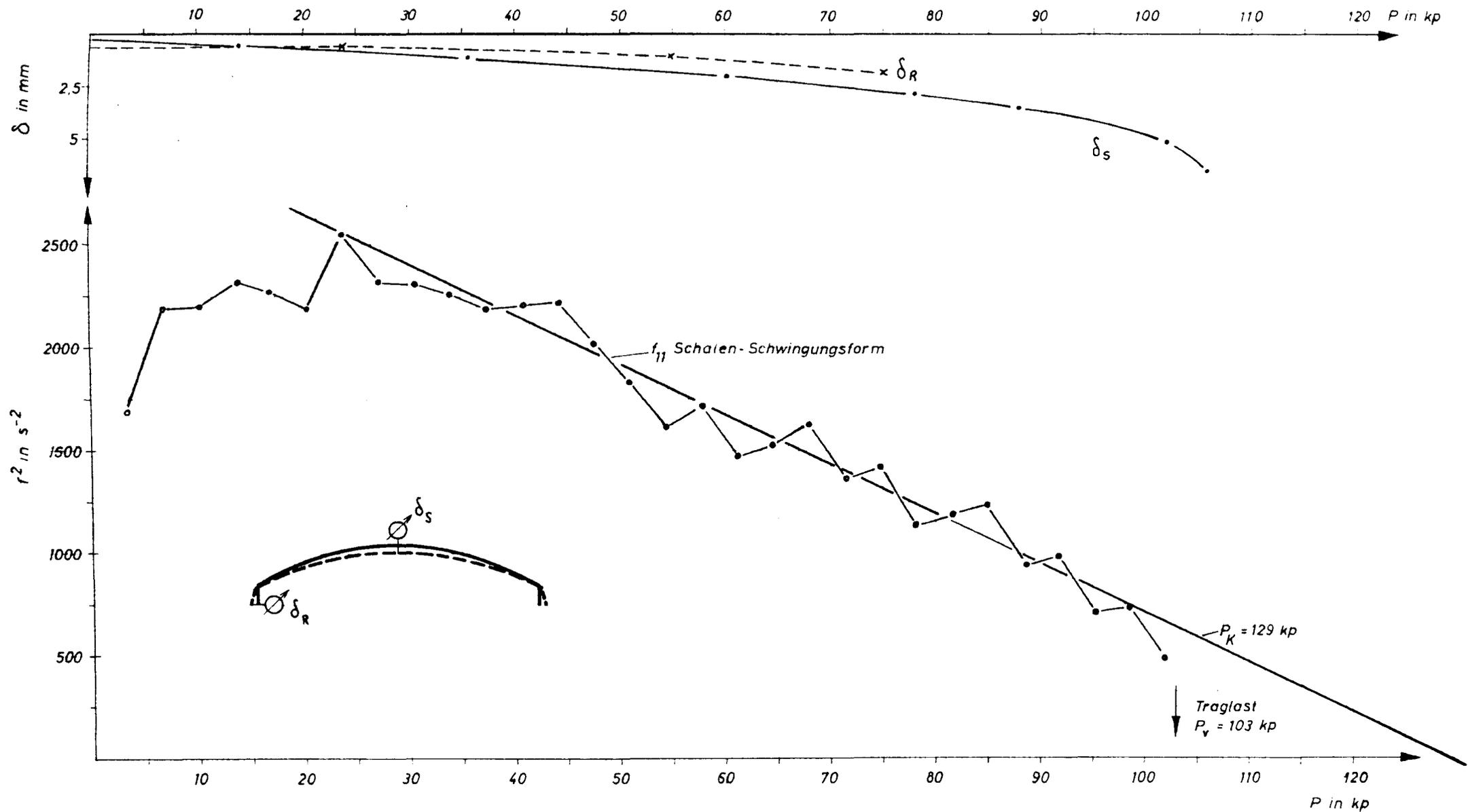


Bild 29: Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 und der Mittendurchbiegungen δ_S, δ_R von der Belastung P , Modellschale 1 - mit Randträger

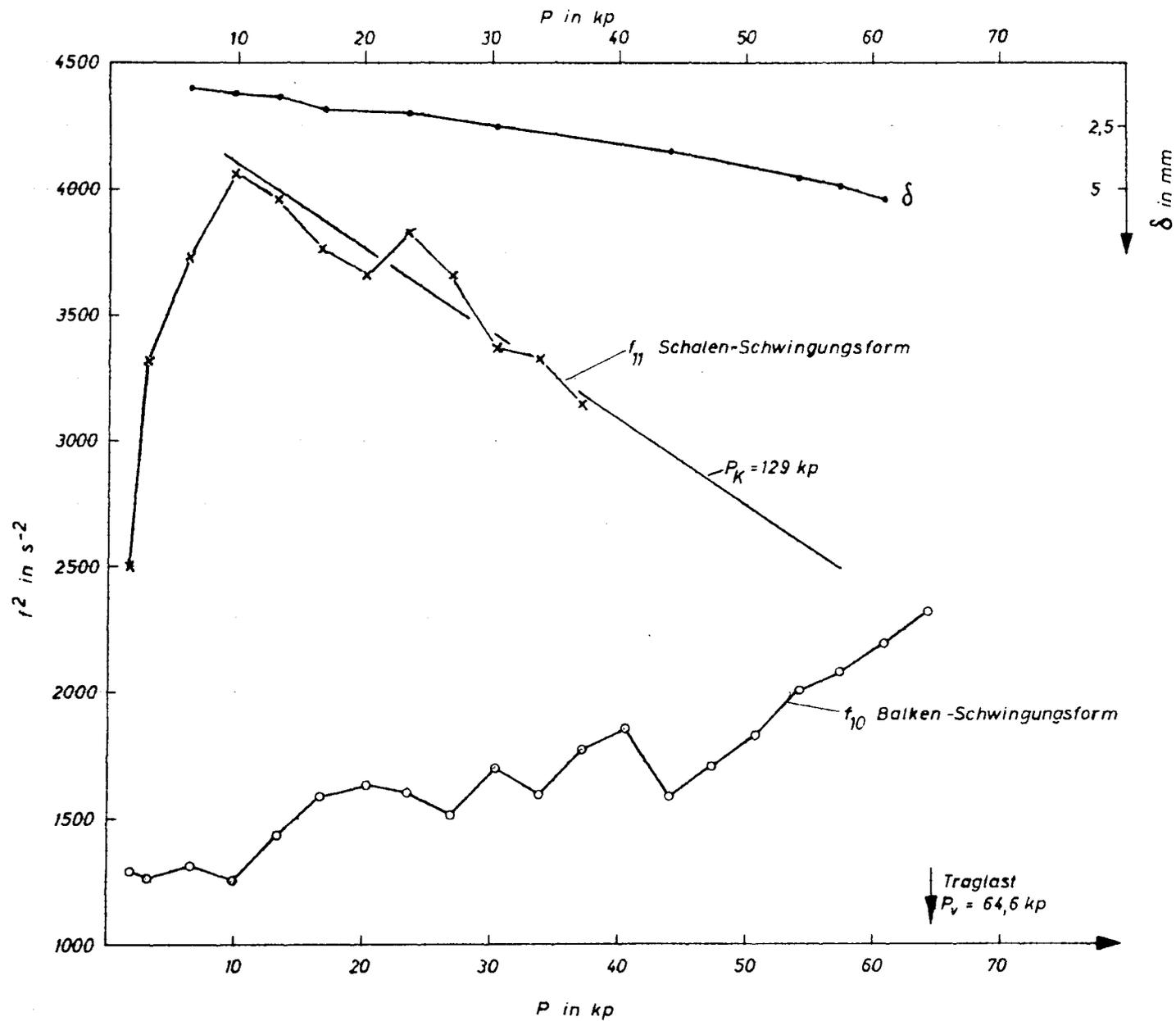


Bild 30:

Abhängigkeit des Quadrates der Resonanzfrequenz f^2 und der Mittendurchbiegung δ von der Belastung P , Modellschale 2
 - ohne Randträger -

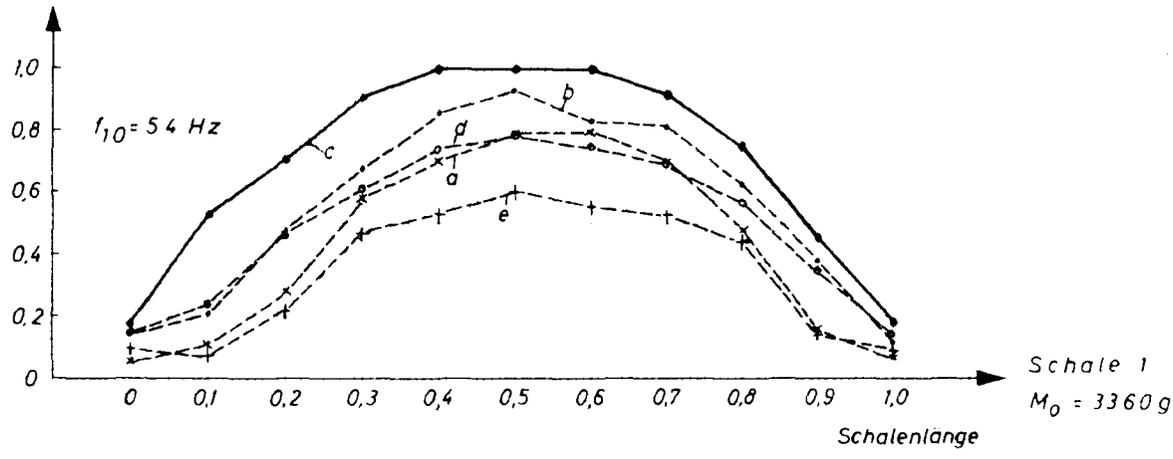
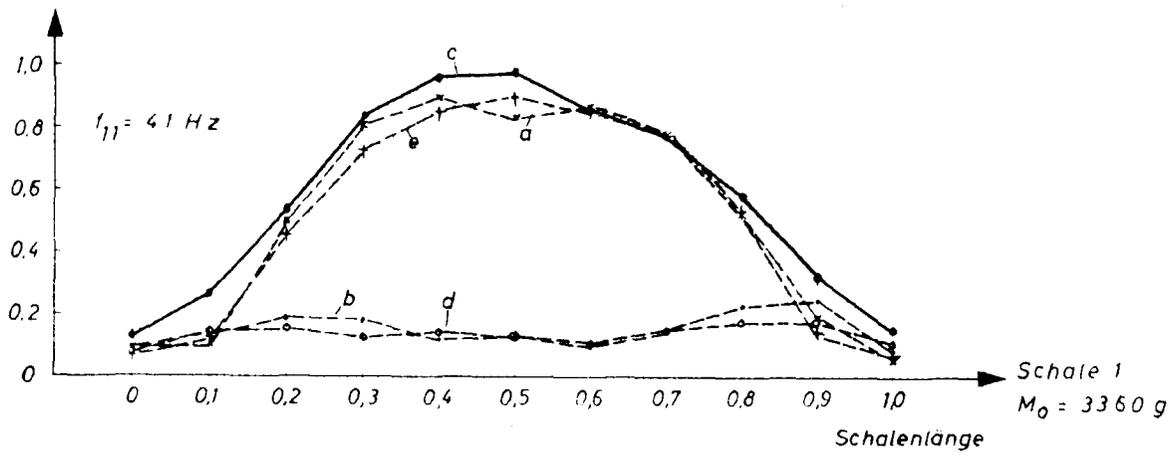
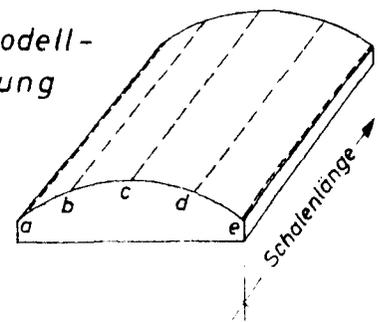
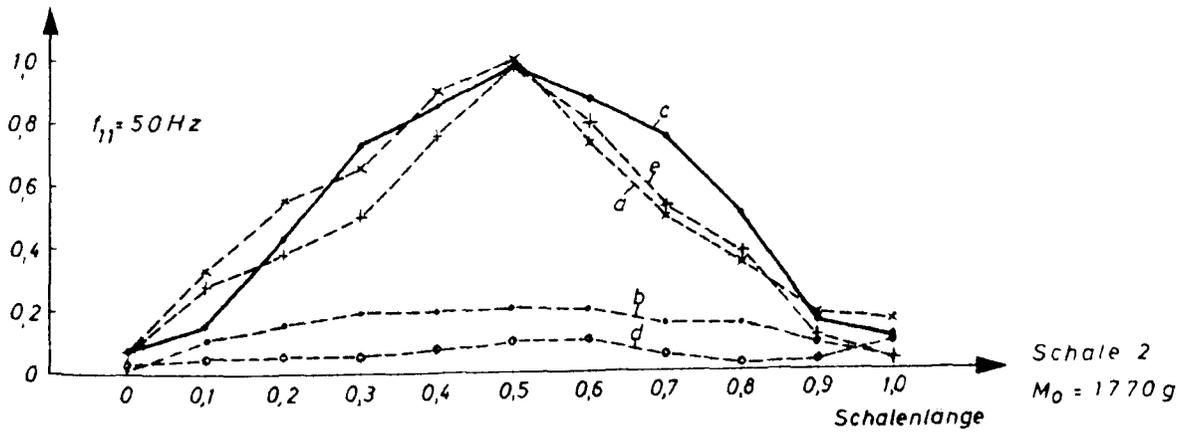
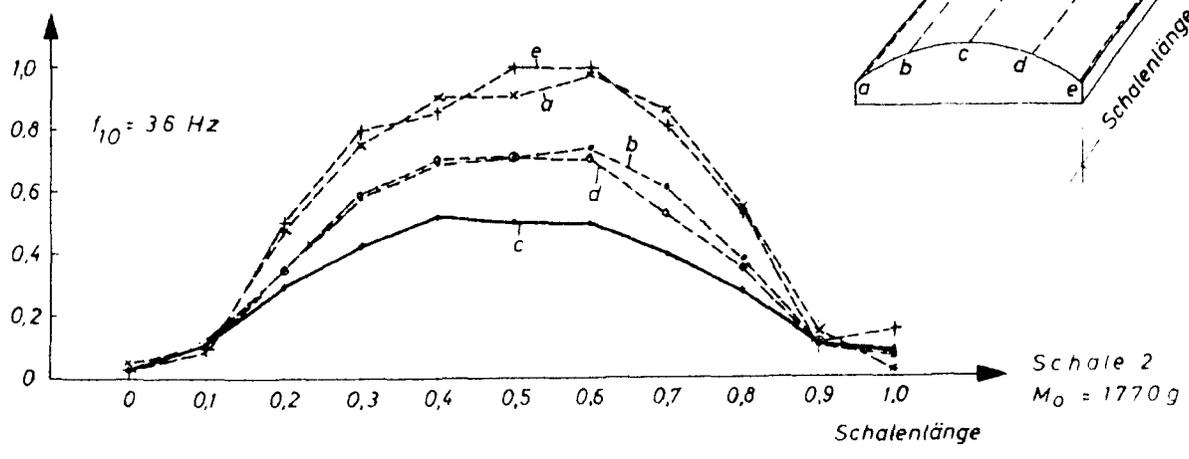


Bild 31: Schwingungsform der Modellschalen, ohne Zusatzbelastung



rel. Amplitude



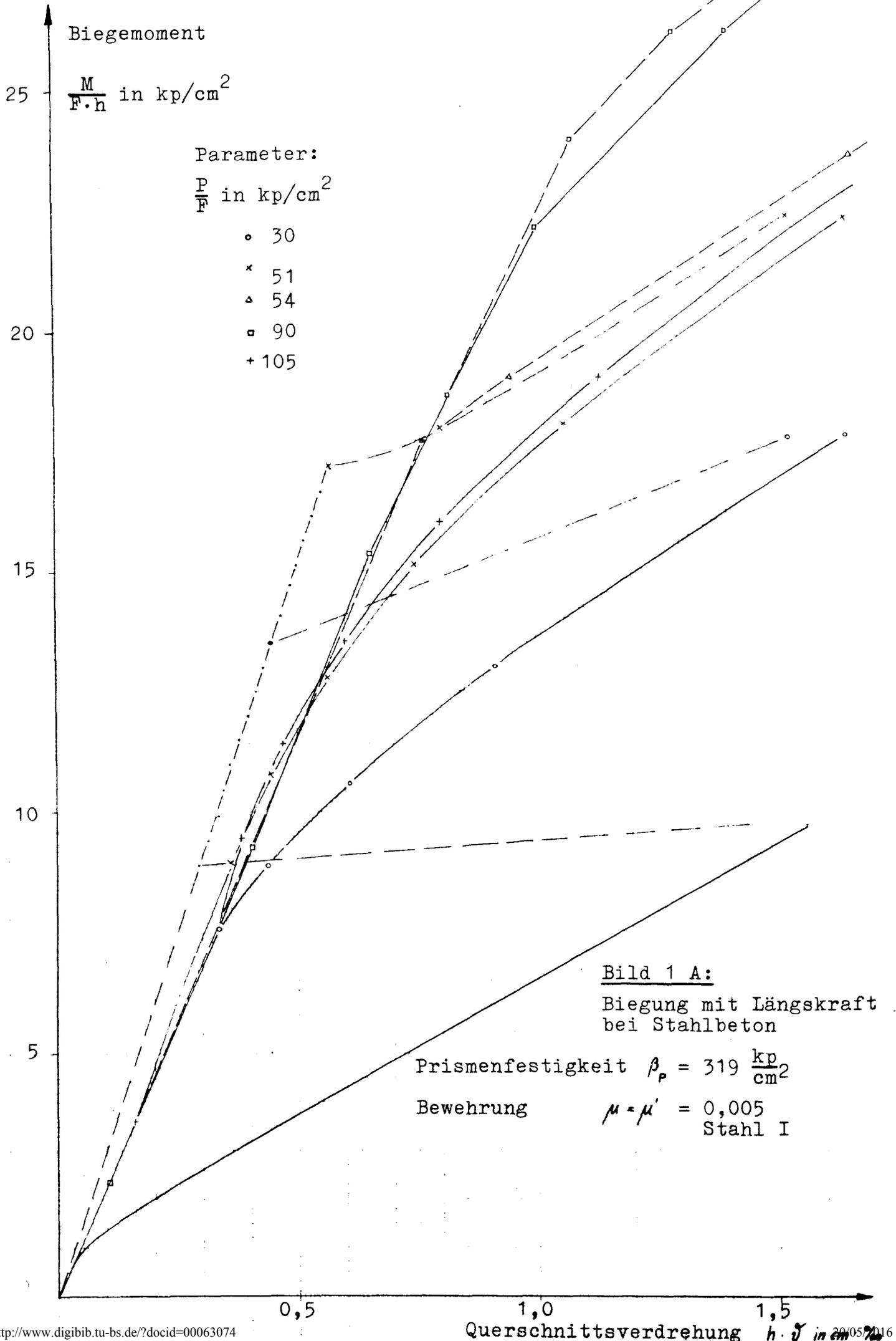
Tafel A

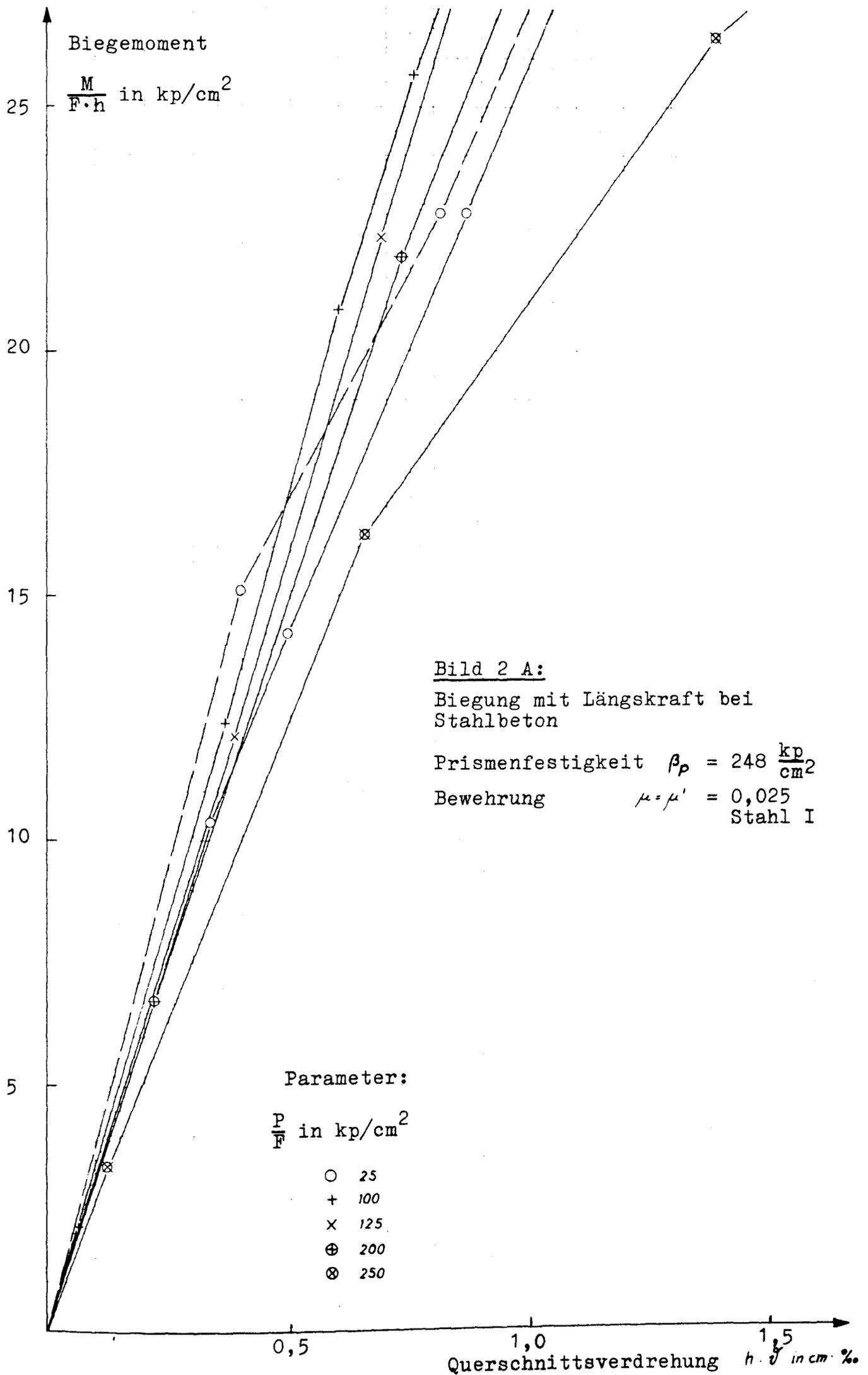
Zusammenstellung der verwendeten Meßgeräte

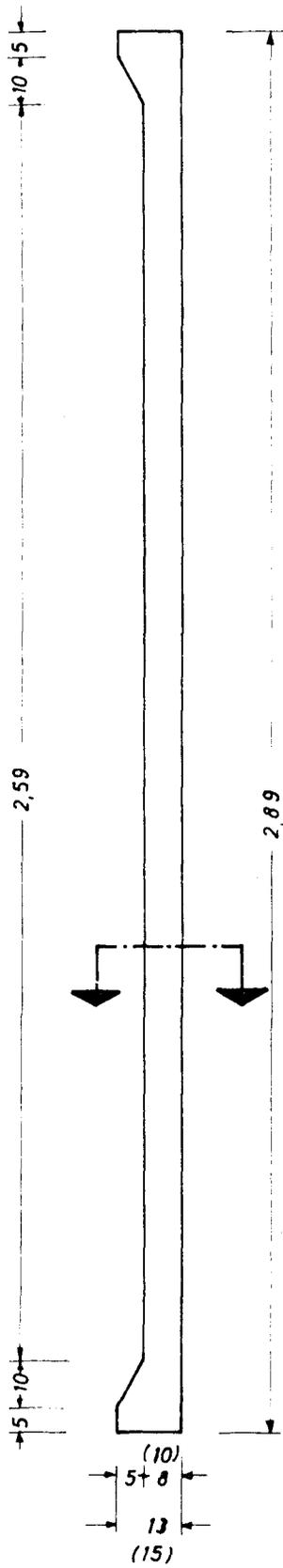
Gerätetyp	Hersteller	Eigenschaften
1. stat. und dyn. Preßtopf-Anlage Typ 1294	A.J. Amsler & Co. Schaffhausen	Vielfältig verwendbare Druckanlage, Aufbau mit 20-Mp-Preßtopf
2. Baustoffprüfmaschine EPP 600	Mohr u. Federhaff AG, Mannheim	600 Mp, Druckplattenabstand = 6000 mm Druckmessung mit Pendelmanometer
3. Universalprüfmaschine	Mohr u. Federhaff AG, Mannheim	4,10, 20 Mp Kraftmessung mit Pendelmanometer, Anzeigefehler 0,5 %
<p>Die Prüfmaschinen wurden im Februar 1966 vom Niedersächs. Landesverwaltungsamt, Abt. Eichwesen, geprüft. Dabei wurde festgestellt, daß die Standard-Abweichung bei wiederholten Messungen in allen Fällen unter $s = 0,3 \%$ liegt. Bei Nr. 2 betrug die absolute Abweichung bei 12 Mp $0,1 \%$ vom eingestellten Wert.</p>		
4. Dehnungsmeßbrücke	Hottinger, Darmstadt	dyn. Meßbrücke, durch Einstellmöglichkeiten des k-Faktors Dehnungen direkt ablesbar. Meßstreifen: 150/600 FB 1-A 12 $k = 2,10$
5. elektrodyn. Schwingungserreger	Philips	Wandlerkonstante $3,57 \text{ kp}_S/\text{A}_{\text{eff}}$, etwa bewegte Masse 0,14 lp, stat. Vorlast 0,2 kp
6. elektrodyn. Schwingungserreger	Philips	Wandlerkonstante $1,44 \text{ p}_S/\text{mA}_{\text{eff}}$, bewegte Masse 10 g, stat. Vorlast 0,85 kp
7. Gleichspannungs-Leistungsverstärker	Institut f. Baustoffkunde u. Stahlbetonbau Braunschweig	Leistung $N_{\text{eff}} = 25 \text{ VA}$, untere Grenzfrequenz 3 Hz, Brummapstand 85 dB
8. Schwebungssummer	Bruel & Kjaer	Frequenzbereich 2 bis 2000 Hz; mit Fein- stellung 0,1 Hz, Konstanz nach 3 Std. besser als 0,3 Hz

Fortsetzung Tafel A: Zusammenstellung der verwendeten Meßgeräte

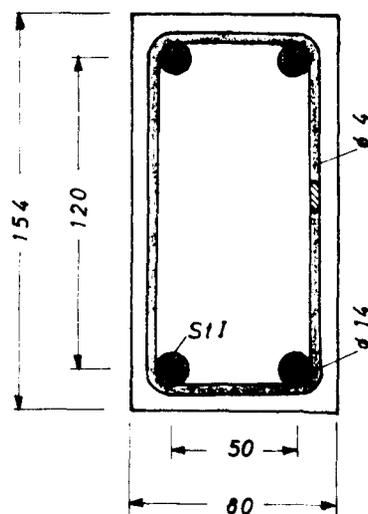
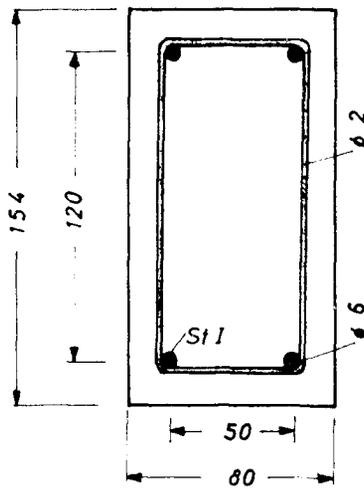
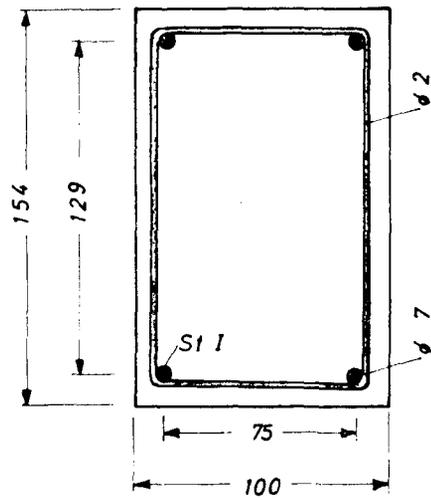
Gerätetyp	Hersteller	Eigenschaften
9. elektromagn. Schwingungswandler MM 000 2	Brüel & Kjaer	Übertragungsfaktor 1,5 mV/cm/s, abstandsabhängig Frequenzgang linear bis 2 kHz
10. Beschleunigungsaufnehmer Typ 4328 und 4332 in Verbindung mit Kathodenfolger Typ 2612 und Analysator Typ 2107	Brüel & Kjaer	Übertragungsfaktor 4328: 33 mV/g 4332: 26 mV/g Gewicht 33 pond 30 pond Untere Grenzfrequenz mit Kathodenfolger und Analysator $f = 2$ Hz, Filter 20 bis 20.000 Hz mit konstanter relativer Bandbreite
11. Pegelschreiber	Brüel & Kjaer	Untere Grenzfrequenz 10 Hz, max. Schreibgeschw. 2 m/s, Meßpotentiometer 50 dB, zur Aufzeichnung von Spektren mit Analysator koppelbar
12. Lichtstrahloszillograf "Lumiscrypt 150-12" mit Spulenschwingern "HMK 300 H"	Hartmann & Braun	Maximale Papiergeschwindigkeit 2 m/s, Empfindlichkeit der Spiegelgalvanometer 2,44 mm/mV - obere Grenzfrequenz 180 Hz ($\Lambda = 0,7$)







M 1:15



M 1:3

Bild 3 A:
 Abmessungen und
 Querschnitte der
 geprüften Stahl-
 beton-Stützen

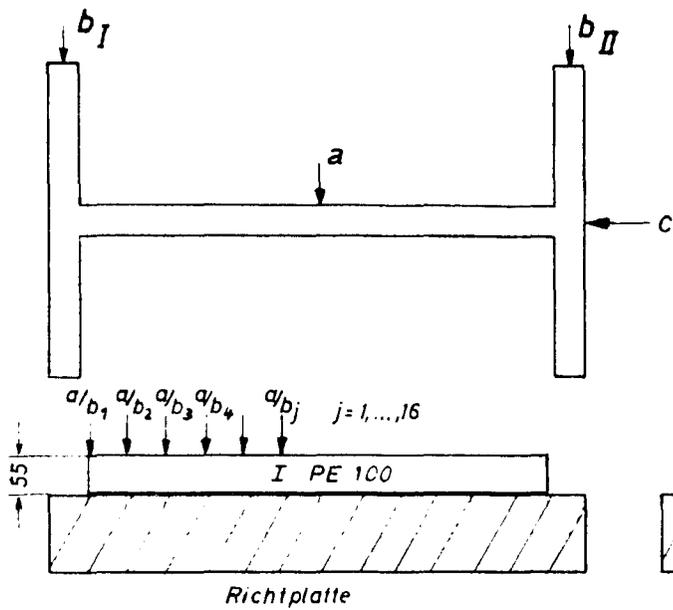
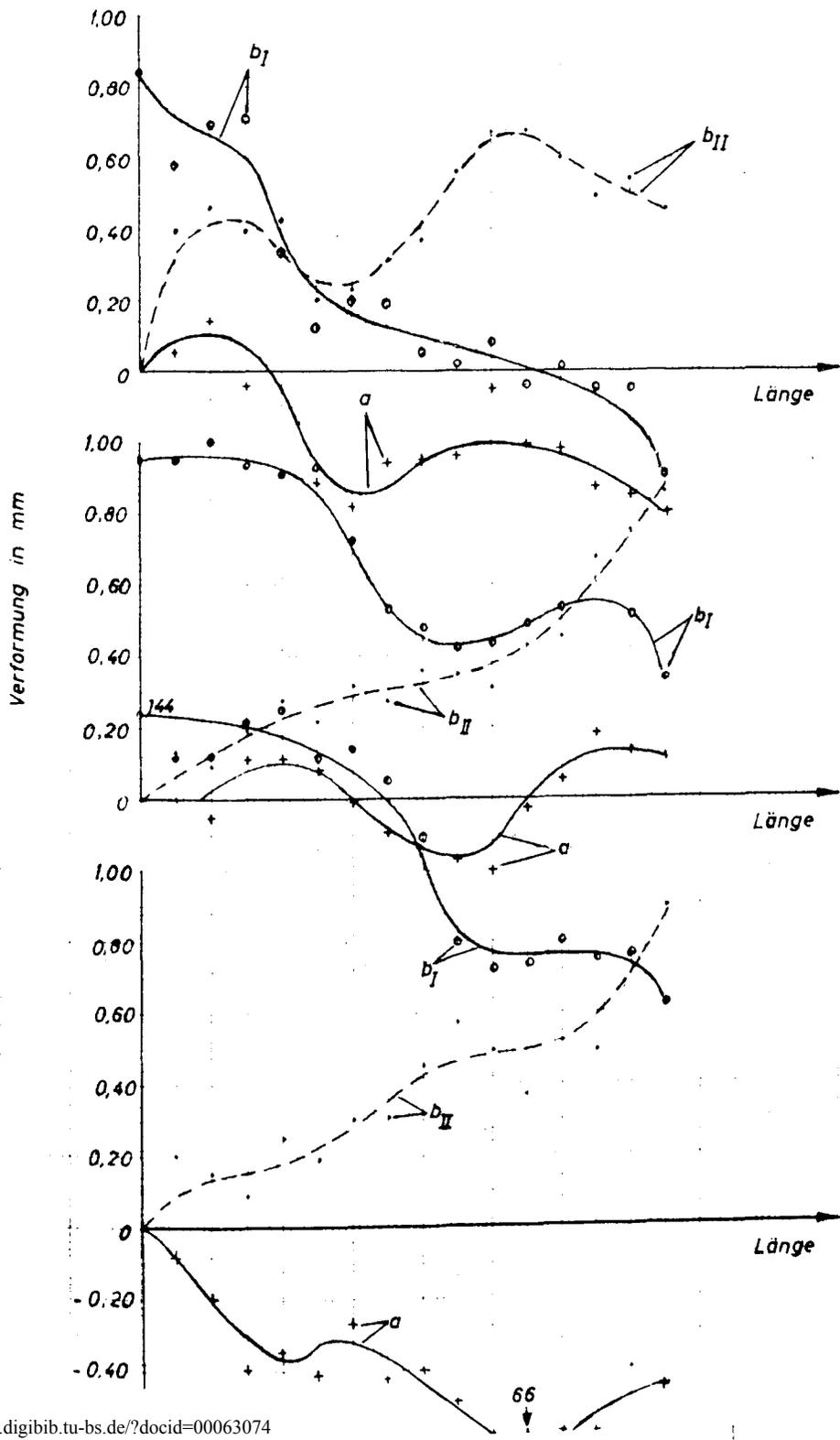


Bild 4 A:
Anfangsverformungen
von Stahlstützen
I PE 100



verwendet als
Stütze 8 bzw. 9

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = 0,14$$

verwendet als
Stütze 10

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0,4$$

$$C_3 = 0,6$$

Stütze nicht verwendet

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0,19$$

$$C_3 = 0,1$$

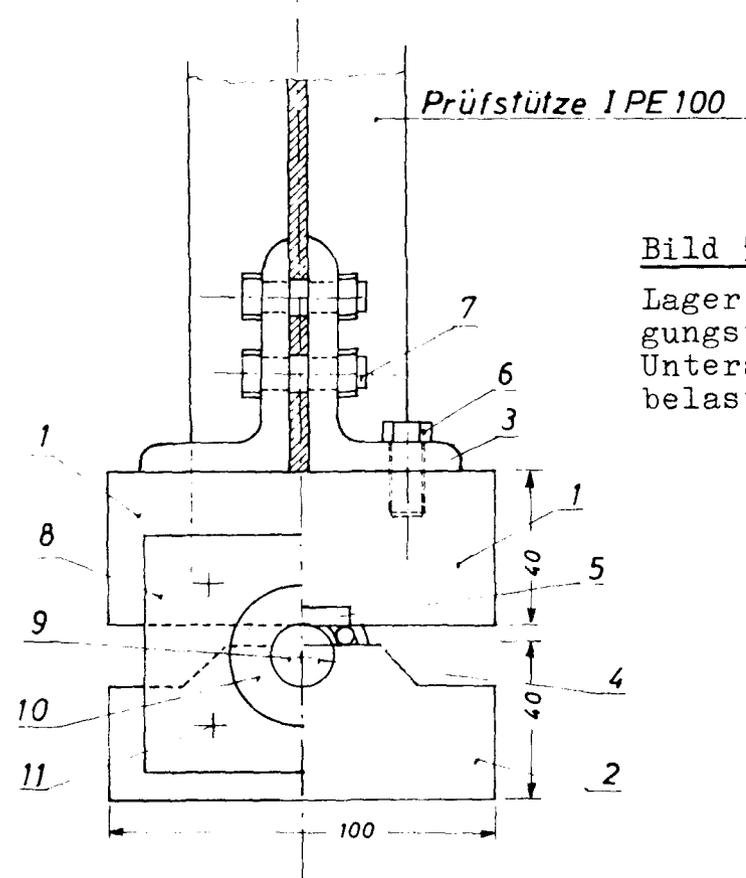
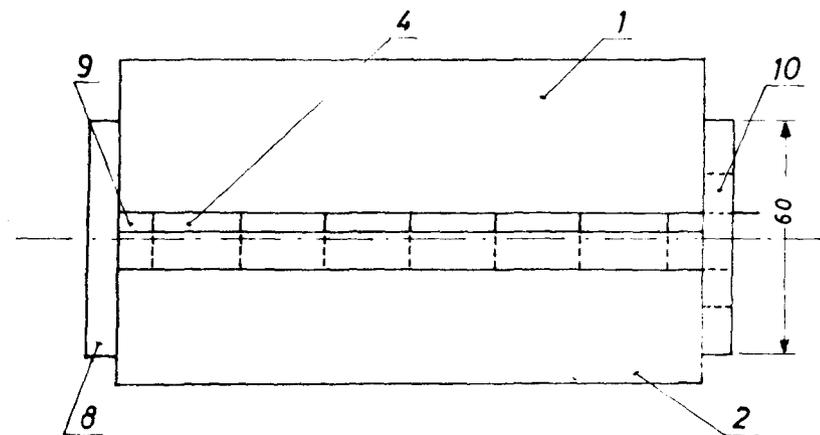
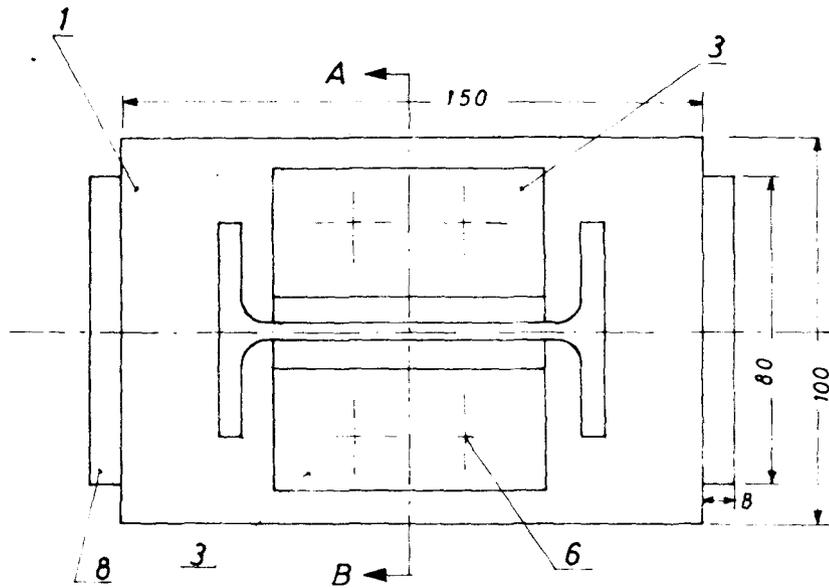


Bild 5 A:

Lager für schwingungstechnische Untersuchungen an belasteten Stützen

1 Grundplatte	St 52...	150 x 100 x 40
2 Gelenkplatte	St 52...	150 x 100 x 40
3 Haltewinkel	St 33.00	(L60x40x7)x70 DIN1029
4 Lagerrollen	Wälzlagerstahl Härte HRC 58-65	15 ϕ , 22
5 Druckleiste	C 45 MSt6Q/2	150 x 8 x 25
6 Sechskantschr.	St 37.00	M 8 x 20
7 Sechskantschr. mit Muttern	St 37.00	M 8 x 25
8 Zentrierplatte	St 52...	80 x 60 x 8
9 Zentrierachse	St 52...	17 x 15 ϕ
10 Zentrierlager (Schulterlager) E15	15 ϕ x 35 ϕ x 8	
11 Zylinderkopfschr.	St 37.00	M 6 x 20

Bild 6 A: Linearität zwischen Schwingwegamplitude v_s und Wechselkraft Q_s

