

**INSTITUT FÜR BAUSTOFFE, MASSIVBAU UND BRANDSCHUTZ  
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG**

Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Direktoren:

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. K. Kordina

Prof. Dr.-Ing. F. S. Rostásy

**SPANNUNGEN UND BRUCHMECHANISCHE  
VORGÄNGE IM NORMALBETON UNTER  
ZUGBEANSPRUCHUNG**

von

Fritz Großmann

**Heft 77**

**BRAUNSCHWEIG**

**1987**

ISSN 0178-5796

ISBN 3-89288-023-9

12  
666.9

~~V.  
ON  
11  
666  
751~~



Diese Arbeit ist die vom Fachbereich für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität Braunschweig genehmigte Dissertation des Verfassers.

Eingereicht am 12.6.1986  
Mündliche Prüfung am 30.1.1987

Berichterstatter : Prof. Dr.-Ing. habil. F.S. Rostäsy  
Berichterstatter : Prof. Dr.-Ing. habil. K. Hering

Mein Dank gilt Herrn Professor Rostásy für die Betreuung und Förderung dieser Arbeit, für die Übernahme der Berichterstattung sowie für viele Anregungen und Korrekturhinweise.

In gleicher Weise danke ich Herrn Professor Hering für die Übernahme der Berichterstattung und für wichtige Korrekturhinweise zu einigen Ableitungen im Rahmen der Bruchmechanik.

April 1987

Fritz Großmann



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
  - 1.1 Problembeschreibung
  - 1.2 Ziel der Arbeit
  - 1.3 Vorgehensweise
  
2. Spannungsverläufe um verschieden geformte Matrixeinschlüsse bei rein elastischem Materialverhalten
  - 2.1 Innere Struktur des Betons
  - 2.2 Problematik des Begriffes Spannung
  - 2.3 Experimentelle Ermittlung von Spannungs- und Dehnungsverläufen
  - 2.4 Rechnerische Ermittlung der Spannungen
    - 2.4.1 Allgemeines
    - 2.4.2 Mechanischer und mathematischer Hintergrund
    - 2.4.3 Spannungsverläufe um einen kreisförmigen Einschuß
    - 2.4.4 Spannungsverläufe um eine elastische Kugel in einem unendlichen Kontinuum
    - 2.4.5 Spannungsverläufe um einen elliptischen Einschuß
    - 2.4.6 Spannungsverläufe um einen annähernd quadratischen Einschuß
    - 2.4.7 Spannungsverläufe um einen annähernd dreieckigen Einschuß
  
3. Auswirkungen der Spannungsverteilungen auf die Ribentstehung
  - 3.1 Allgemeines
  - 3.2 Bruchbedingungen für die Haftfläche
  - 3.3 Charakteristische Werte einzelner Einschußformen
  - 3.4 Ribentstehungen in der Matrix
  - 3.5 Ribentstehungen in den Zuschlägen

- 4.     Mechanismen der RiBerweiterung
- 4.1    Allgemeines zur Bruchmechanik
- 4.2    Linear-elastische Bruchmechanik
- 4.2.1   Allgemeines
- 4.2.2   Energiebetrachtungen
- 4.2.3   Spannungsintensitätsfaktoren
- 4.3    Anwendung der Bruchmechanik auf Beton
- 4.3.1   Linear-elastische Bruchmechanik
- 4.3.3   Elastisch-plastische Bruchmechanik
- 4.3.3   Begründung der Beschränkung auf die linear-elastische Bruchmechanik
- 4.4    RiBerweiterungen bei typischen, örtlich entstehenden Rissen
- 4.4.1   Gerader RiB im Zementstein
- 4.4.2   Gerader RiB zwischen zwei Materialien mit unterschiedlichen Elastizitätskonstanten
- 4.4.3   Bogenförmiger RiB zwischen Matrix und Einschluß
- 4.4.4   Vergleichende Betrachtung verschiedener RiBarten
- 4.4.4.1   Gerader RiB im Zementstein und gerader RiB in der Kontaktzone
- 4.4.4.2   Gerader RiB im Zementstein und bogenförmiger RiB in der Kontaktzone
- 4.4.4.3   RiB am kreisförmigen Einschluß und RiB am quadratischen Einschluß
- 5.     RiBerweiterungen und kritische RiBlasten in Abhängigkeit von Form, Größe und Anteil der Einschlüsse
- 5.1    Allgemeines
- 5.2    Kreisförmige Einschlüsse
- 5.3    Quadratische Einschlüsse
- 5.4    Vergleich von kreisförmigen und quadratischen Einschlässen
- 5.5    Anwendung der Diagramme auf Sieblinien

6. Zusammenstellung der Ergebnisse und Vergleich mit Versuchsergebnissen

6.1 Ergebnisse der elastizitätstheoretischen Berechnungen

6.2 Ergebnisse der bruchmechanischen Berechnungen

7. Zusammenfassung

8. Literaturverzeichnis

Anhänge

A 1.1 Bestimmung des Vorzeichens des zweiten Summanden in der Formel (2.36)

A 1.2 Ermittlung der Formel zur Bestimmung von  $\beta_{-3}$

A 2.1 Berechnungsbeispiel nach Goodier [29] für einen kugelförmigen Einschlus

A 2.2 Berechnungsbeispiel nach Goodier [29] für eine infinite Scheibe mit kreisförmigem Einschlus

A 3.1 Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen am elliptischen Einschlus

A 3.2 Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen am quadratischen Einschlus

A 3.3 Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen am dreieckigen Einschlus

A 4 Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren und  $\sigma_{\infty Ic}$ -Werte für die Kontaktfläche

B 1 Spannungsverläufe um kreisförmige Einschlüsse

B 2 Spannungsverläufe um elliptische Einschlüsse

- B 3 Spannungsverläufe um quadratische Einschlüsse
- B 4 Spannungsverläufe um dreieckige Einschlüsse
- B 5 Tabellen und Diagramme zur Bestimmung der kritischen Reißlast
- B 6 Beispiel zur Berechnung von  $\sigma_{\infty IC}$  für quadratische Einschlüsse
  
- C 1 Programm MATRUND
- C 2 Programm ELLIPSE
- C 3 Programm QUADRAT
- C 4 Programm DREIECK

Bezeichnungen

Große Buchstaben

A	Flächeneinheit
E	Elastizitätsmodul der Matrix
$E_1$	Elastizitätsmodul der Einschlüsse
$F_I, F_{II}, G_I, G_{II}$	Funktionen zur Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren
$\mathcal{F}$	Airy'sche Spannungsfunktion
G	Schubmodul der Matrix
$G_1$	Schubmodul der Einschlüsse
GK	Größtkorn
$\dot{G}$	Energiefreisetzungsrate
$\dot{G}_{Ic}$	kritische Energiefreisetzungsrate für Modus I
J	J-Integral
K	Spannungsintensitätsfaktor
$K_I, II, III$	K für die drei Bruchmodi I, II und III
$K_{Ic}$	kritischer Spannungsintensitätsfaktor für Modus I
$K_{IIc}$	kritischer Spannungsintensitätsfaktor für Modus II
R	Radius des Einschlusses
R	Rißwiderstand bei bruchmechanischen Berechnungen
$R_{GK}$	Radius des Größtkorns
U	Energie
$U_{el}$	elastische Verformungsenergie
$U_0$	Oberflächenenergie
V	Volumen
$V_e$	zum Größtkorn gehörende Einheit des Gesamtvolumens
$V_{GK}$	Volumen des Größtkorns
X, Y, Z	Volumenkräfte

### Kleine Buchstaben

a	halbe Rißlänge
$a_{in}$	Imaginärteil des komplexen Ausdruckes n
$a_{rn}$	Realteil des komplexen Ausdruckes n
b	Breite
$b_{GK}$	Kantenlänge der Größtkorns (Würfel)
c	Flexibilität (compliance)
d	Durchmesser
$d_{GK}$	Durchmesser des Größtkorns (Kugel)
e	Abstand der Einschlüsse untereinander
$f_i(\xi)$	Funktionen zur Abkürzung der Herleitungen der Formeln zur Berechnung der Spannungen
h	Intervalllänge
l	Länge
m	Konstante
n	Konstante
p	gleichmäßig verteilte Belastung
r, $\varphi$	Polarkoordinaten
s	halbe Rißsehne
u, v, w	Verschiebungen in x-, y- und z-Richtung
x, y, z	Achsenrichtungen im karthesischen Koordinatensystem
z	komplexe Zahl
$\bar{z}$	konjugiert komplexe Zahl

### Griechische Buchstaben

$\alpha, \alpha'$	Winkel zur Belastungsrichtung
$\alpha_{-1}, \beta_{-1}, \beta_{-3}$	Koeffizienten zur Berechnung der Spannungen nach Sawin
$\beta$	Winkel zwischen Rißachse und x-Achse
$\beta_{hz}$	Haftzugfestigkeit der Kontaktzone
$\beta_d$	Druckfestigkeit
$\beta_z$	Zugfestigkeit
$\Gamma$	geschlossener Integrationsweg

$\gamma$	Verzerrung
$\gamma_0$	spezifische Oberflächenenergie
$\Delta$	Laplace-Operator
$\epsilon$	Dehnung bei elastischen Berechnungen
$E$	Bimaterialkonstante bei bruchmechanischen Berechnungen
$\vartheta$	Rißöffnungswinkel
$\vartheta_e$	Endrißöffnungswinkel
$\vartheta_k$	kritischer Rißöffnungswinkel
$K$	Konstante bei elastischen Berechnungen
$K_{GK}$	Volumenanteil des Größtkorns
$K_z$	Volumenanteil des Zuschlags
$\nu$	Querdehnzahl der Matrix
$\nu_1$	Querdehnzahl der Einschlüsse
$\xi$	Variable auf dem Einheitskreis
$\rho$	Parameter für die Abbildungsfunktion
$\sigma$	Spannung
$\sigma_r$	Radialspannung
$\sigma_\varphi$	Tangentialspannung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\sigma_\infty$	Spannung im Unendlichen
$\sigma_\infty I_c$	kritische Spannung für Bruchmodus I
$\bar{\sigma}_\infty I_{cm}$	mittlere kritische Rißlast
$\tau$	Schubspannung
$\varphi$	Winkelkoordinate
$\varphi(z), \chi(z),$	} Analytische Funktionen
$\Phi(z), \Psi(z)$	
$\omega(\xi)$	konforme Abbildungsfunktion
$\partial$	partielle Ableitung





## 1. Einleitung

### 1.1 Problembeschreibung

Bei Bauwerken aus Beton, Stahlbeton oder Spannbeton wird nicht nur eine ausreichende Sicherheit gegenüber der Tragfähigkeit gefordert, sondern auch ein schadensfreies Verhalten im Gebrauchszustand. In beiden Fällen kommt der Zugfestigkeit des Betons besondere Bedeutung zu. Zum einen, weil in vielen Fällen zumindest stillschweigend ein Ansatz der Betonzugfestigkeit zur Erfüllung des statischen Gleichgewichtes zugelassen wird, zum anderen, weil die Bemessungsvorschriften für den Gebrauchszustand häufig die Einhaltung von zulässigen Spannungen fordern. *Erinnert sei in diesem Zusammenhang nur an die Spannungsnachweise für Spannbetonbauteile (DIN 4227, Abschnitt 10.1) und an die Nachweise für Stahlbetonbauwerke mit hohen Anforderungen an die Dichtheit (DIN 1045, Abschnitt 17.6.3). Auch bei der Bemessung von Betonfahrbahnen spielt die Betonzugfestigkeit eine entscheidende Rolle, da in der ZTV-Beton 78 [118] Mindestbetonzugfestigkeiten verlangt werden. Eine Zusammenstellung vieler Beispiele zum stillschweigenden oder direkten Ansatz der Betonzugfestigkeiten findet sich bei Jahn [54].*

Die Bedeutung der Betonzugfestigkeit beschränkt sich jedoch nicht auf die genannten, klar erkennbaren Fälle, sondern sie ist viel weitergehend. Denn auch die Betondruckfestigkeit hängt letztlich von der Betonzugfestigkeit ab, auch wenn das erst bei genauer Betrachtung des Bruchvorganges deutlich wird. Es ist bekannt, daß die Zugfestigkeit unbewehrten Betons stark streut und daß sie unter ungünstigen Bedingungen örtlich ganz fehlen kann. Wenn dennoch für viele praktische Anwendungen davon ausgegangen wird, daß der Beton Zugspannungen aufnehmen kann, so liegt dieser Vorstellung die Überlegung zugrunde, daß die Zugfestigkeit nur im Integral über eine vorgegebene Fläche vorhanden sein muß. Dabei ist es dann unwesentlich, ob in Teilbereichen dieser Fläche keine, nur geringe oder aber große Spannungen aufnehmbar sind.

Viele der überaus zahlreichen Untersuchungen zur Zugfestigkeit des Betons gehen daher auch nicht näher auf die inneren Spannungsverteilungen im Betongefüge ein, sondern belassen es bei der - sehr häufig auch ausreichenden - integralen Betrachtungsweise. Nur relativ wenige Arbeiten befassen sich mit Untersuchungen über die inneren Spannungs- und Verformungszustände im Beton bei Zugbeanspruchung, während für Druckbeanspruchungen eine Reihe derartiger Arbeiten vorliegen. Nun unterscheiden sich bei Zug- und Druckbeanspruchung die inneren Spannungs- und Verformungszustände sowohl qualitativ als auch quantitativ grundlegend voneinander, so daß eine Übertragung der Ergebnisse für druckbeanspruchten Beton auf Beton unter Zugbeanspruchung nur sehr schwer möglich ist.

Um erweiterte Kenntnisse über die Betonzugfestigkeit und die sie beeinflussenden Faktoren zu erlangen, ist es notwendig, sich mehr den örtlich auftretenden Spannungen, Verformungen und Rißbildungen unter Beachtung der Heterogenität des Betons zuzuwenden. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die Verbesserung bzw. Neuentwicklung von Ansätzen zur rechnerischen Vorherbestimmung der Betonzugfestigkeiten von Bedeutung. Die bisher bekannt gewordenen Verfahren berücksichtigen die inneren Spannungs- und Verformungszustände und die örtlich auftretenden Rißbildungen nur unzureichend; insbesondere fehlen theoretische Untersuchungen über den Einfluß der Kornform, der Korngröße, des Volumenanteils des Zuschlags und über die Mechanismen der örtlichen Rißbildungen. Viele Versuchsergebnisse deuten aber darauf hin, daß gerade diese Parameter die Betonzugfestigkeit wesentlich beeinflussen und daß die starke Streuung der Zugfestigkeit des Betons auch durch die große mögliche Variation dieser Faktoren hervorgerufen wird.

## 1.2 Ziele der Arbeit

Zum besseren Verständnis der Vorgänge im Beton bei Zugbeanspruchung und zum Erkennen der maßgebenden Parameter ist es notwendig, die bei der Interaktion von Zuschlag und Matrix auftretenden Spannungen, Verformungen und Rißbildungen näher zu bestimmen. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, dies auf analytischem Wege

zu erreichen. Die so gewonnenen Erkenntnisse können zu einer verbesserten Beschreibung des Materialverhaltens beitragen.

Zur Bestimmung der kritischen Reißlast von Beton werden in letzter Zeit vermehrt Methoden der Bruchmechanik angewendet. Auch wenn diese für die Anwendung auf den Baustoff Beton gegenüber den Methoden für homogene Baustoffe modifiziert wurden, kann die Heterogenität des Betons nur implizit berücksichtigt werden. Die aus Versuchsergebnissen bestimmten Bruchzähigkeiten des Betons schwanken dementsprechend stark und werden von einer Vielzahl von Parametern beeinflusst. Eine gewisse Ungenauigkeit gegenüber der Realität ergibt sich außerdem schon daraus, daß die Bruchzähigkeit an gekerbten Proben bestimmt wird, während in der Wirklichkeit solche groben Anrisse nur höchst selten vorkommen. Die Bestimmung der kritischen Reißlast des Betons und der sich daraus ergebenden Zugfestigkeit über die Bruchzähigkeit des Betons beinhaltet leider alle diese Ungenauigkeiten. Eine ganz andere Methode zur Bestimmung der Betonzugfestigkeit ergibt sich, wenn man die - im Vergleich mit der Bruchzähigkeit des Betons - weniger streuende Bruchzähigkeit der Zementsteinmatrix (evtl. auch die der Zementmörtelmatrix), der Zuschläge und der Haftfläche zwischen Zuschlag und Matrix (Kontaktzone) sowie die Verbundfestigkeit zwischen Zuschlag und Matrix zugrunde legt und damit bruchmechanische Untersuchungen für die einzelnen Komponenten und in der Kontaktzone durchführt. Solche detaillierten Berücksichtigungen der Einzelkomponenten und die Anwendung der Bruchmechanik auf die Kontaktzone auf der Grundlage theoretischer Konzepte sind bisher nicht bekannt geworden. Ein weiteres Ziel der Arbeit ist es daher, mit der beschriebenen Vorgehensweise Betonzugfestigkeiten zu ermitteln. Es ist von vornherein klar, daß dies in der hier durchgeführten Form nur zur Bestimmung von Mittelwerten führen kann, da es zur Bestimmung der Streuungen zusätzlicher statistischer Untersuchungen mit Variation der Anordnung der einzelnen Zuschlagkörner bedarf. Da aber für die hier durchgeführten Parameterstudien jeweils obere und untere Grenzwerte der einzelnen Parameter eingesetzt wurden, lassen sich dennoch angenäherte obere und untere Grenzwerte der Betonzugfestigkeit in Abhängigkeit von den unter-

suchten Parametern angeben. Da andere Einflüsse, die hier nicht berücksichtigt wurden, z.B. Schwinden, Wasserzementwert und Art der Belastung, die Ergebnisse überlagern können, kann es in extremen Fällen trotzdem noch zu Über- oder Unterschreitungen der ermittelten Grenzen kommen.

### 1.3 Vorgehensweise

In Abschnitt 2 wird zunächst der Baustoff Beton hinsichtlich seiner inneren Struktur genauer beschrieben, da dies für die weitere Arbeit erforderlich ist. Hauptteil des Abschnittes ist jedoch die rechnerische Bestimmung von Spannungsverläufen um verschieden geformte Matrixeinschlüsse. Dabei wird elastisches Verhalten sowohl der Matrix als auch der Einschlüsse vorausgesetzt.

Abschnitt 3 befaßt sich mit den Auswirkungen der Spannungsverteilungen und Spannungskonzentrationen auf die Rißentstehung. Dabei wird zunächst auf die Bruchbedingungen für die Kontaktzone eingegangen. Anschließend erfolgt die Bestimmung charakteristischer Werte für die verschiedenen Einschlußformen. Die charakteristischen Werte beschreiben die Intensität des Spannungsfeldes und die maximalen Spannungskonzentrationen am Einschlußrand. Insgesamt dienen die Untersuchungen im Abschnitt 3 zur Bestimmung von Bereichen, in denen sich bei Belastungssteigerung erste Mikrorisse bilden können. Solche, dem Abschnitt 4 vorgeschaltete Untersuchungen sind notwendig, da einerseits die Anwendung der Bruchmechanik das Vorhandensein von Rissen voraussetzt, andererseits aber mit den Methoden der Bruchmechanik nichts über Ort und Ursachen der Rißentstehung ausgesagt werden kann.

Abschnitt 4 behandelt ausführlich die Mechanismen der Rißerweiterung. Dazu wird zunächst auf einige Grundlagen der Bruchmechanik, insbesondere die der linear elastischen Bruchmechanik (LEBM), eingegangen. Darauf aufbauend erfolgt die Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren für verschiedene Rißarten. Der Ansatz von Bruchzähigkeiten erlaubt dann einen Übergang zur Beschreibung des

Rißfortschrittes in der Kontaktzone und zur Bestimmung der Bedingungen, unter denen sich ein Kontaktzonenriß in die Matrix hinein ausdehnt.

In Abschnitt 5 wird die Existenz regelmäßig angeordneter Risse (sog. Rißsysteme) vorausgesetzt. Für diese, in Abhängigkeit von Kornform, Korngröße, Volumenanteil des Zuschlags und Bruchzähigkeiten entstandenen Rißkonfigurationen werden Diagramme zur Bestimmung der kritischen Rißlast aufgestellt. Anschließend erfolgt die Auswertung der Diagramme zur eingehenderen Bestimmung der Einflüsse der einzelnen Parameter. Darüber hinaus wird an einem Beispiel gezeigt, daß eine Auswertung der Diagramme auch für vorgegebene Sieblinien des Betonzuschlags möglich ist. Das Ergebnis sind obere und untere Grenzwerte der zu erwartenden Betonzugfestigkeit.

Zur Kontrolle werden in Abschnitt 6 die theoretisch ermittelten Ergebnisse und Abhängigkeiten anhand von Versuchsergebnissen, die der Literatur entnommen wurden, überprüft.

## 2. Spannungsverläufe um verschieden geformte Matrixeinschlüsse bei rein elastischem Materialverhalten

### 2.1 Innere Struktur des Betons

Im voll erhärteten Zustand ist der Beton ein heterogenes Gefüge aus Matrix und eingelagertem Zuschlag, durchsetzt mit Poren unterschiedlicher Größe. Beim Herstellen des Betons entsteht zunächst ein Gemisch aus Zement und Wasser, der sogenannte Zementleim, dessen Konsistenz überwiegend vom Wasserzementwert (W/Z-Wert) abhängt. Mit zunehmender Hydratation erstarrt der Zementleim und erhärtet im weiteren Verlauf des Prozesses zu Zementstein. Das Erstarren und Erhärten des Zementleimes beruht auf der Bildung des sogenannten Zementgels, das ein zusammenhängendes Gerüst aus sehr feinen, faserförmigen Calciumsilikathydrat- und tafelförmigen Calciumaluminathydratkristallen bildet, in das gröbere Calciumhydroxidkristalle und evtl. unhydratisierte Zementkörner eingebettet sind und das von Poren unterschiedlicher Form und Größe durchsetzt ist [114].

Bei den Poren unterscheidet man Gelporen, Kapillarporen und Verdichtungsporen. Die Gelporen bilden sich während der Hydratation im Zementgel, während die Kapillarporen gleichzeitig im wesentlichen in den Zwickeln zwischen den einzelnen "Gelgelin" entstehen. Als Verdichtungsporen bezeichnet man größere Poren, deren Entstehung hauptsächlich durch ungenügende Verdichtung des Betons hervorgerufen wird. Größenbereiche der einzelnen Porenarten gibt Tabelle 2.1 an.

Porenart	Porenradius [nm]
Gelporen	$10^0 - 10^1$
Kapillarporen	$10^1 - 10^5$
Verdichtungsporen	$> 10^6$

Tabelle 2.1 : Porenarten und Porengrößenbereiche

Der Zementstein einschließlich der in ihm enthaltenen Poren bildet die Matrix, in die Zuschläge aus anderem Material eingebettet sind. Umstritten ist, ob nicht auch Zuschlag unterhalb einer Mindestkorngröße als zur Matrix gehörig anzusehen ist. In diesem Fall müßte man von einer Zementmörtelmatrix sprechen. Zumindest für den zementfeinen Zuschlag und auch noch für die unteren Korngruppen im Sandbereich wäre eine solche Zuordnung sicher denkbar. Eine genaue Grenzziehung müßte aber immer willkürlich bleiben. Darüber hinaus ist - im Sinne dieser Arbeit - eine exakte Abgrenzung, wie später gezeigt wird, auch nicht notwendig, da bei der Ribentstehung und Rißausbreitung den groben Zuschlägen die dominierende Rolle zufällt. Lediglich im Hinblick auf die anzusetzenden Bruchfähigkeiten muß zwischen Zementmörtelmatrix und Zementsteinmatrix unterschieden werden.

Makroskopisch kann der Zementstein bzw. der Zementmörtel, auch wenn in ihm Poren bzw. Poren und kleinere Zuschlagkörner enthalten sind, im Vergleich zu der heterogenen Struktur des Betons als quasihomogen angesehen werden. Dies gilt in noch stärkerem Maß für die einzelnen Zuschlagkörner.

Unter Voraussetzung der beschriebenen Gegebenheiten handelt es sich beim Beton um ein Zwei-Phasen-Material, bei dem beide Einzelmaterialien jeweils für sich als homogen (quasihomogen) gelten können. Die elastischen Eigenschaften (Elastizitätsmodul und Querdehnzahl) von Matrix und Zuschlag weichen in der Regel allerdings stark voneinander ab. Voraussetzungsgemäß dürfen sie, jeweils für sich, beliebige Werte annehmen.

Bedingt durch die unterschiedlichen elastischen Eigenschaften der Einzelmaterialien, kann es schon während des Erstarrens und Erhärtens des Betons zu Mikrorißbildungen in der Matrix und/oder in der Kontaktzone zwischen Zuschlag und Matrix infolge von Schrumpf- und Schwindwirkungen kommen, ohne daß äußere Belastungen oder äußere Zwänge vorhanden wären. Außerdem ist davon auszugehen, daß die Zuschlagkörner nicht über ihren gesamten Umfang fest mit der Matrix

verbunden sind, sondern daß sich durch örtliche Verdichtungsmängel und/oder durch lokale Ansammlungen von Anmachwasser Bereiche mit fehlendem oder stark gestörtem Verbund zwischen Korn und Matrix ausbilden.

## 2.2 Problematik des Begriffes Spannung

Bekanntlich wird die Spannung in der Festigkeitslehre definiert als die auf eine Flächeneinheit bezogene Krafteinheit.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

F = Krafteinheit

A = Flächeneinheit

Da F eine vektorielle Größe, A aber ein Skalar ist, ergibt sich  $\sigma$  ebenfalls als eine vektorielle Größe, bei der sowohl der Betrag als auch die Richtung von der gewählten Flächeneinheit und ihrer Orientierung zur Belastungsrichtung abhängt. Demnach kann der Begriff "Spannung" immer nur den Mittelwert der wirklich vorhandenen, möglicherweise sehr unterschiedlichen Spannungsverteilung innerhalb der betrachteten Fläche zahlenmäßig angeben; mag die Fläche auch noch so klein sein.

Bei der Beschreibung von Phänomenen und der Erklärung von Zusammenhängen sind solche grundsätzlichen Dinge wesentlich, da vermieden werden muß, daß von einer unzulässig groben Mittelung der Spannungen ausgegangen wird. Es ist nämlich durchaus möglich, daß innerhalb der betrachteten Einheitsfläche örtliche Spannungsspitzen und/oder Bereiche mit niedrigen Spannungen auftreten, die u.U. für das makroskopische mechanische Verhalten wesentlicher sind als der Mittelwert der Spannungen.



Zunächst stellt sich aber die Frage, ob solche definitionsgemäß möglichen Spannungsspitzen experimentell nachgewiesen worden sind. Eine direkte Messung von Spannungen ist zwar theoretisch möglich, praktisch ergibt sich jedoch wegen der relativ großen Meßflächen wiederum nur ein unscharfer Mittelwert. Mit den derzeitigen Verfahren der direkten Spannungsmessung lassen sich daher Spannungsspitzen nicht bestimmen. Genauere Rückschlüsse auf die wahre Größe von Spannungsspitzen ergeben sich durch Messung der Dehnungen und nachfolgender Berechnung der Spannungen. Aber auch bei solch einer Vorgehensweise ist wegen der endlichen Länge der Dehnungsmeßstreifen und wegen des bei der Berechnung anzunehmenden Elastizitätsmoduls, dessen wahre Größe ja niemals exakt bekannt ist, eine quantitativ "genaue" Bestimmung der Extremwerte nicht möglich.

### 2.3 Experimentelle Ermittlung von Spannungs- und Dehnungsverläufen

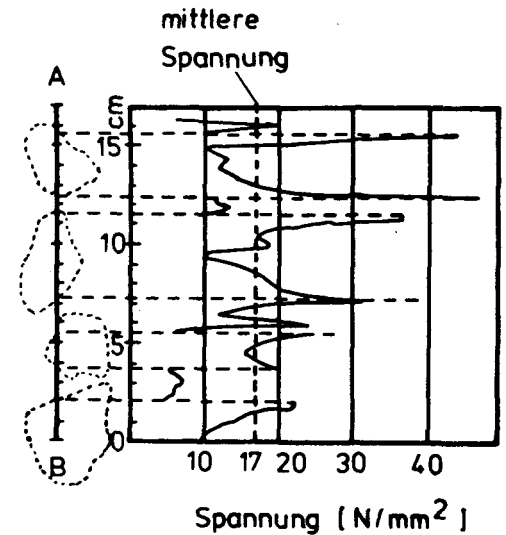
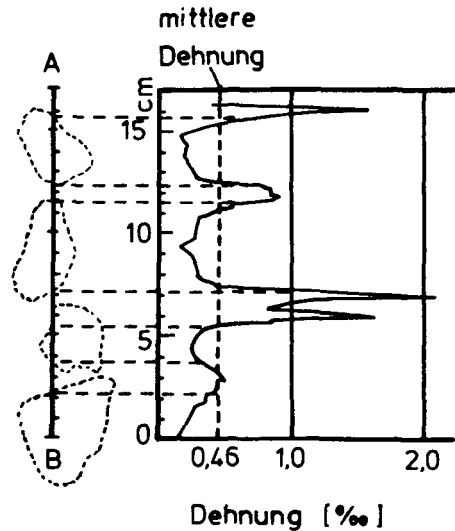
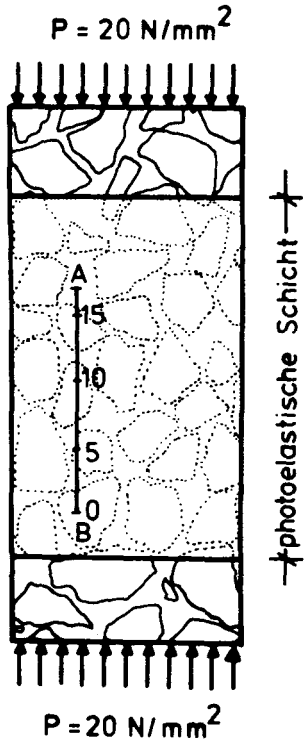
Dantu berichtete 1958 in [17] über die Ermittlung des Verformungszustandes von druckbelasteten Betonscheiben. Bei den Versuchen wurde eine photoelastische Schicht auf die Betonprobe geklebt, die es erlaubte, den Verlauf der Dehnungen unmittelbar zu bestimmen. Es ist allerdings anzumerken, daß auch bei solch einer Vorgehensweise eine gewisse Unschärfe nicht vermieden werden kann: Gemessen wird ja die Verformung der photoelastischen Schicht und nicht direkt die eigentlich gesuchte Verformung der Betonoberfläche.

Eine Übertragung der Dantu'schen Ergebnisse auf zugbeanspruchten Beton wäre nur bei linear-elastischem Materialverhalten direkt möglich. Da solch ein Materialverhalten aber nur bei niedrigen Belastungsstufen annähernd gegeben ist, muß diese Voraussetzung zunächst überprüft werden. Die von Dantu angesetzte Druckbelastung der Betonproben betrug  $17 \text{ N/mm}^2$ , die zugehörige mittlere Dehnung ergab sich zu  $0,46 \%$ . Bei diesem Spannungs-Dehnungs-Verhältnis befindet man sich in der Spannungs-Dehnungskurve von Beton etwa am Übergang vom annähernd linearen Kurventeil in den etwa parabelförmigen Kurventeil. Unter diesen Bedingungen kann davon ausgegangen werden, daß bei den Dantu'schen Versuchen ein annähernd linear-elastisches Materialverhalten vorgelegen hat. Damit ist eine näherungsweise Übertragung der Ergebnisse auf Beton unter Zugbelastung

für die Fälle möglich, bei denen die Zugbeanspruchung so gering bleibt, daß die Verbundfestigkeit zwischen Matrix und Zuschlag nicht überschritten wird, so daß es nicht zu Rißbildungen in diesen Bereichen kommt. Trotz der begrenzten Übertragbarkeit sind die Ergebnisse der Versuche von Dantu auch bei zugbelastetem Beton von Wichtigkeit, da sie Aufschluß geben über den Zustand unter niedrigen Belastungsstufen, der als Ausgangszustand für die Ermittlung potentieller Rißbereiche wichtig ist.

Die Abbildung 2.1b (nach Dantu [17] ) zeigt die gemessenen Dehnungen für eine 16 cm lange Strecke parallel zur Lastrichtung und Abb. 2.1c die daraus berechneten Spannungen. Dantu weist selbst darauf hin, daß die angegebenen Beträge der Spannungen mit Fehlern behaftet sein müssen, da bei der Umrechnung von Dehnungen auf Spannungen zwar die unterschiedlichen Elastizitätsmoduli von Matrix und Zuschlag berücksichtigt wurden, nicht aber evtl. vorhandene nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen und die daraus resultierenden variablen Elastizitätsmoduli. Hinzu kommt, daß sowohl der Elastizitätsmodul verschiedener Bereiche der Matrix als auch der Elastizitätsmodul der einzelnen Zuschlagkörner innerhalb gewisser Bereiche schwanken kann. Insgesamt kann daher die angegebene Spannungsverteilung nur qualitativ richtig sein.

Der Spannungsverlauf in Abb. 2.1c zeigt starke Spannungssprünge zwischen Matrix und Zuschlag, die sich rechnerisch (bei Annahme rein elastischen Materialverhaltens) aber zwangsläufig ergeben, da an diesen Punkten die gemessenen Dehnungen für Zuschlag und Matrix identisch sind. Auf den ersten Blick verwundert diese Gleichheit der Dehnungen an den Berührungspunkten; denkbar wäre nämlich auch das andere Extrem (gleich große Spannungen und starke Dehnungsunterschiede) oder aber - und das wäre eigentlich zu erwarten - eine Mischform zwischen den Extremen (weder Gleichheit der Spannungen noch Gleichheit der Dehnungen). Die vorgefundene Gleichheit der Dehnungen ist aber unter Beachtung des Versuchsaufbaues leicht zu erklären. Wie schon zuvor erwähnt, wurden die Verformungen der aufgetragenen photoelastischen Schicht bestimmt; übertragen auf die Struktur des eigentlichen Betonkörpers also die Verformungen des zusammenhängenden Zweiphasenmaterials, so als ob dieses homogen wäre.



a) Ansicht der Betonprobe mit photoelastischer Schicht

b) Dehnungsverläufe entlang der Strecke A B

c) Spannungsverläufe entlang der Strecke A B

Abb. 2.1 : Dehnungen und Spannungen in einer Betonprobe (nach Dantu [17])

Evtl. vorhandene Dehnungssprünge an den Phasengrenzen können daher auch mit dieser Methode nur ungenau erfaßt werden, da durch die Übertragung der Verformungen der Betonprobe auf die Verformungen der photoelastischen Schicht ein "Verwischen" solcher Sprünge eintritt. Bei genauer Betrachtung der Abb. 2.1b ist dennoch im Bereich des Phasenüberganges zwischen 11 cm und 12 cm der Meßlänge, wenn auch recht undeutlich, ein solcher Dehnungssprung zu erkennen.

Der Verlauf der Dehnungen in den einzelnen Zuschlagkörnern zeigt deutlich eine Abnahme der Dehnungen von den Randbereichen zur Kornmitte hin. Vernachlässigt man eine evtl. vorhandene Lastabhängigkeit des Elastizitätsmoduls des Zuschlags, so läßt sich dieser Dehnungsverlauf im wesentlichen auf eine Lastverteilung innerhalb des Zuschlagkornes zurückführen. Im Bereich der doch örtlich recht begrenzten Lasteintragungen (das gilt in dieser starken Ausprägung allerdings nur für Druckbelastungen) erfährt das Korn größere Verformungen. Zur Mitte hin verteilt sich die Last im Korn auf eine immer größer werdende Fläche, wodurch dann auch die dort wirkenden Spannungen und Verformungen abnehmen.

Wie zuvor erläutert, gelten die oben beschriebenen Zusammenhänge bei Beton unter Zugbelastung nur für den Fall, daß keine Risse zwischen Zuschlag und Matrix vorhanden sind oder sich während der Belastung gebildet haben. Wegen der geringen Haftfestigkeit zwischen Zuschlag und Zementstein (im Vergleich mit der Zugfestigkeit des Zementsteins) ist dieser Zustand nur bei geringen Zug-Belastungsstufen vorhanden. Kommt es beim Erreichen der Haftfestigkeit zu örtlichen Ribbildungen, so ändern sich auch die Dehnungs- und Spannungsverläufe. Dabei kann sich an ehemals hochbelasteten Stellen eine stark verminderte Spannung und Dehnung einstellen, ebenso wie es zu Spannungs- und Dehnungserhöhungen an Stellen mit zuvor niedrigen Werten kommen kann.

Von Oladapo in [77] mitgeteilte Ergebnisse von Dehnungsmessungen an unbewehrten Betonbiegebalken zeigen deutlich, daß an einigen Probekörpern Dehnungsverminderungen an ehemals höher belasteten Stellen

zu beobachten waren, während an anderen Stellen unter gleicher Belastung die Dehnungen stark zunahmen. Die Dehnungsverminderungen traten bei den Versuchen erst bei Beanspruchungen kurz unterhalb der Bruchlast auf. In diesem Belastungsstadium bildeten sich erste, makroskopisch sichtbare Risse in der Nähe der Meßstellen, so daß diese Risse als Ursache für die Dehnungsverminderung angesehen werden können. Qualitativ gleiche Ergebnisse ergaben Untersuchungen von Welch [112] und die umfangreichen Versuche von Heilmann, Hilsdorf und Finsterwalder [35].

## 2.4 Rechnerische Ermittlungen der Spannungen

### 2.4.1 Allgemeines

Mathematische Beschreibungen der inneren Spannungs- und Dehnungsverteilungen von Beton liegen bisher nur in Ansätzen vor, die überdies auch noch von verschiedenen Modellvorstellungen mit teilweise starker Abstraktion der wirklichen Verhältnisse [4], [5], [82], [92] ausgehen.

Wegen der unendlichen Anzahl von möglichen Anordnungen des Zuschlags in der Matrix muß die Abstraktion bei der Beschreibung der Betonstruktur sehr früh einsetzen. Daraus ergibt sich, realistisch betrachtet, daß die dann gewonnenen Ergebnisse niemals quantitativ richtig sein können, sondern nur qualitativ, und dies auch nur dann, wenn mechanisch richtige Modelle gewählt wurden. Es spricht generell nichts dagegen, zunächst sehr einfache, aber mechanisch richtige, Modelle zu wählen, die dann mit den daraus gewonnenen Erkenntnissen später verfeinert bzw. als Ausgangsmodelle für komplexere Modelle benutzt werden können.

Neben der grundsätzlichen Modellvorstellung sind auch hinsichtlich der dem Modell zugrunde liegenden Voraussetzungen idealisierende Annahmen zu treffen. Die für die weitere Arbeit angenommenen Idealisierungen sind nachfolgend zusammengestellt:

- . Betrachtet wird ein Zweiphasenmaterial, bei dem räumlich getrennte Bereiche des einen Materials (Zuschläge) in ein anderes Material (Zementsteinmatrix) eingebettet sind.
- . Beide Materialien werden jeweils für sich als homogen und isotrop angesehen.
- . Die Verzerrungen und Verschiebungen sind klein gegenüber den Bauteil bzw. Probenabmessungen.

- . Beide Materialien verhalten sich bis zum Beginn einer ersten Rißbildung linear elastisch.
- . Die Berechnung der Spannungen und Verformungen erfolgt für das ebene Problem der Elastizitätstheorie (Scheibenproblem).

Die genannten Voraussetzungen gelten grundsätzlich. Weitere, speziell für das jeweils betrachtete Teilproblem getroffene Annahmen werden in den entsprechenden Abschnitten angegeben.

#### 2.4.2 Mechanischer und mathematischer Hintergrund

Zur Ermittlung der Spannungen und Verformungen stehen in der Elastizitätstheorie die Gleichgewichtsbedingungen, die geometrischen Verträglichkeiten und die Materialgesetze (Spannungs-Dehnungs-Beziehungen oder konstitutive Beziehungen) zur Verfügung. Für das allgemeine räumliche Problem lauten die Gleichgewichtsbedingungen, ausgedrückt durch die partiellen Ableitungen der Spannungen unter Voraussetzung des kartesischen Koordinatensystems und unter Berücksichtigung der Volumenkräfte (siehe z.B. Girkmann [26] ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Die Bezeichnungen in der Formelgruppe (2.2) ergeben sich aus der Abbildung 2.2

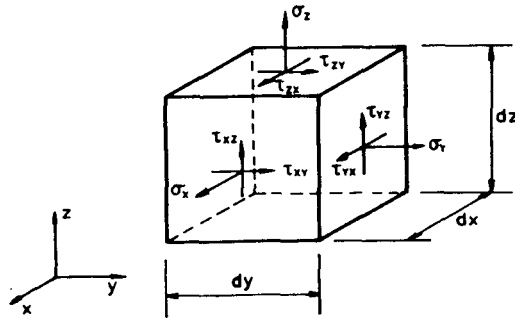


Abb. 2.2: Differentielles Volumenelement

Beschränkt man sich auf das ebene Scheibenproblem und vernachlässigt außerdem die Volumenkräfte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  (dies soll für alle nachfolgenden Herleitungen gelten), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

In ähnlicher Weise erhält man aus den Kompatibilitätsbedingungen des räumlichen Problems die Kompatibilitätsbedingungen des ebenen Problem zu:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.4)$$



Mit :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} (2.5)$$

Hierbei sind  $u$ ,  $v$  und  $w$  die Komponenten der Verschiebungen in den Richtungen  $x, y$  und  $z$  des globalen Koordinatensystems.

Zur Lösung der Probleme der Elastizitätstheorie sind neben den Gleichgewichtsbedingungen und den Kompatibilitätsbedingungen Materialgesetze erforderlich, wobei zwischen ebenem Spannungszustand und ebenem Dehnungszustand zu unterscheiden ist.

Legt man den ebenen Spannungszustand zugrunde, so lauten die Materialgleichungen:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{E} (1 + \nu) \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Materialgesetze für den ebenen Dehnungszustand lauten entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu (1 + \nu) \sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [-\nu (1 + \nu) \sigma_x + (1 - \nu^2) \sigma_y] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{E} (1 + \nu) \tau_{xy} \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Scheibenprobleme lassen sich sinnvoll durch Einführung der Airyschen Spannungsfunktion (hier mit  $\mathcal{F}$  bezeichnet) lösen. Näheres zur Airyschen Spannungsfunktion, die auf Georg Bidell Airy zurückgeht, kann z.B. [80] entnommen werden.

Die Airysche Spannungsfunktion erfüllt definitionsgemäß von vornherein die Gleichgewichtsbedingungen. Damit die Verträglichkeitsbedingungen und die konstitutiven Beziehungen erfüllt werden, muß  $\mathcal{F}$  der biharmonischen Gleichung (Scheibengleichung)

$$\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

genügen.

Führt man den Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

ein, so läßt sich die Scheibengleichung auch schreiben:

$$\Delta \Delta \mathcal{F} = 0 \quad (2.10)$$

Die Spannungen ergeben sich aus  $\mathcal{F}$  durch Bildung der zweiten partiellen Ableitungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Gelingt es, die Differentialgleichung  $\Delta\Delta\mathcal{F} = 0$  unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu integrieren, so gewinnt man die strenge Lösung des betreffenden Scheibenproblems. Häufig ist es wegen großer mathematischer Schwierigkeiten nicht möglich, Scheibenprobleme streng zu lösen. In solchen Fällen versucht man Näherungslösungen zu finden. Solche Näherungslösungen erfüllen dann entweder die Scheibengleichung oder die Randbedingungen exakt, während sie die jeweils andere dieser beiden Bedingungen nur in möglichst guter Näherung erfüllt. Für die in dieser Arbeit anstehenden Scheibenprobleme ist es jedoch nicht notwendig Näherungslösungen zu suchen, da für alle nachfolgend untersuchten Scheibenprobleme die Spannungsfunktionen bekannt sind.

Im Hinblick auf vereinfachte mathematische Herleitungen ist es sinnvoll, die Spannungsfunktion in komplexer Darstellung einzuführen. Nach Muskhelishwili [74] läßt sich jede biharmonische Funktion mit Hilfe zweier Funktionen der komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$  darstellen. Führt man dazu die Funktionen  $\varphi(z)$  und  $\chi(z)$  ein, so läßt sich  $\mathcal{F}(z)$  schreiben als :

$$\mathcal{F}(z) = \operatorname{Re} \left[ \bar{z} \varphi(z) + \chi(z) \right] \quad (2.12)$$

In (2.12) ist  $\operatorname{Re} [\dots]$  der Realteil des Ausdruckes in eckigen Klammern. Außerdem gelten die üblichen Definitionen der komplexen Zahl  $z$  und der konjugiert komplexen Zahl  $\bar{z}$  (2.13).

$$z = x + iy \quad (2.13)$$

$$\bar{z} = x - iy$$

Die beiden analytischen Funktionen  $\varphi(z)$  und  $\chi(z)$  müssen aus den Randbedingungen des gegebenen Problems bestimmt werden. Dabei ist es nach [74] sinnvoll, nicht direkt mit der Funktion  $\mathcal{F}$  und deren partiellen Ableitungen zu rechnen, sondern mit deren komplexen Kombinationen

$$f_{(x,y)} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \quad (2.14)$$

Hierbei wurde  $\psi(z) = -\frac{\partial \chi}{\partial z}$  eingeführt.

Wie Kolosoff in [59] erstmalig ohne Benutzung der Spannungsfunktion und später Muskhelishwili in [74] unter Ausnutzung der Spannungsfunktion nachwies, ergeben sich aus (2.14) die Formeln zur Berechnung der Spannungen zu:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Führt man, wie in [74] geschehen, außerdem ein:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi'(z) \\ \Psi(z) &= \psi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

so lassen sich die Spannungen ausdrücken durch:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 [\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

In vielen Fällen, insbesondere bei den hier vorliegenden Problemen, ist es sinnvoll, die Spannungen und Verschiebungen in Polarkoordinaten anzugeben. Setzt man dazu

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi} \quad (2.18)$$

so ergibt sich nach [74] für die Spannungen:

$$\sigma_r + \sigma_\varphi = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \quad (2.19)$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2i \tau_{r\varphi} = 2 [\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\varphi} \quad (2.20)$$

Will man diese handlichen Gleichungen auf Scheibenprobleme mit Löchern oder mit Einschlüssen anwenden, die von der Kreisform abweichen (z.B. Quadrate, Rechtecke, Dreiecke, Ellipsen), so bildet man diese Bereiche mit Hilfe konformer Abbildungen auf den Einheitskreis ab und transformiert die Gleichungen (2.19) und (2.20) ebenfalls auf die Abbildungsebene [74]. Dazu führt man zunächst die zwei komplexen Veränderlichen  $z$  und  $\xi$ , die durch die Beziehung

$$z = \omega(\xi) \quad (2.21)$$

verbunden sind, ein. Die Beziehung (2.21) bildet jeden Punkt  $z$  der  $z$ -Ebene umkehrbar eindeutig auf den Punkt  $\xi$  der  $\xi$ -Ebene ab.

Abbildungsfunktionen  $\omega(\xi)$  sind für viele verschiedene Probleme in der einschlägigen Literatur über konforme Abbildungen angegeben. Die in dieser Arbeit verwendeten Abbildungsfunktionen finden sich im wesentlichen auch bei Muskhelishwili [74] und bei Sawin [93].

Als Beispiel sei die Abbildung des Quadrates auf den Einheitskreis angegeben. Die Abbildungsfunktion lautet für diesen Fall allgemein:

$$z = \omega(\xi) = R \left( \frac{1}{\xi} + m \xi^n \right) \quad (2.22)$$

Mit  $n = 3$  und  $m = -\frac{1}{6}$  wird daraus für den Einheitskreis mit  $R = 1$ :

$$z = \omega(\xi) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{6} \xi^3 \quad (2.23)$$

Da außerdem gilt:

$$\xi = \rho e^{i\varphi} \quad (2.24)$$

ergibt sich endgültig:

$$z = \omega(\xi) = \left( \frac{1}{\rho} \cos \varphi - \frac{1}{6} \rho^3 \cos 3\varphi \right) - i \left( \frac{1}{\rho} \sin \varphi + \frac{1}{6} \rho^3 \sin 3\varphi \right) \quad (2.25)$$

Wertet man diese Formeln für verschiedene  $\rho$  aus, so ergeben sich die in Abbildung 2.3 dargestellten Kurvenverläufe.

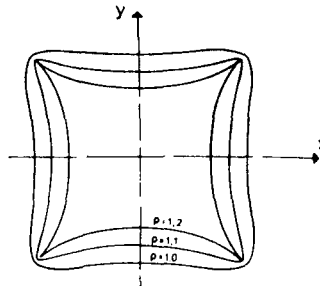


Abb. 2.3: Konforme Abbildung quadratähnlicher Bereiche

Die Transformation der Gleichungen (2.19) und (2.20) ergibt nach [74] :

$$\sigma_r + \sigma_\varphi = 2 \left[ \Phi(\xi) + \overline{\Phi(\xi)} \right] \quad (2.26)$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2i\tau_r\varphi = \frac{2\xi^2}{\rho^2 \omega'(\xi)} \left[ \overline{\omega(\xi)} \Phi'(\xi) + \omega'(\xi) \Psi(\xi) \right] \quad (2.27)$$

Die gleichen Beziehungen benutzt auch Sawin in [93] , wobei aber außerdem gilt:

$$\Phi(\xi) = \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \quad (2.28)$$

$$\Psi(\xi) = \frac{\psi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \quad (2.29)$$

Mit den allgemeinen Kolossoff-Muskhelischwili-Gleichungen (2.26) und (2.27) lassen sich nach Einführung der Abbildungsfunktion die Spannungsformeln herleiten, wenn die für das jeweilige spezielle Problem geltenden komplexen Spannungsfunktionen  $\varphi_{(\xi)}$  und  $\psi_{(\xi)}$  bekannt sind. Für die nachfolgend untersuchten Einschlußformen gibt Sawin in [93] zwar die jeweiligen komplexen Spannungsfunktionen  $\varphi_{(\xi)}$  und  $\psi_{(\xi)}$  an, nicht jedoch Formeln zur direkten Berechnung der Spannungen. Um zu solchen Formeln zu gelangen, ist es notwendig, die Funktionen  $\varphi_{(\xi)}$  und  $\psi_{(\xi)}$  und deren Ableitungen sowie die Abbildungsfunktion  $\omega_{(\xi)}$  und ihre Ableitung in die Gleichungen (2.26) und (2.27) einzusetzen.

Bei Anwendung üblicher analytischer Herleitungen ergeben sich dann sehr umständliche und lange Zwischenausdrücke, die auch durch mathematische Kunstgriffe nur geringfügig vereinfachbar sind. Die Herleitungen selbst sind sehr umfangreich und unübersichtlich und aus diesen Gründen überaus fehleranfällig, wie eine für den quadratischen Einschluß durchgeführte eigene Untersuchung gezeigt hat. Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit und zur deutlichen Verringerung der Fehleranfälligkeit mußte ein modifizierter analytischer Herleitungsweg beschritten werden :

Sobald längere Zwischenausdrücke auftraten, wurden diese durch Einführung neuer Funktionen  $f_{i(\xi)}$  oder durch Konstanten ersetzt. Gegenüber einer herkömmlichen Herleitung kommt es dabei aber zu einer kräftigen Erhöhung der Anzahl der Zwischenausdrücke, so daß sich das modifizierte Verfahren nur noch schlecht für eine Handrechnung eignet. Aus diesem Grunde wurde für jede Einschlußform ein spezielles Programm geschrieben, das neben den Ergebnissen für  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sämtliche Zwischenausdrücke enthält und sie wahlweise auch ausdrückt.

Wie viele Testläufe bei der Programmentwicklung gezeigt haben, lassen sich auf diese Weise recht leicht Fehler in der Herleitung lokalisieren und berichtigen.

In den Einzelanlagen des Anlagenteiles C sind die Programme für den ellipsenförmigen Einschluß (Anlage C.2, Programm ELLIPSE), den

quadratischen Einschluß (Anlage C.3, Programm QUADRAT) und für den dreieckigen Einschluß (Anlage C.4, Programm DREIECK) aufgelistet. Mit diesen Programmen lassen sich die Spannungen auf dem Einschlußrand für beliebige, wählbare Punkte oder für ein vorgegebenes Punktraster mit äquidistanten Winkelabständen ( $\Delta\varphi = 10^\circ$ ) im Intervall  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  berechnen.

Für den kreisförmigen Einschluß war eine Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen eigentlich nicht erforderlich, da Sawin diese Formeln in [93] angibt. Wie eine Überprüfung der Sawin'schen Formeln ergeben hat, stimmen zwar die Ausgangsformeln, bei der Anpassung an die Randbedingungen spezieller Fälle sind jedoch Fehler festzustellen. Im Abschnitt 2.4.3 wird aus diesem Grund der Einschluß mit Kreisquerschnitt gesondert untersucht.



### 2.4.3 Spannungsverläufe um einen kreisförmigen Einschluß

Ein stark abstrahierendes Modell zur Beschreibung der Spannungsverläufe um Zuschlagskörner im Beton liegt bei Betrachtung nur eines einzelnen, dazu noch exakt runden Einschlusses in einer unendlich ausgedehnten Scheibe vor (Abb. 2.4). Man kann mit diesem Modell sicherlich keine quantitativ richtigen Ergebnisse herleiten; erwarten kann man aber wesentliche qualitative Erkenntnisse. Bedeutung erlangt dieses Modell vor allem bei vergleichenden Betrachtungen verschieden geformter Einschlüsse, da dann zumindest die Unterschiede in den Spannungsverläufen auch quantitativ angebbar sind. Ein Mangel des Modells scheint zunächst in der Nichtberücksichtigung der Dreidimensionalität zu liegen. Dieser Nachteil ist aber nicht so gravierend, wie in Abschnitt 2.4.4 gezeigt werden wird, wo vergleichend der räumliche Fall eines Einschlusses - mit der Herausarbeitung der Unterschiede zum ebenen Fall und der Berechtigung der Beschränkung auf ein ebenes Problem - untersucht wird.

Die Anwendung dieses sehr einfachen Modells zur Beschreibung der qualitativen Spannungsverläufe um Zuschlagskörner ist nicht neu. Mehmel und Kern benutzen es in [67] zu Untersuchungen der Wechselwirkungen zwischen Zementsteinmatrix und Zuschlag bei druckbelastetem Beton. Sie gehen von der Vorstellung aus, daß sich der Zuschlag elastisch, der Zementstein jedoch viskos verhält und daß diese beiden Phasen die gleiche Verformung erleiden. Die mit diesem Modell gewonnene Spannungsverteilung vergleichen sie mit der Lösung von Sawin, die dieser, allerdings in ganz anderem Zusammenhang und vor allem nicht zur Beschreibung des Spannungszustandes im Beton, in [89] angibt. Ein Vergleich der eigenen Ergebnisse mit denen von Mehmel und Kern wird am Ende dieses Abschnittes durchgeführt.

Lusche vergleicht in seiner Arbeit [64] die Ergebnisse von Sawin mit denen von Mehmel und Kern an einem Beispiel und stellt sie den - allerdings für den räumlichen Fall geltenden - Ergebnissen der Untersuchungen von Franz [24] gegenüber. Auf das Modell für den räumlichen Fall, und damit auf die zitierte Arbeit von Franz, wird in Abschnitt 2.4.4 eingegangen.

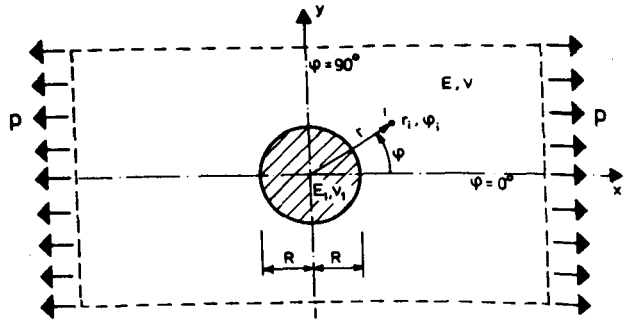


Abb. 2.4 : Unendlich ausgedehnte Scheibe mit rundem Einschuß unter einachsiger Zugbelastung

Shah und Winter [97] benutzen eine Abwandlung dieses Modells zur Beschreibung eines sogenannten "Mikrorißelementes" für Beton, bei dem ein einzelner Einschuß in einer endlichen Scheibe geringer Abmessungen betrachtet wird. Mit diesem Element berechnen sie Spannungs-Dehnungslinien bei Druckbeanspruchung in Abhängigkeit von unterschiedlichen Betonzusammensetzungen ( im wesentlichen unterschiedliche Zuschlaganteile).

Parameterstudien mit Variation der Elastizitätsmoduli und der Querdehnzahlen sind bisher nicht bekannt geworden. Gerade bei Beton wäre es aber wichtig zu wissen, wie sich diese Parameter auf die Spannungsverteilung um die Zuschlagkörner auswirken. Die nachfolgenden Untersuchungen beinhalten daher auch Variationen der Elastizitätsmoduli und der Querdehnzahlen von Matrix und Einschuß.

Man betrachtet dazu eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit einem runden Einschuß nach Abb. 2.4. Im Unendlichen soll in positiver und in negativer  $x$ -Richtung eine einachsige, gleichmäßig verteilte Belastung  $p$  wirken. Es wird vorausgesetzt, daß die Spannungen an der Phasengrenze zwischen Einschuß und Matrix beliebig große Werte annehmen können, ohne daß es zu Ribbildungen und/oder plastischen Verformungen kommt. Aus dieser Einschränkung läßt sich schon jetzt erkennen, daß dieses Modell nur für Belastungen  $p$  aus-

sagekräftig ist, bei denen noch kein Lösen des Verbundes zwischen Matrix und Einschluß auftritt.

Die Formeln zur Berechnung der Spannungen und Verformungen in der Matrix lauten nach Sawin [93] :

$$\sigma_r = \frac{p}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \beta_1 \frac{R^2}{r^2} \right)^2 + \left( 1 - 2\alpha_1 \frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{2} \beta_3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] \quad (2.30)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \beta_1 \frac{R^2}{r^2} - \left( 1 - \frac{3}{2} \beta_3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] \quad (2.31)$$

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{p}{2} \left[ \left( 1 + \alpha_1 \frac{R^2}{r^2} + \frac{3}{2} \beta_3 \frac{R^4}{r^4} \right) \right] \sin 2\varphi \quad (2.32)$$

$$v_r = \frac{p R}{8 G} \left\{ (\kappa - 1) \frac{r}{R} + \beta_1 \frac{R}{r} + \left[ 2 \frac{r}{R} + \alpha_1 (\kappa + 1) \frac{R}{r} + \beta_3 \frac{R^3}{r^3} \right] \cos 2\varphi \right\} \quad (2.33)$$

$$v = \frac{p R}{8 G} \left[ - 2 \frac{r}{R} - \alpha_1 (\kappa - 1) \frac{R}{r} + \beta_3 \frac{R^3}{r^3} \right] \sin 2\varphi \quad (2.34)$$

Sawin gibt diese Formeln für die durch elastische Ringe versteiften Löcher an. Als Grenzfall erhält man aus ihnen jedoch Formeln für einen zusammenhängenden scheibenförmigen Einschluß, wenn man entsprechende Koeffizienten einsetzt. Für den hier vorliegenden Fall ergeben sie sich zu :

$$\alpha_1 = 2 - \frac{2 ( 1 + \kappa )}{\kappa + \frac{G}{G_1}} \quad (2.35)$$

$$\beta_{-1} = 2 + \frac{2(1 + \chi)}{\left(\frac{G}{G_1} - 1\right) - \left(1 + \chi_1 \frac{G}{G_1}\right)} \quad (2.36)$$

Sawin gibt keine Formel zur Bestimmung des Koeffizienten  $\beta_{-3}$  an. Das könnte zu der Annahme verleiten, daß  $\beta_{-3}$  identisch Null wäre. Nach der Struktur der Formeln (2.30) bis (2.34) ist aber ein Term mit  $R^4/r^4 \neq 0$  vorhanden (siehe hierzu Girkmann [26] und Goodier [29]). Offensichtlich sind in dieser Hinsicht die Angaben bei Sawin fehlerhaft. Im Anhang A1 wird daher die hier als Gleichung (2.37) angegebene Formel zur Berechnung des Koeffizienten  $\beta_{-3}$  hergeleitet.

$$\beta_{-3} = -\alpha_{-1} = -2 + \frac{2(1 + \chi)}{\chi + \frac{G}{G_1}} \quad (2.37)$$

In den vorstehenden Formeln gilt :

$$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{Für den ebenen Spannungszustand}$$

$$\chi = 3 - 4\nu \quad \text{Für den ebenen Dehnungszustand}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{Schubmodul}$$

$\nu$  = Querdehnzahl

E = Elastizitätsmodul

Für die  
Matrix

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1} && \text{Für den ebenen Spannungszustand} \\ \alpha_1 &= 3 - 4 \nu_1 && \text{Für den ebenen Dehnungszustand} \\ G_1 &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} && \text{Schubmodul} \\ \nu_1 &= \text{Querdehnzahl} \\ E_1 &= \text{Elastizitätsmodul} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1} \\ \alpha_1 &= 3 - 4 \nu_1 \\ G_1 &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \\ \nu_1 &= \text{Querdehnzahl} \\ E_1 &= \text{Elastizitätsmodul} \end{aligned}} \right\} \text{Für den Einschluß}$$

Bei Sawin [93] ist das Vorzeichen des zweiten Summanden in Gleichung ( 2.37 ) negativ. Daß es sich dabei um einen Fehler handeln muß, wird ebenfalls in Anlage A1 nachgewiesen.

Um die Variationsbreite der Spannungen in realem Beton zu bestimmen, werden die Spannungen für obere und untere Grenzwerte der Elastizitätskonstanten von Matrix und Einschluß bestimmt. Die Elastizitätskonstanten für die Zuschlaggesteine werden Tabelle 2.2 ( nach [ 60 ] ) entnommen.

Gestein	Elastizitätsmodul [ 10 <sup>5</sup> MN/m <sup>2</sup> ]	Querdehnzahl ν
Marmor	1,1	0,28
Gabbro	1,05	0,34
Basalt	1,0	0,28
Granit	0,55 - 0,9	0,21 - 0,28
Kalkstein	0,20 - 0,9	0,23 - 0,28
Sandstein	0,02 - 0,7	0,30 - 0,40
Tonschiefer	0,55	0,16

Tabelle 2.2 : Elastizitätskonstanten von Gesteinen  
( nach [60] )

Nach [114] schwankt der Elastizitätsmodul des Zementsteins je nach Porosität - und damit im wesentlichen in Abhängigkeit vom W/Z-Wert - zwischen  $0,05 \text{ MN/m}^2$  und  $0,20 \text{ MN/m}^2$ . Diese beiden Grenzwerte gehen als obere und untere Grenzwerte für den Elastizitätsmodul der Matrix in die nachfolgenden Berechnungen ein. Die Querdehnzahl des Zementsteins kann genügend genau mit  $\nu = 0,2$  angenommen werden, auch wenn sie um diesen Mittelwert in gewissen Grenzen streut.

Zur Berechnung der Spannungen an beliebigen Punkten außerhalb des Einschlusses wurde das Programm MATRUND geschrieben (Anhang C1). Die Auswertung der in Tabelle 2.3 zusammengestellten Beispiele erfolgte mit diesem Programm. Durch die Wahl der Beispiele ist gewährleistet, daß sowohl Grenzfälle als auch Fälle mit den gewöhnlich auftretenden Zuschlaggesteinen erfaßt werden. Nicht betrachtet wurden hingegen die unteren Grenzwerte der Elastizitätsmoduli von Sandstein ( $0,02 \text{ MN/m}^2$ ) und Kalkstein ( $0,2 \text{ MN/m}^2$ ). Zuschläge mit derartigen Elastizitätskonstanten bewirken ähnliche Spannungsverteilungen wie die Zuschläge im Leichtbeton und würden daher die für Normalbeton geltenden Verhältnisse verwischen. Darüber hinaus liegt die Druckfestigkeit von Sand- und Kalkstein mit solch niedrigen E-Moduli (siehe Tafel II.04 in [115]) in der Regel unter der in der DIN 4226 geforderten Mindestdruckfestigkeit von  $100 \text{ N/mm}^2$ , so daß solche Gesteine bei Normalbeton nicht verwendet werden dürfen.

Einschluß Bezeichnung	E- Modul [ $10^5 \text{ MN/m}^2$ ]	$\nu$	E - Modul der Matrix [ $10^5 \text{ MN/m}^2$ ]	
			0,05	0,20
Marmor	1,10	0,28	Nr. 1	Nr. 9
Gabbro	1,05	0,34	Nr. 2	Nr.10
Basalt	1,00	0,28	Nr. 3	Nr.11
Granit	0,55	0,21	Nr. 4	Nr.12
Kalkstein, dicht	0,90	0,28	Nr. 5	Nr.13
Sandstein	0,70	0,40	Nr. 6	Nr.14
Tonschiefer	0,55	0,16	Nr. 7	Nr.15
Starrer Einschluß	$\infty$	0	Nr. 8	Nr.16

Tabelle 2.3 : Zusammenstellung und Zuordnung der durchgerechneten Beispiele

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in den Tabellen B1.1, B1.2 und B1.3 zusammengestellt und in den Diagrammen B1.4 bis B1.8 (Tabellen und Diagramme finden sich im Anhang B1) graphisch dargestellt.

Die Spannungsverläufe der Diagramme B1.4 bis B1.8 zeigen insbesondere folgendes :

- \* Die Spannungsverläufe für Einschlüsse aus den verschiedenen Zuschlaggesteinen liegen innerhalb eines schmalen Bandes in der Nähe des Spannungsverlaufes für den starren Einschluß. Für einige Gesteinsarten ist kaum ein nennenswerter Unterschied zum starren Einschluß festzustellen. Sämtliche weiteren Untersuchungen beschränken sich daher auf den Fall des starren Einschlusses, zumal dieser, wie aus den Diagrammen zu ersehen, die maximalen Beträge der maßgebenden Spannungen liefert.
- \* Die Änderung des homogenen Spannungsfeldes durch den Einschluß ist in Einschlußnähe beträchtlich; aber schon im Abstand von  $2R$  bis  $3R$  vom Einschlußrand ist nur noch eine geringe Beeinflussung des homogenen Spannungsfeldes vorhanden.
- \* Sowohl die Radial- als auch die Tangentialspannungen treten über den ganzen Einschlußumfang als Zugspannungen auf, wobei sich dort maximale Beträge von

$$\begin{array}{ll} \sigma_r = 1,51 p & \text{bei } \varphi = 0^\circ \\ \sigma_\varphi = 0,47 p & \text{bei } \varphi = 90^\circ \end{array}$$

ergeben.

- \* Die maximale Hauptspannung  $\sigma_1$  ist über den gesamten Einschlußumfang eine Zugspannung. Auch die minimale Hauptspannung  $\sigma_2$  liegt nur in eng begrenzten Bereichen als Druckspannung vor, zudem ist sie in diesen Bereichen auch noch betragsmäßig gering. D.h., daß über große Bereiche des Einschlußumfanges

ein zweiachsiger Zugspannungszustand vorliegt.

Für die spätere Betrachtung der Ribentstehung und Riäausbreitung ist insbesondere der Verlauf und die Beträge der Spannungen in der Kontaktfläche zwischen Matrix und Einschluß wesentlich. Zur Verdeutlichung dieser Gegebenheiten sind daher die dort herrschenden Spannungen für den Fall des starren Einschlusses in den Diagrammen B1.9 bis B1.13 graphisch dargestellt. Wegen der doppelten Symmetrie im vorliegenden Fall beschränkt sich die Darstellung auf einen Viertelkreis mit  $0 \leq \varphi \leq 90$ .

#### 2.4.4 Spannungsverläufe um eine elastische Kugel in einem unendlichen Kontinuum

Wegen der Berücksichtigung der Dreidimensionalität stellt das Modell der Kugel in einem infiniten Kontinuum grundsätzlich ein gegenüber der infiniten Scheibe verbessertes Modell dar. Es bestehen aber leider bei Anwendung auf nicht kugelförmige Einschlässe erhebliche mathematische Schwierigkeiten bei der Herleitung von Formeln zur Berechnung der Spannungen und Verformungen, die nur mit einem hohen Aufwand zu überwinden wären. Es fragt sich, ob solch ein umfangreicher und zeitraubender Aufwand getrieben werden soll, oder ob es nicht sinnvoller ist, beim Modell der infiniten Scheibe zu bleiben, wenn man sich über die Auswirkungen der Vernachlässigung der Dreidimensionalität im klaren ist. Dazu eignet sich ein Vergleich zwischen dem runden Einschluß in einer Scheibe und dem kugelförmigen Einschluß in einem Kontinuum. In diesem Abschnitt wird daher insbesondere auf diesen Vergleich eingegangen.

Die mathematische Lösung des Problems eines elastischen, kugelförmigen Einschlusses in einem elastischen Kontinuum mit unterschiedlichen Elastizitätskonstanten von Matrix und Einschluß stammt von Goodier, die dieser 1933 in [29] veröffentlichte. Die schon früher bekannten



Lösungen für einen kugelförmigen Hohlraum in einem infiniten Kontinuum [101] und für einen starren kugelförmigen Einschuß ergeben sich aus der Lösung von Goodier als Sonderfälle.

Anwendungen des Modells des infiniten Kontinuums mit kugelförmigem Einschuß zur Beschreibung des räumlichen Spannungszustandes an der Kornoberfläche im Beton stammen u.a. von Weigler und Becker [111]. Sie untersuchen in ihrer Arbeit auch den Einfluß unterschiedlicher Elastizitätsmoduli von Matrix und Zuschlag, variieren aber die Querdehnzahlen nicht.

Franz benutzt dieses Modell in [24] bei der Betrachtung der Mechanik des Zusammenwirkens von Beton und Kunststoffen.

Die nachfolgende Teiluntersuchung soll im wesentlichen klären, in welchem Umfang und in welcher Form die Ergebnisse des räumlichen von denen des ebenen Falles abweichen. Dazu wird nach Goodier [29] zunächst das räumliche Problem für zwei Beispiele untersucht und die Ergebnisse dann mit denen des ebenen Problems verglichen. Die Formeln zur Lösung des ebenen Problems werden ebenfalls [29] entnommen, da sie sich dort als Spezialfall des räumlichen Problems ergeben. Durch diese Vorgehensweise liegt gleichzeitig eine Kontrollmöglichkeit für die nach Sawin für den ebenen Fall ermittelten Ergebnisse vor. Alle nach [29] berechneten Beispiele finden sich mit ausführlicher Herleitung im Anhang A 2. Nachfolgend werden nur die Ergebnisse in Diagrammform dargestellt (Abb. 2.5 und 2.6). Eine Übersicht der berechneten Beispiele enthält Tabelle 2.4

Anhang	Form	Einschuß		Matrix		
		E-Modul [ $10^5 \text{ MN/m}^2$ ]	$\nu_1$	Modellbild	E-Modul [ $10^5 \text{ MN/m}^2$ ]	$\nu$
A2.1a	Kugel	$\infty$	0	Kontinuum	0,20	0,2
A2.1b	Kugel	0,70	0,25	Kontinuum	0,20	0,2
A2.2a	Kreis	$\infty$	0	Scheibe	0,20	0,2
A2.2b	Kreis	0,70	0,25	Scheibe	0,20	0,2

Tabelle 2.4 : Beispiele zum Vergleich des räumlichen mit dem ebenen Modell

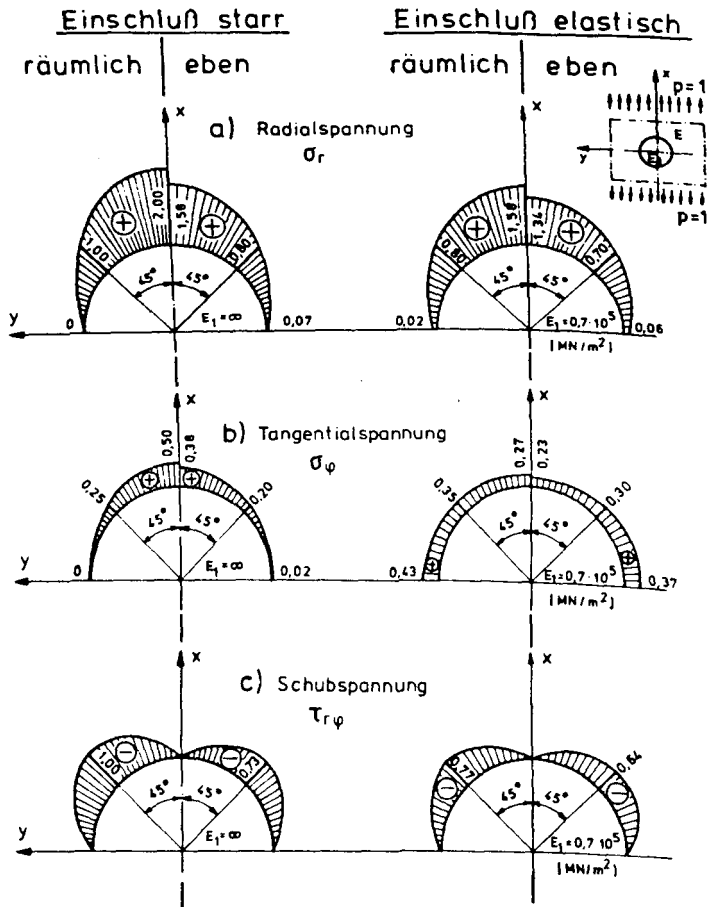


Abb. 2.5 : Vergleich der Spannungsverläufe von  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  und  $\tau_{r\varphi}$  für den ebenen und räumlichem Fall

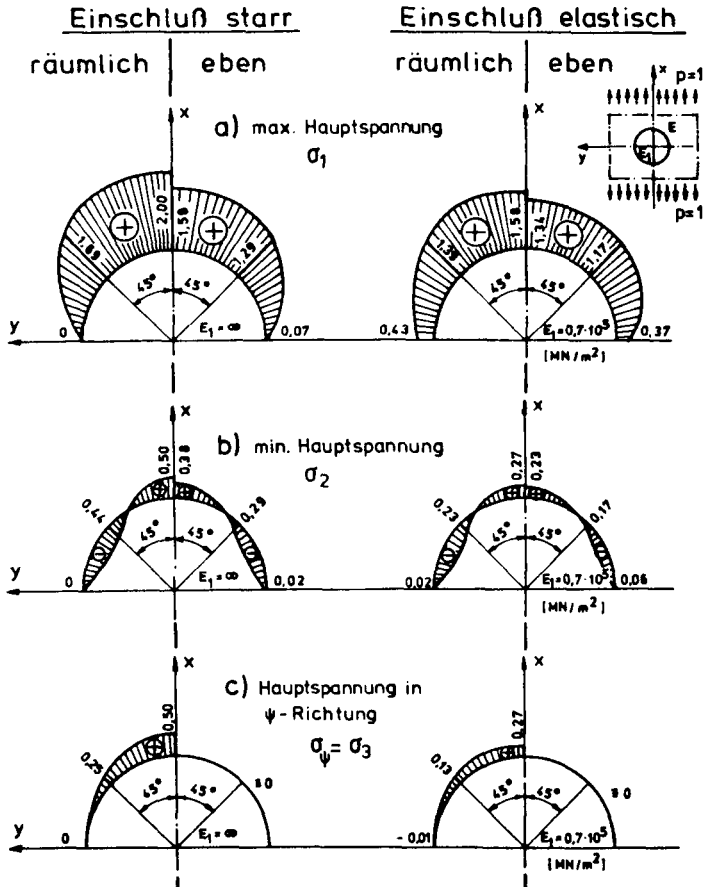


Abb. 2.6 : Vergleich der Spannungsverläufe von  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  für den ebenen und räumlichen Fall

Sowohl für den starren als auch für den elastischen Einschuß unterscheiden sich die Spannungsverläufe von  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  im ebenen und im räumlichen Fall qualitativ nicht. Quantitativ sind diese Spannungen bei starrem Einschuß und dreidimensionalem Modell um etwa 30% höher als für den gleichen Einschuß beim ebenem Modell. Die Hauptspannung  $\sigma_3$  gibt es voraussetzungsgemäß nur im räumlichen Fall. Bei elastischem Einschuß verringern sich die Unterschiede der Spannungsbeträge zwischen räumlichem und ebenem Modell noch mehr. So beträgt z.B. der Unterschied der maximalen Hauptspannung  $\sigma_1$  nur noch etwa 15%. Dieser Effekt bleibt auch bestehen, wenn man andere Elastizitätsmoduli und Querdehnzahlen von Matrix und Einschuß wählt, wie die Durchrechnung vieler, hier nicht wiedergegebener Beispiele, ergab. Zwar sind, abhängig vom Verhältnis  $E/E_1$  und  $\nu/\nu_1$  quantitativ geringe Unterschiede vorhanden, qualitativ sehen die Spannungsverläufe im räumlichen Fall aber immer wie im ebenen Fall aus. Variationen der Querdehnzahlen bei gleichbleibendem Verhältnis der Elastizitätsmoduli ergeben nur sehr gering voneinander abweichende Ergebnisse; offensichtlich ist der Einfluß der Querdehnzahl nicht von großer Bedeutung.

Wie die Verläufe der Hauptspannungen beim räumlichen Modell zeigen, treten in den "Polregionen" des Einschlusses dreiaxige Zugspannungszustände auf. In einem Band um den "Äquator" ist dann immerhin noch ein zweiachsiger Zugspannungszustand vorhanden, beruhend darauf, daß in diesem Bereich  $\sigma_2$  als Druckspannung vorliegt.

Insgesamt zeigt sich, daß die Betrachtung des ebenen Problems eine ausreichende Näherung für das eigentlich räumliche Problem liefert. Die auf diese Weise gewonnenen Ergebnisse lassen sich - unter Berücksichtigung des oben durchgeführten Vergleichs - auf den räumlichen Fall übertragen. Für die weitere Arbeit wird daher immer nur das ebene Problem betrachtet.

### 2.4.5 Spannungsverläufe um einen elliptischen Einschlul3

Ein elliptischer Einschlul3 mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  nach Abb. 2.7 l3sst sich durch die komplexe Abbildungsfunktion (2.38) konform auf den Einheitskreis abbilden.

$$z = \omega(\xi) = R \left( \frac{1}{\xi} + m\xi \right) \quad (2.38)$$

Dabei gilt :

$$m = \frac{a - b}{a + b} \quad (2.39)$$

$$\xi = \rho \cdot e^{i\varphi} \quad (2.40)$$

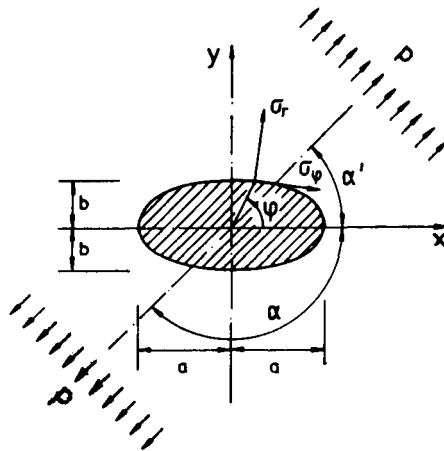


Abb. 2.7 : Elliptischer Einschlul3 unter einachsiger, in beliebiger Richtung angreifender gleichm3ssig verteilter Belastung

Sawin gibt in [93] für den elliptischen Einschluß die Funktionen  $\varphi(\xi)$  und  $\psi(\xi)$  auch für den hier vorhandenen Sonderfall der behinderten Starrkörperverschiebung (hervorgerufen durch die angenommene feste Verbindung zwischen Einschluß und Matrix) an mit:

$$\varphi(\xi) = \frac{p R}{4} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{p R}{4 \chi} (m - 2 e^{2i\alpha}) \xi \quad (2.41)$$

$$\psi(\xi) = -\frac{p R e^{-2i\alpha}}{2} \frac{1}{\xi} + \left[ \frac{p R \chi}{4} - \frac{p R}{4} \cdot \frac{1+m^2}{1-m\xi^2} \right] \xi - \left[ \frac{p R m}{4} - \frac{p R e^{2i\alpha}}{2} \right] \frac{(\xi^2 + m) \xi}{\chi(m\xi^2 - 1)} \quad (2.42)$$

Die Funktionen (2.41) und (2.42) und deren Ableitungen sind zusammen mit der Abbildungsfunktion (2.38) und deren Ableitungen entsprechend Abschnitt 2.4.2 in die Kolosoff - Muskhelischwili Formeln (2.26) und (2.27) einzusetzen.

Anhang A 3.1 enthält die ausführliche Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen und das zugehörige Rechnerprogramm ELLIPSE, so daß an dieser Stelle nur die endgültigen Formeln zur Spannungsberechnung mitgeteilt werden sollen.

$$\sigma_{\varphi} = \frac{p}{2 a r_4} (a r_3 + a r_{27}) \quad (2.43)$$

$$\sigma_r = \frac{p}{2 a r_4} (a r_3 - a r_{27}) \quad (2.44)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{p}{2 a r_4} a i_{27} \quad (2.45)$$

Mit :  $a r_n$  = Realteil des komplexen Ausdruckles n  
 $a i_n$  = Imaginärteil des komplexen Ausdruckles n  

$p$  = Einachsiale Belastung im Unendlichen

Die Definition der Spannungen enthält Abb. 2.7 .

In den Diagrammen des Anhangs B 2 sind für die Halbachsenverhältnisse  $a/b = 2$  und  $a/b = 4$  die Spannungen  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  für die Belastungsrichtungen  $\alpha = 0^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $90^\circ$  aufgetragen. Qualitativ ändern sich diese Spannungsverläufe auch bei anderen Halbachsenverhältnissen nicht.

Ein Vergleich der Abbildungen B 2.1 bis B 2.9 läßt deutlich erkennen, daß sowohl die Verteilung der Spannungen entlang des Einschlußumfanges als auch die Beträge der Spannungen sehr stark von der Belastungsrichtung abhängen. Bei konstanter Belastungsrichtung bestimmt die Ellipsenform (gekennzeichnet durch das Verhältnis der Halbachsen) die Spannungsbeträge, während sich der Spannungsverlauf nur noch unwesentlich ändert.

Die Radial- und Tangentialspannungen liegen nahezu überall als Zugspannungen vor; Bereiche mit Druckspannungen bleiben eng begrenzt und weisen auch betragsmäßig nur geringe Werte auf. Die maximale Hauptspannung tritt über den ganzen Umfang bei allen Beispielen als Zugspannung auf. Bemerkenswert ist, daß bei einem in Richtung der längeren Halbachse belasteten Einschluß wesentlich höhere Spannungskonzentrationen auftreten als bei einem Einschluß, der in Richtung der kürzeren Halbachse belastet wird.

Wie ein Vergleich der Abbildungen B 2.1 und B 2.6 zeigt, können sich die Einflüsse aus der Kornform und der Belastungsrichtung ungünstig oder günstig überlagern. So zeigt z.B. Abbildung B 2.1 für ein Achsenverhältnis von  $a/b = 4$  und bei Belastung in x-Richtung eine hohe Spannungskonzentration am Punkt 0 ( $\sim 3,3 p$ ), bei Belastung in y-Richtung am gleichen Punkt aber nur noch eine geringere Spannungskonzentration, während im letzteren Fall am Punkt 9 die Spannung für ein Achsenverhältnis von  $a/b = 2$  größer wird als für ein Achsenverhältnis von  $a/b = 4$ .

Wie die bisherigen Ausführungen gezeigt haben, läßt sich nicht "eine" charakteristische Spannungsverteilung um einen elliptischen Einschluß angeben, sondern unendlich viele.

### 2.4.6 Spannungsverläufe um einen annähernd quadratischen Einschluß

Ein exaktes Quadrat (oder Rechteck) mit scharfen Kanten läßt sich nicht konform auf den Einheitskreis abbilden. Führt man jedoch durch einen Radius ausgerundete Ecken ein, so ist eine konforme Abbildung möglich. Die konforme Abbildung solcher quadratähnlicher Formen läßt sich nach [93] ausdrücken durch :

$$z = \omega(\xi) = R \left( \frac{1}{\xi} + m \xi^3 \right) \quad (2.46)$$

mit

$$\xi = \rho \cdot e^{i\varphi} \quad (2.47)$$

Mit  $m = \frac{1}{6}$ ,  $\rho = 1$  und  $R = 1$  ergibt sich dadurch die in Abbildung 2.9 dargestellte Form, die für die weitere Berechnung zugrunde gelegt wird.

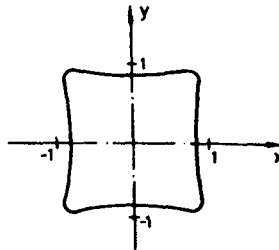


Abb. 2.9 : Der Berechnung zugrunde liegende quadratähnliche Form

Im Hinblick auf die real vorhandenen quadratähnlichen Kornformen, die ja nur sehr selten scharf ausgeprägte Ecken haben, gewährleistet die gewählte Kornform eine hinreichende Approximation der wirklich vorhandenen Kornform.

Wie bei der Untersuchung elliptischer Einschlüsse wird vorausgesetzt, daß die Belastung  $p$  unter einem beliebigen Winkel zur  $x$ -Achse angreifen kann (Abb. 2.10)



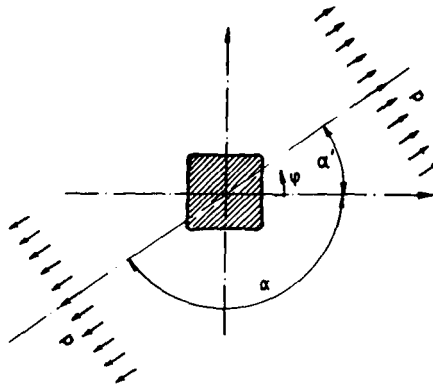


Abb. 2.10 : Quadratähnlicher Einschluss unter einachsiger, in beliebiger Richtung angreifender Belastung.

Bei Voraussetzung einer behinderten Drehung des Einschlusses, die ja durch den Verbund von Matrix und Einschluss im Beton gewährleistet ist, gibt Sawin in [93] die Funktionen  $\varphi(\xi)$  und  $\psi(\xi)$  an durch :

$$\varphi(\xi) = \frac{p R}{4} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{p R}{2} \left[ \frac{m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 + m^2} \cdot \xi + \frac{m}{2 \chi} \xi^3 \right] \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi) = & - \frac{p R e^{-2i\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{p R}{4} \left( \chi + \frac{3 m^2}{\chi} \right) \xi \\ & + \frac{p R}{4} \cdot \frac{1 + 3 m^2}{3 m \xi^4 - 1} \cdot \xi - \frac{(1 + 3 m^2) \xi^3}{3 m \xi^4 - 1} \cdot \varphi_0'(\xi) \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\varphi_0'(\xi) = \frac{p R}{2} \cdot \frac{m e^{-2i\alpha} - e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} \cdot \xi + \frac{p R m}{4 \chi} \quad (2.50)$$

Entsprechend der Vorgehensweise beim elliptischen Einschluß und der in Abschnitt 2.4.5 gegebenen Begründung für die Art der Herleitung, ergeben sich aus den Gleichungen (2.48) bis (2.50) die endgültigen Formeln zur Berechnung der Spannungen mit:

$$\sigma_{\varphi} = p \left( 2 \frac{ar_3}{ar_4} + \frac{ar_{22}}{ar_{23}} \right) \quad (2.51)$$

$$\sigma_r = p \left( 2 \frac{ar_3}{ar_4} - \frac{ar_{22}}{ar_{23}} \right) \quad (2.52)$$

$$\tau_{r\varphi} = p \frac{ai_{22}}{ar_{23}} \quad (2.53)$$

Mit :

$ar_n$  = Realteil des komplexen Ausdruckes  $n$

$ar_i$  = Imaginärteil des komplexen Ausdruckes  $n$

$p$  = Einachsiale Belastung im Unendlichen

Die ausführliche Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen findet sich im Anhang A 3.2 .

Die Abbildungen im Anhang B 3 zeigen den Verlauf der Spannungen auf dem Rand des Einschlusses bei Belastung unter  $\alpha = 0^\circ$  und  $\alpha = 45^\circ$ . Im Falle der Belastung unter  $\alpha = 0^\circ$  ( also normal zur Seite des Quadrates) liegt eine doppelte Symmetrie vor, so daß die Darstellung sich auf die Spannungsverläufe im ersten Quadranten beschränkt.

Wie schon beim elliptischen Einschluß zeigt sich auch bei quadratähnlichen Kornformen eine starke Abhängigkeit der Spannungsverläufe von der Belastungsrichtung. Wiederum treten in radialer Richtung - mit Ausnahme einiger sehr gering ausgedehnter Druckbereiche bei großer Querdehnzahl ( $\nu=0,3$ ) - nur Zugspannungen auf. Die Beträge der Spannungen variieren entlang

der Kornbegrenzungslinie sehr stark. Bei allen Belastungsrichtungen treten die größten Spannungskonzentrationen immer an den Eckbereichen auf, wobei  $\max \sigma_r$  bei Belastung unter  $45^\circ$  mit dem Betrag von 2,64 p wesentlich größer ist als bei Belastung unter  $\alpha' = 0^\circ$  mit einem Betrag von 1,82 p.

Die Tangentialspannungen verlaufen affin zu den Radialspannungen auf niedrigerem Niveau, entsprechend der jeweiligen Querdehnzahl der Matrix, von der sie ja direkt abhängen.

Mehr noch als bei den Radial- und Tangentialspannungen treten für die Schubspannungen an den Ecken der Einschlüsse Spannungskonzentrationen auf, insbesondere bei Belastung in Richtung der Koordinatenachsen ( $\alpha = 0^\circ$  bzw.  $\alpha' = 90^\circ$ ).

Die Konzentration der Schubspannungen in den Eckbereichen beeinflusst direkt die Beträge und die Verläufe der dort wirkenden Hauptspannungen. Wie schon bei den anderen Einschlußformen tritt die maximale Hauptspannung nahezu über den gesamten Einschlußumfang als Zugspannung auf, während die minimale Hauptspannung über verhältnismäßig große Umfangsbereiche als Druckspannung vorliegt.

Eine zusätzlich durchgeführte Variation der Querdehnzahl ( $\nu = 0,2$  bzw.  $\nu = 0,3$ ) zeigt bei allen Spannungen keine signifikante Änderung der Verläufe und Beträge; die Kurven verlaufen im Gegenteil sehr eng beieinander.

2.4.7 Spannungsverläufe um einen annähernd dreieckigen Einschlüß

Ebenso wie ein exaktes Quadrat, läßt sich ein exaktes Dreieck mit spitzen Ecken nicht auf den Einheitskreis abbilden; dazu bedarf es der Einführung ausgerundeter Ecken. Die Abbildungsfunktion für ein gleichseitiges Dreieck (nur ein solches Dreieck wird näher untersucht) mit ausgerundeten Ecken lautet in erster Näherung:

$$z = \omega(\xi) = R \left( -\frac{1}{\xi} + m \xi^2 \right) \quad (2.54)$$

$$\xi = \rho \cdot e^{i\varphi}$$

Mit  $m = 0,33$ ,  $\rho = 1$  und  $R = 1$  ergibt sich mit der Gleichung (2.54) die in Abb. 2.11 dargestellte Einschlüßform.

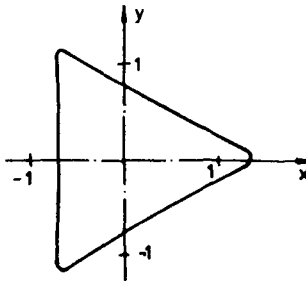


Abb. 2.11 : Der Berechnung zugrundeliegender dreieckähnlicher Einschlüß

Die Belastung  $p$  im Unendlichen wirkt wiederum unter einem beliebigen Winkel  $\alpha'$  zur x-Achse (Abb. 2.12).

Unter Voraussetzung der behinderten Drehung des Einschlusses lauten die Funktionen  $\varphi(\xi)$  und  $\psi(\xi)$  für einen starren Einschlüß [93] :

$$\varphi(\xi) = \frac{p R}{4} \frac{1}{\xi} - \frac{p R e^{2i\alpha}}{2 \xi} + \frac{p R m}{4 \xi} \xi^2 \quad (2.55)$$

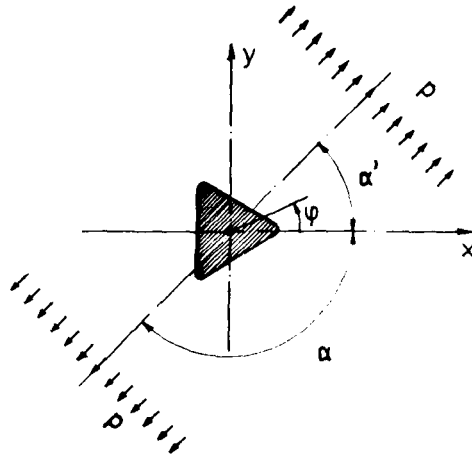


Abb. 2.12 : Dreieckähnlicher Einschluß unter einachsiger, in beliebiger Richtung angreifender Belastung

$$\psi(\xi) = -\frac{\rho R e^{-2i\alpha}}{2} \frac{1}{\xi} + \frac{R \rho}{4} \left[ \chi \xi + \frac{1 + 2 m^2}{2 m \xi^3 - 1} \right] - \frac{\xi^3 + m}{2 m \xi^3 - 1} \varphi_0'(\xi) \quad (2.56)$$

$$\varphi_0 = -\frac{\rho R e^{2i\alpha}}{2 \chi} + \frac{\rho R m}{4 \chi} \xi^2 \quad (2.57)$$

Entsprechend dem Vorgehen beim elliptischen Einschluß ergeben sich die Formeln zur Spannungsberechnung zu :

$$\bar{\sigma}_\varphi = \rho \left( 2 \frac{ar_3}{ar_4} + \frac{ar_{24}}{ar_4} \right) \quad (2.58)$$

$$\bar{\sigma}_r = \rho \left( 2 \frac{ar_3}{ar_4} - \frac{ar_{24}}{ar_4} \right) \quad (2.59)$$

$$\bar{\tau}_{r\varphi} = \rho \frac{ai_{24}}{ar_4} \quad (2.60)$$

Die ausführliche Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen findet sich im Anhang A 3.3 .

Die Abbildungen im Anhang B 4 zeigen den Verlauf der Spannungen auf dem Rand des Einschlusses bei Belastung unter  $\alpha' = 0^\circ$ ,  $\alpha' = 45^\circ$  und  $\alpha' = 90^\circ$ . Obwohl nur die Richtung von  $\alpha' = 0^\circ$  (bzw.  $\alpha' = n \cdot 60^\circ$ ) maximale Spannungen ergibt, wurden zum Vergleich mit den anderen Kornformen auch die Richtungen  $\alpha' = 45^\circ$  und  $\alpha' = 90^\circ$  untersucht.

Wie bei allen anderen vom Kreis abweichenden Einschlußformen zeigt sich auch bei dreieckigem Einschluß eine starke Abhängigkeit der Spannungsverläufe von der Belastungsrichtung. Bedingt durch die unsymmetrische Form des Einschlusses, zeigen alle Spannungsverläufe entlang des Einschlußumfangs einen stark unregelmäßigen Verlauf. Die größten Spannungspitzen treten an den Einschlußecken auf, wenn diese Ecken etwa in Belastungsrichtung orientiert sind.

Die Radialspannung tritt - mit Ausnahme einiger Bereiche mit sehr geringer Ausdehnung - immer als Zugspannung auf, die betragsmäßig entlang des Einschlußrandes stark variiert. Gleiches gilt für die Tangentialspannung, die affin zur Radialspannung verläuft, aber geringere, von der Querdehnzahl abhängige, Beträge erreicht.

Die Schubspannungen können nicht nur an den Ecken Spannungsspitzen aufweisen, sondern bei bestimmten Belastungsrichtungen auch im Bereich der Dreiecksanten.

Entlang des gesamten Umfangs treten die maximalen Hauptspannungen als Zugspannungen auf. Starke Spannungskonzentrationen zeigen sich bei allen Belastungsrichtungen jeweils an den Ecken. Die minimale Hauptspannung bleibt betragsmäßig gering und sie tritt entlang des Umfangs etwa zu gleichen Teilen als Zug- bzw. Druckspannung auf.

### 3. Auswirkungen der Spannungsverteilungen auf die Ribentstehung

#### 3.1 Allgemeines

Die Betrachtung der Spannungsverläufe um verschieden geformte Matriceinschlüsse zeigt, daß unter äußerer Zugbelastung bei allen Einschlußformen in radialer Richtung nahezu über den gesamten Umfang Zugspannungen entstehen. Errechnet man aus Radial-, Tangential- und Schubspannungen die Hauptspannungen, so zeigt sich, daß die maximale Hauptspannung überall und die minimale Hauptspannung etwa über die Hälfte des Umfanges als Zugspannung auftritt. Es entstehen somit ausgedehnte Bereiche mit einem zweiachsigen Zugspannungszustand (bei Extrapolation auf den räumlichen Fall analog dreiachsige Zugspannungszustände).

Die Bestimmung rißgefährdeter Bereiche erfordert nun nicht nur die Kenntnis der Spannungsverteilungen um den Einschluß, sondern eigentlich auch die Kenntnis über die dort aufnehmbaren Spannungen, da an sich die örtlich wirkenden Spannungen den örtlich aufnehmbaren Spannungen (Festigkeiten) gegenüberzustellen sind. In diesem Abschnitt sollen dabei aber noch nicht die Beträge der wirklich vorhandenen Festigkeiten in der Haftfläche interessieren (darauf wird in Abschnitt 4 eingegangen), sondern einzig und allein die Feststellung, daß sowohl Normal- als auch Schubspannungen bestimmter Größe aufgenommen werden können. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß sich die Festigkeiten entlang der Umfangslinie betragsmäßig nicht ändern. Die Nichtberücksichtigung einer Schwankungsbreite der vorhandenen Festigkeiten dürfte für die hier vorgenommene vergleichende Betrachtung verschiedener Einschlußformen unerheblich, wegen der besseren Vergleichbarkeit und Übersichtlichkeit sogar sinnvoller sein. Darüber hinaus ergäbe die Berücksichtigung entlang des Umfangs variierender Haftfestigkeiten nur dann einen Sinn, wenn die zugehörigen Mittelwerte und Schwankungsbreiten - zumindest annähernd - bekannt wären; das ist aber nicht der Fall.

### 3.2 Bruchbedingungen für die Haftfläche

Für das Zweiphasenmaterial Beton ist die Gültigkeit der Mohrschen Bruchhypothese bei mehrachsialer Druckbeanspruchung vielfach experimentell nachgewiesen worden (z.B. [3] und [25]). Eine zusammenfassende Sichtung solcher Versuche findet sich bei Eibl und Iványi [20]. Ebenso gibt es Bestätigungen der Gültigkeit dieser Bruchhypothese für Beton durch die Ergebnisse von Triaxialversuchen, bei denen eine der drei Hauptspannungen eine Zug- die anderen Hauptspannungen jedoch Druckspannungen waren [107].

Auch wenn demnach die Mohrsche Bruchhypothese für Beton gilt, läßt das noch nicht den Schluß zu, daß diese Bruchhypothese auch auf die Kontaktzone zwischen Zuschlag und Matrix anwendbar ist. Zum Nachweis der Gültigkeit einer Bruchhypothese für die Kontaktzone bedarf es gesonderter Versuche, die alleine das mechanische Verhalten der Kontaktfläche berücksichtigen, nicht das Gesamtverhalten eines Betonprobekörpers.

Versuche über das mechanische Verhalten der Haftfläche unter zwei- oder dreiachsiger Zugbeanspruchung sind bisher nicht bekannt geworden. Hingegen wiesen Taylor und Broms [106] nach, daß bei zweiachsiger Druckbeanspruchung ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen Normalspannung und Schubspannung besteht (Abb. 3.1).

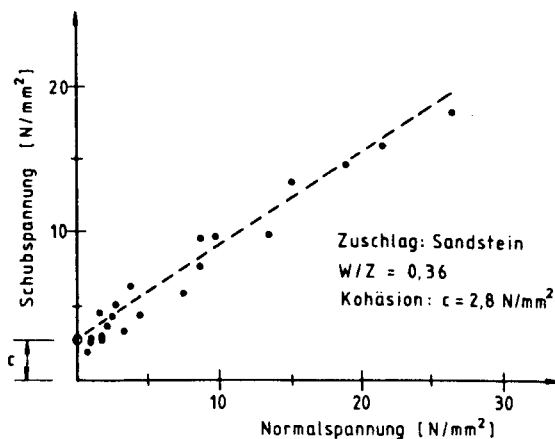


Abb. 3.1: Versuchsergebnisse für den Zusammenhang zwischen Normal- und Schubspannung in der Kontaktzone (nach Taylor und Broms [106])



In diesem Fall, also bei Druck/Druck-Bbeanspruchung der Kontaktzone, kann demnach mit guter Genauigkeit die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung (Gleichung 3.1 und Abb. 3.2) angewendet werden.

$$|\tau| = c + \tan \varphi \cdot \sigma \quad (3.1)$$

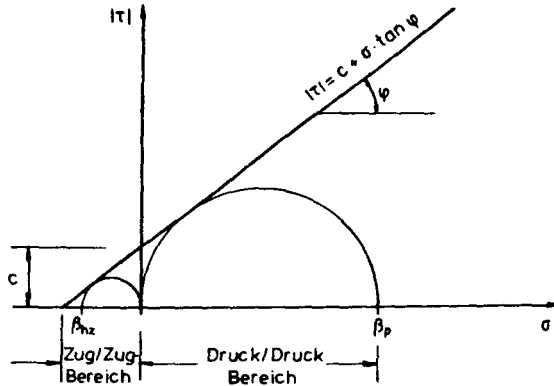


Abb. 3.2: Mohr-Coulombsche Bruchbedingung

Es stellt sich jedoch die Frage, ob die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung auch bei zweiachsiger Zugbeanspruchung das mechanische Verhalten der Kontaktzone richtig beschreibt. Wegen des Fehlens von Versuchsergebnissen kann dieser Frage zunächst nur theoretisch nachgegangen werden. Dazu werden im Zug/Zug-Bereich verschiedene zum Bruch führende Mohrschen Spannungskreise betrachtet (Abb. 3.3).

Durch den Spannungskreis ① wird die einachsige Zugfestigkeit der Haftfläche bestimmt. Würde die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung im gesamten Zug/Zug-Bereich gelten, so wären auch die eingezeichneten Spannungskreise ② und ③ zulässig. Das hieße aber, daß die aufnehmbare maximale Hauptzugspannung mit zunehmender minimaler Hauptzugspannung ansteigen würde. Damit wäre die zweiachsige Zugfestigkeit  $\beta_{2\text{ hz}}$  der Haftfläche immer wesentlich größer als die einachsige Zugfestigkeit  $\beta_{\text{ hz}}$ .

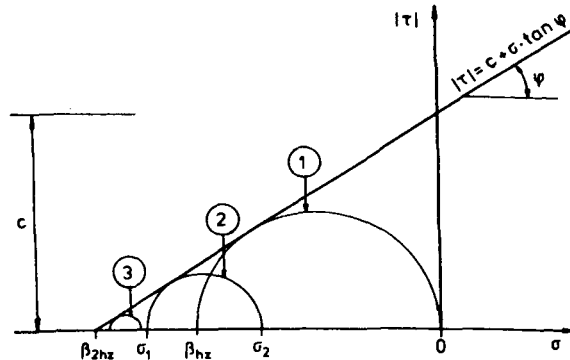


Abb. 3.3: Lage verschiedener Spannungskreise im Zug/Zug-Bereich beim Mohr-Coulombschen Bruchkriterium

Wie Müller [73] erläutert, hat schon Mohr [71], [72] erkannt, daß die Hüllkurve über die zum Bruch führenden Spannungskreise im Zug/Zug-Bereich bei geringen Schubspannungen konvex verlaufen muß. Dies wird durch die Forderung  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$  erreicht, die nach Torre [108] im Scheitel der Hüllkurve immer einen zum Bruch führenden Spannungskreis liefert. Somit ist die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung bei geringen Schubspannungen im Zug/Zug-Bereich nicht mehr anwendbar, sondern sie müßte dort in einen Spannungskreis übergehen. Lage und Größe dieses zum Bruch führenden Spannungskreises sind vorerst nicht bekannt, sie lassen sich nur durch Versuche bestimmen

Da, wie schon mehrfach erwähnt, keine Versuchsergebnisse über das mechanische Verhalten der Kontaktzone im Zug/Zug-Bereich bekannt sind, muß Ausschau nach Bereichen in Materialien gehalten werden,

die sich in mechanischer Hinsicht ähnlich wie die Kontaktzone verhalten. Ein etwa gleiches Problem liegt beim Bruchverhalten von Gebirge <sup>1)</sup> unter Zugbeanspruchung vor. Auch beim Gebirge können Schicht- und Klufflächen dann Zugkräfte übertragen, wenn in ihnen Kohäsion oder Adhäsion vorhanden ist.

Nach Müller [73] wird in der Felsmechanik für  $|\tau| > 0$  die Gültigkeit der Mohrschen Bruchhypothese, bei der ja ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Schub- und Normalspannung besteht, angenommen. Ist aber  $\tau = 0$ , so gilt die Normalspannungshypothese als Bruchkriterium. Torre [108] hat gezeigt, daß die als Bruchbedingung geltende Hüllkurve über die zum Bruch führenden Spannungskreise als Leon-Parabel (Abb. 3.4) angenommen werden kann. Leon [61] nähert die nur durch eine Reihe von Versuchen genau zu ermittelnde Hüllkurve durch eine Parabel an, deren Funktion aus der einachsigen Zugfestigkeit und der einachsigen Druckfestigkeit (bzw. aus dem Verhältnis zwischen diesen beiden Festigkeiten) bestimmt wird.

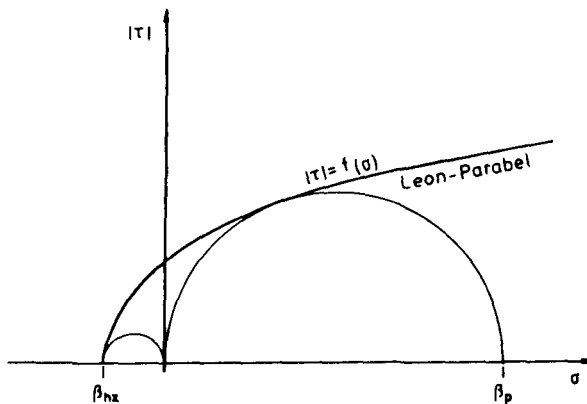


Abb. 3.4: Mohrsche Bruchhypothese bei Approximation der Hüllkurve durch eine Leon-Parabel

---

1) Unter Gebirge wird - wie in der Felsmechanik vorausgesetzt - ein System aus Kluffkörper und Flächengefüge verstanden. Der Kluffkörper besteht aus Gestein, das Flächengefüge aus Schichtflächen und Klufflächen.

Wegen der im Vergleich mit dem Gebirge - ähnlichen Verhältnisse wird für die weitere Untersuchung angenommen, daß in der Kontaktzone zwischen Zuschlag und Zementsteinmatrix die Mohrsche Bruchhypothese - angenähert durch eine Leon-Parabel - gültig ist.

Betrachtet man nur den Fall zweiachsiger Zugbeanspruchung (hier gilt  $|\beta_{hz}| \geq |\sigma_1| \geq 0$ ,  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ ), so erkennt man (Abb. 3.5), daß für diesen Fall die Spannungskreise von Bruchzuständen im Punkt  $\beta_{hz}$  zusammenlaufen. Bei zweiachsigem Zugspannungszustand kann man demnach als Bruchkriterium auch die maximal aufnehmbare Hauptspannung  $\sigma_1$  ansehen, unabhängig davon, in welcher Richtung sie am jeweils betrachteten Punkt verläuft und unabhängig davon, wie groß die gleichzeitig auftretende minimale Hauptspannung  $\sigma_2$  ist. D.h., daß für den Fall zweiachsiger Zugbeanspruchung die Normalspannungshypothese von Tresca (siehe z.B. [20]) gilt.

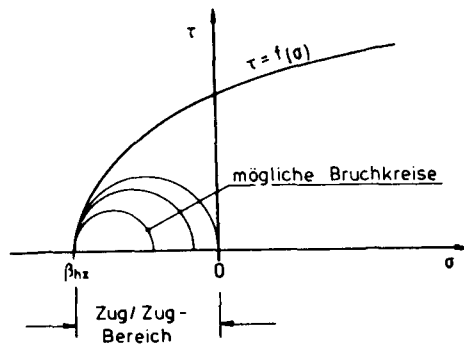


Abb. 3.5: Zum Bruch führende Spannungskreise bei zweiachsiger Zugbeanspruchung

Beliebige Spannungszustände, für die  $|\sigma_1| < |\beta_{hz}|$  und  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$  gilt, führen somit nicht zum Bruch.

Aus der Reduktion des Bruchkriteriums auf die Hauptzugspannung als alleinigem Parameter ergibt sich die Möglichkeit eines übersichtlichen Vergleichs der sich jetzt allein in den Hauptzugspannungen ausdrückenden Einflüsse unterschiedlicher Einschlußformen.

### 3.3 Charakteristische Werte einzelner Einschlußformen

Wie in den Abschnitten 2.4.3 und 2.4.5 bis 2.4.7 für die verschiedenen Einschlußformen (Ellipse, Quadrat und Dreieck) beschrieben, hängen die Spannungsverläufe und die Beträge aller Spannungen - also auch die der Hauptzugspannungen - sehr stark von der Belastungsrichtung ab. D.h., daß bei bestimmten ungünstigen Belastungsrichtungen schon unter einer geringen Belastungsstufe punktuell die dort vorhandene Festigkeit erreicht oder überschritten wird, also Trennungen des Einschlusses von der Matrix auftreten, während bei anderen Belastungsrichtungen dies erst bei höherer Belastung eintritt.

Geht man von einer regellosen Anordnung der Zuschläge im Beton aus,<sup>1)</sup> so ist jede Achsenlage des Einschlusses gleich wahrscheinlich und damit auch jeder Winkel  $\alpha$  (oder  $\alpha'$ ) zwischen Einschlußachse und Belastungsrichtung. Für diesen Fall erhält die Beziehung  $\max \sigma_1 = f_1(\alpha)$  eine besondere Bedeutung, da der Verlauf dieser Funktion charakteristisch für die jeweils betrachtete Einschlußform ist und dadurch die Unterschiede zwischen den Einschlußformen verdeutlicht werden.

Bei ellipsenförmigen Einschläüssen wurden zwei verschiedene Formen untersucht:  $a/b = 2$  und  $a/b = 16$ . Mit  $a/b = 16$  wird der Querschnitt eines sehr plattigen Zuschlags beschrieben, der mit hinreichender Genauigkeit wohl die eine Extremform vorkommender elliptischer Zuschläge darstellt; die andere Extremform ist der Kreis mit  $a/b = 1$ .

---

1) Der evtl. vorhandene Effekt der "Einregelung" der Zuschläge durch das Verdichten soll hier vernachlässigt werden.

Die im Beton vorkommenden Zuschläge mit ellipsenförmigem Querschnitt liegen mit großer Wahrscheinlichkeit zwischen den in Abb. 3.6 dargestellten Grenzkornformen.

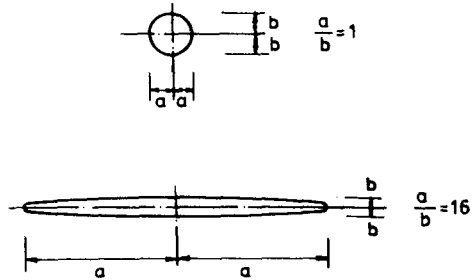


Abb. 3.6: Grenzkornformen von Zuschlägen mit elliptischem Querschnitt

In Abb. 3.7 sind die Funktionen  $\max \sigma_1 = f(\alpha)$  für die verschiedenen Einschlußformen zum besseren Vergleich gegenübergestellt.

Das Halbachsenverhältnis  $a/b = 2$  charakterisiert eine gedrungene Ellipse, wie sie häufig als Querschnitt von Zuschlägen vorkommt. Diese Form repräsentiert im Mittel wohl am ehesten ellipsenförmige Zuschläge.

Wegen des geringen Einflusses der Querdehnzahl beschränkt sich Abb. 3.7 auf die Darstellung der Kurvenverläufe für  $\nu = 0,2$  und wegen des periodischen Verlaufs der Kurven auf das Intervall  $0^\circ \leq \alpha' \leq 180^\circ$ . Die Abbildung zeigt deutlich, daß die maximalen Hauptzugspannungen ansteigen, je mehr die Einschlußform vom Kreis abweicht. So liegen sowohl die Kurven für den quadratischen als auch für den dreieckigen Einschluß im gesamten Intervall weit über dem (konstanten) Verlauf der Kurve für den kreisförmigen Einschluß.

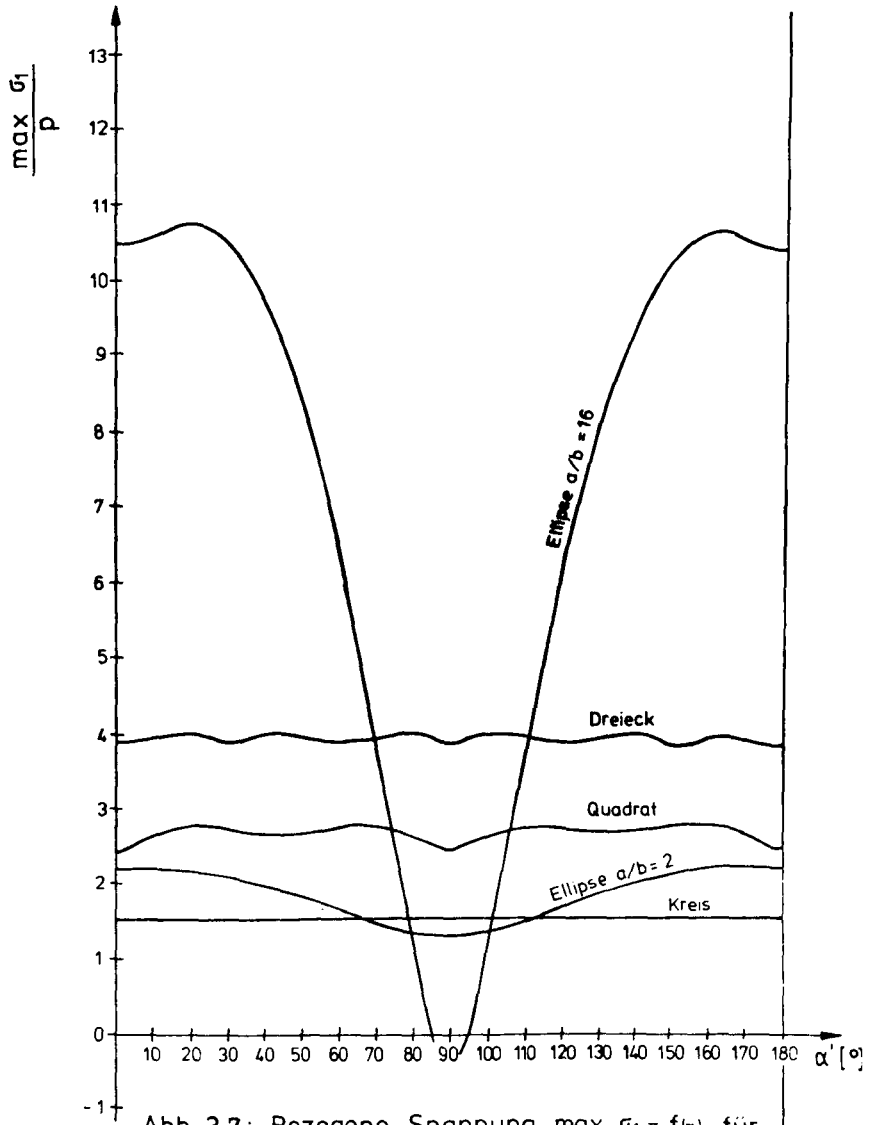


Abb. 3.7: Bezogene Spannung  $\max \sigma_1 = f(\alpha)$  für verschiedene Einschlußformen

Für ellipsenförmige Querschnitte gibt es zwar Belastungsrichtungen, bei denen geringere maximale Hauptspannungen als im Fall des Kreises auftreten, dieser Intervallbereich bleibt aber im Vergleich zu der Gesamtlänge des Intervalls gering. Im Mittel ergibt sich auch bei den Ellipsen ein Kurvenverlauf oberhalb der für den Kreis charakteristischen Kurve, wobei mit zunehmendem Halbachsenverhältnis der Abstand der Kurven von Ellipse und Kreis stark ansteigt.

Die Kurvenverläufe für Quadrat und Dreieck schwanken innerhalb des Intervalls nur geringfügig, während für Ellipsen die Schwankungen mit zunehmendem Halbachsenverhältnis stark ansteigen.

Aus den Verläufen der Funktionen  $\max \sigma_1 = f(\alpha)$  läßt sich zwar qualitativ schon einiges über die Abhängigkeit der zur ersten Rißentstehung erforderlichen Belastung von der Einschlußform ableiten, ein quantitativer Vergleich ist damit jedoch nur angenähert möglich. Zur genaueren quantitativen Bewertung ist zusätzlich die Angabe weiterer charakteristischer Werte notwendig (Tabelle 3.1). In den Spalten 2 und 3 sind das die Bereiche, in denen bei rein elastischem Materialverhalten die Hauptzugspannung  $\sigma_1$  größer als die im Unendlichen wirkende gleichmäßig verteilte Belastung  $p$  ist. Zusätzlich dazu sind in Spalte 2 die Orte mit maximaler Hauptzugspannung durch Punkte gekennzeichnet. Die willkürlich angenommene Grenze  $\sigma_1/p = 1$  hat für die weitere Betrachtung keine große Bedeutung; kennzeichnender wäre es, wenn man die Überschreibungsbereiche der wirklich vorhandenen Haftfestigkeiten angeben könnte. Da die Haftfestigkeiten jedoch stark schwanken (nach den Ausführungen in Abschnitt 4 liegen sie etwa im Bereich  $0,2 \beta_z \leq \beta_{hz} \leq 0,7 \beta_z$ ), schien ein willkürlich angenommener Mittelwert und die sich dafür ergebenden Überschreibungsbereiche nicht aussagekräftiger als die gewählte Abgrenzung durch  $\sigma_1/p = 1$ . Immerhin kann man nämlich bei der jetzt getroffenen Abgrenzung feststellen, daß die Bereiche des potentiellen Rißbeginns innerhalb der durch  $\sigma_1/p = 1$  angegebenen Bereiche liegen werden.

Mit abnehmender Haftfestigkeit  $\beta_{hz}$  verringern sich die Bereiche potentiellen Rißbeginns und konzentrieren sich in zunehmendem Maße um die Punkte mit den maximalen Hauptzugspannungen.



1	2	3	4	5	6	7	8
Zeilen Nr.	Einschlußform und Belastungsrichtung, Bereich mit $\sigma_1/p \geq 1$	Bereich $\sigma_1/p \geq 1$ [°]	$\bar{\sigma}_1$ im Bereich $\sigma_1/p \geq 1$	$\max \frac{\sigma_1}{P}$	Punkte mit $\max \sigma_1$	$\frac{\max \bar{\sigma}_1}{P}$	$\frac{p}{\max \bar{\sigma}_1}$
1		$\beta_1 = 52^\circ$ $\beta_2 = 52^\circ$ $\beta = 104^\circ$	1,40	1,53	A, A'	1,53	0,65
2a	$a/b = 2$ 	$\beta_1 = 49^\circ$ $\beta_2 = 49^\circ$ $\beta = 98^\circ$	1,65	2,14	A, A'	1,83	0,55
2b	$a/b = 2$ 	$\beta_1 = 35^\circ$ $\beta_2 = 67^\circ$ $\beta = 102^\circ$	1,86	2,16	A, A'		
2c	$a/b = 2$ 	$\beta_1 = 65^\circ$ $\beta_2 = 65^\circ$ $\beta = 130^\circ$	1,22	1,26	B <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> ' B <sub>2</sub> , B <sub>2</sub> '		
3a	$a/b = 16$ 	$\beta_1 = 38^\circ$ $\beta_2 = 38^\circ$ $\beta = 76^\circ$	3,35	10,48	A, A'	7,29	0,14
3b	$a/b = 16$ 	$\beta_1 = 25^\circ$ $\beta_2 = 53^\circ$ $\beta = 78^\circ$	4,46	10,76	A, A'		
3c	$a/b = 16$ 	$\beta_1 = 85^\circ$ $\beta_2 = 85^\circ$ $\beta = 170^\circ$	1,17	1,30	B <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> ' B <sub>2</sub> , B <sub>2</sub> '		
4a		$\beta_1 = 58^\circ$ $\beta_2 = 58^\circ$ $\beta = 116^\circ$	2,00	2,41	C <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> ' C <sub>2</sub> , C <sub>2</sub> '	2,66	0,38
4b		$\beta_1 = 39^\circ$ $\beta_2 = 39^\circ$ $\beta = 78^\circ$	2,03	2,64	A, A'		
5a		$\beta_1 = 39^\circ$ $\beta_2 = 39^\circ$ $\beta = 78^\circ$ $\gamma_1 = \gamma_2 = 67^\circ$ $\gamma = 134^\circ$	$\beta: 2,11$ $\gamma: 1,46$	3,93	A	3,90	0,26
5b		$\beta_1 = 26^\circ$ $\beta_2 = 54^\circ$ $\beta = 80^\circ$ $\gamma_1 = 76^\circ$ $\gamma_2 = 54^\circ$ $\gamma = 130^\circ$	$\beta: 2,00$ $\gamma: 1,55$				

Tabelle 3.1 : Charakteristische Werte für die verschiedenen Einschlußformen

In Spalte 4 ist zur Unterstützung der Aussagen der vorhergehenden Spalten der Betrag der gemittelten Hauptzugspannung des Bereiches  $\bar{\sigma}_1/p \geq 1$  angegeben. Dieser Wert sagt etwas über die "Völligkeit" des Verlaufes von  $\sigma_1$  in diesem Bereich aus.

Spalte 5 enthält den Betrag der maximal auftretenden Hauptzugspannung bezogen auf die äußere Belastung  $p$  und in Spalte 6 sind die Bezeichnungen der Punkte angegeben, an denen diese Maximalbeträge auftreten.

Alle Angaben der Spalten 2 bis 6 sind abhängig von den in Spalte 2 eingezeichneten Belastungsrichtungen, so daß sich durch diese Angaben noch keine Aufschlüsse über einschlußspezifische, von der Belastungsrichtung unabhängige Einschlußcharakteristiken ergeben. Die eigentlichen charakteristischen Werte der einzelnen Einschlußformen sind in den Spalten 7 und 8 angegeben. In Spalte 7 ist das der Mittelwert der bezogenen maximalen Hauptspannung, der zur Unterscheidung mit  $\max \bar{\sigma}_1/p$  bezeichnet wird. Dieser Mittelwert ergibt sich durch Integration der in Abb. 3.7 aufgetragenen Kurven bei anschließender Division durch die Intervalllänge ( $\alpha' = 180^\circ$ ). In Spalte 8 ist der zum Wert in Spalte 7 reziproke Wert angegeben. Berücksichtigt man die Bruchbedingung  $\max \sigma_1 = \beta_{hz}$ , so läßt sich anhand der Werte der Spalte 8 der Zusammenhang zwischen der äußeren Belastung  $p$  und der Haftzugfestigkeit  $\beta_{hz}$  beim Eintreten des Bruches graphisch auftragen (Abb. 3.8).

Es zeigt sich, daß z.B. bei einem Zuschlag mit sehr lang-elliptischem Querschnitt schon bei einer äußeren Belastung von  $p = 0,14 \beta_{hz}$  erste Ribbildungen zu erwarten sind, während das beim Dreieck erst bei  $p = 0,26 \beta_{hz}$ , beim Quadrat bei  $p = 0,38 \beta_{hz}$  und beim Kreis bei  $p = 0,65 \beta_{hz}$  der Fall ist.

Die bisherigen Ergebnisse lassen noch keinen Schluß auf die Bedeutung der Zuschlagform für die zu erwartenden Betonzugfestigkeiten zu. Sie zeigen aber schon, bei welchen Belastungen erste, eng begrenzte Ribbildungen in der Kontaktzone möglich sind. Wie Abb. 3.8 zeigt, kann das schon bei sehr niedrigen Laststufen eintreten, wenn der Zuschlag eine stark vom Kreis abweichende Form aufweist.

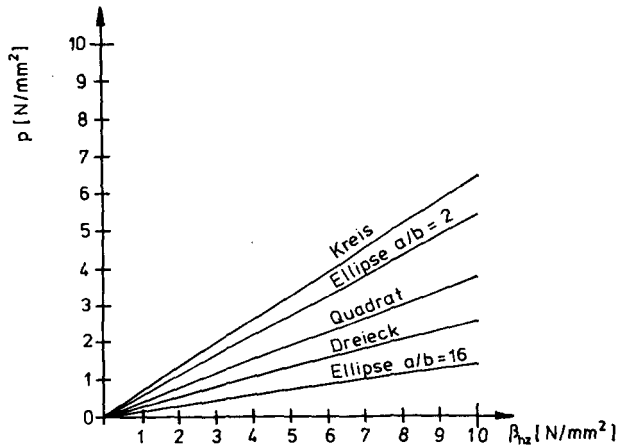


Abb. 3.8: Belastung  $p$  bei Erreichen der Bruchbedingung  $\max \sigma_1 = \beta_{hz}$  in der Kontaktfläche

Sind Risse entstanden, so sind die Voraussetzungen zur Anwendung bruchmechanischer Methoden erfüllt. Alle bisherigen Untersuchungen dienen daher nur zur Beschreibung des Ausgangszustandes unmittelbar vor der ersten Rißbildung. Eine solche Beschreibung ist aber als Grundlage für die weitere Arbeit notwendig, um potentielle Rißbildungsbereiche abgrenzen zu können, für die dann mittels der Bruchmechanik weitergehende Aussagen über die Länge und die Anzahl der in der Kontaktzone entstehenden Risse angebar sind.

### 3.4 Rißenstehungen in der Matrix

Aus Abschnitt 3.3 ist zu ersehen, daß in der Kontaktfläche schon bei sehr geringen Belastungen Rißbildungen auftreten. Selbst wenn es möglich wäre, die Haftzugfestigkeit  $\beta_{hz}$  in der Kontaktzone bis auf die Zugfestigkeit des Zementsteins zu erhöhen, würden wegen der Spannungskonzentrationen am Einschlußrand die ersten Rißbildungen immer noch in dieser Zone erfolgen. Initialrisse in der Matrix können erst bei wesentlich höheren Laststufen entstehen, da die Spannungen in der Matrix immer niedriger als im Kontaktbereich

und die Festigkeiten der Matrix immer höher als in der Kontaktfläche sind. Aus allen diesen Gründen ist es wenig wahrscheinlich, daß die Bildung von Initialrissen in der Matrix beginnt. Es ist allerdings wohl möglich, daß Fehlstellen in der Matrix als Initialrisse wirken. Da dies aber ein Problem der Rißerweiterung ist, wird es nicht an dieser Stelle sondern ausführlich im Abschnitt 4 behandelt.

### 3.5 Rißentstehungen in den Zuschlägen

Risse in den Zuschlägen entstehen nur bei Gesteinen mit extrem niedrigen Zugfestigkeiten oder bei Zuschlägen, die in sich schon starke Rißbildungen aufweisen. Bei üblichen Zuschlaggemischen ist der prozentuale Anteil solcher Gesteine meist gering.

Gesteinsart	Mittlere Zugfestigkeit [MN/ m <sup>2</sup> ]
Marmor	6
Dolomit	10
Gabbro	6
Basalt	9
Granit	6
Kalkstein, dicht	6
Sandstein	4
Diabas	10
Gneis	14

Tabelle 3.2: Einachsige Zugfestigkeit von Zuschlaggesteinen (aus [18])

Wie Tabelle 3.2 zeigt, weisen die meisten Zuschlaggesteine verhältnismäßig hohe Zugfestigkeiten auf, die nicht erwarten lassen, daß die Bildung erster Risse in den Zuschlägen beginnt. Bruchbilder der Normalbetons zeigen damit übereinstimmend nur selten

Durchtrennungen der Zuschläge. In der Regel sind die Körner aus der Matrix ausgebrochen, ohne selbst durchtrennt zu sein. Enthält das Zuschlaggemisch Anteile von Gesteinen mit niedriger Zugfestigkeit (z.B. Sandstein) kann man auch durchtrennte Zuschlagkörner feststellen. Der Anteil durchtrennter Zuschläge, bezogen auf die Gesamtmenge des Zuschlags, nimmt mit abnehmendem W/Z-Wert - dies ist gleichbedeutend mit einer Zunahme der Zugfestigkeit  $\beta_z$  des Zementsteins - zwar zu, er bleibt insgesamt jedoch auch dann gering.

Die experimentellen Ergebnisse und Erfahrungen stützen somit die theoretischen Überlegungen, daß erste Risse sich überwiegend in den Kontaktzonen zwischen Zuschlägen und Matrix bilden werden.

#### 4. Mechanismen der Rißerweiterung

##### 4.1 Allgemeines zur Bruchmechanik

Die Bruchmechanik befaßt sich auf der Grundlage experimenteller und theoretischer Methoden mit der Analyse eines von äußeren Kräften beanspruchten rißbehafteten Körpers. Sie ist aber nicht als Teilgebiet der theoretischen Mechanik zu verstehen, sondern sie erstreckt sich über die Materialtechnologie und die angewandte Mechanik [12],[90],[91]. Die Bruchmechanik wird heute in vielen verschiedenen Bereichen des Ingenieurwesens angewendet, so z.B. im Maschinenbau, Bauingenieurwesen und in der Ingenieurgeologie. Zur Lösung der dabei vorhandenen, sehr vielgestaltigen Probleme ist eine Reihe unterschiedlicher Verfahren entwickelt worden, so daß man nicht von einer einheitlichen, allgemeingültigen Theorie des Bruches sprechen kann. Wegen der Verschiedenartigkeit der zu betrachtenden Materialien ist das von vornherein auch nicht zu erwarten. So wurden häufig problemangepaßte Verfahren entwickelt, die bei anderen Randbedingungen (Materialien, Rißform, Belastungsart) nicht oder nur eingeschränkt anwendbar sind. Alle diese Methoden lassen sich aber gewissen übergeordneten Gruppen zuordnen. Beschränkt man sich dabei auf eine grobe Zweiteilung, so lassen sich unterscheiden :

- Methoden der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM). Bei diesen Methoden wird linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt.
- Methoden der Bruchmechanik unter Berücksichtigung elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens.

Methoden der linear-elastischen Bruchmechanik sind immer dann mit gutem Erfolg anwendbar, wenn das Ausmaß der plastisch verformten Zone vor der Rißspitze so klein bleibt, daß der daraus resultierende Einfluß auf die Energiebilanz des rißbehafteten Systems vernachlässigbar ist [65].

Ziel beider Gruppen - und damit der Bruchmechanik insgesamt - ist es, charakteristische Größen zur Rißbeurteilung zu finden. Die theoretische Ermittlung dieser Größen erfolgt mit Methoden der Rißmechanik auf der Grundlage verschiedenster Rißmodelle. Um Aussagen über die Bruchsicherheit zu erhalten, werden die durch Experimente gewonnenen kritischen Werte der charakteristischen Größen den berechneten Größen gegenübergestellt.

## 4.2 Linear-elastische Bruchmechanik

### 4.2.1 Allgemeines

Bei allen in dieser Arbeit verwendeten bruchmechanischen Methoden handelt es sich um Methoden der linear-elastischen Bruchmechanik, auch wenn teilweise gewisse Überlegungen zur Auswirkung der Plastifizierungen vor der Rißspitze mit einfließen. Eine Begründung für die Beschränkung auf die linear-elastische Bruchmechanik wird in Abschnitt 4.3 gegeben. Es erscheint aber sinnvoll, vorab die Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik in einem gesonderten Abschnitt zu behandeln, auch wenn darüber eine umfangreiche Literatur zur Verfügung steht.

### 4.2.2 Energiebetrachtungen

Als Begründer der mathematischen Rißtheorie gilt Griffith, der 1921 in [30], aufbauend auf den von Inglis 1913 in [46] angegebenen Formeln zur Spannungsverteilung an einem elliptischen Riß, ein Ausbreitungskriterium für Risse formulierte. Die grundlegenden Gedanken von Griffith haben bei der LEBM auch heute noch ihre Gültigkeit, wenngleich später wesentliche Erweiterungen hinzugekommen sind, insbesondere das Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren.

Ausgangspunkt der Griffith'schen Betrachtungen ist eine unendlich ausgedehnte Scheibe unter konstanter Belastung im Unend-

lichen, wobei die Scheibe mit einem Innenriß der Länge  $2a$  behaftet ist (Abb. 4.1).

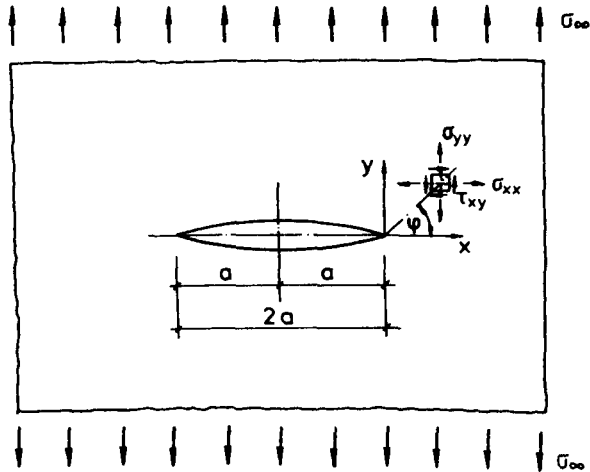


Abb. 4.1 : Unendliche Scheibe mit Innenriß nach Griffith [30]

Die Grundgedanken der Griffith'schen Überlegungen lassen sich durch Gegenüberstellung einer rißbehafteten Probe und einer rißfreien Probe verdeutlichen (Abb. 4.2).

Man kann sich diese Probekörper (wenn auch mit nicht zutreffenden Randbedingungen) als Auschnitte einer unendlichen Scheibe vorstellen, wobei im unbelasteten Zustand die Länge der Auschnitte mit  $l_0$  und die Breite mit  $b_0$  bezeichnet wird; die Dicke der Scheibe soll zu "1" normiert sein. Die untere Kante der Probekörper wird jeweils als Bezugslinie gewählt, was einer gedachten starren Fixierung an dieser Kante entspricht.

Wird die rißfreie Probe belastet, so besteht bei linear-elastischem Werkstoffverhalten der Zusammenhang :

$$\Delta l = c_0 \cdot \sigma_\infty \cdot b_0 \quad (4.1)$$



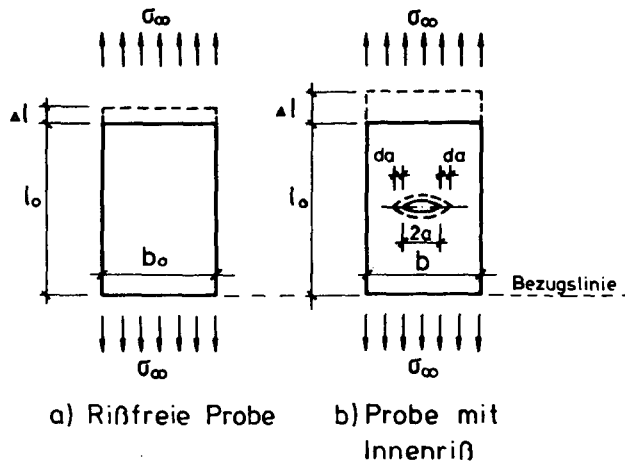


Abb. 4.2 : Dehnungsverhalten von rißfreiem Probekörper (a) und rißbehaftetem Probekörper (b)

Dabei ist  $c_0$  die (konstante) Flexibilität oder Nachgiebigkeit (im angelsächsischen Sprachbereich "compliance") des Systems.

$$c_0 = \frac{l_0}{E \cdot A_0} \quad (4.2)$$

$$A_0 = b_0 \cdot l \quad (4.3)$$

Für die rißbehaftete Probe hingegen gilt :

$$\Delta l = c \cdot \sigma_\infty \cdot b \quad (4.4)$$

mit

$$c = f(l_0, A_0, E, 2a) \quad (4.5)$$

Die Flexibilität  $c$  (oder  $c_0$ ) ist der Kehrwert der in der Festigkeitslehre und Statik sonst häufiger verwendeten Federsteifigkeit.

Solange keine Rißverlängerung eintritt läßt sich die elastische Verformungsenergie  $U_{el}$  des rißbehafteten Systems bestimmen durch:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta l} \sigma_{\infty} \cdot A_0 \cdot d(\Delta l) = \frac{1}{2} \sigma_{\infty} \cdot A_0 \cdot \Delta l \quad (4.6)$$

Durch Einsetzen von (4.4) in (4.6) unter Berücksichtigung von (4.3) erhält man :

$$U_{el} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta l)^2}{c} \quad (4.7)$$

Verlängert sich nun der Riß um den differentiellen Betrag  $d(2a)$ , so ändert sich die elastisch im Probekörper gespeicherte Energie. Hält man die Probenverlängerung  $\Delta l$  konstant (dies entspricht dem Anhalten eines verformungsgesteuerten Zugversuchs), so leistet die äußere Belastung  $\sigma_{\infty}$  keine zusätzliche äußere Arbeit. In diesem Fall ergibt sich die Änderung der elastischen Energie direkt aus der Differentiation der Gleichung (4.7) nach  $c$ :

$$\begin{aligned} \frac{d U_{el}}{dc} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dc} \left( \frac{(\Delta l)^2}{c} \right) \\ d U_{el} &= - \frac{1}{2} \frac{(\Delta l)^2}{c^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Mit Gleichung (4.4) ergibt sich aus (4.8) :

$$d U_{el} = - \frac{1}{2} \sigma_{\infty}^2 b_0^2 dc \quad (4.9)$$

Das negative Vorzeichen in (4.9) zeigt, daß die elastische Energie mit der Rißverlängerung abnimmt. Da die innere Arbeit betragsmäßig der äußeren Arbeit entspricht und die Probenverlängerung  $\Delta l$  konstant gehalten wurde, muß sich die äußere Belastung  $\sigma_\infty$  verringern (Abb 4.3 a).

Es kann gezeigt werden [65], daß sich bei der Betrachtung der Energiebilanz eines Zugversuches mit konstanter Belastung betragsmäßig die gleiche Energieänderung wie beim Zugversuch mit konstanter Probenverlängerung  $\Delta l$  einstellt. Demnach ist die Änderung der Energie des betrachteten Systems unabhängig von der Art der Versuchsdurchführung.

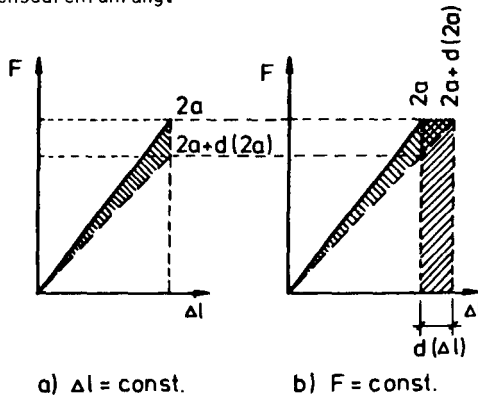


Abb. 4.3 : Energiebilanz bei a) konstanter Probenverlängerung  $\Delta l$  und b) konstanter Belastung

Bezieht man die im Falle der konstanten Probenlänge  $\Delta l$  freigesetzte elastische Verformungsenergie auf die Zunahme der Rißfläche (oder Rißlänge bei Normierung der Probenbreite), so erhält man die Energiefreisetzungsrates  $\mathcal{G}$  (strain energy release rate).

$$\mathcal{G} = - \frac{d U_{el}}{d (2a)} \quad (4.10)$$

Experimentell bestimmt man  $\mathcal{G}$  in der Regel mit dem verformungsge-  
steuerten Versuch (Compliancemesung). Näheres zur Compliance-  
messung kann z.B. der Arbeit von Hillemeier [37] entnommen werden.

Die Dimension von  $\mathcal{G}$  ist N/mm; es wird daraus ersichtlich, daß  $\mathcal{G}$   
auch als die an der Rißfront angreifende und den Riß aufweitende  
Kraft je Längeneinheit des Risses angesehen werden kann [48].

Der Probekörper setzt der Rißaufweitung einen Widerstand R entgegen.  
Unter Voraussetzung rein linear-elastischen Werkstoffverhaltens wird  
R nur von der spezifischen Oberflächenenergie  $\gamma_0$  bestimmt. Die ins-  
gesamt zur Schaffung der neuen Rißoberflächen benötigte Energie  $U_0$   
ergibt sich bei dem Innenriß nach Abb 4.1 zu :

$$U_0 = 2 \cdot 2a \cdot \gamma_0 = 4a \cdot \gamma_0 \quad (4.11)$$

Eine spontane Rißaufweitung tritt dann ein, wenn die freiwerdende  
Energie größer als die zur Bildung neuer Rißoberflächen benötigte  
Energie ist. Die zugehörige Instabilitätsbedingung läßt sich im  
Falle eines ideal spröden Bruches ausdrücken durch :

$$\frac{d U_{el}}{d (2a)} \geq \frac{d U_0}{d (2a)} \quad (4.12)$$

Der auf die Rißverlängerung bezogene Rißverlängerungswiderstand R  
ergibt sich aus Gleichung (4.11) durch Differentiation nach 2a :

$$R = \frac{d U_0}{d (2a)} = 2 \gamma_0 \quad (4.13)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.10) und (4.13) läßt sich  
dann die Instabilitätsbedingung (4.12) auch angeben durch die all-  
gemeine Beziehung :

$$\mathcal{G} \geq R \quad (4.14)$$

$\mathcal{G}$  kann dann nach Gleichung (4.10) berechnet werden, wenn es gelingt, einen geschlossenen Ausdruck für  $U_{el}$  der angerissenen Probe zu bestimmen. Da  $U_{el}$  von der Rißgeometrie abhängt, läßt sich  $\mathcal{G}$  für komplizierte Rißgeometrien häufig nur angenähert - manchmal auch gar nicht - berechnen, während für einfachere Rißformen eine Vielzahl geschlossener Lösungen vorliegt. Bei dem bisher betrachteten elliptischen Innenriß ergibt sich nach Griffith [30] die freiwerdende Energie  $U_{el}$  zu :

$$U_{el} = - \frac{\pi \sigma_{\infty}^2 a^2}{E^*} \quad (4.15)$$

$$E^* = \begin{cases} E & \text{bei ebenem Spannungszustand} \\ \frac{E}{(1-\nu^2)} & \text{bei ebenem Dehnungszustand} \end{cases}$$

Zur Berechnung der Energiefreisetzungsrates  $\mathcal{G}$  wird (4.10) auf Gleichung (4.15) angewendet :

$$\mathcal{G} = \frac{\pi \sigma_{\infty}^2 a}{E^*} \quad (4.16)$$

Der Zusammenhang zwischen  $U_{el}$ ,  $U_o$ , und  $\mathcal{G}$  läßt sich graphisch durch Abb. 4.4 (nach [68]) veranschaulichen.

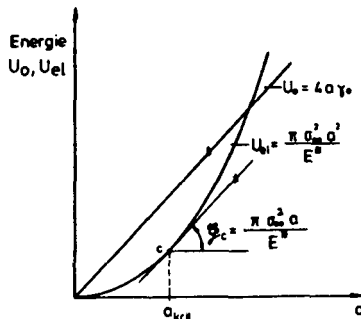


Abb. 4.4 : Energiebilanz für den Griffith-Riß

Nach Gleichung (4.11) handelt es sich bei  $U_0$  um eine lineare Funktion von  $a$  mit der Steigung  $2\gamma_0$ , während  $U_{el}$  nach einer quadratischen Parabel verläuft. Instabilität tritt ein, wenn die Ableitungen beider Funktionen den gleichen Wert haben (Gleichung (4.12)). In Abb 4.4 ist das am Punkt  $c$ , dem kritischen Punkt, der Fall. Die Rißlänge an diesem Punkt bezeichnet man mit "kritischer Rißlänge"  $a_{krit}$ , den zugehörigen Wert der Energiefreisetzungsrate  $\mathcal{G}_c$ . Häufig, und insbesondere für die weiteren Untersuchungen des Abschnitts 4, ist die im Augenblick des Eintretens der Instabilität vorhandene Spannung im Unendlichen ( $\sigma_{\infty c}$ ) wichtig. Sie ergibt sich bei  $\mathcal{G} = R$  durch Gleichsetzen von (4.13) und (4.16).

$$\frac{\pi \cdot \sigma_{\infty c}^2 \cdot a_{krit}}{E^*} = 2 \gamma_0$$
$$\sigma_{\infty c} = \sqrt{\frac{2 \gamma_0 \cdot E^*}{\pi a_{krit}}} \quad (4.17)$$

#### 4.2.3 Spannungsintensitätsfaktoren

Die quantitative Erfassung des Bruchverhaltens kann sowohl über die zuvor beschriebene Energiebilanz für die Rißausbreitung als auch durch die Analyse der Spannungsverteilung an der Rißspitze erfolgen; letztere Methode wird als "Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren" bezeichnet. Beide Verfahren sind hinsichtlich ihrer Qualität und Gültigkeit vollkommen gleichwertig; dennoch wird für viele Probleme der linear-elastischen Bruchmechanik das Spannungsintensitätskonzept bevorzugt, da es in der mathematischen Anwendung handlicher ist. Zwischen beiden Verfahren besteht eine enge Beziehung, die es erlaubt, Energiefreisetzungsraten  $\mathcal{G}$  und Spannungsintensitätsfaktoren  $K$  ineinander umzurechnen (Gleichung (4.18)).

$$\mathcal{G} = \frac{K^2}{E^n} \quad (4.18)$$

Dem Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren [48] , [47] liegt ein ideal scharfer Riß (mit dem Ausradius  $\rho = 0$  an der Rißspitze) zugrunde, für den das Spannungsfeld in der Umgebung der Rißspitze bestimmt wird. Allgemein lassen sich die Spannungen an der Rißspitze (Abb. 4.5) ausdrücken durch [8] , [37] :

$$\sigma_{ik} = \frac{K_n}{\sqrt{2 \pi r}} F_{ik}^n(\varphi) \quad (4.19)$$

- $i, k$  = Koordinatenrichtungen  $x, y, z$
- $n$  = Beanspruchungsmodus I, II oder III
- $F_{ik}^n$  = reine Winkelfunktionen
- $K_n$  = Konstanten, von  $r$  und  $\varphi$  unabhängig

Die Konstanten  $K_n$  werden als Spannungsintensitätsfaktoren bezeichnet; sie ergeben sich aus den Spannungsfunktionen  $F(r, \varphi)$  des betrachteten Rißproblems durch Bildung des Grenzüberganges  $\lim_{\rho \rightarrow 0}$ .

Wie Gleichung (4.19) ausweist, geht  $\sigma_{ik}$  für  $r \rightarrow 0$  gegen Unendlich. Am Punkt  $r = 0, \varphi = 0$  liegt damit eine Spannungssingularität vor, die in der Realität nicht auftritt, sondern nur mathematisch bedingt ist. Um diesem offensichtlichen Widerspruch Rechnung zu tragen, berücksichtigen neuere Verfahren der Bruchmechanik die wirklichen Verhältnisse genauer. Bei vergleichender Betrachtung, wie zum Beispiel in dieser Arbeit, kann die mathematische Singularität aber hingenommen werden, da die Ergebnisse dadurch nicht wesentlich verändert werden.

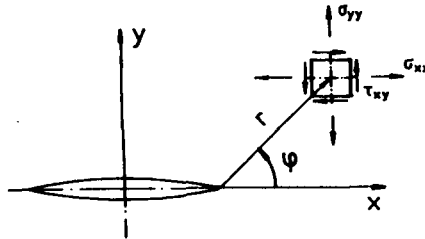


Abb. 4.5 : Definitionen der Spannungen an der Rißspitze

Der Spannungsintensitätsfaktor stellt ein Maß für die "Intensität" des Spannungsfeldes in der Umgebung der Rißspitze dar. Den kritischen Wert  $K_C$  erreicht der Spannungsintensitätsfaktor in dem Augenblick, in dem instabiles Rißwachstum eintritt.  $K_C$  wird daher auch "Kritischer Spannungsintensitätsfaktor" oder "Bruchzähigkeit" genannt (vergl. z.B. [32], [37], [40]).

In der Bruchmechanik unterscheidet man drei Grundfälle von Rißöffnungsarten, die Bruchmodi I, II und III (Abb. 4.6). Grundsätzlich läßt sich jede Beanspruchungsart aus diesen Grundfällen zusammensetzen. Im Rahmen dieser Arbeit werden jedoch nur die Modi I und II verwendet, da eine Beschränkung auf die Betrachtung ebener Scheibenprobleme vorausgesetzt wurde.

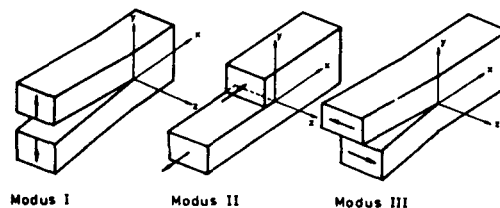


Abb. 4.6 : Bruchmodi I, II und III



Die Dimension des Spannungsintensitätsfaktors ist Kraft · Länge<sup>-1,5</sup>,  
z.B. Nm<sup>-1,5</sup>.

Spannungsintensitätsfaktoren sind nur von der Geometrie des betrachteten Körpers, der Rißgeometrie und Rißkonfiguration und (linear) von der äußeren Belastung abhängig. Für einfache Rißprobleme liegt eine Vielzahl von schon berechneten Spannungsintensitätsfaktoren in handbuchartiger Form vor [89], [105].

#### 4.3 Anwendung der Bruchmechanik auf Beton

##### 4.3.1 Linear-elastische Bruchmechanik

Einen zusammenfassenden Überblick über die historische Entwicklung der Anwendung der Bruchmechanik auf Beton und die dabei auftretenden Probleme gibt z.B. Mindess in [68]. Beginnend mit Kaplan [56], der als erster das Konzept der kritischen Energiefreisetzungsrates auf Beton anwandte, hat sich nachfolgend eine Vielzahl von Forschern mit dieser Thematik befaßt. In den Diskussionen zu den Untersuchungen von Kaplan haben vor allem Blakey und Beresford [7], Glücklich [28], und Irwin [49] viele der auch später genannten Argumente für oder gegen eine Anwendung der Bruchmechanik auf Beton vorgebracht. Blakey und Beresford [7] führten an, daß die von Kaplan mitgeteilten experimentellen und theoretischen Ergebnisse, die dieser als Beweis für die Anwendung der Bruchmechanik auf Beton sieht, besser durch Einflüsse wie Probengröße, Belastungsart und Energiedissipation in Form von Wärme erklärt werden könnten als durch die Bruchmechanik. Glücklich [28] wies auf die Notwendigkeit hin, den stabilen Rißfortschritt <sup>1)</sup> bei der Bestimmung von gültigen  $G_{IC}$  - Werten zu berücksichtigen. Irwin [49] machte darauf aufmerksam, daß exakte Werte der kritischen Energiefreisetzungsrates nur ermittelt werden können, wenn es gelänge, die während des Versuchsablaufs vorhandene effektive Rißlänge zu bestimmen.

Seit der Arbeit von Kaplan wurde eine Vielzahl weiterer experimenteller und theoretischer Untersuchungen über bruchmechanische Eigenschaften von Beton veröffentlicht. Es hätte wenig Sinn, auch nur die herausragendsten Arbeiten im einzelnen zu diskutieren. Das ist aber auch gar nicht notwendig, da Mindess in einer umfassenden Literatursichtung [69] zu über 400 dieser Arbeiten aus den Jahren vor 1981 jeweils eine Kurzfassung der wesentlichen Inhalte angibt.

---

1) Unter stabilem Rißfortschritt wird die bei Belastungssteigerung eintretende Verlängerung des vorgegebenen Risses bis zum Erreichen der kritischen Rißlänge verstanden; danach tritt die zum Bruch führende spontane Rißerweiterung ein.

Den frühen Arbeiten zur Anwendung der Bruchmechanik auf Beton liegen nur Methoden der linear-elastischen Bruchmechanik zugrunde. Schon durch diese Untersuchungen (z.B. [63],[75]) wurde deutlich, daß die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_{IC}$  und der kritische Spannungsintensitätsfaktor  $K_{IC}$ , die beide für makroskopisch homogene Werkstoffe als Werkstoffkonstanten anzusehen sind, bei Beton wesentlich stärker streuen und von einer Vielzahl von Parametern abhängen. Besonders hervorzuheben sind die Abhängigkeit von der Probengeometrie, dem Zuschlaganteil, dem Größtkorn und der Form der Zuschläge. Wegen dieser Abhängigkeiten haben  $G_{IC}$  und  $K_{IC}$  für Beton nur sehr eingeschränkt den Charakter einer Materialkonstanten.

Gegen die Annahme, daß  $G_{IC}$  und  $K_{IC}$  bei Beton Materialkonstanten sind, sprechen außerdem die Ergebnisse vieler Versuche [27],[57],[88], die eine deutliche Abhängigkeit dieser Kennwerte von der Rißlänge zeigen. Wenn  $G_{IC}$  und  $K_{IC}$  für Beton wirklich Materialkonstanten wären, müßten sie unabhängig von der Rißlänge sein. Eine Erklärung für die Rißlängenabhängigkeit der Bruchzähigkeit von Beton sieht Hilsdorf [40] zum Teil in zu geringen Abmessungen der Probekörper. Er führt aus, daß eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung der Bruchmechanik die Homogenität des betrachteten Werkstoffes sei, und daß diese nur dann vorhanden sei, wenn die Abmessungen des untersuchten Probekörpers und des vorgegebenen Risses ein Vielfaches der jeweiligen Korngröße oder der Fehlstellen im Werkstoff betragen. Die meisten der bisherigen Versuche sind an Probekörpern mit geringer Bauhöhe durchgeführt worden, die solche Voraussetzungen nicht erfüllen. Genauere Erkenntnisse über die Qualität von  $G_{IC}$  und  $K_{IC}$  als Materialkonstanten erfordern somit ausreichend große Probekörper [40],[75],[100]. Aus wirtschaftlichen Gründen sind solche großen Probekörper für Reihenuntersuchungen kaum noch zu vertreten; allenfalls noch für Grundsatzuntersuchungen, nicht jedoch für die Lösung praktischer Anwendungsfälle, wie z.B die Bestimmung der kritischen Rißlast unbewehrter oder nur konstruktiv bewehrter Bauteile (Fundamente, Wände, Stau Mauern). Insofern ergäbe die Bestimmung von  $G_{IC}$  und  $K_{IC}$  an ausreichend großen Probekörpern zwar einen wissenschaftlichen Gewinn, für die Anwendung auf praktische

Aufgabenstellungen wäre diese Vorgehensweise aber wegen der hohen Kosten und des großen zeitlichen Aufwandes wenig praktikabel.

Wie viele Versuche an Probekörpern aus Zementstein ergeben haben, kann die Bruchzähigkeit  $K_{IC}$  von Zementstein hinreichend gut als Materialkonstante angesehen werden [14],[36],[37]. Ähnliches gilt für die Kontaktzone zwischen Zuschlag und Zementsteinmatrix [37],[38].

Die Streuungen der  $K_{IC}$ -Werte von Zementmörtel sind nicht ganz so groß wie bei Beton, aber deutlich größer als bei Zementstein, so daß auch bei Mörtel die Bruchzähigkeit nicht als Materialkonstante angesehen werden kann. Offensichtlich besteht zwischen Mörtel und Beton im Hinblick auf die Anwendbarkeit von  $K_{IC}$  als Materialkonstanten nur ein gradueller Unterschied, der im wesentlichen wohl durch die unterschiedliche Korngröße hervorgerufen wird. Auch aus diesem Zusammenhang heraus wird deutlich, daß der Grad der Heterogenität des Werkstoffes die Anwendbarkeit der linear-elastischen Bruchmechanik wesentlich beeinflußt.

Als weiterer Indikator zur Überprüfung der Anwendbarkeit der linear-elastischen Bruchmechanik wird häufig die Kerbempfindlichkeit des Werkstoffes angesehen, da spröde Stoffe, für die die linear-elastische Bruchmechanik gilt, im allgemeinen eine hohe Kerbempfindlichkeit aufweisen. Nach Hilsdorf [40] ist ein Werkstoff dann kerbempfindlich, "wenn die auf den Nettoquerschnitt bezogene Bruchspannung einer gekerbten Probe unter Annahme linear-elastischen Verhaltens und ohne Berücksichtigung der Spannungsspitzen an der Kerbwurzel mit steigender Kerbempfindlichkeit abfällt". Ist die Nettospannung gleich oder größer als die Zugfestigkeit einer ungekerbten Probe, dann liegt ein kerbunempfindlicher Werkstoff vor. Auch die Kerbempfindlichkeit von Beton, Mörtel und Zementstein wurde vielfach untersucht. Die Versuchsergebnisse beim Zementstein weisen mit einer Ausnahme [57] - wie Mindess in [68] angibt - eine hohe Kerbempfindlichkeit aus [27],[36],[37],[96], während die Versuchsergebnisse für Mörtel und Beton nicht eindeutig sind. Allgemein herrscht aber die Auffassung vor, daß Beton und Mörtel nur gering oder nicht kerbempfindlich sind [37],[40].

Zusammenfassend zeigt die obige Diskussion, daß die linear-elastische Bruchmechanik gut auf Zementstein und auf die Kontaktzone zwischen Zuschlag und Zementsteinmatrix anwendbar ist. Hinsichtlich der Anwendung auf Beton und Mörtel ist die Auffassung nicht einheitlich, es ist aber zu erkennen, daß die Anwendung der linear-elastischen Bruchmechanik bei diesen Werkstoffen zumindest auf große versuchtechnische Schwierigkeiten stößt.

#### 4.3.2 Elastisch-plastische Bruchmechanik

Eine Verbesserung der zuvor beschriebenen Situation hat sich bereichsweise durch die Entwicklung von Methoden der elastisch-plastischen Bruchmechanik ergeben. Hilsdorf [40] sieht insbesondere in der "J-Integral Methode" einen gangbaren Weg.

Bei der elastisch-plastischen Bruchmechanik wird nicht mehr, wie noch bei der linear-elastischen Bruchmechanik, vorausgesetzt, daß die plastische Zone vor der Rißspitze klein bleibt, sondern es dürfen auch große, ausgeprägte plastische Bereiche vor der Rißspitze auftreten. Auch in der elastisch-plastischen Bruchmechanik ist eine Vielzahl unterschiedlicher Methoden und Verfahren entwickelt worden. Eine dieser Methoden ist die heute vielfach angewendete "J-Integral-Methode". In mathematischer und mechanischer Hinsicht beruht sie auf dem von Rice in [84] hergeleiteten "J-Integral". Hierbei handelt es sich um ein wegunabhängiges Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve  $\Gamma$ , die vom unteren zum oberen Rißufer führt (Abb. 4.7). Der Verlauf der Kurve kann beliebig gewählt werden.

Durch das J-Integral (siehe Gleichung (4.20)) wird der Energieumsatz am Riß beschrieben, da in ihm sowohl die Verformungsenergie je Volumeneinheit ( $\bar{U}_{el}$ ) als auch die Arbeit je Wegeinheit der Kurve  $\Gamma$  enthalten ist. Anschaulich läßt sich J als die Änderung der Verformungsenergie  $U_{el}$  in Abhängigkeit von der Rißlänge interpretieren oder "als Unterschied der potentiellen Energie zweier identischer jedoch mit um  $dl$  <sup>1)</sup> verschiedener Rißlängen", wie Schwalbe in [94] ausführt.

---

1) Schwalbe bezeichnet die halbe Rißlänge mit  $l$ , während sie in dieser Arbeit mit  $a$  bezeichnet wird.

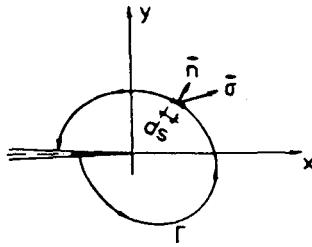


Abb. 4.7: J-Integral

Definitionsgleichung des J-Integrals:

$$J = \int_{\Gamma} (\bar{U}_{el} dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds) \quad (4.20)$$

$$\vec{T} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

$\bar{U}_{el}$  = Verformungsenergie je Volumeneinheit

$\vec{\sigma}$  = Spannungsvektor

$\vec{u}$  = Verschiebungsvektor

ds = Welement

$\Gamma$  = geschlossener Integrationsweg

$\vec{n}$  = Normalenvektor

Näheres zum J-Integral kann z.B. [9],[65],[83],[84],[94] entnommen werden. Anwendungen des J-Integrals auf Normalbeton sind bisher selten; für stahlfaserbewehrten Beton gibt es hingegen schon einige Untersuchungen [11],[70],[105].

J kann auch als die Verallgemeinerung der Energiefreisetzungsrate angesehen werden, da für linear-elastisches Materialverhalten  $J = \mathcal{G}$  wird. Der kritische Wert  $J_{IC}$  charakterisiert, wie  $\mathcal{G}_{IC}$  im linear-elastischen Fall, die Sprödbrocheigenschaft des Werkstoffes.

Auch die Anwendung des J-Integrals als Kennwert für das Bruchverhalten von Beton wird unterschiedlich beurteilt, so sieht z.B. Hillerborg [39] die Anwendung auf Beton eher skeptisch. Er begründet seine Auffassung damit, daß innerhalb der plastischen Zone eine Entlastung infolge des abfallenden Astes der Spannungs-Dehnungsline stattfindet, die aber beim J-Integral nicht berücksichtigt wird.

#### 4.3.3 Begründung der Beschränkung auf Methoden der linear-elastischen Bruchmechanik

Wie die Diskussion in den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 gezeigt hat, ist ein durchschlagender Erfolg bei der Anwendung bruchmechanischer Methoden auf Beton und Mörtel bisher nicht zu verzeichnen. Auch Erweiterungen auf elastisch-plastische Kennwerte haben diesen Zustand nur zum Teil verbessert, b.z.w. berechtigen zu der Hoffnung, daß ein Erfolg erzielt wird.

Die Diskussion hat aber auch gezeigt, daß die linear-elastische Bruchmechanik auf Zementstein und auf die Kontaktzone zwischen Zuschlag und Zementsteinmatrix anwendbar ist. Bei der nachfolgenden Untersuchung der Rißerweiterung geht es aber gerade um Vorgänge in diesen Bereichen, so daß eine Beschränkung auf Methoden der linear-elastischen Bruchmechanik möglich und wegen des Vorliegens von  $K_{IC}$ -Werten für Zementsteinmatrix und Kontaktzone auch sinnvoll ist. Gedanklich geht man bei Betrachtung der Rißerweiterung in Matrix und Kontaktzone von einer homogenen Matrix (Zementstein) aus, die durch Einschlüsse (Zuschläge) oder Fehlstellen gestört ist. Die Störungen durch Einschlüsse bewirken oberhalb gewisser Laststufen Rißbildungen in der Kontaktzone. Bei weiterer Belastungssteigerung dehnen sich solche Risse in die Matrix hinein aus, d.h., daß die Risse in der Kontaktzone für die Matrix als Anrisse wirken. Im Hinblick auf die Rißerweiterung in die Matrix hinein werden solche Risse für die weitere Arbeit als "Initialrisse" bezeichnet.

Da nicht von vornherein klar ist, unter welchen Bedingungen und Belastungsstufen sich die verschiedenen Rißarten erweitern, werden nachfolgend zunächst die typischen Rißarten unter energetischen Gesichtspunkten mittels der Spannungsintensitätsfaktoren untersucht.

#### 4.4 Rißerweiterungen bei typischen, örtlich entstehenden Rissen

##### 4.4.1 Gerader Riß im Zementstein

Betrachtet wird ein Griffith-Riß in einer unendlich ausgedehnten Scheibe nach Abb. 4.1 . Für diesen lastfreien Riß der Länge  $2a$  wird die bruchmechanische Beziehung zwischen der einachsigen Zugspannung im Unendlichen beim Grenzübergang zur Instabilität  $\sigma_{\infty Ic}$  und der halben Rißlänge  $a$  mit Gleichung (4.21) ausgewertet. Die Auswertung beschränkt sich auf den Modus I, da im vorliegenden Fall nur dieser auftritt.

Für den geraden Riß gilt nach Griffith :

$$\sigma_{\infty Ic} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \quad (4.21)$$

Der kritische Spannungsintensitätsfaktor  $K_{Ic}$  schwankt nach Versuchsergebnissen innerhalb gewisser Grenzen. In [104] findet sich eine Zusammenstellung von  $K_{Ic}$ -Werten, die unter verschiedenen Versuchsbedingungen ermittelt wurden. Für Probekörper aus Zementstein (hardened cement paste) und unter Berücksichtigung des stabilen Rißfortschrittes sind in den Arbeiten von Brown und Pomeroy [5] sowie in den Arbeiten von Hillemeier und Hilsdorf [38] und Hillemeier [37]  $K_{Ic}$ -Werte angegeben. Setzt man aus diesen Arbeiten die jeweiligen maximalen und minimalen Grenzwerte ein, so schwanken die  $K_{Ic}$ -Werte etwa in den Grenzen :

$$0,30 \frac{MN}{m^{1,5}} \leq K_{Ic} \leq 0,50 \frac{MN}{m^{1,5}} \quad (4.22)$$

Die für diese oberen und unteren Grenzwerte von  $K_{Ic}$  mit Gleichung (4.21) ausgewerteten Abhängigkeiten sind in Abb. 4.8 graphisch dargestellt.



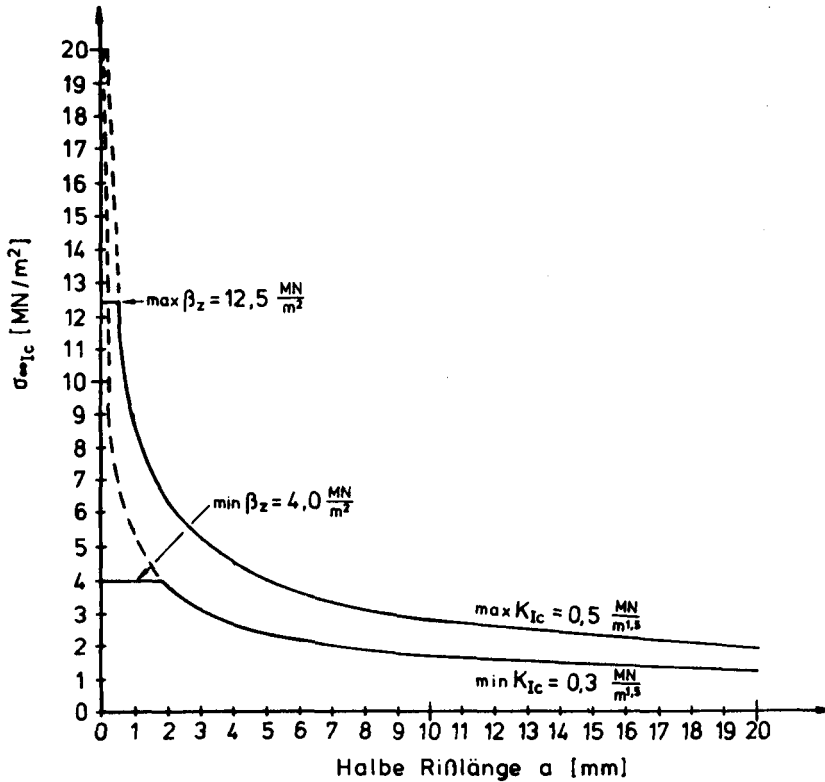


Abb. 4.8 :  $\sigma_{\infty IC}$  in Abhängigkeit von  $a$  für obere und untere Grenzwerte von  $K_{IC}$

Wie schon im Abschnitt 4.2.3 erläutert, liegt mathematisch bei  $a \rightarrow 0$  eine Singularitätsstelle vor, an der  $\sigma_{\infty IC}$  gegen Unendlich geht. Daß dies physikalisch nicht der Realität entspricht, liegt auf der Hand, da  $\sigma_{\infty IC}$  niemals größer als die einachsige Zugfestigkeit  $\beta_z$  werden kann. Nun ist aber auch  $\beta_z$  nicht konstant, sondern stark vom W/Z-Wert abhängig. Letztlich verbirgt sich hinter dieser Abhängigkeit wiederum nichts anderes als die Größe und die Anzahl von Fehlstellen im Gefüge des Zementsteins, so daß durch  $\beta_z$  eigentlich immer das Bruchverhalten einer Probe mit inneren Anrissen wiedergegeben wird, nur ist nicht bekannt, wie groß diese Anrisse sind. Es ist daher nicht verwunderlich, daß die Versuchsergebnisse der einachsigen Zugfestigkeit stark streuen.

Ziegeldorf gibt in [117] einen aus Literaturstudien gewonnenen Mittelwert von  $\beta_z = 6 \text{ N/mm}^2$  an. Eigene Literaturauswertungen ergaben Werte, die etwa zwischen  $\min \beta_z = 4 \text{ N/mm}^2$  (Ergebnisse von Hsu und Slate [44]) und  $\max \beta_z = 12,5 \text{ N/mm}^2$  (Ergebnisse von Higgins und Bailey [36]) liegen. Diese beiden Grenzwerte sind ebenfalls in Abb. 4.8 eingetragen worden.

Sowohl  $\beta_z$  (siehe z.B. [114]) als auch  $K_{IC}$  (siehe [117]) sind wesentlich vom W/Z-Wert abhängig: Beide Kennwerte nehmen mit abnehmendem W/Z-Wert zu. Die in Abb. 4.8 vorgenommene Zuordnung  $\max \beta_z \leftrightarrow \max K_{IC}$  und  $\min \beta_z \leftrightarrow \min K_{IC}$  ist daher qualitativ richtig, sie ist jedoch nicht exakt, da die zugehörigen Werte von  $\beta_z$  und  $K_{IC}$  nicht aus denselben Versuchsreihen stammen. Zur qualitativen Beschreibung der Rißerweiterung im Zementstein reicht die so vorgenommene Zuordnung jedoch aus.

Die Begrenzung auf  $\sigma_{\infty IC} = \beta_z$  ist übrigens eine der grundsätzlichen Begründungen für das "fictitious crack model" von Hillerborg [39].

Der Bereich zwischen den durchgezogenen Kurven in Abb. 4.8' gibt etwa die Bedingungen wieder, unter denen Rißerweiterungen im Zementstein auftreten. Es zeigt sich, daß ein spontaner Rißfortschritt bei  $\max K_{IC}$  schon ab einer Rißlänge von  $2a = 1,2 \text{ mm}$  eintritt, während dies bei  $\min K_{IC}$  erst ab  $2a \sim 4 \text{ mm}$  der Fall ist. Zementstein mit hoher Bruchzähigkeit kann demnach zwar höhere Rißlasten liefern als Zementstein mit niedriger Bruchzähigkeit, aber nur dann, wenn die Fehlstellen in Gefüge klein bleiben.

Die Darstellung in Abb. 4.8 beschreibt zwar schon das grundsätzliche Verhalten der rißbehafteten Zementsteinmatrix, ihre größere Bedeutung erhält diese Abbildung aber erst später (Abschnitt 4.4.4), wenn der Rißfortschritt im Zementstein mit der Erweiterung von Rissen in der Kontaktzone verglichen wird. Durch diesen Vergleich ist dann nämlich eine Aussage möglich über die Belastungsstufe, bei der Risse in der Kontaktzone fortschreiten. Es wird sich dann zeigen, ob sich Risse in der Zementsteinmatrix oder Risse in der Kontaktzone zuerst erweitern.

#### 4.4.2 Gerader Riß zwischen zwei Materialien mit unterschiedlichen Elastizitätskonstanten

In der Kontaktzone zwischen Einschluß und Matrix verläuft der Riß zwischen zwei Materialien mit unterschiedlichen Elastizitätskonstanten. Unter solchen Bedingungen verliert die Gleichung (4.21) ihre Gültigkeit, da sie ja nur für ein homogenes Material entwickelt wurde. Eine Erweiterung dieser Gleichung für den Riß zwischen zwei Materialien geben Rice und Sih [85] an, indem sie eine Bimaterialkonstante  $E$  einführen (vergl. auch Corten [16]). Die so gewonnenen Formeln gelten dann ganz allgemein, also auch für den homogenen Fall. Betrachtet wird dabei eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit einem Zentralriß der Länge  $2a$ , die gleichzeitig durch eine einachsige Zugspannung und eine Schubspannung, jeweils im Unendlichen wirkend, belastet wird (Abb. 4.9).

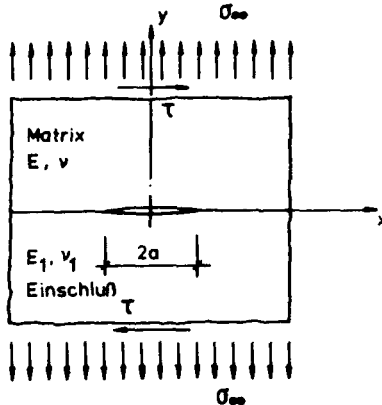


Abb. 4.9 : Riß zwischen zwei Materialien mit unterschiedlichen Elastizitätskonstanten

Die Bestimmungsgleichungen für die Spannungsintensitätsfaktoren lauten nach [85] :

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi a}}{\cosh \pi \epsilon} \left[ \sigma_{\infty} [\cos(\epsilon \cdot \ln 2a) + 2 \epsilon \sin(\epsilon \cdot \ln 2a)] + \tau [\sin(\epsilon \cdot \ln 2a) - 2 \epsilon \cos(\epsilon \cdot \ln 2a)] \right] \quad (4.23)$$

$$K_{II} = \frac{\sqrt{\pi a}}{\cosh \pi \epsilon} \left[ \tau [\cos(\epsilon \cdot \ln 2a) + 2 \epsilon \sin(\epsilon \cdot \ln 2a)] - \sigma_{\infty} [\sin(\epsilon \cdot \ln 2a) - 2 \epsilon \cos(\epsilon \cdot \ln 2a)] \right] \quad (4.24)$$

In diesen Gleichungen wird  $\epsilon$  bestimmt durch :

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \frac{\frac{3 - \nu}{(1 + \nu) G} + \frac{1}{G_1}}{\frac{3 - \nu_1}{(1 + \nu_1) G_1} + \frac{1}{G}} \right] \quad (4.25)$$

Da gleichzeitig Spannungsintensitätsfaktoren für Modus I und Modus II auftreten, müssen die Intensitäten in geeigneter Form zu einer einzigen Spannungsintensität zusammengefügt werden. Nach Rice [83] kann das genügend genau durch vektorielle Addition erfolgen, wenn ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt wird. Da die zu den Modi I und II gehörenden Spannungsvektoren (Normalspannungs- und Schubspannungsvektor) linear unabhängig sind, gilt für die zusammengesetzte Spannungsintensität Gleichung (4.26).

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (4.26)$$

Die Bestimmung kritischer Spannungsintensitäten erfolgt immer für die drei verschiedenen Bruchmodi. Insofern kann der mit Gleichung

(4.26) gewonnene Spannungsintensitätsfaktor nicht mit einem der kritischen Spannungsintensitätsfaktoren direkt verglichen werden. Nun läßt sich aber zeigen, daß der Einfluß des Bruchmodus II (vergl. z.B. Corten [16]) im Verhältnis zu der Bedeutung des Bruchmodus I wesentlich geringer ist. Nach [16] beträgt das Verhältnis zwischen  $K_{II}$  und  $K_I$  nur etwa 0,1 ( $K_{II}/K_I \sim 0,1$ ). Die dominierende Rolle spielt demnach  $K_I$ , so daß der nach Gleichung (4.26) ermittelte K-Wert mit hinreichender Genauigkeit mit  $K_{IC}$  verglichen werden kann, womit dann auch die Berechnung von  $\sigma_{\infty IC}$  möglich wird.

Ebenso wie bei der Zementsteinmatrix schwankt der kritische Spannungsintensitätsfaktor für die Kontaktzone innerhalb gewisser Grenzen. Nach Versuchen von Hillemeier [37] liegt der  $K_{IC}$ -Wert für die Haftfläche etwa zwischen  $0,10 \text{ MN/m}^{1,5}$  und  $0,12 \text{ MN/m}^{1,5}$ . Versuche von Ziegeldorf [116] ergaben folgende Werte :

Zementstein/Kalkstein :  $K_{IC} \sim 0,16 \text{ MN/m}^{1,5}$

Zementstein/Quarz :  $K_{IC} \sim 0,21 \text{ MN/m}^{1,5}$

Betrachtet man nur die Grenzwerte aus diesen beiden Arbeiten, so liegt  $K_{IC}$  etwa im Bereich von :

$$0,10 \text{ MN/m}^{1,5} \cong K_{IC} \cong 0,21 \text{ MN/m}^{1,5}$$

Analog zur Darstellung im Abschnitt 4.4.1 ist wieder eine obere Begrenzung von  $\sigma_{\infty IC}$  anzunehmen, die mit  $\beta_{hz}$  (Haftfestigkeit der Kontaktzone) bezeichnet wird. Über Versuche zur Bestimmung der Haftzugfestigkeiten zwischen Zuschlägen und Zementstein berichten Alexander, Wardlaw und Gilbert [1], Hsu und Slate [44] sowie Rehm und Zimbelmann [81]. Übereinstimmend geht aus diesen Untersuchungen hervor, daß die Haftfestigkeit im wesentlichen bestimmt wird durch die Rauhgigkeit der Zuschlagoberfläche, die Gesteinsart und den W/Z-Wert. Da insbesondere die natürliche Rauhgigkeit der Zuschläge stark schwankt, hat man aus Gründen der Reproduzierbarkeit der Versuche häufig mit geschliffenen oder sägerauen Oberflächen gearbeitet. Diese Methode erlaubt zwar überhaupt

erst eine vergleichende Betrachtung; die mit dieser Methode ermittelten Haftzugfestigkeiten entsprechen aber nur noch sehr eingeschränkt der Realität. Da die genannten Arbeiten aber auch Versuche mit naturrauen Oberflächen enthalten, werden die dazu gehörenden Werte der Haftzugfestigkeit zur angenäherten Bestimmung der Bandbreite, in denen die Haftzugfestigkeiten liegen, benutzt. Nach [81] ergibt sich ein niedrigster Wert von  $\min \beta_{hz} \sim 1,2 \text{ N/mm}^2$  und nach [44] ein oberer Wert von  $\max \beta_{hz} \sim 2,6 \text{ N/mm}^2$ . Demnach gilt angenähert:

$$1,2 \text{ N/mm}^2 \leq \beta_{hz} \leq 2,6 \text{ N/mm}^2$$

Da nicht a priori feststeht, wie sich die unterschiedlichen elastischen Eigenschaften verschiedener Zuschlagsgesteine auswirken, werden im Anhang A4 Berechnungen für verschiedene Gesteinsarten und für den Fall des starren Einschlusses durchgeführt. Die Zuordnung der Beispiele und der variierten Parameter zeigt Tabelle 4.1

Einschluß	E-Modul [MN/m <sup>2</sup> ]	Querdehnzahl $\nu_1$	Beanspruchung durch	Beispiel
Marmor	1,1	0,28	$\sigma_{\infty}$	A4.1
Tonstein	0,55	0,16	$\sigma_{\infty}$	A4.2
Starr	$\infty$	0	$\sigma_{\infty}$	A4.3
Starr	$\infty$	0	$\sigma_{\infty}, \tau$	A4.4

Tabelle 4.1 : Zusammenstellung der durchgerechneten Beispiele

Durch die Beispiel A4.1 und A4.2 sind die oberen und unteren Grenzwerte der Elastizitätsmoduli von üblichen Zuschlagsgesteinen (vergl. Tabelle 2.3) erfaßt. Alle anderen Gesteinsarten haben Elastizitätsmoduli, die dazwischen liegen.

Wie im Abschnitt 2 gezeigt wurde, hängt die Beanspruchung der Kontaktzone sehr stark von deren Orientierung zur Belastungsrichtung ab. Aus diesem Grund werden nachfolgend zwei Grenzfälle der Orientierung des Risses zur Belastungsrichtung betrachtet:

- (1) Der Riß verläuft senkrecht zur Belastungsrichtung.
- (2) Der Riß verläuft unter  $45^\circ$  zur Belastungsrichtung.

Die Untersuchung im Fall des "45°-Risses" beschränkt sich auf die Betrachtung des starren Einschlusses. Eine Begründung dafür wird bei der Diskussion der Ergebnisse des Falles (1) gegeben.

Wegen der etwas unterschiedlichen Vorgehensweise bei der Durchführung der Berechnung werden die beiden Grenzfälle, einschließlich der Ergebnisse, nachfolgend gesondert besprochen.

#### (1) Riß senkrecht zur Belastungsrichtung

Wirkt im Unendlichen nur eine einachsige Zugbeanspruchung und verläuft der Riß senkrecht zur Richtung der Belastung, so wird das Riligament nicht durch Schubspannungen beansprucht, sondern nur durch eine einachsige Zugspannung. Für diesen Fall wurden die Beispiele A4.1 bis A4.3 durchgerechnet.

Die Endergebnisse der Berechnung liefern wiederum die Spannungen  $\sigma_{IC}$  am Instabilittspunkt. Wie ein Vergleich der Ergebnistabellen zeigt, stimmen die  $\sigma_{IC}$ -Werte für alle drei Beispiele nahezu vollständig über ein. In vielen Fällen ist überhaupt keine Abweichung festzustellen; treten Unterschiede auf, dann höchstens in der zweiten Stelle nach dem Komma. Daraus läßt sich der Schluß ziehen, daß die Rißerweiterung in der Kontaktzone nahezu unabhängig von den Elastizitätskonstanten der Zuschlaggesteine ist. Es dürfte demnach vollkommen ausreichen, nur den Fall mit starrem Einschluß zu betrachten. Aus diesem Grunde enthält Abb.4.10 lediglich die Kurvenverläufe für den starren Einschluß und, zu Vergleichszwecken, die Kurvenverläufe für einen Riß in einem homogenen Material, wenn dieses die  $K_{IC}$ -Werte der Kontaktzone hat.

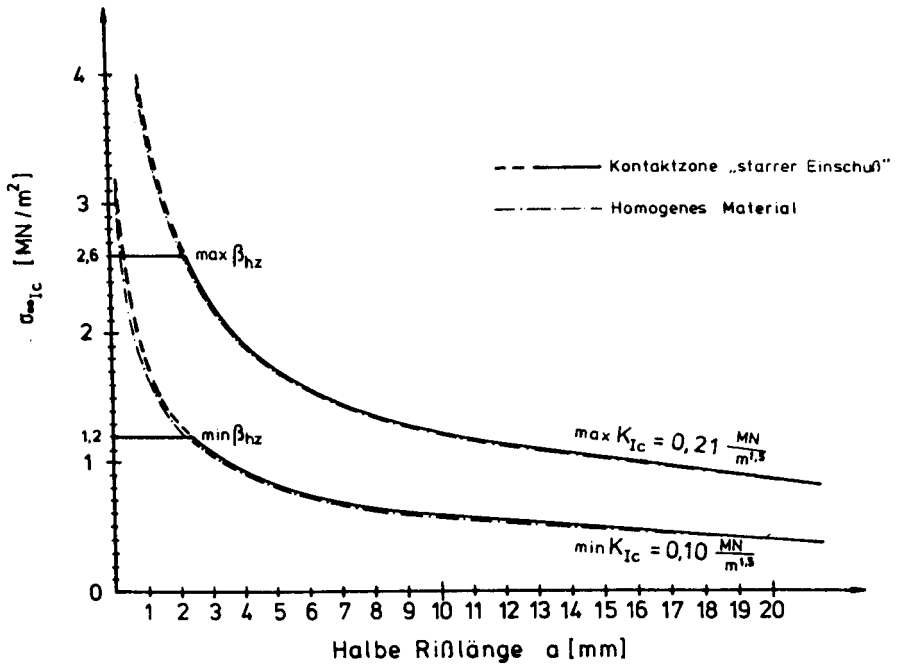


Abb. 4.10 :  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte beim Rißverlauf senkrecht zur Belastungsrichtung

In Abb. 4.10 fällt auf, daß die Kurvenverläufe für den starren Einschluß und für das homogene Medium nur sehr unwesentlich voneinander abweichen. Demnach ist es im vorliegenden Fall einerlei, ob man ein homogenes Material oder die Kontaktzone zu einem starren Einschluß untersucht, wichtig ist nur, daß beim homogenen Material die Bruchzähigkeit der Kontaktzone eingesetzt wird. Dieses Ergebnis wird bei der Betrachtung des bogenförmigen Risses in Abschnitt 4.4.3 ausgenutzt. Dort beschränkt sich die Betrachtung dann auf einen Riß in einem homogenen Material.



Führt man - wie beim Zementstein erläutert - die Zuordnung  $\min \beta_{hz} \leftrightarrow \min K_{IC}$  und  $\max \beta_{hz} \leftrightarrow \max K_{IC}$  durch, so zeigt Abb. 4.10, daß sich in beiden Fällen Risse mit Längen von mehr als  $\sim 5$  mm schon vor Erreichen der Haftfestigkeit spontan öffnen. Bei kleineren Rißlängen ist zur Rißverlängerung erst eine Belastungssteigerung bis zur Haftfestigkeit notwendig. Ob es sich bei der Rißlänge von 5 mm um einen von  $K_{IC}$  unabhängigen, "material-spezifischen Wert" handelt, oder ob dieses nicht der Fall ist, bleibt zu klären. Dieser sicherlich interessante Aspekt ließe sich nur durch weitergehende und spezifische versuchsmäßige und theoretische Arbeiten genauer analysieren.

(2) Riß unter 45° zur Belastungsrichtung

Liegt die Rißebene unter 45° zur Richtung der einachsigen Belastung, so wird die Rißumgebung durch Normalspannungen in und senkrecht zur Rißrichtung und durch Schubspannungen beansprucht (Abb. 4.11). Für diesen Fall erreichen die Schubspannungen ihren Maximalwert mit  $\tau_{r\varphi} = 0,5 \sigma_{\infty}$  und für die Normalspannungen gilt  $\sigma_r = \sigma_{\varphi} = 0,5 \sigma_{\infty}$ .

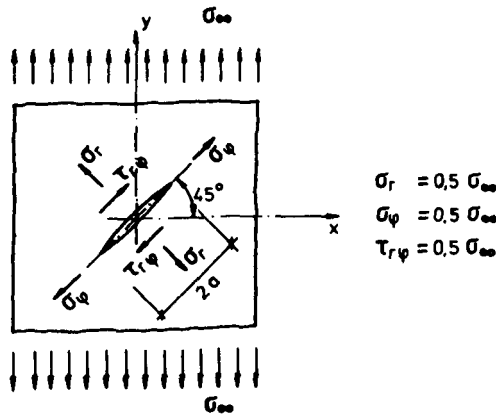


Abb. 4.11 : Riß unter 45° zur Belastungsrichtung

Die Spannung  $\sigma_{\varphi}$ , die ja parallel zum Riß wirkt, ruft keine Rißbeanspruchung hervor und sie wird daher nicht weiter betrachtet. Für die

anderen beiden Belastungen ( $\sigma_r$  und  $\tau_{r\varphi}$ ) enthält Anlage A4.3 die Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren und der  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte.

Ein Vergleich der Tabellen A4.1 und A4.4 zeigt, daß bei Orientierung des Risses senkrecht zur Belastungsrichtung geringere  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte auftreten als bei Orientierung des Risses unter  $45^\circ$  zur Belastungsrichtung. Weitere, hier nicht wiedergegebene Berechnungen für andere Richtungen ergaben ebenfalls günstigere  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte. Somit liefert die Rißrichtung senkrecht zur Belastung immer die ungünstigsten Werte. Aus diesem Grunde kann beim Riß unter  $45^\circ$  auf eine ähnlich ausführliche Untersuchung wie beim Riß senkrecht zur Belastungsrichtung verzichtet werden.

### (3) Riß bei abgerundeten Einschlußbecken

Unter (1) und (2) wurde davon ausgegangen, daß der Einschluß keine abgerundeten Ecken hat, sondern daß die Kanten ohne Ausrundung aufeinander stoßen. Um die reale Kornform besser zu erfassen und um den Bezug zur elastischen Betrachtung (Abschnitt 2) herzustellen, wird zur Ergänzung von (1) und (2) ein Einschluß mit abgerundeten Ecken betrachtet (Abb. 4.12).

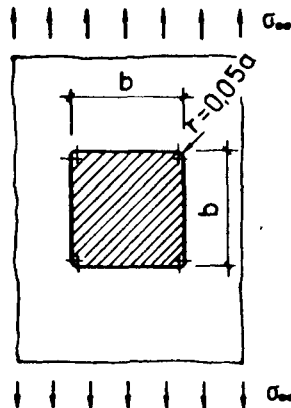


Abb. 4.12 : Einzelner quasisquadratischer Einschluß

Untersucht wird nur der Fall mit maximaler Bruchzähigkeit ( $\max K_{IC}$ ) in der Kontaktzone und mit maximaler Haftfestigkeit ( $\max \beta_{hz}$ ).

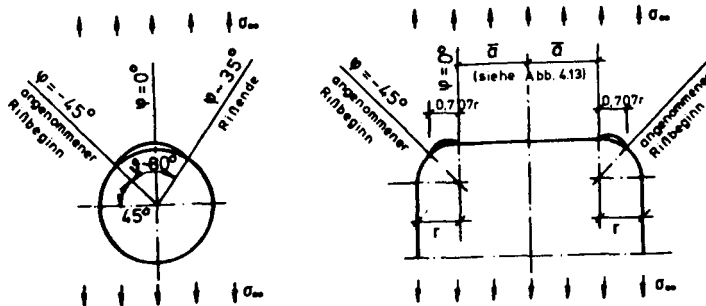
Geht man von rißfreien Kontaktzonen aus, so treten im rein elastischen Zustand die maximalen Hauptzugspannungen an den abgerundeten Ecken auf. Nach Abb. B3.1 beträgt der "Spannungskonzentrationsfaktor"  $\max \sigma_I / \sigma_\infty$  für den maximal beanspruchten Punkt :

$$\frac{\max \sigma_I}{\sigma_\infty} = 2,41$$

D.h., daß erste Rißbildungen infolge des Überschreitens der Haftzugfestigkeit  $\max \beta_{nz} = 2,6 \text{ MN/m}^2$  bei

$$\sigma_\infty = \frac{2,6}{2,41} = 1,08 \text{ MN/m}^2$$

auftreten, und zwar unter  $45^\circ$  zur Belastungsrichtung. Solche Risse erweitern sich nicht in Belastungsrichtung, sondern senkrecht dazu. Unter Benutzung der Diagramme von Rooke und Cartwright [89] kann nachgewiesen werden, daß sich bei  $\max K_{IC}$  der Kontaktzone für einen Einschluß mit Kreisquerschnitt ein Rißöffnungswinkel von  $\vartheta \sim 80^\circ$  einstellen würde (Abb. 4.13a). Übertragen auf den quadratischen Einschluß mit abgerundeten Ecken bedeutet dies, daß der Riß sich entlang des Einschlußrandes von  $\varphi = -45^\circ$  bis  $\varphi = 0^\circ$  öffnet, bei  $\varphi = 0^\circ$  aber nicht notwendigerweise zum Stehen kommt, sondern sich entlang der Kante weiter öffnen kann. Unter welchen Bedingungen der Riß entlang der Kante aufreißt, kann aber noch nicht gesagt werden, weil sich die in Abb. 4.13b dargestellte Rißkonfiguration wegen ihrer Komplexität einer direkten Berechnung entzieht.



a) Rißverlauf beim Ein-  
mit Kreisquerschnitt

b) Rißverläufe beim quadratischen  
Einschluß mit abgerundeten  
Ecken

Abb. 4.13 : Rißverläufe

Um dennoch eine Vorstellung von der Größe der zur RiBerweiterung notwendigen äußeren Belastung  $\sigma_{\infty}$  zu bekommen, wird ein vereinfachtes Modell betrachtet. Die Idealisierung besteht darin, daß sich der Ausgangsriß nur über den oberen 45°-Bogen gebildet haben soll, und daß dieser Riß als gerader Riß der Länge  $2a = 0,707r$  mit einer Orientierung senkrecht zur Belastungsrichtung angesehen werden soll. Da sich gleichzeitig an den beiden benachbarten Ecken Risse bilden können, wird von zwei existierenden Rissen ausgegangen, die jeweils für sich als halbumendlicher Riß wirken. Unter diesen Voraussetzungen erhält man die in Abb. 4.14 dargestellte Rißkonfiguration.

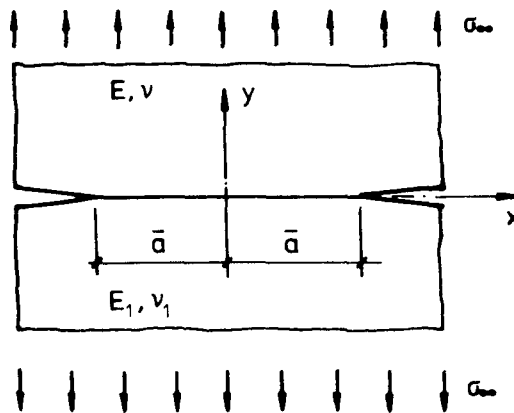


Abb. 4.14 : Zwei semiinfinite Risse zwischen unterschiedlichen Materialien

Erdogan hat in [22] diese Rißkonfiguration untersucht und dafür eine Methode zur Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren entwickelt. Er kommt zu dem Schluß, daß im Falle einer einzelnen Verbindung  $K_I$  unabhängig von den Elastizitätskonstanten der beteiligten Materialien und nur noch eine Funktion der Belastung und des Abstandes  $\bar{a}$  der Rissspitze vom Koordinatenursprung ist. Seine angegebene Bestimmungs-

gleichung für  $K_I$  vereinfacht sich dann zu :

$$K_I = \frac{\sigma_{\infty}}{2\pi\sqrt{2}\bar{a}} \quad (4.27)$$

Setzt man  $K_I = K_{IC}$  und stellt nach  $\sigma_{\infty IC} = \sigma_{\infty}$  um, so ergibt sich :

$$\sigma_{\infty IC} = K_{IC} 2\pi\sqrt{2}\bar{a} \quad (4.28)$$

Tabelle 4.2 enthält die Auswertung der Gleichung (4.28).

$\bar{a}$ [mm]	$\sigma_{\infty IC}$ [MN/m <sup>2</sup> ]
1	0,059
2	0,083
5	0,130
10	0,187
20	0,264
30	0,323
40	0,373
50	0,417

Tabelle 4.2 :  $\sigma_{\infty IC}$  in Abhängigkeit von  $\bar{a}$

Die berechneten  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte liegen selbst für große Werte von  $\bar{a}$  weit unter den  $\sigma_{\infty}$ -Werten, bei denen es zu Ribbildungen infolge des Überschreitens der Haftzugfestigkeit kommt.

Es zeigt sich demnach, daß auch bei Rissen an abgerundeten Ecken eine spontane Erweiterung entlang der Einschlußkante eintritt, dies sogar unter wesentlich geringeren Belastungen als sie im unter (1) dargestellten Fall erforderlich sind.

#### 4.4.3 Bogenförmiger RiB zwischen Matrix und Einschuß

Geschlossene Lösungen zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren an bogenförmigen Rissen entlang des Umfangs von Matrixeinschlüssen (Abb. 4.15) liegen bisher nicht vor.

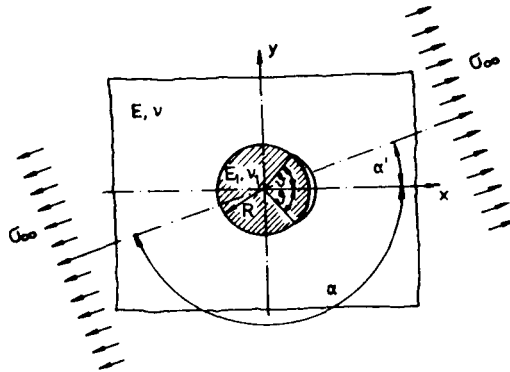


Abb. 4.15 : Bogenförmiger Einschuß zwischen Matrix und Einschuß

Eine von England in [21] angegebene Methode liefert zwar die Möglichkeit, Spannungen im Bereich solcher Risse zu berechnen, Spannungsintensitätsfaktoren lassen sich mit dieser Methode aber leider nicht bestimmen.

In Abschnitt 4.4.2 konnte gezeigt werden, daß sich die Berechnung für einen geraden RiB zwischen einem starren Einschuß und einer Zementsteinmatrix hinreichend genau durch die Berechnung für einen RiB in einem homogenen Material approximieren läßt, wenn man dabei die Bruchzähigkeit der Kontaktzone einsetzt. Diese Möglichkeit wird zur Berechnung am bogenförmigen RiB ausgenutzt, da für den bogenförmigen Riss in einer homogenen Matrix geschlossene Lösungen zur Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren vorliegen.

Eine dieser Lösungen ist die von Panasyuk und Berezhnitskiy [78] , für die Rooke und Cartwright in [89] auch Diagramme zur Bestimmung von  $K_I$  und  $K_{II}$  angeben. Eine weitere Lösung stammt von Sih, Paris und Erdogan [98] , die aber nach den Ausführungen von Sawin in [94] Fehler enthält. Die von Tada, Paris und Irwin in [105] angegebene Lösung ist wohl aus der Lösung in [98] durch Einführung anderer Bezugswinkel (Winkel zwischen Rißachse und Belastungsrichtung) entwickelt und gleichzeitig vereinfacht worden. Wie eigene Vergleichsrechnungen gezeigt haben, scheint aber auch die abgeänderte Lösung noch fehlerhaft zu sein. Für die weitere Bearbeitung wird daher die Lösung aus [78] in der Diagrammform von [89] verwendet. Die Ausgangsgleichungen zur Berechnung der auf  $\sigma_\infty$  bezogenen Spannungsintensitätsfaktoren lauten nach [89] , aber mit den Bezeichnungen der Abb. 4.14 :

$$\frac{K_I}{\sigma_\infty} = \frac{\sqrt{\pi R \sin \frac{\vartheta}{2}}}{2(1 + \sin^2 \frac{\vartheta}{2})} \left[ (1 - \cos 2\alpha' \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin 2\alpha' \cdot \sin^3 \frac{\vartheta}{2} + \cos(2\alpha' - 3\frac{\vartheta}{2}) \right] \quad (4.30)$$

$$\frac{K_{II}}{\sigma_\infty} = \frac{\sqrt{\pi R \sin \frac{\vartheta}{2}}}{2(1 + \sin^2 \frac{\vartheta}{2})} \left[ (1 - \cos 2\alpha' \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) \sin \frac{\vartheta}{2} - \sin 2\alpha' \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} - \sin(2\alpha' - 3\frac{\vartheta}{2}) \right] \quad (4.31)$$

Für Rißöffnungswinkel über etwa 160° können sich für bestimmte Belastungsrichtungen mit den obigen Formeln negative K-Werte ergeben. Richards und Robertson weisen in [86] darauf hin, daß negative K-Werte bei richtiger Beschreibung des mechanischen Verhaltens nicht auftreten dürfen. Sie drücken daher zwar gewisse Zweifel an der Gültigkeit der

Gleichungen (4.30) und (4.31) aus, kommen aber ihrerseits aufgrund einer Finite-Element-Berechnung zu qualitativ gleichen Ergebnissen. Für gewisse Verhältnisse von Rißöffnungswinkeln zu Belastungsrichtungen ergaben sich dabei allerdings quantitativ stärker von [89] abweichende  $K_I$ -Werte. Möglicherweise ist das aber durch die bei der Finite-Element-Berechnung getroffenen Annahmen zu erklären. Da in den nachfolgenden Untersuchungen Bereiche mit negativen  $K_I$ -Werten keine Rolle spielen und weil die Untersuchungen wegen der schwankenden  $K_{Ic}$ -Werte im wesentlichen qualitativ sind, würde eine etwa vorhandene Ungenauigkeit bei der  $K_I$ -Wert-Bestimmung von untergeordneter Bedeutung sein. Nach Abwägung aller Gesichtspunkte bleibt es daher bei der Anwendung der Lösung aus [89] bzw. [78].

Nach den Untersuchungen im Abschnitt 2.4.3 entstehen die größten Spannungskonzentrationen am kreisförmigen Einschluß bei  $\varphi = 0^\circ$  bzw.  $\varphi = 180^\circ$ , also - in Belastungsrichtung gesehen - an den Scheitelpunkten des Einschusses. Die Rißbildung durch Überschreitung der Haftfestigkeit wird an diesen Punkten beginnen. Dabei kann davon ausgegangen werden, daß sich dieser Riß wegen der Symmetrie von Einschluß und Belastung auch symmetrisch nach beiden Seiten öffnet. Dies ist natürlich nur theoretisch so, da in der Realität durch eine ungleichmäßig verteilte Haftfestigkeit in der Regel eine symmetrische Rißöffnung nicht gegeben sein wird. Der theoretische symmetrische Riß in einer homogenen Scheibe, die die Bruchzähigkeit der Kontaktzone hat, wird nachfolgend näher untersucht (Bezeichnungen siehe Abb. 4.16).

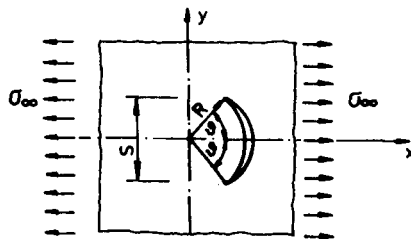


Abb. 4.16 : Bogenförmiger Riß symmetrisch zur Belastungsrichtung in einer homogenen Scheibe



Gegenüber dem geraden Riß, bei dem nur die Länge variabel ist, gibt es beim bogenförmigen Riß zwei Variable: Den Radius R des Einschlusses und den Rißöffnungswinkel  $2\vartheta$ . Ob sich diese beiden Variablen auf eine Variable - nämlich die Sehne  $S = 2 R \sin\vartheta$  - reduzieren lassen, wird später untersucht. Zunächst geht es um die Abhängigkeit zwischen  $\sigma_{IC}$ ,  $K_{IC}$ , Radius und Rißöffnungswinkel. Dazu werden die Gleichungen (4.30) und (4.31) anhand der Diagramme aus [89] und analog zur Vorgehensweise des Abschnittes 4.4.2 ausgewertet. Die Ergebnisse dieser Auswertung sind in Abb. 4.17 und Abb. 4.18 graphisch dargestellt. Um den Zusammenhang mit der Haftfestigkeit der Kontaktzone und der Zugfestigkeit des Zementsteins herausarbeiten zu können, sind in diesen beiden Abbildungen die durch  $\min \beta_{hz}$  und  $\max \beta_{hz}$  gegebenen Grenzen der Haftfestigkeit und die durch  $\min \beta_z$  und  $\max \beta_z$  gegebenen Grenzen der Zugfestigkeit des Zementsteins eingetragen.

Risse in der Kontaktzone können schon vor Einsetzen der Belastung vorhanden sein, oder bei Erreichen der örtlichen Haftzugfestigkeit während der Belastungssteigerung entstehen. Haben die Risse einen von der Bruchzähigkeit der Kontaktzone, der Belastungsstufe und dem Einschlußdurchmesser abhängigen kritischen Rißöffnungswinkel  $\vartheta_k$  erreicht, so erweitern sie sich spontan, kommen aber bei konstant gehaltener Belastung bei einem größeren Rißöffnungswinkel  $\vartheta_e$  wieder zum Stillstand (siehe hierzu die Abb. 4.17 und 4.18). Ein weiterer, jetzt aber stabiler Rißfortschritt tritt erst bei weiterer Steigerung der Belastung ein. Der Riß erweitert sich aber niemals über den gesamten Umfang ( $\vartheta = 90^\circ$ ), sondern er kommt schon bei wesentlich geringeren Rißöffnungswinkeln zum Stillstand. In Tabelle 4.3 sind die sich aus den Abb. 4.17 und 4.18 ergebenden Werte von  $\vartheta_k$  und  $\vartheta_e$  für verschieden R eingetragen, wenn die Belastung  $\max \beta_{hz}$  erreicht.

R [mm]	d [mm]	Bruchzähigkeit in der Kontaktzone	$\vartheta_k$	$\vartheta_e$	Abb.
5	10	min $K_{IC}$	8°	56°	4.18
		max $K_{IC}$	0°	0°	4.17
10	20	min $K_{IC}$	6°	62°	4.18
		max $K_{IC}$	13°	45°	4.17
20	40	min $K_{IC}$	5°	66°	4.18
		max $K_{IC}$	8°	55°	4.17

Tabelle 4.3 : Rißöffnungswinkel

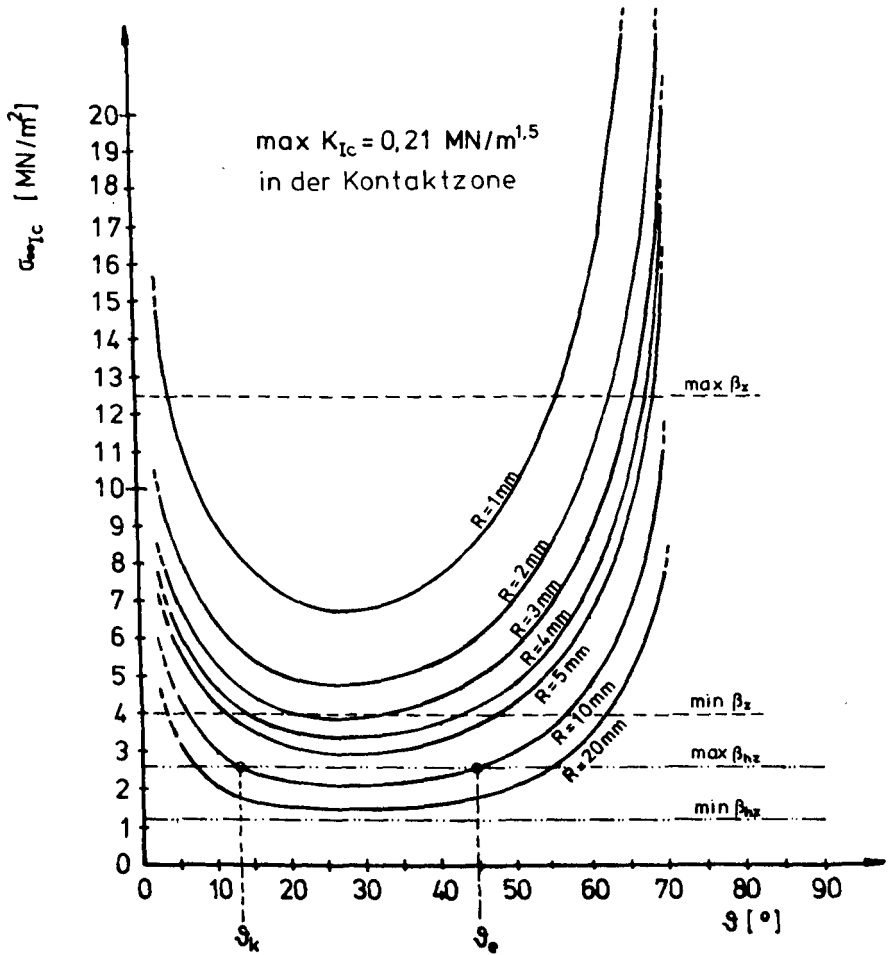


Abb. 4.17: Abhängigkeit zwischen  $\sigma_{\infty IC}$ ,  $K_{IC}$ , Rißöffnungswinkel und Radius des Einschlusses bei  $\max K_{IC} = 0,21 \text{ MN/m}^{1,5}$  in der Kontaktzone

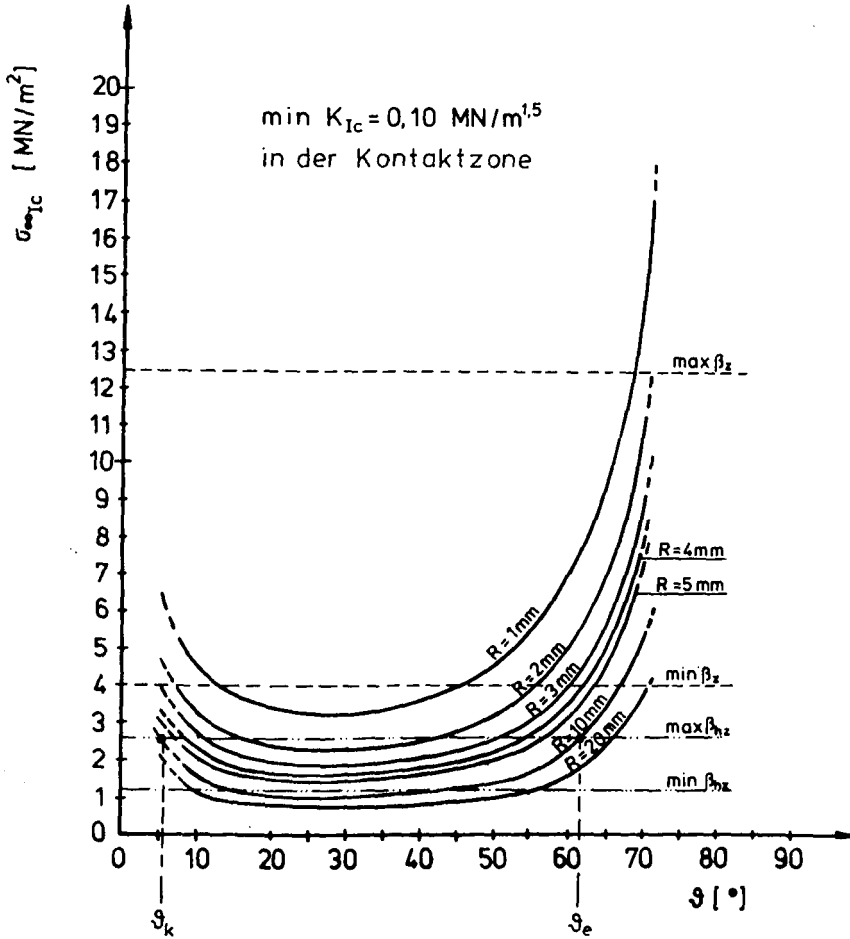


Abb. 4.18 : Abhängigkeit zwischen  $\sigma_{\infty IC}$ ,  $K_{IC}$ , Rißöffnungswinkel und Radius des Einschlusses bei  $\min K_{IC} = 0,10 \text{ MN/m}^{1,5}$  in der Kontaktzone

Wie Tabelle 4.3 ausweist, öffnen sich die Risse selbst unter ungünstigen Verhältnissen spontan nur bis maximal  $\vartheta_e = 66^\circ$ ; in den meisten Fällen sind die Rißöffnungswinkel jedoch wesentlich geringer. Auch bei weiterer Laststeigerung bis zur Zugfestigkeit des Zementsteins tritt nur noch ein geringer Zuwachs des Rißöffnungswinkels ein, da  $\sigma_\infty$  bei größeren Rißöffnungswinkeln stark ansteigt. D.h., daß selbst bei hohen Zementsteinfestigkeiten größere Rißöffnungen als  $\vartheta_e \sim 70^\circ$  nicht möglich sind. Der von Jahn in [51] angenommene Rißverlauf in der Kontaktzone (Abb. 4.19a) mit Rißspitzen bei  $\varphi = 90^\circ$  wird sich daher im Normalfall nicht einstellen. Ein solcher Rißverlauf ist nur dann möglich, wenn das Zuschlagskorn von vornherein ohne Verbund in der Matrix gelegen hat. Dann nämlich liegt ein kreisförmiger Hohlraum vor, für den allein die Darstellung von Jahn gültig ist. Ist ein Verbund vorhanden, so wird sich ein Rißverlauf nach Abb. 4.19b einstellen. Übereinstimmend damit zeigt die Beobachtung von Betonbruchflächen, daß die meisten Zuschläge nur wenig aus der Bruchfläche herausragen.

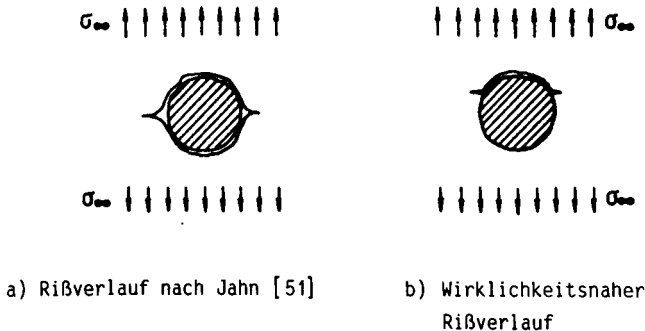


Abb. 4.19: Rißverläufe

Da der Riß nicht im Bogen entlang des Einschlußrandes weiter laufen kann, ist er gezwungen, sich in die Matrix auszudehnen. Dies erfolgt in die senkrecht zur Belastung liegende Richtung, weil diese, wie in Abschnitt 4.4.2 gezeigt wurde, die Richtung mit maximaler Beanspruchung ist.

Bibl.d.TU.  
Braunschweig

Theoretisch könnten zwar auf beiden Seiten des Einschlusses solche Risse entstehen, im realen Fall ist das wegen der praktisch immer vorhandenen Unterschiede der Haftzugfestigkeit entlang des Einschlußumfanges aber nicht möglich. In den überaus meisten Fällen wird sich nur jeweils ein Riß bilden, und zwar im Bereich des Scheitelpunktes an dem die für die Rißbildung und Rißerweiterung günstigsten Verhältnisse vorliegen.

Überaus deutlich geht aus den Abb. 4.17 und 4.18 die Bedeutung der Einschlußgröße für die Rißbildung und -erweiterung hervor. Die Rißbildung und -erweiterung setzt zuerst an den größten Zuschlagkörnern ein; ein hier theoretisch hergeleitetes Verhalten, das schon lange durch praktische Erfahrungen und experimentelle Untersuchungen bekannt ist. Selbst wenn die Belastung bis auf  $\max \beta_{Hz}$  ansteigt, treten Rißerweiterungen an Zuschlägen mit  $d < 3$  mm (siehe Abb. 4.18) überhaupt nicht auf. Wegen der Spannungskonzentrationen im elastischen Fall (vergl. Abschnitt 2) kommt es zwar auch bei diesen kleinen Einschlüssen infolge Überschreitung der Haftzugfestigkeit zu Rissen, die sich aber zunächst nicht spontan öffnen, sondern stabil bleiben. Eine Rißerweiterung tritt erst bei Laststeigerung über die Haftfestigkeit hinaus ein, aber auch dann bleibt der zugehörige Rißöffnungswinkel  $\vartheta_e$  klein. Betrachtet man z.B. die Grenzlinie für  $\min \beta_z$ , so können sich unter dieser Belastungsstufe und bei einer hohen vorhandenen Bruchzähigkeit Risse nur bei Einschlüssen mit mehr als 6 mm Durchmesser öffnen. Ist bei sonst gleichen Bedingungen eine geringe Bruchzähigkeit vorhanden, so ist eine Rißerweiterung schon bei Einschlüssen mit mehr als 2 mm Durchmesser möglich. Betrachtet man eine mittlere Bruchzähigkeit, so tritt Rißerweiterung an Einschlüssen mit Durchmessern von mehr als  $\sim 4$  mm ein.

Die obigen Darlegungen machen deutlich, warum Mörtel und Beton unterschiedliche Zugfestigkeiten haben und ab welchen Durchmessern Zuschläge noch als zur Matrix gehörend angesehen werden können. Letzteres nämlich dann, wenn die zur Rißerweiterung notwendige Belastungsstufe größer ist als  $\beta_z$ . Legt man eine mittlere Bruchzähigkeit und ein mittleres  $\beta_z$  von ca.  $6 \text{ N/mm}^2$  zugrunde, so liegt die Grenze der zur Matrix zu zählenden Einschlüsse bei etwa 4 mm.

#### 4.4.4 Vergleichende Betrachtung verschiedener Rißarten

##### 4.4.4.1 Gerader Riß im Zementstein und gerader Riß in der Kontaktzone

Die bislang vorgenommene Einzelbetrachtung der verschiedenen Rißarten soll nachfolgend durch eine kombinierte Betrachtung der Rißarten erweitert werden, um Aufschlüsse über die Interaktion zwischen dem Riß im Zementstein und dem Riß in der Kontaktzone zu erhalten. Dies insbesondere mit dem Ziel, zu erkennen, welcher dieser Risse sich bei Steigerung der Belastung zuerst erweitern wird, und wie diese Rißerweiterungen vonstatten gehen. Zu diesem Zweck werden die Kurvenverläufe des Diagramms für den Riß im Zementstein (Abb. 4.8) und die des Diagramms für den geraden Riß in der Kontaktzone in zwei Gesamtdiagramme übertragen; in Abb. 4.20 für die maximale Bruchzähigkeit ( $\max K_{IC}$ ) des Zementsteins und in Abb. 4.21 für die minimale Bruchzähigkeit ( $\min K_{IC}$ ) des Zementsteins.

Aus Abb. 4.20 ist zu entnehmen, daß sich bei Erreichen der Haftzugfestigkeit zunächst Risse in der Kontaktzone bilden werden. Je nach vorhandener Haftfestigkeit kann das schon unter geringen Belastungsstufen erfolgen. Risse in der Zementsteinmatrix bilden sich unter solchen Belastungen noch nicht, da ein sehr großer Abstand zur Zugfestigkeit des Zementsteins vorhanden ist. Evtl. schon vor Belastungsbeginn in der Zementsteinmatrix enthaltene Risse sind jedoch in der Lage, sich auch schon bei solch geringen Belastungen zu erweitern. Betrachtet man die Belastungsstufe bei der  $G_{\infty}$  gerade  $\max \beta_{hz}$  erreicht, so läßt das Diagramm erkennen, daß sich nur Matrixrisse mit Rißlängen von mehr als ca. 24 mm ( $a \sim 12\text{mm}$ ) spontan erweitern werden. Solche großen Risse im Zementstein sind sehr ungewöhnlich und in der Regel nicht vorhanden. Fehlstellen in der Matrix haben im Normalfall wesentlich geringere Ausmaße. Die Gegenüberstellung zeigt somit, daß sich bei hoher Bruchzähigkeit des Zementsteins zunächst Risse in der Kontaktzone erweitern, nicht aber Risse in der Zementsteinmatrix.

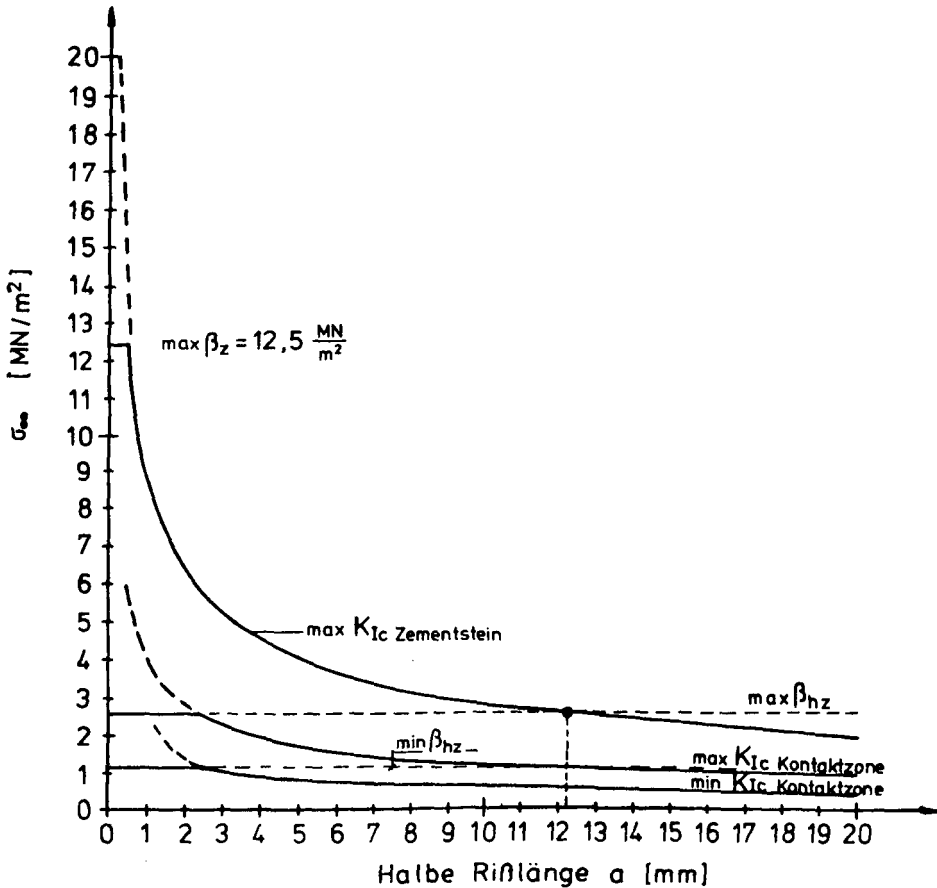


Abb. 4.20 : Vergleich gerader RiB im Zementstein / gerader RiB in der Kontaktzone bei groBer Bruchzähigkeit des Zementsteins

Bei niedriger Bruchzähigkeit ( $\min K_{Ic} = 0,30 \text{ MN/m}^2$ ) des Zementsteins kommt es qualitativ zu gleichen Ergebnissen  
Hier allerdings kann es schon bei Matrixrissen ab etwa 8mm Länge

zu einem spontanen Rißfortschritt kommen. Jedoch auch solche Rißlängen liegen noch weit unter den in der Matrix zu erwartenden Fehlstellenabmessungen.

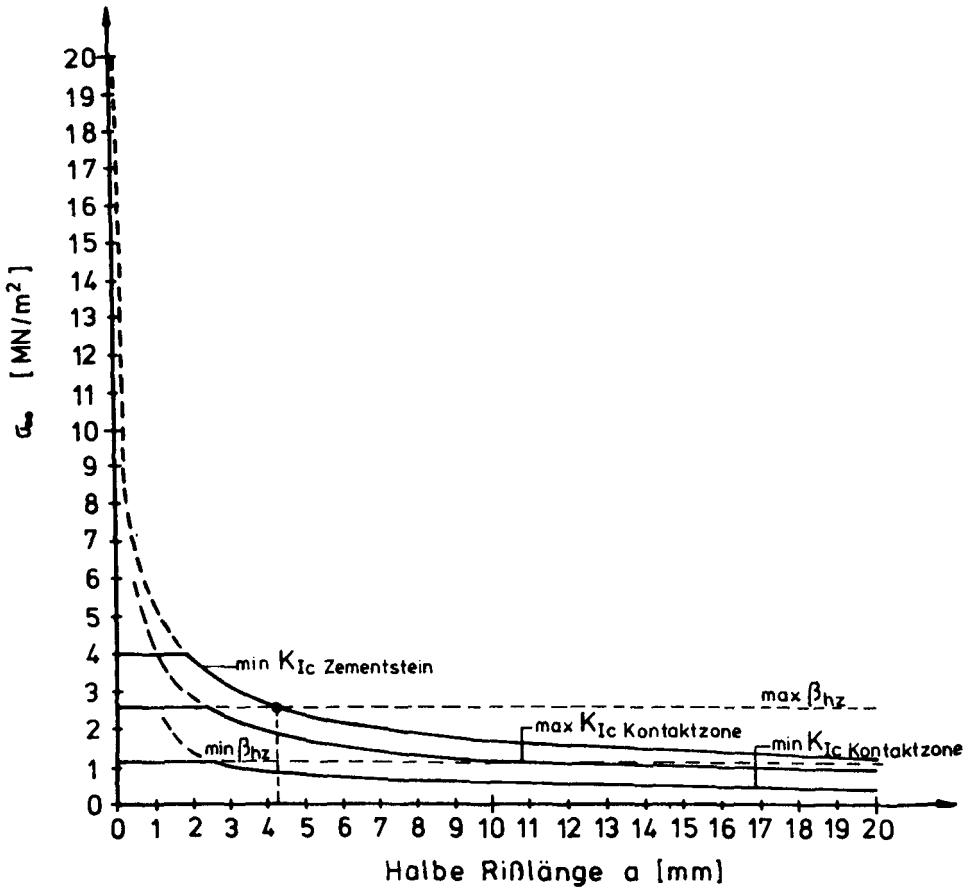


Abb. 4.21 : Vergleich gerader Riß im Zementstein/ gerader Riß in der Kontaktzone bei niedriger Bruchzähigkeit des Zementsteins



Insgesamt bestätigen diese auf theoretischem Weg gefundenen Ergebnisse die Ergebnisse der vielfachen experimentellen Untersuchungen, da auch diese zeigten, daß Risse zunächst in der Kontaktzone entstehen und sich dort entlang der Korngrenzen erweitern.

Die Risse in der Kontaktzone können nur so lang werden wie die Einschlußkante an der sie entlanglaufen, d.h., daß sie eine von der Kornform und Korngröße abhängige Endlänge besitzen. Es stellt sich nun die Frage, ob die Risse beim Erreichen dieser Endlänge zum Stillstand kommen, oder ob eine Rißerweiterung in die Matrix hinein stattfindet. Die Untersuchung dieses Sachverhaltes soll an zwei Beispielen erfolgen. Wegen des später herzustellen Bezuges zum bogenförmigen Riß geschieht dies an quadratischen Einschlüssen mit 12 mm bzw. 6 mm Kantenlänge. Die Betrachtung am bogenförmigen Riß erfolgt dann für zwei flächengleiche kreisförmige Einschlüsse mit Durchmessern von 13,5 mm bzw. 6,8 mm. Zur Erläuterung der Zusammenhänge dienen die Abb. 4.22 und 4.23, die jeweils vergrößerte, detaillierte und mit Zusätzen versehene Ausschnitte der Abb. 4.20 und 4.21 darstellen.

Als erstes wird Abb. 4.22, die für eine maximale Bruchzähigkeit des Zementsteins gilt, betrachtet. Erreicht die äußere Beanspruchung  $\sigma_{\infty}$  etwa  $2,6 \text{ MN/m}^2$ , so bildet sich in der Kontaktzone infolge Überschreitung der Haftzugfestigkeit ein Riß. Hat dieser eine Rißlänge von ca. 5 mm (Punkt a) erreicht, dann öffnet er sich durch die freigesetzte Energie spontan bis zur geometrisch vorgegebenen Endlänge der Kontaktzone. Hält man die äußere Belastung von  $2,6 \text{ MN/m}^2$  konstant (dies entspricht dem Anhalten des kraftgesteuerten Versuchs), so würde diese zwar ausreichen, den Riß weiter entlang einer Kontaktzone zu treiben, denn die dazu erforderliche Spannung im Unendlichen liegt ja unter der wirkenden Belastung (Punkt b bzw. d), zu einem Rißfortschritt über das Ende des Risses in der Kontaktzone hinaus reicht sie jedoch nicht aus. Hat demnach der Riß seine Endlänge (Länge der Kontaktzone) erreicht, so ist für die folgende Rißerweiterung die Bruchzähigkeit der Kontaktzone ohne

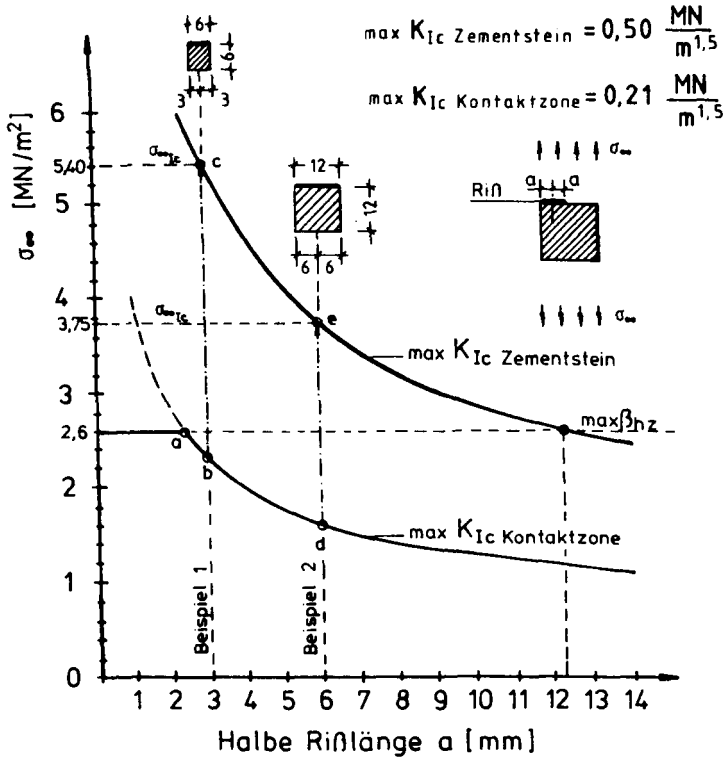


Abb. 4.22 : Mechanismus der Rißerweiterung bei hoher Bruchzähigkeit ( $\max K_{Ic}$ ) des Zementsteins (Beispiele 1 und 2)

Bedeutung. Der Riß wirkt jetzt als Initialriß für die Matrix. Die Erweiterung dieses Initialrisses hängt dann nur noch von der Bruchzähigkeit des Zementsteins ab. Wie die Abbildung zeigt, liegt bei beiden Beispielen die zum jeweiligen kritischen Spannungsintensitätsfaktor der Matrix gehörende äußere Belastung  $\sigma_{\infty}$  weit über der

herrschenden Belastung, so daß die Risse zum Stillstand kommen und auch bei weiterer Belastungssteigerung sich zunächst nicht erweitern. Eine RiBerweiterung in die Matrix hinein erfolgt erst bei Steigerung der Belastung auf einen von der RiBlänge abhängigen kritischen Belastungswert  $\sigma_{\infty IC}$ . Beim Beispiel 1 ist dazu eine Belastungssteigerung vom Punkt b bis zum Punkt c erforderlich. Qualitativ sieht das beim Beispiel 2 ebenso aus, nur reicht in diesem Fall schon eine Belastungssteigerung bis zum Punkt c aus. Ist die kritische Belastung  $\sigma_{\infty IC}$  erreicht, so tritt ein spontaner RiBfortschritt unter Ausdehnung des Initialrisses in die Matrix hinein ein. Der RiB kann nur dann zum Stehen kommen, wenn die RiBspitzen auf sogenannte RiBarrestoren treffen; das sind im wesentlichen Matrixbereiche mit einer höheren Bruchzähigkeit, Hohlräume oder Einschlüsse. Sowohl die Hohlräume als auch die Einschlüsse bewirken dabei eine Ausrundung der RiBspitze und darauf beruhend einen Abfall der an der RiBspitze wirkenden örtlichen Spannungsspitzen. Ein Weiterreißen ist dann wiederum nur bei Steigerung der Belastung möglich. Wirken jedoch keine RiBarrestoren, so kommt es zu einem schnellen RiBwachstum und schließlich zu einem durchgehenden TrennriB.

Hat der Zementstein eine niedrige Bruchzähigkeit (Abb. 4.23), so ergibt sich für den RiB mit 6 mm Endlänge (Beispiel 3) qualitativ der gleiche RiBerweiterungsmechanismus wie bei den Beispielen 1 und 2: Der RiB wird nach dem Öffnen der Kontaktzone bei Erreichen seiner Endlänge stabil, da die freigesetzte Energie nicht ausreicht, ihn in die Matrix hinein zutreiben. Ein anderer Mechanismus des RiBfortschritts ist beim RiB mit 12 mm Endlänge vorhanden. Dort liegt die kritische Belastung  $\sigma_{\infty IC}$  (Punkt e) des Zementsteins unter der wirkenden Belastung (Punkt a), so daß die freiwerdende Energie ohne Belastungssteigerung ausreicht, den RiB in die Matrix vordringen zu lassen, d.h., der RiB setzt sich spontan auch in der Matrix fort und führt schließlich zum Trennbruch, wenn er nicht auf RiBarrestoren trifft.

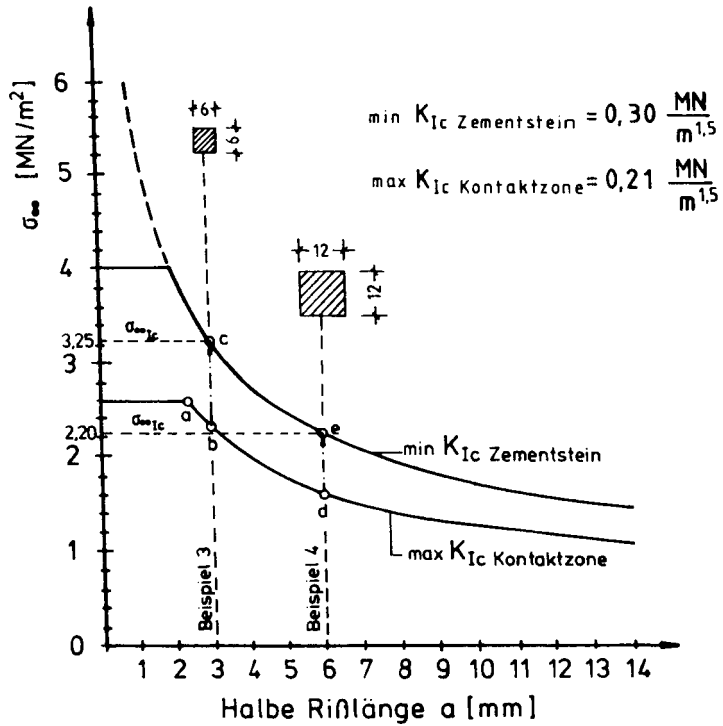


Abb. 4.23 : Mechanismus der Rißerweiterung bei niedriger Bruchzähigkeit ( $\min K_{IC}$ ) des Zementsteins (Beispiele 3 und 4)

#### 4.4.4.2 Gerader Riß im Zementstein und bogenförmiger Riß in der Kontaktzone

Um eine vergleichende Betrachtung des geraden Risses im Zementstein mit dem bogenförmigen Riß in der Kontaktzone zu ermöglichen, wird beim bogenförmigen Riß die Rißsehne  $2s$  anstelle des Rißöffnungswinkels  $2\vartheta$  als Variable eingeführt.

$$s = R \cdot \sin \vartheta \quad (4.32)$$

In Abb. 4.24 sind die auf  $s$  transformierten  $\sigma_{\infty IC}$ -Kurven des bogenförmigen Risses für den unteren Grenzwert von  $K_{IC}$  der Kontaktzone den entsprechenden Kurven des geraden Risses im Zementstein gegenübergestellt.

Aus Abb. 4.24 geht deutlich hervor, daß sich Risse in der Kontaktzone im Vergleich mit Rissen in der Zementsteinmatrix schon unter einer niedrigeren Belastung erweitern, wenn die Einschlüsse eine gewisse "kritische" Größe erreichen. Beim unteren Grenzwert der Bruchzähigkeit des Zementsteins liegt der kritische Einschlußradius  $R$  z.B. bei etwa 3 mm.

Im Gegensatz zum geraden Riß in der Kontaktzone kommt es bei bogenförmigen Rissen in dieser Zone allein aus Gründen der Rißgeometrie zu Rißarretierungen. Ein langsames Weiterreißen entlang des Einschlußumfangs tritt erst bei Steigerung der Belastung ein. Während dieses stabilen Rißwachstums wirkt der bogenförmige Riß gleichzeitig als Anriß für die Matrix, wobei die Rißlänge jetzt durch die Sehne  $2s$  gegeben ist. Ob es aber zu einem Weiterreißen in der Kontaktzone kommt oder ob sich der Riß in die Zementsteinmatrix ausdehnt, hängt von den vorhandenen Bruchzähigkeiten der Kontaktzone und des Zementsteins ab.

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge dienen die Abb. 4.25 und 4.26. In Abb. 4.25 wird ein Einschluß mit einem Durchmesser von  $d = 6,8$  mm und in Abb. 4.26 ein Einschluß mit einem Durchmesser von  $R = 13,5$  mm betrachtet (vergl. Abschnitt 4.4.4.1).

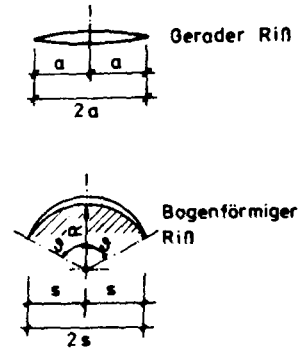
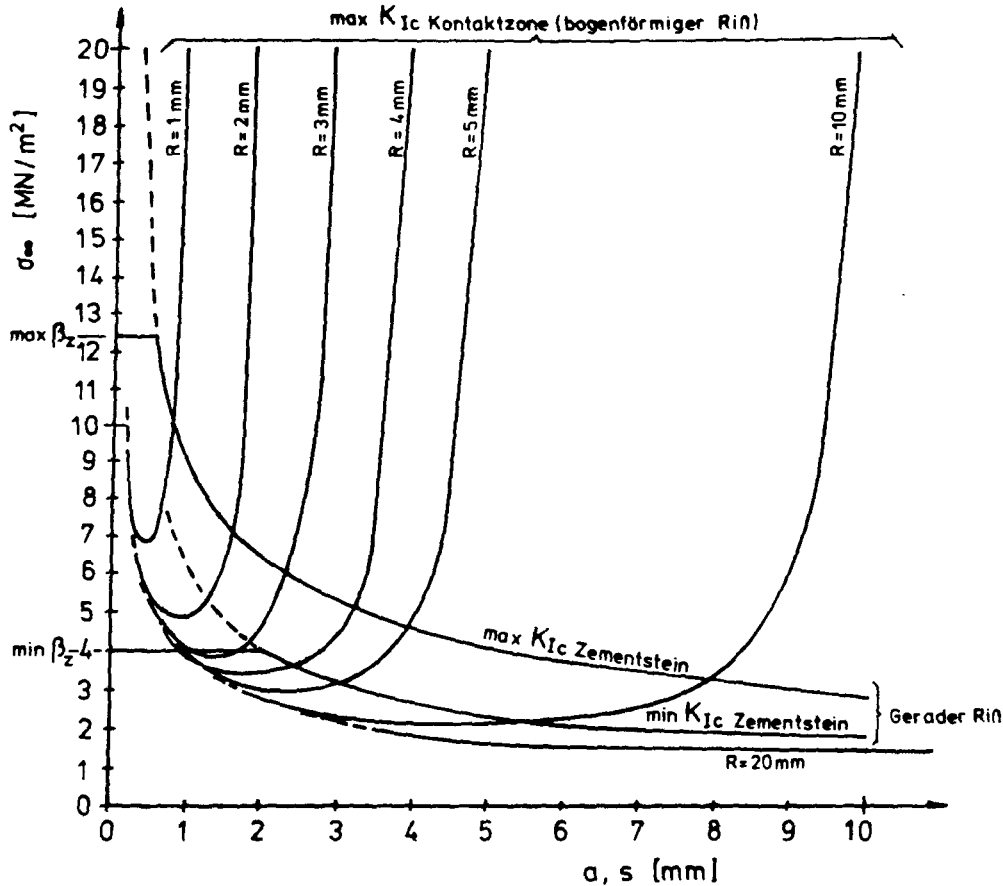


Abb. 4.24: Gegenüberstellung von geradem RiB in der Matrix und bogenförmigem RiB in der Kontaktzone

Nach Abschnitt 2.4.3 entstehen am Scheitelpunkt kreisförmiger Einschlüsse Spannungskonzentrationen von  $\max \sigma = 1,58 \sigma_{\infty}$ . D.h., daß z.B.  $\max \beta_{hz} = 2,6 \text{ MN/m}^2$  schon unter einer äußeren Belastung von

$$\sigma_{\infty} = \frac{2,60}{1,58} = 1,65 \text{ MN/m}^2$$

erreicht wird (Punkt a). Bei weiterer Steigerung der Belastung dehnt sich der Bereich, in dem die Haftfestigkeit gerade erreicht wird, immer mehr aus. Hat der so "plastizierte" Bereich eine bestimmte Länge erreicht, wird er plötzlich aufreißen. Unter welcher Belastung diese Ribbildung eintritt, hängt sehr stark von dem örtlichen mikrostrukturellen Aufbau der Kontaktzone ab.

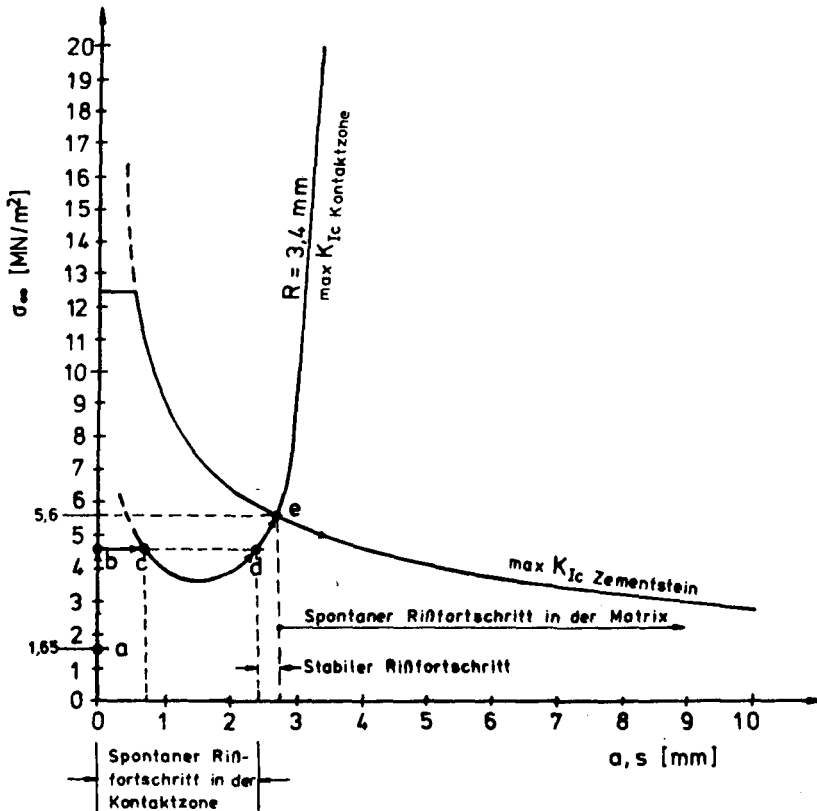


Abb. 4.25 : Ribberweiterung bei einem Einschluß mit 6,8 mm Durchmesser

Untersuchungen zu solch einer Problematik sind nicht Gegenstand dieser Arbeit, so daß die Belastung zu Rißbeginn nicht näher quantifizierbar ist. Zur Darstellung des Zusammenhangs zwischen Rißerweiterungen in der Kontaktzone und in der Matrix ist es bei dem vorliegenden Beispiel aber völlig ausreichend, einen mehr oder weniger willkürlichen Wert zu wählen. So wird angenommen, daß die Rißbildung etwa bei  $\sigma_{\infty} \sim 4$  bis  $5 \text{ MN/m}^2$  einsetzt.

Ist durch das Aufreißen der plastizierten Zone die kritische Rißlänge des bogenförmigen Risses erreicht (Punkt c), so verlängert

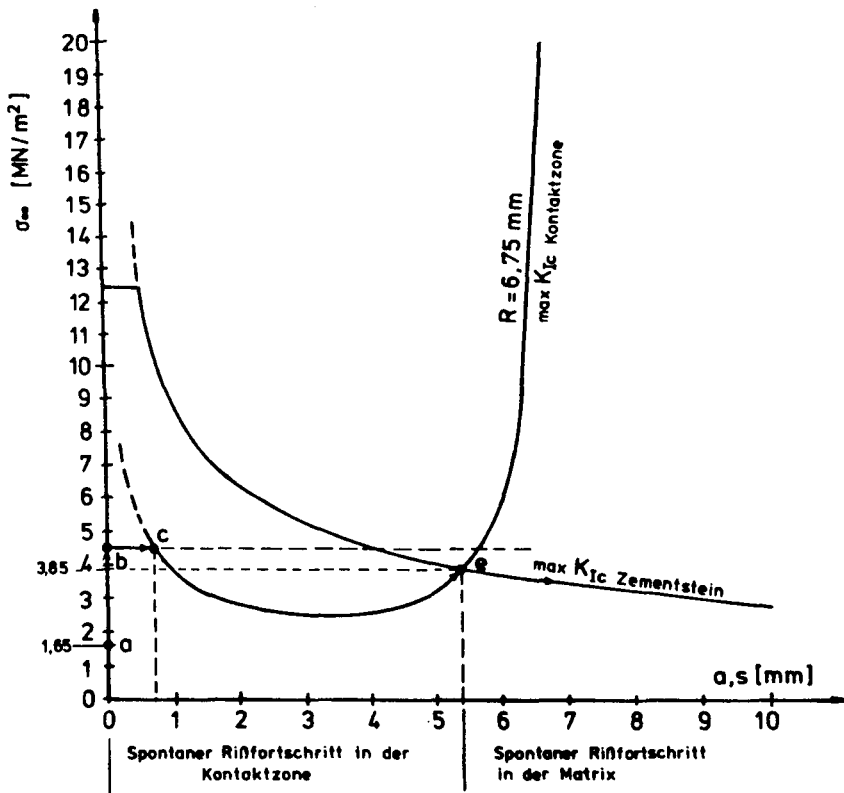


Abb. 4.26 : Rißerweiterung bei einem Einschluß mit 13,5 mm Durchmesser



sich der Riß spontan bis zum Punkt d, wo er sich zunächst bei einer Sehnenlänge von ca. 5 mm stabilisiert. Bei Steigerung der Belastung über den Punkt b hinaus erweitert sich der Riß nunmehr in der Kontaktzone nur noch in stabiler Weise.

Am Punkt e jedoch schneiden sich die Rißverlängerungskurven von Kontaktzone und Zementsteinmatrix. Hier hat der Riß die zu dieser Belastung gehörende kritische Rißlänge des Zementsteins erreicht, so daß der Riß sich spontan in die Matrix ausdehnen kann.

Liegt ein Einschluß mit einem größeren Durchmesser (Abb. 4.26) vor, so kann der Bereich des stabilen Rißfortschrittes auch fehlen. In diesem Fall setzt sich der Riß nach dem schnellen Durchlaufen der Kontaktzone auch spontan in der Zementsteinmatrix fort, da die am Punkt e zur weiteren Rißöffnung im Zementstein erforderliche Belastung  $\sigma_{\infty}$  unter der aktuellen äußeren Belastung liegt.

#### 4.4.4.3 Riß am kreisförmigen Einschluß und Riß am quadratischen Einschluß

Wie zuvor gezeigt wurde, wirken die Risse in der Kontaktzone als Initialrisse für den Rißfortschritt in der Zementsteinmatrix. Die Länge dieser Risse wird bestimmt durch die Form der Einschlüsse und die Bruchzähigkeit in der Kontaktzone. Läßt man Mechanismen der Rißarretierungen außer acht, so ist für die Zugfestigkeit des Zweistoffsystems Matrix/Einschluß die Belastung  $\sigma_{\infty}$  maßgebend, unter der sich der Riß spontan in die Zementsteinmatrix ausdehnt.

Eine vergleichende Betrachtung der Beispiele für den quadratischen Einschluß einerseits und den kreisförmigen Einschluß andererseits kann evtl. erste Anhaltspunkte liefern, ob die Zugfestigkeit des Zweistoffsystems Beton von der Kornform abhängig ist. Dieser Vergleich ist auch quantitativ möglich, da jeweils flächengleiche quadratische und kreisförmige Einschlüsse untersucht wurden.

Zur besseren Übersicht sind die  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte, die unter den getroffenen Voraussetzungen identisch mit der Zugfestigkeit sind, in Tabelle 4.4 in Abhängigkeit von der Einschlußfläche und der Einschlußform gegenübergestellt.

Einschluß- fläche [mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{\infty IC}$ [MN/m <sup>2</sup> ]		Abb.
	Quadratischer Einschluß	Kreisförmiger Einschluß	
36 (6x6)	5,40	5,60	4.19/4.22
144 (12x12)	3,75	3,85	4.19/4.23

Tabelle 4.4: Vergleich der  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte für quadratische und kreisförmige Einschlüsse

Die Gegenüberstellung zeigt, daß ein signifikanter Einfluß der Kornform bei Betrachtung eines einzelnen Einschlusses noch nicht erkennbar ist, da die  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte für Quadrat und Kreis nur unwesentlich voneinander abweichen. Eindeutig sichtbar wird bei diesem Vergleich jedoch schon jetzt die Bedeutung der Größe der Einschlüsse auf die Betonzugfestigkeit. Sie nimmt nämlich deutlich mit zunehmender Einschlußgröße ab.

## 5. Rißerweiterungen und kritische Rißlasten in Abhängigkeit von Form, Größe und Anteil der Einschlüsse

### 5.1 Allgemeines

Im Abschnitt 4 konnte gezeigt werden, daß es schon bei recht geringer Zugbelastung zu örtlichen Rißbildungen und Rißerweiterungen in der Kontaktzone zwischen Zementsteinmatrix und Einschluß kommt. Die so entstandenen Risse wirken als Initialrisse für eine weitere Rißausdehnung in die Matrix hinein.

Eine spontane Rißerweiterung, die schließlich zum Versagen des Bauteils führt, tritt ein, wenn die Belastung eine von der Bruchzähigkeit  $K_{IC}$  und der Rißlänge  $2a$  abhängige kritische Rißlast  $\sigma_{\infty IC}$  erreicht. Sieht man, wie zuvor immer vorausgesetzt,  $K_{IC}$  als einen in gewissen Grenzen schwankenden aber ansonsten für alle Rißlängen konstanten Wert an, so wird  $\sigma_{\infty IC}$  nur noch von der Rißlänge bestimmt. Da die Länge der Initialrisse bei konstanter Bruchzähigkeit der Kontaktzone durch die Form und Größe der Einschlüsse bestimmt wird, müssen diese beiden Parameter auch direkte Auswirkungen auf die kritische Rißlast haben. Bisher konnte ein solcher Einfluß aber lediglich für die Einschlußgröße nachgewiesen werden, nicht jedoch für die Einschlußform. Zum einen mag das an der Betrachtung eines einzelnen Einschlusses in einer infiniten Matrix gelegen haben, zum anderen aber auch daran, daß beim quadratischen Einschluß nur eine einzige mögliche Lage der rißbehafteten Kante zur Belastungsrichtung betrachtet wurde. Will man kornformabhängige Charakteristiken erarbeiten, so muß auch die variierende Lage der Einschlußachsen zur Belastungsrichtung berücksichtigt werden. Außerdem ist die Untersuchung unbedingt auf das Vorhandensein mehrerer Einschlüsse zu erweitern. Um jedoch letztere Betrachtungen nicht zu unübersichtlich zu gestalten, werden nachfolgend nur Matrizen mit regelmäßig angeordneten Einschlüssen untersucht.

Wie in Abschnitt 2.4.5 gezeigt wurde, läßt sich für Einschlüsse mit elliptischem Querschnitt keine globale, die Kornform repräsentierende Charakteristik angeben. Vielmehr hat jede Ellipsenform ihre eigene

Charakteristik. Ein hinsichtlich der Rißerweiterung zu erarbeitender Vergleich mit anderen Kornformen ist daher nicht eindeutig möglich. Aus diesem Grunde werden in der weiteren Arbeit Zuschläge mit elliptischem Querschnitt nicht mehr untersucht.

Um einen Bezug zum realen Beton herzustellen, werden neben der Form der Einschlüsse auch die Einschlußgröße und der Anteil der Einschlüsse am Gesamtvolumen variiert. Innerhalb einer Einzeluntersuchung sollen aber nur Einschlüsse mit gleicher Größe vorhanden sein. Vorausgesetzt wird desweiteren, daß die Matrix sonst nur noch aus Zementstein und kleinen Zuschlägen, die zur Matrix gerechnet werden können, besteht. Diese Idealisierung entspricht zwar nicht der Betonzusammensetzung bei stetigen Sieblinien, aber sie eliminiert die durch die anderen Kornformen entstehenden Störeinflüsse, die im wesentlichen als Rißarretierungen wirken. Erst diese Idealisierung erlaubt es, den alleinigen Einfluß des Größtkorns angenähert qualitativ - wenn auch nur als Mittelwert - anzugeben. Die Berechtigung für die idealisierende Annahme wird auch darin gesehen, daß nach den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen im wesentlichen daß Größtkorn (abgesehen vom Volumenanteil und dem W/Z-Wert) die Zugfestigkeit des Betons bestimmt. Bei Sieblinien mit Ausfalkörnungen ist durch diese Idealisierung ein wesentlich realistischerer Bezug zur Betonstruktur vorhanden.

Bei kugel- und würfelförmigem Zuschlägen läßt sich ein hinreichend genauer Bezug zwischen der Querschnittsfläche und dem Volumen herstellen, während das bei tetraedischen Zuschlägen, deren Querschnitt ja dreieckig ist, nicht möglich ist. Die Annahme eines kennzeichnenden dreieckigen Querschnitts wäre immer mit so großen Ungenauigkeiten behaftet, daß ein Vergleich mit anderen Kornformen zu ungenauen und nicht vergleichbaren Ergebnissen führen würde. Bei den weiteren Untersuchungen werden daher nur noch kugelförmige und würfelförmige Zuschläge betrachtet.

## 5.2 Kreisförmige Einschlüsse

Grundlage der Berechnungen ist eine Zementsteinmatrix mit äquidistant angeordneten kugelförmigen Einschlüssen (Abb. 5.1). In den jeweiligen Einzelberechnungen wird dann sowohl der Durchmesser der Kugeln als auch der Anteil der Kugeln am Gesamtvolumen variiert.

Da nur das ebene Problem betrachtet werden soll (wegen der Begründung vergl. Abschnitt 2.4.4), beschränkt sich die Berechnung auf einen durch die Medianebene der Kugeln geführten ebenen Schnitt.

Der Kugeldurchmesser wird von 5 mm bis 40 mm variiert; der Anteil der Kugeln am Gesamtvolumen von 10% bis 80%.

Wie bei den bisherigen Untersuchungen erfolgt eine parallele Berechnung für die oberen und unteren Grenzwerte der Bruchzähigkeiten.

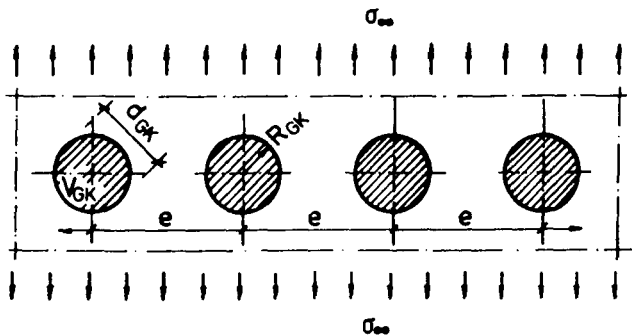


Abb. 5.1 : Ausschnitt aus einer unendlichen Reihe mit kugelförmigen Einschlüssen

Für die nachfolgenden Berechnungen gelten folgende Bezeichnungen :

$V_{GK}$  = Volumen des Größtkornes

$d_{GK}$  = Durchmesser des Größtkornes

$R_{GK}$  = Radius des Größtkornes

$e$  = Abstand der Größtkörner untereinander

$V_e$  = Zu einem Größtkorn gehörende Einheit des Gesamtvolumens

$\chi_{GK}$  = Volumenanteil des Größtkornes am Gesamtvolumen

Die Beziehungen zwischen den einzelnen Größen sind definiert durch :

$$V_{GK} = \frac{4}{3} \pi R_{GK}^3 \quad (5.1)$$

$$\chi_{GK} = \frac{V_{GK}}{V_e} \quad (5.2)$$

$$e = \sqrt[3]{V_e} \quad (5.3)$$

$$e = R_{GK} \sqrt[3]{\frac{4 \pi}{3 \chi_{GK}}} \quad (5.4)$$

Für jeden Einschluß entsteht nach Abschnitt 4.4.3 eine örtliche Ribbkonfiguration nach Abb. 5.2.

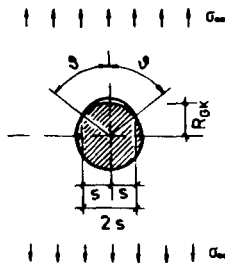


Abb. 5.2:  
Ribbkonfiguration um einen  
einzelnen runden Einschluß

Bei der vorausgesetzten regelmäßigen Anordnung der Einschüsse entsteht eine unendliche Reihe bogenförmiger Risse mit gleichen Abständen untereinander. Diese Reihe kann man als eine kollineare Ribbreihe mit  $2a = 2s$  als Länge des Einzelrisses ansehen (Abb. 5.5).

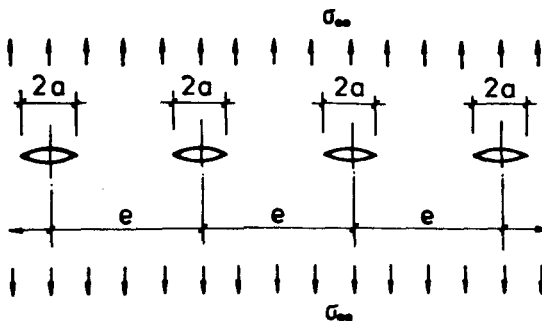


Abb. 5.3 : Kollineare Ribbreihe

Zur Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors einer solchen unendlichen kollinearen Ribreihe dient die von Westergaard in [113] angegebene Gleichung (5.5), die hier aber mit den Bezeichnungen der eigenen Arbeit wiedergegeben wird.

$$K_I = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{e}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{e}\right)} \quad (5.5)$$

Setzt man  $K_I = K_{IC}$  und stellt nach  $\sigma_{\infty IC} = \sigma_{\infty}$  um, so ergibt sich aus (5.5) :

$$\sigma_{\infty IC} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{e}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{e}\right)}} \quad (5.6)$$

Die Gleichungen (5.5) und (5.6) wurden in Abhängigkeit vom Volumenanteil, vom Größtkorndurchmesser und von den Grenzwerten der Bruchzähigkeiten der Kontaktzone und der Zementsteinmatrix im Anhang B5 in Form von Tabellen ausgewertet (Tabelle B5.1 und Tabelle B5.2).

Da sowohl die  $K_{IC}$ -Werte der Kontaktzone als auch die  $K_{IC}$ -Werte der Zementsteinmatrix zu variieren sind, ergeben sich insgesamt vier Kombinationen.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in den Diagrammen Abb. B 5.1 bis Abb. B 5.4 des Anhanges B 5 für den Volumenanteil  $\kappa_{GK}$  als Kurvenparameter und in den Diagrammen B 5.5 bis B 5.8 für den Größtkorndurchmesser  $d_{GK}$  als Kurvenparameter graphisch dargestellt.

Alle Diagramme lassen einen überaus großen Einfluß der Einschlußgröße auf die kritische Riblast erkennen. Sie zeigen aber auch einen bedeutenden Einfluß des Volumenanteils  $\kappa_{GK}$  des Größtkorns. So ergibt z.B. eine Reduzierung des Korndurchmessers von 30 mm auf 10 mm bei gleichbleibendem Volumenanteil eine Erhöhung der kritischen Riblast auf das 2,5-fache.

Der Einfluß des Volumenanteils des Größtkornes auf die kritische Riblast verstärkt sich mit zunehmendem Größtkorndurchmesser und mit abnehmenden  $K_{IC}$ -Werten. Somit hat der Volumenanteil des Größtkorns bei großen Bruchzähigkeiten der Komponenten (Matrix und Kontaktzone) eine wesentlich geringere Bedeutung als bei niedrigen Bruchzähigkeiten.

Einen beachtenswerten Einfluß auf die kritische RiBlast weist auch die Bruchzähigkeit der Kontaktzone auf. Dies war zu erwarten, da durch die Bruchzähigkeit der Kontaktzone die Länge der Initialrisse in der Zementsteinmatrix bestimmt wird: Je größer die Bruchzähigkeit ist, um so kleiner ist der Initialriß und um so größer wird die kritische RiBlast. Zur Verdeutlichung der Bedeutung der Bruchzähigkeit der Kontaktzone sind in Abb. 5.4 die  $\bar{\sigma}_{\infty Ic}$ -Werte bei minimaler und maximaler Bruchzähigkeit des Zementsteins in Abhängigkeit vom Größtkorndurchmesser  $d_{GK}$  sowohl für die minimalen als auch für die maximalen Bruchzähigkeiten der Kontaktzone aufgetragen. Wegen der besseren Übersichtlichkeit beschränkt sich die Darstellung auf den Volumenanteil  $\kappa_{GK} = 0,2$ . Für alle anderen Volumenanteile ergibt sich qualitativ ein ähnliches Ergebnis.

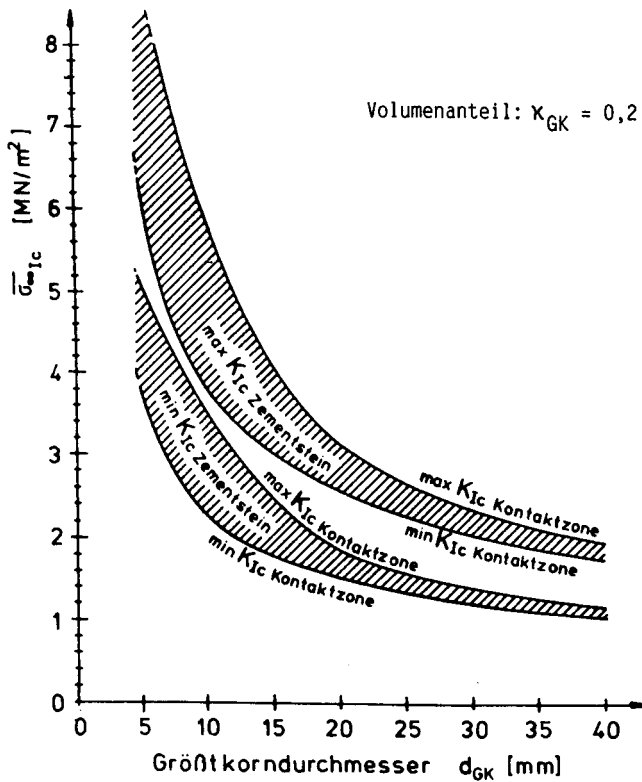


Abb. 5.4: Einfluß der Bruchzähigkeit der Kontaktzone auf die kritische RiBlast



Aus Abb. 5.4 ist zu ersehen, daß die Bruchzähigkeit der Kontaktzone die kritische Rißlast besonders bei Einschlüssen mit  $d_{GK} \leq 15 \text{ mm}$  stark beeinflusst. Der Unterschied zwischen den kritischen Rißlasten für maximale und minimale Bruchzähigkeit der Zementsteinmatrix erreicht etwa bei einem Größtkorndurchmesser von 10 mm seinen Maximalwert. Bei diesem Durchmesser ist die kritische Rißlast bei hoher Bruchzähigkeit der Kontaktzone etwa um 50% größer als bei niedriger Bruchzähigkeit der Kontaktzone. Mit zunehmendem Größtkorndurchmesser verringert sich der Einfluß der Bruchzähigkeit stark, so beträgt der Unterschied der kritischen Rißlasten für  $\min K_{IC}$  der Kontaktzone und  $\max K_{IC}$  der Kontaktzone bei Einschlüssen mit  $d_{GK} = 40 \text{ mm}$  nur noch ca. 10%. Auch bei Einschlüssen mit  $d_{GK} < 10 \text{ mm}$  fällt der Unterschied ab, allerdings wesentlich weniger als mit zunehmendem Durchmesser. Bei  $d_{GK} = 5 \text{ mm}$  beträgt nämlich der Unterschied der kritischen Rißlasten immer noch etwa 30%.

Die Diagramme des Anhangs B 5 verdeutlichen auch, daß in extremen Fällen, z.B. bei großem Volumenanteil des Größtkorns, großem Korndurchmesser und niedrigen Bruchzähigkeiten, die kritische Rißlast sehr gering werden kann. Im vorliegenden Fall beträgt sie bei  $\kappa_{GK} = 0,7$  nur noch etwa  $0,5 \text{ MN/m}^2$  ( $0,5 \text{ N/mm}^2$ ).

Eine Variation der Belastungsrichtung entfällt beim kreisförmigen Einschluß, da wegen dessen Rotationssymmetrie bei jeder beliebigen Lage des Einschlusses zur Belastungsrichtung immer nur senkrecht zur Belastungsrichtung verlaufende Risse mit gleichen Endlängen entstehen. Die kornformabhängige charakteristische kritische Rißlast  $\bar{\sigma}_{\infty IC}$  ist demnach für kreisförmige Einschlüsse von der Belastungsrichtung unabhängig. Bei vom Kreis abweichenden Einschlußformen hingegen muß auch die Lage des Einschlusses zur Belastungsrichtung mit in die Berechnung der charakteristischen kritischen Rißlast einbezogen werden.

### 5.3 Quadratische Einschlüsse

Bei Einschlüssen mit quadratischem Querschnitt kann die rißbehaf-tete Kante zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$  zur Belastungsrichtung orientiert sein. Innerhalb dieses Intervalls ( $0^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$ ) ist das Auftreten jeder Rißrichtung gleich wahrscheinlich. Will man eine kornform-abhängige charakteristische kritische Rißlast ermitteln, so ist zu beachten, daß  $\sigma_{\infty IC}$  ebenfalls von der Orientierung des Risses zur Belastungsrichtung abhängt.

Als kornformabhängiger Kennwert bietet sich die mittlere kriti-sche Rißlast  $\bar{\sigma}_{\infty IC}$  an. Sie ergibt sich durch Integration der Funk-tion  $\sigma_{\infty IC} = f(\beta)$  über ein repräsentatives Intervall und anschlie-ßender Division durch die Intervalllänge. Zur Bestimmung der unbe-kannten Funktion  $\sigma_{\infty IC} = f(\beta)$  eignet sich ein kombiniertes analy-tisch - graphisches Verfahren. Dazu muß in einem ersten Schritt  $\sigma_{\infty IC}$  für diskrete Werte von  $\beta$  bestimmt werden. Im vorliegenden Fall sollen das die Werte  $\beta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$  und  $45^\circ$  sein.

Analog zum Vorgehen im Abschnitt 5.2 wird wiederum eine unend-liche Reihe von Einschlüssen - jetzt mit quadratischem Querschnitt - betrachtet (Abb. 5.5). Innerhalb der Reihe hat jeder Einschluß die gleiche Richtung zur Belastungsrichtung.

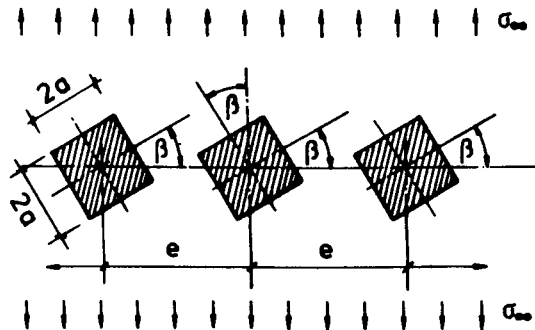


Abb. 5.5 : Unendliche Reihe quadratischer Einschlüsse

Unter einer bestimmten Belastungsstufe bilden sich an den am stärksten beanspruchten Ecken Risse, die sich entlang einer Kante spontan erweitern, so daß insgesamt eine theoretische Rißkonfiguration nach Abb. 5.6 entsteht. Diese Rißanordnung bildet die Grundlage der weiteren Berechnung.

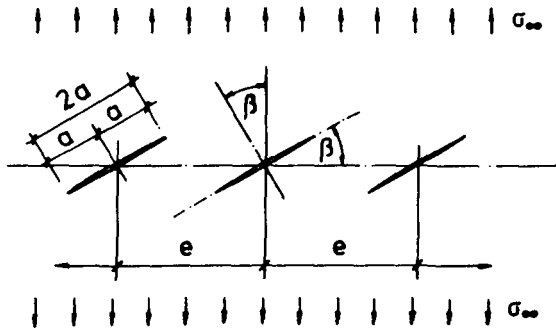


Abb. 5.6 : Unendliche Reihe schrägliegender Risse

Einfache analytische Formeln zur Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren solcher Rißsysteme sind nicht bekannt. Gross gibt in [31] jedoch ein generelles Verfahren an, das sich auf den vorliegenden Fall anwenden läßt, wenn man die schräg zum Riß angreifende Belastung in einachsigen Zug senkrecht zum Riß und in reinen Schub aufspaltet (Abb. 5.7).

Nach [31] ergeben sich die Spannungsintensitätsfaktoren bei einachsiger Zugbeanspruchung senkrecht zum Riß durch :

$$K_I^{\sigma} = \sigma_{\infty} \cdot \cos^2 \beta \sqrt{\pi a} F_I(\lambda, \beta) \quad (5.7)$$

$$K_{II}^{\sigma} = \sigma_{\infty} \cos^2 \beta \sqrt{\pi a} F_{II}(\lambda, \beta) \quad (5.8)$$

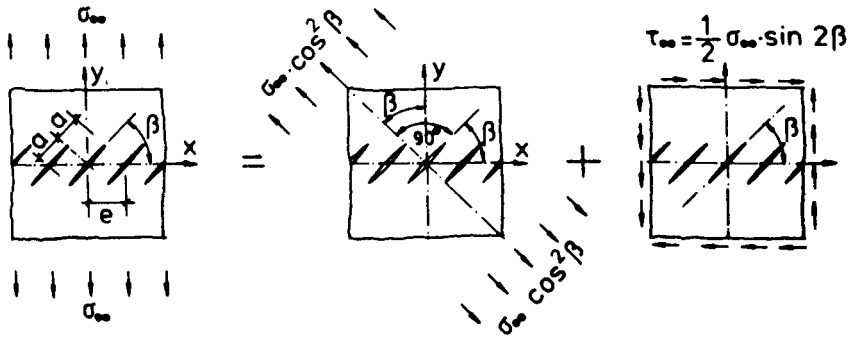


Abb. 5.7 : Zerlegung der schräg zum Rib angreifenden Belastung

In (5.7) und (5.8) sind die Funktionen  $F_I$  und  $F_{II}$  definiert durch:

$$F_I = 1 + \frac{(\lambda\pi)^2}{6} (2 \cos^2 \beta - \cos 4\beta) + \frac{(\lambda\pi)^4}{360} (35 - 30 \cos 2\beta + 42 \cos 4\beta - 28 \cos 6\beta) \quad (5.9)$$

$$F_{II} = \frac{(\lambda\pi)^2}{6} (-\sin 2\beta + \sin 4\beta) + \frac{(\lambda\pi)^4}{360} (10 \sin 2\beta - 28 \sin 4\beta - 28 \sin 6\beta) \quad (5.10)$$

Bei reiner Schubbeanspruchung lauten die Beziehungen :

$$K_I^T = \tau_\infty \cdot 0,5 \sin 2\beta \sqrt{\pi a} G_I(\lambda, \beta) \quad (5.11)$$

$$K_{II}^T = \tau_{\infty} \cdot 0,5 \sin 2\beta \sqrt{\pi a} G_{II}(\lambda, \beta) \quad (5.12)$$

Mit

$$G_I = F_{II} \quad (5.13)$$

$$G_{II} = 1 + \frac{(\lambda\pi)^2}{6} \cos 4\beta + \frac{(\lambda\pi)^4}{360} (15 - 10 \cos 2\beta - 14 \cos 4\beta + 28 \cos 6\beta) \quad (5.14)$$

In allen Gleichungen ist  $\lambda$  definiert als :

$$\lambda = \frac{a}{e} \quad (5.15)$$

$\lambda$  ist eine von der Rißlänge und dem Rißabstand abhängige Konstante, die sich bei vorgegebenem Volumenanteil des Einschlusses alleine durch diesen Volumenanteil  $\kappa_{GK}$  ausdrücken läßt, wie nachfolgende Herleitung zeigt.

$$\begin{aligned} b_{GK} &= 2a \\ \kappa_{GK} &= \frac{V_{GK}}{V_e} \\ e &= \sqrt[3]{V_e} \\ 2a &= \sqrt[3]{V_{GK}} \\ \lambda &= \frac{\sqrt[3]{V_{GK}}}{2\sqrt[3]{V_e}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\kappa_{GK}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$a = e \frac{1}{2} \sqrt[3]{\kappa_{GK}} \quad (5.17)$$

Die Funktionen  $F_I$ ,  $F_{II}$ ,  $G_I$  und  $G_{II}$  beschreiben die Geometrie der Rißkonfiguration. Für konstante Werte von  $\lambda$  und  $\beta$  sind sie ebenfalls konstant.

Die Auswertung der Gleichungen erfolgt tabellarisch (Tabelle B 5.3 bis B 5.9), und zwar für die gleichen Rißabstände  $e$ , die in Abschnitt 5.2 für den runden Zuschlag zugrunde gelegt wurden. Durch diese Vorgehensweise wird später ein Vergleich der Kurvenverläufe von rundem Einschluß und quadratischem Einschluß in einem Diagramm möglich.

In einem zweiten Schritt werden die tabellarisch ermittelten  $\sigma_{\infty Ic}$ -Werte in Abhängigkeit von  $\beta$  aufgetragen und der Verlauf der Funktion graphisch bestimmt. Der Mittelwert  $\bar{\sigma}_{\infty Ic}$  ergibt sich aus Gleichung (5.18).

$$\bar{\sigma}_{\infty Ic} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{\infty Ic} d\beta \quad (5.18)$$

Die Integration erfolgt unter Anwendung der Simpsonschen Regel (vergl. z.B. [13]) für das Intervall  $0 \leq \beta \leq \pi/2$  mit einer Streifenbreite von  $h = \pi/36$ . Durch diese Einteilung ergeben sich 19 Stützstellen ( $i = 0, 1, 2 \dots 17, 18$ ). Obwohl die Funktionswerte aus der Zeichnung abgegriffen werden, ist bei solch großer Anzahl von Stützstellen schon eine große Genauigkeit vorhanden. Mit den getroffenen Annahmen lautet die problembezogene Gleichung (5.19) auf der Grundlage der Simpsonschen Regel :

$$\bar{\sigma}_{\infty Ic} \approx \frac{2h}{3\pi} \left[ \sigma_{\infty 0} + 4\sigma_{\infty 1} + 2\sigma_{\infty 2} + 4\sigma_{\infty 3} + \dots + 4\sigma_{\infty 17} + \sigma_{\infty 18} \right] \quad (5.19) \quad 1)$$

- 
- 1) Wegen der Vielzahl der zu zeichnenden Kurven und des großen Umfanges der tabellenmäßigen Berechnung sind die Einzeluntersuchungen dieser Arbeit nicht beigefügt; sie liegen aber beim Verfasser zur Einsicht und evtl. Übersendung bereit.

Zur Verdeutlichung wird die beschriebene Vorgehensweise jedoch im Anhang B6 anhand eines Beispiels dargestellt.

Die Endergebnisse aller Berechnungen der charakteristischen kritischen RiBlasten sind in den Tabellen B 5.10 (für  $\min K_{IC}$ ) und B 5.11 (für  $\max K_{IC}$ ) zusammengefaßt und in den Abb. B 5.9 bis B 5.12 graphisch dargestellt (Anhang B 5).

Die Diagramme verdeutlichen, daß auch bei Einschlüssen mit quadratischem Querschnitt die charakteristischen kritischen RiBlasten  $\overline{\sigma}_{\infty IC}$  stark von der Einschlußgröße und vom Volumenanteil abhängen. Bei kleinen Einschlüssen überwiegt der Einfluß der Einschlußgröße, bei großen Einschlüssen der des Volumenanteils. Es ist daher nicht generell möglich dem einen oder dem anderen Parameter die größere Bedeutung zuzumessen.

Der Zusammenhang zwischen  $\overline{\sigma}_{\infty IC}$  und der Einschlußgröße ist etwa parabelförmig, während zwischen  $\overline{\sigma}_{\infty IC}$  und dem Volumenanteil ein annähernd linearer Zusammenhang besteht. Dies gilt in gleicher Weise für niedrige und für hohe Bruchzähigkeiten des Zementsteins.

#### 5.4 Vergleich von Einschlüssen mit quadratischem und kreisförmigem Querschnitt

Ein Vergleich der Ergebnisse für Einschlüsse mit Kreisquerschnitt mit den Ergebnissen für Einschlüsse mit quadratischem Querschnitt soll zeigen, wie sich die unterschiedlichen Einschlußformen auf die charakteristische kritische Rißlast auswirken.

Wie gezeigt wurde, hängt die charakteristische kritische Rißlast einer Matrix mit kreisförmigen Einschlüssen von der Einschlußgröße, dem Anteil des Größtkorns am Gesamtvolumen und der Bruchzähigkeit der Matrix ab, wenn eine konstante Bruchzähigkeit der Kontaktzone vorausgesetzt wird. Bei einer Matrix mit quadratischen Einschlüssen entfällt die Abhängigkeit von der Bruchzähigkeit der Kontaktzone, da in diesem Fall die Länge der Initialrisse alleine durch die Kantenlänge der Einschlüsse vorgegeben ist.

Da eine vergleichende Betrachtung sämtlicher bisher untersuchter Volumenanteile  $\chi_{GK}$  unnötige Wiederholungen mit sich brächte, beschränkt sich der Vergleich auf die beiden Grenzwerte der untersuchten Volumenanteile ( $\chi_{GK} = 0,1$  und  $\chi_{GK} = 0,8$ ). Wegen der übergeordneten Bedeutung der Bruchzähigkeit der Zementsteinmatrix muß ein getrennter Vergleich für niedrige und hohe Bruchzähigkeit der Matrix durchgeführt werden. Zu jedem Einzelvergleich gehören drei Kurven: Eine Kurve für den quadratischen Einschluß und zwei Kurven für den kreisförmigen Einschluß. Die beiden Kurven für die Einschlüsse mit kreisförmigem Querschnitt beziehen sich auf die minimale und die maximale Bruchzähigkeit der Kontaktzone.

Für den Volumenanteil  $\chi_{GK} = 0,1$  konnten beide zugehörigen Einzelvergleiche in einem Diagramm (Abb. 5.8) dargestellt werden, für den Volumenanteil  $\chi_{GK} = 0,8$  war das wegen sich überschneidender Kurven und der daraus resultierenden Unübersichtlichkeit nicht möglich. Bei  $\chi_{GK} = 0,8$  erfolgte daher eine getrennte Darstellung der Einzelvergleiche in den Abb. 5.9 und 5.10.



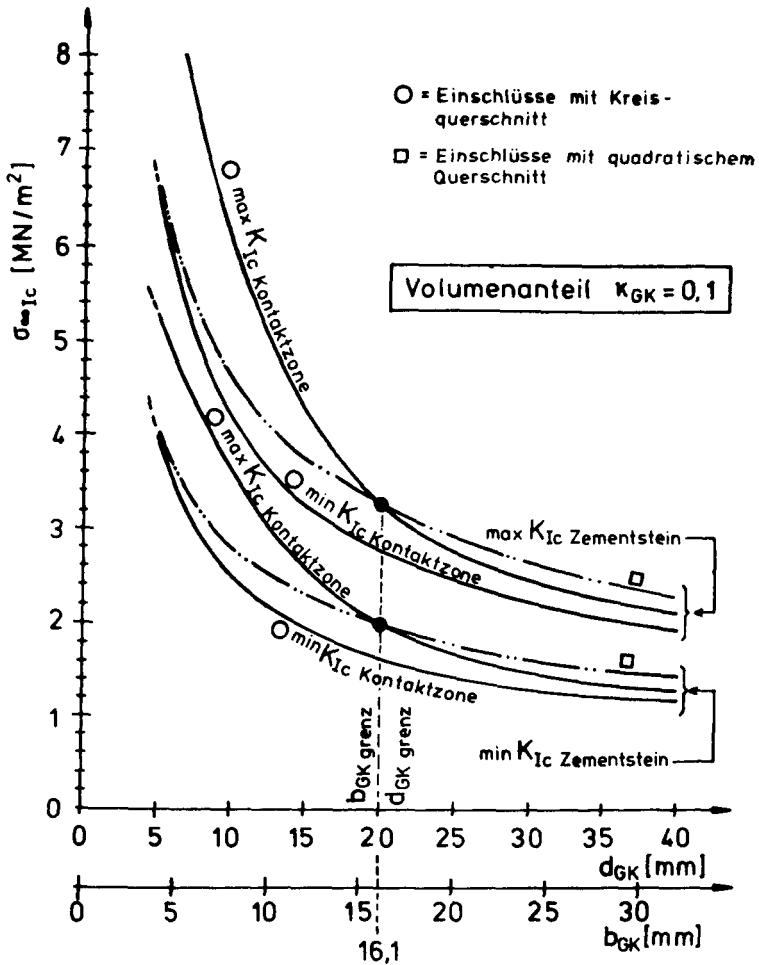


Abb. 5.8: Vergleich von quadratischen und kreisförmigen Einschlüssen bei einem Volumenanteil von  $\chi_{GK} = 0,1$

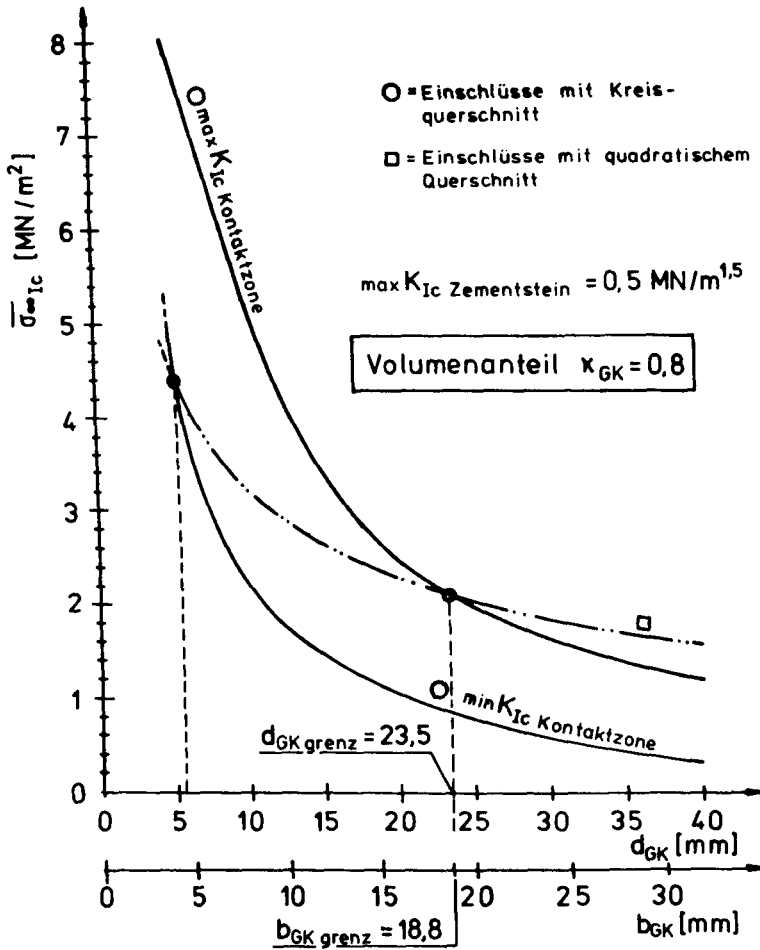


Abb. 5.9: Vergleich von quadratischen mit kreisförmigen Einschlüssen bei einem Volumenanteil  $x_{GK} = 0,8$  und hoher Bruchzähigkeit der Zementsteinmatrix

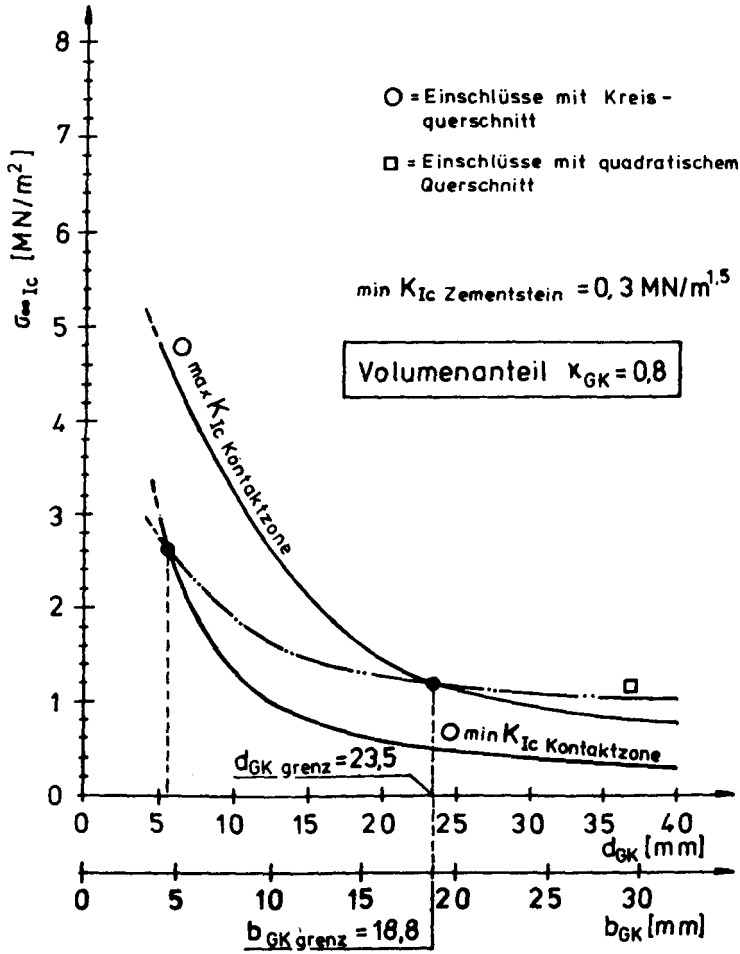


Abb. 5.10: Vergleich von quadratischen mit kreisförmigen Einschlüssen bei einem Volumenanteil  $x_{GK} = 0,8$  und geringer Bruchzähigkeit der Zementsteinmatrix

Die graphischen Darstellungen belegen eindeutig, daß es nicht generell möglich ist, die höhere charakteristische kritische Rißlast einem der beiden Einschlußquerschnitte zuzuordnen. Insbesondere zeigt sich, daß die Ergebnisse stark von der Einschlußgröße ( $d_{GK}$  bzw.  $b_{GK}$ ) und vom Betrag sowohl der Bruchzähigkeit der Kontaktzone als auch der Bruchzähigkeit der Zementsteinmatrix abhängen.

Aus Abb. 5.8 geht hervor, daß bei einem Volumenanteil von  $\chi_{GK} = 0,1$  und geringer Bruchzähigkeit der Kontaktzone die Matrix mit quadratischen Einschlüssen für alle untersuchten Einschlußgrößen immer höhere charakteristische kritische Rißlasten aufweist als die Matrix mit kreisförmigen Einschlüssen. Diese Aussage gilt sowohl für eine niedrige als auch für eine hohe Bruchzähigkeit der Matrix. Weist jedoch die Kontaktzone eine hohe Bruchzähigkeit auf, so wird eine differenziertere Aussage erforderlich. Dann nämlich hängt es von der Einschlußgröße ab, ob bei kreisförmigen oder bei quadratischen Einschlüssen größere Rißlasten auftreten. Ist der Durchmesser der kugelförmigen Einschlüsse kleiner als  $d_{GK} = 20$  mm, so ergibt sich bei diesen Einschlüssen eine größere charakteristische kritische Rißlast als bei den volumengleichen würfelförmigen Einschlüssen mit  $b_{GK} < 16,1$  mm. Bei Einschlußdurchmessern von  $d_{GK} > 20$  mm oder bei Kantenlängen von  $b_{GK} > 16,1$  mm liefern hingegen die würfelförmigen Einschlüsse die größere kritische Rißlast. Für den Volumenanteil  $\chi_{GK} = 0,1$  liegt der Schnittpunkt der Kurven für kugelförmige bzw. würfelförmige Einschlüsse bei einem Grenzdurchmesser von  $d_{GK \text{ grenz}} = 20$  mm bzw. bei einer Grenzkantenlänge von  $b_{GK \text{ grenz}} = 16,1$  mm.

Beträgt der Volumenanteil des Größtkornes  $\chi_{GK} = 0,8$  (Abb. 5.9 und 5.10), so ergeben sich qualitativ die gleichen Ergebnisse wie beim Volumenanteil von  $\chi_{GK} = 0,1$ . Zusätzlich ist jetzt auch ein Schnittpunkt der  $\overline{\sigma}_{\infty, IC}$ -Kurve des quadratischen Einschlusses mit der entsprechenden Kurve des kreisförmigen Einschlusses bei niedriger Bruchzähigkeit der Kontaktzone vorhanden, wengleich bei einem sehr kleinen Einschlußdurchmesser von  $d_{GK \text{ grenz}} \sim 5$  mm. Bei hoher Bruchzähigkeit der Kontaktzone hingegen beträgt der Grenzdurchmesser

$d_{GK\ grenz} = 23,5$  mm und die Grenzkantenlänge des volumengleichen Würfels  $b_{GK\ grenz} = 18,9$  mm. D.h., daß sich der Grenzdurchmesser bzw. die Grenzkantenlänge mit zunehmender Volumenanteil  $\chi_{GK}$  und mit zunehmender Bruchzähigkeit zu höheren Werten verschiebt. In Abb. 5.11 ist dieser Sachverhalt durch die Abgrenzung der Bereiche, in denen die würfelförmigen oder die kugelförmigen Einschlüsse die charakteristische kritische Rißlast bestimmen, dargestellt.

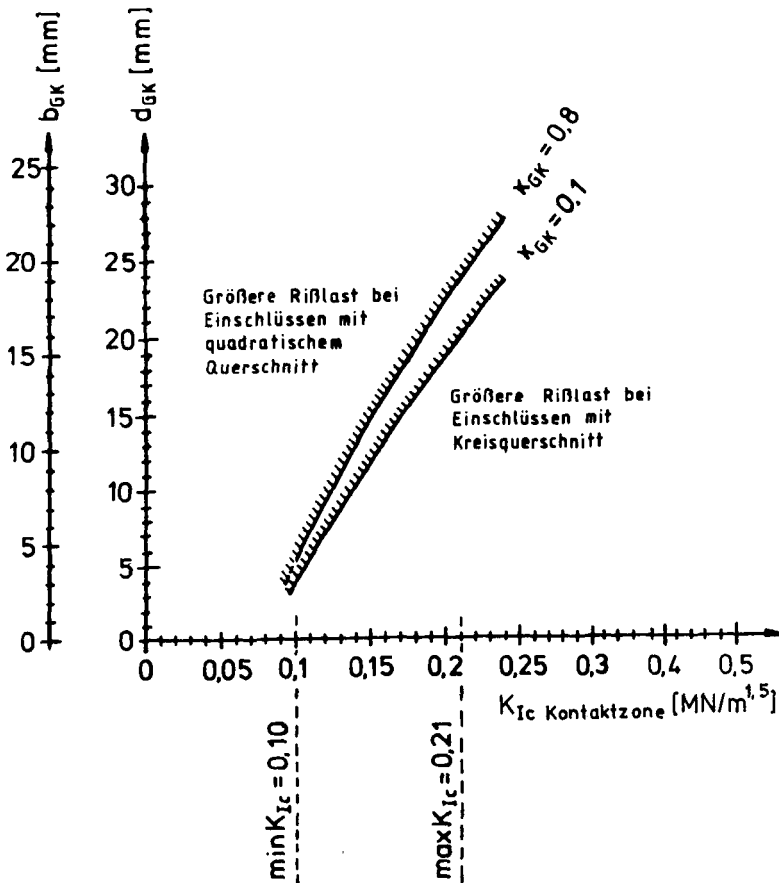


Abb. 5.11: Abgrenzung der Bereiche in denen kugelförmige oder würfelförmige Einschlüsse die charakteristische kritische Rißlast bestimmen

Betrachtet man z.B. eine mittlere Bruchzähigkeit der Kontaktzone von  $K_{IC} \sim 0,15 \text{ MN/m}^2$ , so ergibt sich schon bei Kantenlängen von etwa 12 mm eine höhere charakteristische kritische RiBlast bei würfelförmigen Einschlüssen.

### 5.5 Anwendung der Diagramme auf Sieblinien

Die Untersuchungen in den vorhergehenden Abschnitten haben gezeigt, daß die kritische Rißlast eines Betons bei konstanter Bruchzähigkeit des Zementsteins von der Korngröße, der Kornform, dem Volumenanteil des Zuschlags am Gesamtbetonvolumen und, allerdings nur bei runden Zuschlagkörnern, von der Bruchzähigkeit der Kontaktzone beeinflußt wird. Bis auf die Bruchzähigkeit der Kontaktzone sind alle diese Parameter implizit in der Sieblinie enthalten. Eine exakte Erfassung des Einflusses der gesamten Kornverteilung der Sieblinie auf die kritische Rißlast stößt auf große Schwierigkeiten. Da aber bei konstanten Bruchzähigkeiten die Korngröße der Haupteinflußparameter ist, genügt es in erster Näherung nur die durch die Sieblinie gegebene obere Korngruppe zu betrachten und für diese anhand der Diagramme des Anhanges B5 eine mittlere kritische Rißlast zu bestimmen.

Die Charakterisierung der oberen Korngruppe durch eine einzige Korngröße, z.B. durch die mittlere arithmetische Korngröße oder durch die über das mittlere Volumen der Zuschläge in der Korngruppe bestimmte Korngröße, ist wegen der weiten Stufung ( z.B. 16 mm bis 31,5 mm) der Sieblinie verhältnismäßig grob. Insbesondere findet bei einem solchen Vorgehen die Nichtlinearität zwischen kritischer Rißlast und Korngröße keine hinreichende Berücksichtigung. Eine angenäherte, für den vorliegenden Fall aber genügend genaue Erfassung der Nichtlinearität ergibt sich bei einer Approximation des jeweiligen Kurvenstückes durch einen Polygonzug mit drei Stützstellen. Um das zu erreichen, werden zunächst die kritischen Rißlasten für die untere, mittlere und obere Korngröße der Größtkorngruppe bestimmt und mit diesen Werten eine mittlere kritische Rißlast durch näherungsweise Integration mit der Trapezregel berechnet. Für kugelförmige Zuschläge gilt dabei Gleichung (5.20) und für kubische Zuschläge Gleichung (5.21).

$$\bar{\sigma}_{\infty Ic m} = \frac{1}{4} \left( \bar{\sigma}_{\infty Ic du} + 2 \bar{\sigma}_{\infty Ic dm} + \bar{\sigma}_{\infty Ic do} \right) \quad (5.20)$$

$$\bar{\sigma}_{\infty Ic m} = \frac{1}{4} \left( \bar{\sigma}_{\infty Ic bu} + 2 \bar{\sigma}_{\infty Ic bm} + \bar{\sigma}_{\infty Ic bo} \right) \quad (5.21)$$

$\bar{\sigma}_{\infty Ic m}$  = mittlere kritische Reißlast

do = oberer Korndurchmesser

du = unterer Korndurchmesser

dm = mittlerer Korndurchmesser

bo = obere Kornkantenlänge

bu = untere Kornkantenlänge

bm = mittlere Kornkantenlänge

Die Vorgehensweise wird durch Abb. 5.12 verdeutlicht.

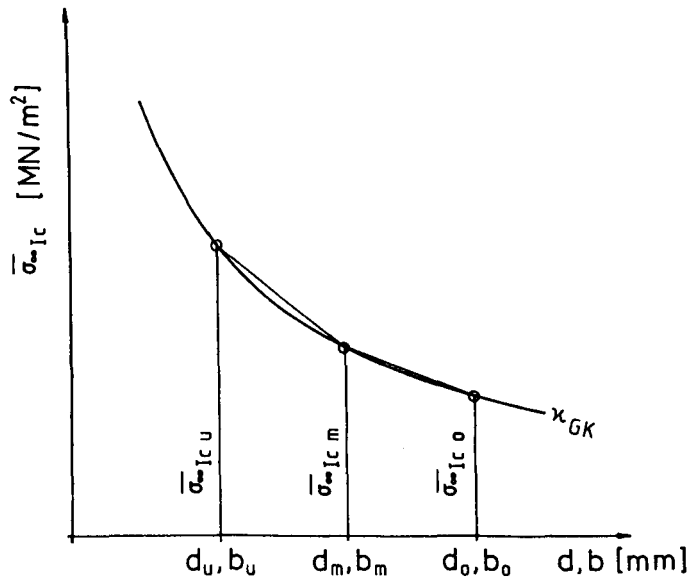


Abb. 5.12: Bestimmung der mittleren kritischen Reißlast



Da die Sieblinie mit Quadratlochsieben bestimmt wird, sind die Grenzdurchmesser kugelförmiger Zuschläge und die Grenzkantenlängen kubischer Zuschläge identisch, die zugehörigen Kornvolumina jedoch unterschiedlich. Der Kornaufbau innerhalb der betrachteten Korngruppe ist daher bei kugelförmigen und bei kubischen Zuschlägen unterschiedlich, obwohl die Zuschlagmenge in beiden Fällen gleich ist. Unter der Voraussetzung einer gleichen Kornrohndichte enthält dann das Gemisch aus kugelförmigen Zuschlägen eine größere Anzahl von Zuschlagkörnern als das Gemisch aus kubischen Zuschlägen. Gleichzeitig ist jedoch das mittlere Volumen kubischer Zuschläge größer als das von kugelförmigen Zuschlägen. Die in den vorhergehenden Abschnitten vorausgesetzte Volumengleichheit kubischer und kugelförmiger Einschlüsse ist daher bei Betrachtung von Sieblinien nicht mehr gegeben. Für die Auswertung der Diagramme ist das aber ohne Bedeutung.

Die durch die Sieblinie vorgegebenen Volumenanteile des Zuschlaggemisches müssen auf Volumenanteile im Festbeton umgerechnet werden. Dazu wird von einer einheitlichen Betonzusammensetzung ausgegangen, die durch folgende Werte festgelegt ist:

$$W/Z = 0,45$$

$$Z = 350 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Gesamtwassergehalt } W = 158 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Luftporengehalt } P = 1,5 \text{ Vol.-%} \hat{=} 15 \text{ dm}^3/\text{m}^3$$

$$\text{Kornrohndichte } \rho_g = 2,6 \text{ kg/dm}^3$$

$$\text{Zementreindichte } \rho_{oz} = 3,1 \text{ kg/dm}^3$$

Der Gewichtsanteil des Zuschlags am Gesamtvolumen des Betons ergibt sich allgemein aus Gleichung (5.22).

$$G_z = \rho_g \left( 1000 - \frac{Z}{\rho_{oz}} - W - P \right) \quad (5.22)$$

Setzt man die Werte der Betonzusammensetzung ein, so erhält man ein Gewicht der trockenen Zuschläge von  $G_z = 1857 \text{ kg/m}^3$ . Das Volumen

		Mittlere kritische RiBlast $\bar{\sigma}_{\infty Ic m}$ [MN/m <sup>2</sup> ]						
		min $K_{Ic}$ Zementstein = $0,3 \frac{MN}{m^{1,5}}$			max $K_{Ic}$ Zementstein = $0,5 \frac{MN}{m^{1,5}}$			
Sieblinie	Volumenanteil		Kugelförmiges Korn		Kubisches Korn	Kugelförmiges Korn		Kubisches Korn
	am Gesamtzuschlag	am Beton	min $K_{Ic}$ Kontaktzone	max $K_{Ic}$ Kontaktzone		min $K_{Ic}$ Kontaktzone	max $K_{Ic}$ Kontaktzone	
C <sub>8</sub>	0,15	0,11	3,6	4,9	3,3	6,1	8,3	5,5
B <sub>8</sub>	0,26	0,19	3,3	4,8	3,2	5,7	8,2	5,3
A <sub>8</sub>	0,39	0,28	3,1	4,7	3,0	5,5	7,9	5,1
U <sub>8</sub>	0,70	0,50	2,8	4,5	2,7	5,0	7,7	4,5
C <sub>16</sub>	0,12	0,09	2,3	3,3	2,3	3,9	5,4	3,9
B <sub>16</sub>	0,24	0,17	2,1	3,2	2,2	3,6	5,3	3,8
A <sub>16</sub>	0,40	0,29	2,0	3,1	2,1	3,3	5,1	3,5
U <sub>16</sub>	0,70	0,50	1,7	2,9	1,9	2,8	4,9	3,2
C <sub>32</sub>	0,11	0,08	1,6	1,9	1,7	2,7	3,1	2,8
B <sub>32</sub>	0,20	0,14	1,5	1,8	1,6	2,5	3,0	2,7
A <sub>32</sub>	0,38	0,27	1,4	1,7	1,5	2,3	2,9	2,5
U <sub>32</sub>	0,70	0,50	1,1	1,5	1,4	1,8	2,5	2,2

Abb. 5.1: Mittlere kritische RiBlasten

des Zuschlages ergibt sich daraus zu:

$$V_z = \frac{1857}{2,6} = 714 \text{ dm}^3/\text{m}^3$$

Somit beträgt der Volumenanteil des Zuschlages je m<sup>3</sup> Beton  $\chi_z = 71,4\%$ .

In Tabelle 5.1 sind die durch Auswertung der Diagramme des Anhanges B5 ermittelten mittleren kritischen RiBlasten in Abhängigkeit von den einzelnen Sieblinien zusammengestellt. Als Tabellenparameter gehen neben der Sieblinie die Kornform und die Bruchzähigkeiten von Matrix und Kontaktzone ein. Da somit alle maßgebenden Parameter variiert wurden, läßt sich aus der Tabelle durch Betrachtung der maximalen und minimalen Werte die Bandbreite der zu erwartenden mittleren RiBlast bestimmen.

Unterscheidet man zunächst nicht nach Kornform und Bruchzähigkeiten, sondern betrachtet nur die unterschiedlichen Arten der Sieblinie, nämlich stetige Sieblinien und Sieblinien mit Ausfallkörnung, so lassen sich aus Tabelle 5.1 globale obere und untere Grenzwerte der mittleren kritischen RiBlast angeben (Tabelle 5.2).

Sieblinie	Mittlere kritische RiBlast $\bar{\sigma}_{\infty Ic m}$ [ MN/m <sup>2</sup> ]	
	min	max
Stetige Sieblinien A, B und C	1,4	8,3
Sieblinien mit Ausfallkörnung U	1,1	7,7

Tabelle 5.2: Grenzwerte der mittleren kritischen RiBlast

Die errechneten Grenzwerte bestätigen die Brauchbarkeit des theoretischen Modells, da sie recht genau die durch Versuche belegte Bandbreite der Betonzugfestigkeit wiedergeben. Aus den Grenzwerten

wird deutlich, wie stark die Betonzugfestigkeit schwanken kann. Global gesehen ist nicht erkennbar, daß die grundsätzliche Art der Sieblinie (stetige Sieblinie oder Sieblinie mit Ausfallkörnung) einen bedeutenden Einfluß auf die Betonzugfestigkeit hat. Etwas anders sieht das aus, wenn man nur die zu einer Korngruppe gehörenden Sieblinien betrachtet. Dann ist durchaus festzustellen, daß mit der Ausfallkörnung nur geringere Zugfestigkeiten als mit stetigen Sieblinien zu erreichen sind.

Bei stetigen Sieblinien liefert immer die Sieblinie C größere Zugfestigkeiten als die Sieblinie B und die wiederum größere Werte als die Sieblinie A. In diesem Verhalten spiegelt sich der von C nach A zunehmende Volumenanteil des Grobzuschlags wieder. Folgerichtig ergibt sich dann für die Sieblinie U, die ja einen noch größeren Volumenanteil des Grobzuschlags aufweist, eine weitere Verminderung der mittleren kritischen Rißlast.

Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge sind in Abb 5.13 die Grenzwerte der kritischen Rißlasten für kubischen Zuschlag und maximale Bruchzähigkeit des Zementsteins in Abhängigkeit von den verschiedenen Sieblinien graphisch aufgetragen.

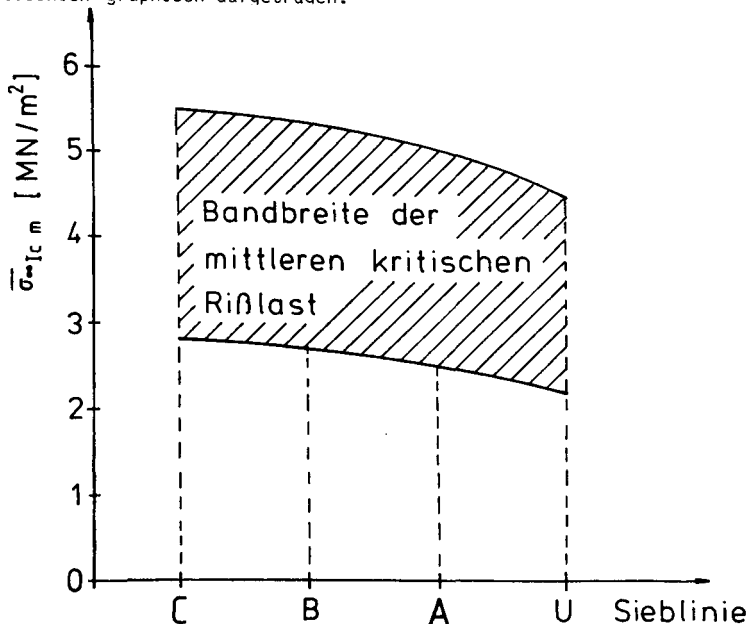


Abb. 5.13: Bandbreite der mittleren kritischen Rißlast für kubischen Zuschlag und maximale Bruchzähigkeit

Sehr deutlich zeigt Tabelle 5.1 den Einfluß der Korngröße: Je kleiner die Zuschläge, umso größer werden die mittleren kritischen Reißlasten. Dieser Sachverhalt ist zusätzlich in Abb. 5.14 am Beispiel der Sieblinie C graphisch dargestellt. Bei den anderen Sieblinien ergeben sich qualitativ gleiche Kurvenverläufe.

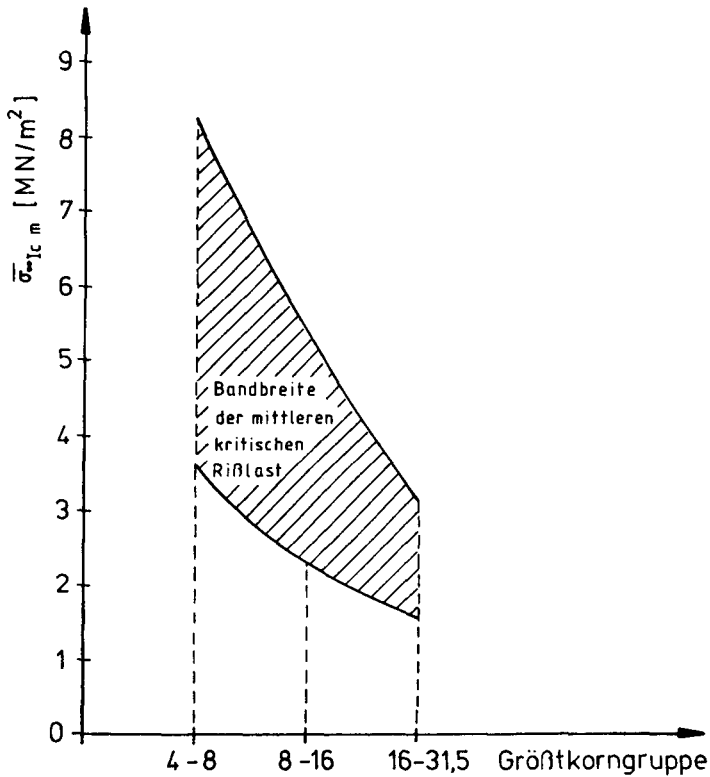


Abb. 5.14: Bandbreite der kritischen Reißlast für die Siebliniengruppe C

Die Auswirkungen der Kornform auf die mittlere kritische Reißlast sind durch eine globale Betrachtung nicht zu verdeutlichen, dazu bedarf es einer differenzierteren Betrachtung in Abhängigkeit von den Bruchzähigkeiten und von den Sieblinien.

Bei Sieblinien mit einem Größtkorn von 8 mm liefern immer kugelförmige Zuschläge größere mittlere kritische Reißlasten als kubische Zuschläge, unabhängig davon, wie groß die Bruchzähigkeiten von Kontaktzone und Matrix sind.

Für Sieblinien mit einem Größtkorn von 16 mm ergibt sich ein wesentlich uneinheitlicheres Bild. Ist nur eine geringe Bruchzähigkeit der Kontaktzone vorhanden, so ergeben sich bei kubischen Zuschlägen insgesamt geringfügig höhere  $\overline{\sigma_{\infty IC m}}$ -Werte als bei kugelförmigem Zuschlag. Hat die Kontaktzone aber eine große Bruchzähigkeit, so liefern die kugelförmigen Zuschläge im Mittel etwa 40% bis 50% höhere  $\overline{\sigma_{\infty IC m}}$ -Werte als die kubischen Zuschläge.

Haben die Sieblinien ein Größtkorn von 31,5 mm, so verschieben sich die Verhältnisse wiederum. Dann nämlich ergeben kubische Zuschläge bei niedriger Bruchzähigkeit der Kontaktzone je nach Sieblinie etwa um 5% bis 25% höhere mittlere kritische Reißlasten als kugelförmige Zuschläge. Ist dagegen eine hohe Bruchzähigkeit der Kontaktzone vorhanden, so ergeben sich bei den beiden Zuschlagarten nur noch geringe unterschiedliche Einflüsse bezüglich der Reißlasten.

Insgesamt zeigt sich somit, daß eine einheitliche Aussage über die Auswirkungen der Kornform auf die mittlere kritische Reißlast nicht möglich ist. Es hängt immer von dem Größtkorndurchmesser und der Bruchzähigkeit der Kontaktzone ab, ob die eine oder die andere Kornform die höheren Reißlasten liefert.

## 6. Zusammenstellung der Ergebnisse und Vergleich mit Versuchsergebnissen

### 6.1 Ergebnisse der elastizitätstheoretischen Berechnungen

Die Bruchlast des heterogenen Baustoffes Beton läßt sich nicht allein mit den Methoden der klassischen Elastizitätstheorie berechnen, da es am Rande der Matrixeinschlüsse schon unter sehr geringen Belastungsstufen zu örtlichen Rißbildungen kommt. Aus diesem Grunde ist es bei Grundsatzuntersuchungen sinnvoll, zunächst Berechnungen auf der Grundlage der Elastizitätstheorie durchzuführen, um Größe und Ort der Spannungsspitzen feststellen zu können.

Die durchgeführten Berechnungen haben gezeigt, daß sowohl die Größe der Spannungsspitzen als auch die Orte ihres Auftretens von der Einschlußform und - mit Ausnahme kreisrunder Einschlüsse - von der Orientierung der Einschlüsse zur Belastungsrichtung abhängen. Entlang des Einschlußrandes variieren die Beträge der Spannungen stark. Aufgrund der Verteilung der Hauptspannungen kommt es beim ebenen Problem der Elastizitätstheorie über große Umfangsbereiche zur Ausbildung eines zweiachsigen Zugspannungszustandes, im räumlichen Fall sogar zur Ausbildung eines dreiachsigen Zugspannungszustandes, d.h., daß in diesen Bereichen eine ausgeprägte Neigung zum spröden Bruch vorhanden ist.

Durch Parameterstudien konnte gezeigt werden, daß bei Beton unter Zugbeanspruchung die Elastizitätskonstanten üblicher Zuschlaggesteine auf die Ergebnisse der Berechnungen nur einen untergeordneten Einfluß haben. Einschlüsse im Normalbeton können daher mit hinreichender Genauigkeit als starre Einschlüsse in der Zementsteinmatrix angesehen werden.

Wegen teilweise sehr hoher Spannungskonzentrationen in bestimmten Bereichen ungünstig geformter Einschlüsse wird schon unter sehr niedrigen Zugbelastungen örtlich die Haftfestigkeit in der Kontaktzone erreicht, so daß es dort zu eng begrenzten Rißbildungen kommt.

Sind solche Risse entstanden, so müssen zur Bestimmung der Bruchlasten Methoden der Bruchmechanik herangezogen werden, da die klassische Elastizitätstheorie nur noch begrenzt anwendbar ist.

## 6.2 Ergebnisse der bruchmechanischen Berechnungen

Haben sich bei Erreichen der Haftfestigkeit örtlich engbegrenzte Risse gebildet, so erweitern sich diese spontan entlang des Einschlußrandes, wenn die Rißlänge eine von der Bruchzähigkeit der Kontaktzone abhängigen kritischen Wert erreicht. Die Endlänge dieser Risse wird wesentlich von der Form der Einschlüsse bestimmt. Bei kantigen Einschlüssen entspricht die Endlänge immer der rißbehafteten Kantenlänge, da der Rißfortschritt in der Regel nicht gebremst wird, sondern sich bis zu den Enden der Kontaktzone fortsetzt. Liegen jedoch kreisförmige oder abgerundete Einschlüsse vor, so ist eine spontane Rißerweiterung höchstens bis zu einem von der Bruchzähigkeit der Kontaktzone abhängigen Öffnungswinkel möglich. Der Rißöffnungswinkel erreicht höchstens einen Wert von etwa  $70^\circ$ , auch dann, wenn nur eine geringe Bruchzähigkeit der Kontaktzone vorhanden ist.

Die an geraden Kanten entstandenen Risse erweitern sich erst in die Matrix hinein, wenn die Belastung so weit gesteigert wird, daß sie einen von der Bruchzähigkeit der Matrix abhängigen kritischen Wert erreicht. Bei kreisförmigen Einschlüssen hingegen lassen sich zwei grundsätzlich mögliche Rißerweiterungen unterscheiden:

- Der spontane Rißfortschritt endet bei einem bestimmten Rißöffnungswinkel. Wird nun die Belastung gesteigert, so tritt ein stabiler Rißfortschritt entlang des Einschlußrandes ein. Erreicht dieser Riß eine von der Bruchzähigkeit der Matrix und der Belastung abhängige kritische Länge, so erweitert



er sich anschließend spontan in die Matrix hinein. Diese Art des Rißfortschrittes ist vorwiegend bei mittleren und hohen Bruchzähigkeiten zu erwarten.

- . Bei geringer Bruchzähigkeit der Matrix ist es auch möglich, daß sich der Riß in der Kontaktzone nicht stabilisiert, sondern daß er direkt auch spontan in die Matrix hinein fortschreitet. Dieser Fall liegt dann vor, wenn während der Rißerweiterung in der Kontaktzone die kritische Rißlänge der Matrix erreicht wird.

Die beschriebenen Rißerweiterungsvorgänge wurden durch theoretische Energiebetrachtungen auf der Grundlage des Konzeptes der Spannungsintensitätsfaktoren ermittelt. Da direkte Verifizierungen der Ergebnisse wegen fehlender Versuchsergebnisse nicht möglich sind, muß die Bestätigung der Anwendbarkeit des vorgestellten theoretischen Konzeptes auf indirekte Weise erfolgen. Dazu bietet es sich an, die wesentlichen Teilergebnisse der theoretischen Untersuchungen den dazu korrespondierenden Versuchsergebnissen anderer Arbeiten gegenüberzustellen.

- (1) Teilergebnis 1: Die kritische Rißlast des Betons nimmt mit zunehmender Größe der Einschlüsse ab.

Hughes und Ash bestimmten in [41] u.a. die Bruchlasten unbewehrten Betons an Proben, bei denen über unterschiedliche Sieblinien die Größe des Grobzuschlages variiert wurde. Für Beton mit einem Kieszuschlag, dessen Größtkorndurchmesser ca. 5 mm (3/16 in.) betrug, ergaben sich im Vergleich zu einem Beton mit einem Größtkorndurchmesser von ca. 9,5 mm (3/8 in.) etwa 1,5 bis 1,9-fach höhere Bruchlasten. Eine Auswertung der Diagramme des Anhanges B5 ergab für die gleichen Korngrößen ca. 1,4 bis 2,1-fache höhere kritische Rißlasten bei dem kleineren Größtkorn. Die theoretisch ermittelten Verhältnisse stimmen demnach qualitativ und angenähert auch quantitativ mit den Versuchsergebnissen überein.

Johnston [52] untersuchte neben dem Einfluß des Volumenanteils des Zuschlages - hierauf wird beim nächsten Teilergebnis näher eingegangen - auch die Auswirkungen der unterschiedlichen Größe der Grobzuschläge. Er verwendete dabei Zuschläge aus gebrochenem Basalt, die als kantig anzusehen sind und die daher eher den idealisiert angenommenen kubischen Einschlüssen als den kugelförmigen Einschlüssen entsprechen.

Für die Korngrößen 38 mm, 19,5 mm und 9,5 mm sind die sich nach Johnston ergebenden Erhöhungsfaktoren den mit den Diagrammen B 5.9 und B 5.10 ermittelten Erhöhungsfaktoren gegenübergestellt (Tab. 6.1). Die zur Korngröße 38 mm gehörende Bruchlast bzw. kritische Reißlast wurde bei diesem Vergleich zu 1 normiert. Es zeigt sich, daß die anhand der Diagramme ermittelten Erhöhungsfaktoren für das 19,5 mm Größtkorn sehr gut mit den Versuchswerten von Johnston übereinstimmen.

Korngröße [mm]	Erhöhungsfaktoren der Bruchlast bzw. kritischen Reißlast für verschiedene W/Z-Werte								
	W/Z = 0,35			W/Z = 0,45			W/Z = 0,55		
	John- ston	Diagramme		John- ston	Diagramme		John- ston	Diagramme	
	[52]	max	min	[52]	max	min	[52]	max	min
		$K_{Ic}$			$K_{Ic}$			$K_{Ic}$	
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19,5	1,3	1,2	1,4	1,2	1,2	1,4	1,2	1,2	1,4
9,5	1,5	1,8	2,0	1,3	1,8	2,0	1,3	1,7	2,1

Tabelle 6.1: Vergleich der Erhöhungsfaktoren

Für das 9,5 mm Größtkorn treten zwar größere quantitative Abweichungen auf, die qualitative Übereinstimmung bleibt aber weiterhin erhalten.

- (2) Teilergebnis 2: Die kritische Reißlast des Betons nimmt mit zunehmendem Volumenanteil des Grobzuschlages ab

Ergebnisse von Versuchen, bei denen nur der Volumenanteil des Grobzuschlages variiert wurde, liegen nicht vor. Es gibt lediglich einige wenige Veröffentlichungen über Versuche mit variiertem Volumenanteil des Gesamtzuschlages, deren Ergebnisse jedoch widersprüchlich sind.

Ward [110] stellte bei Steigerung des Zuschlaganteiles von ca. 60% auf ca. 80% eine Zunahme der Betonzugfestigkeit um etwa 10% fest. Bei den Versuchen von Stock, Hannant und Williams [103] ergab sich ein Minimum der Zugfestigkeit bei einem Zuschlaganteil von etwa 30%. Eine Zunahme des Zuschlagvolumenanteiles von 30% auf 80% bewirkte eine Zunahme des Mittelwertes der Betonzugfestigkeit um ca. 50% und eine Abnahme des Zuschlagvolumens auf Null eine näherungsweise bestimmte Zunahme der Zugfestigkeit um ca. 20%.

Bei den Versuchen von Johnston [52] hingegen ergab sich eine deutliche Abnahme der Zugfestigkeit bei steigendem Volumenanteil des Zuschlages.

Für die differierenden und z.T. widersprüchlichen Versuchsergebnisse gibt es verschiedene Erklärungen. So könnten z.B. Schwindeinflüsse die Einflüsse aus dem Volumenanteil des Zuschlages überlagert haben. Denkbar ist auch, daß sich die Bruchzähigkeit der Matrix in Abhängigkeit vom Volumenanteil ändert oder daß es zu häufigeren und wirksameren Reißbarretierungen kommt. Eine endgültige schlüssige Erklärung läßt sich jedoch noch nicht geben.

Qualitativ stimmen die Versuchsergebnisse von Johnston [52] für sämtliche Volumenanteile mit den Ergebnissen der eigenen Arbeit überein. Eine Teilübereinstimmung mit den Ergebnissen aus [103] liegt bei geringen Volumenanteilen ( $\mu_z \leq 0,3$ ) vor.

Die in [52] gemachten Angaben über die Sieblinie und den Volumenanteil der oberen Korngruppe erlauben einen angenäherten quantitativen Vergleich mit den Ergebnissen der eigenen theoretischen Arbeit. Da Johnston jedoch keine Bruchzähigkeiten bestimmt hat, wird der Vergleich für die Grenzwerte der Bruchzähigkeit der Matrix ( $\min K_{IC}$  und  $\max K_{IC}$ ) durchgeführt. Die Auswertung der Diagramme zur Bestimmung der kritischen RiBlast erfolgt analog zur Vorgehensweise im Abschnitt 5.5, aber im Hinblick auf den verwendeten gebrochenen Zuschlag nur für kubische Einschlüsse. Weil Johnston auch das Größtkorn variiert hat, ist es möglich, parallele Vergleiche für die Korngruppe 19,5 mm - 38 mm und für die Korngruppe 9,5 mm - 19,5 mm durchzuführen. Zur Auswertung der Diagramme benötigt man die Volumenanteile der oberen Korngruppe bezogen auf das Betonvolumen. Da Johnston diesen Volumenanteil nicht direkt angibt, wurde dieser aus den Angaben über die Betonzusammensetzung ermittelt. Die so errechneten Prozentsätze sind in Tabelle 6.2 zusammengestellt.

Korngruppe 9,5 - 19,5 mm		Korngruppe 19,5 - 38 mm	
Anteil am Gesamtzuschlag [ % ]	Anteil am Betonvolumen [ % ]	Anteil am Gesamtzuschlag [ % ]	Anteil am Betonvolumen [ % ]
52	36	53	37
58	40	60	41
65	45	68	47
70	48	76	52

Tabelle 6.2: Volumenanteile der oberen Korngruppe

Die Ergebnisse der Vergleiche sind in Abb. 6.1 für die Größtkorngruppe 9,5 - 19,5 mm und in Abb. 6.2 für die Größtkorngruppe 19,5 - 38 mm graphisch dargestellt.

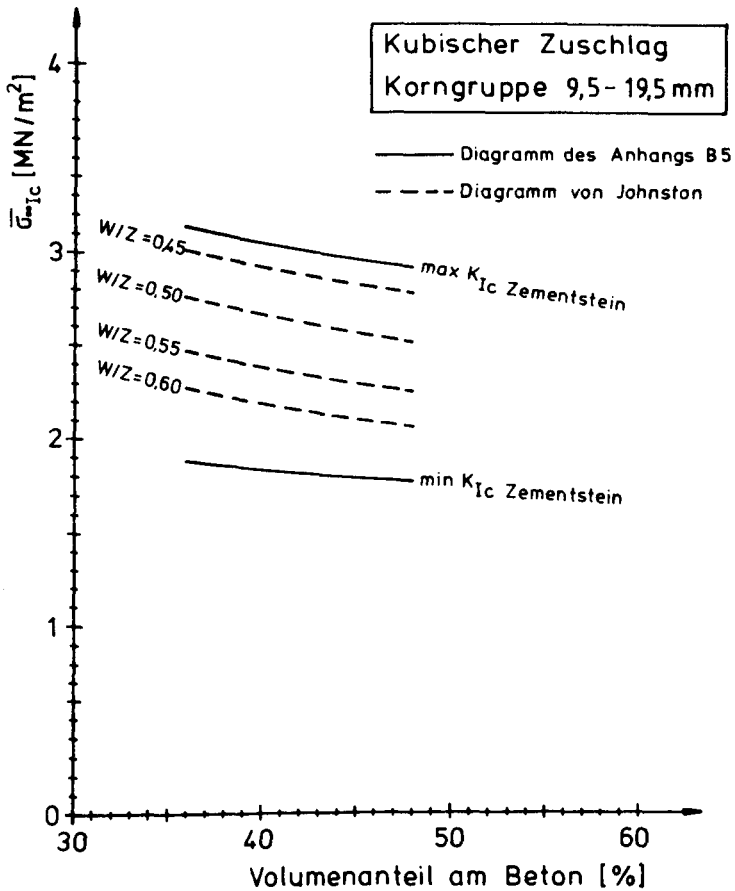


Abb. 6.1: Vergleich des Einflusses des Volumenanteils der Größtkorngruppe 9,5 - 19,5 mm auf die kritische Rißlast

Bei der Größtkorngruppe 9,5 - 19,5 mm (Abb. 6.1) zeigt sich ein nahezu paralleler Kurvenverlauf von theoretisch berechneten und experimentell bestimmten Werten; zudem liegen die Versuchsergebnisse exakt innerhalb der theoretisch berechneten Bandbreite der kritischen Rißlasten. Die Übereinstimmung zwischen Versuchswerten

und der theoretischen Berechnung ist somit sehr gut. Deutlich ist der Einfluß des W/Z-Wertes auf die Bruchzähigkeit der Matrix zu erkennen: Die Bruchzähigkeit nimmt mit zunehmendem W/Z-Wert ab. Da mit abnehmender Bruchzähigkeit auch die kritische Rißlast sinkt, bewirkt eine Zunahme des W/Z-Wertes indirekt eine Abnahme der kritischen Rißlast. Daß die Bruchzähigkeit mit zunehmendem W/Z-Wert abfällt, ist durch Versuche mehrerer Autoren belegt. Eine Zusammenfassung solcher Versuchsergebnisse in Form einer graphischen Darstellung der Abhängigkeit zwischen  $K_{Ic}$ -Wert und W/Z-Wert gibt Ziegeldorf in [117] an.

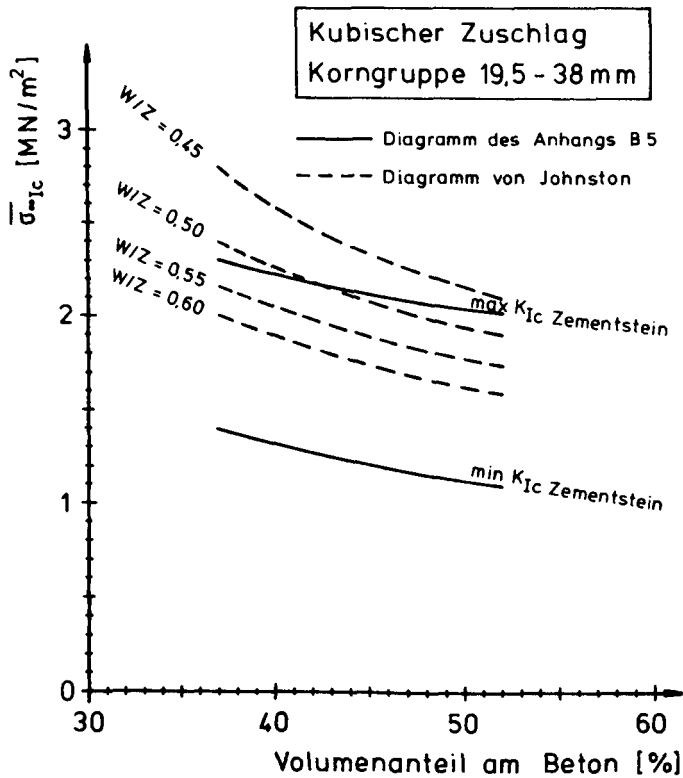


Abb. 6.2: Vergleich des Einflusses des Volumenanteils der Größtkorngruppe 19,5 - 38 mm auf die kritische Rißlast

Bei der Größtkorngruppe 19,5 - 38 mm besteht zwischen Versuch und theoretischer Berechnung hinsichtlich des grundsätzlichen Verlaufs der  $\overline{\sigma}_{\infty IC}$ / Vol.-% - Kurven bei hohen W/Z-Werten eine gute Übereinstimmung, die sich aber mit abnehmendem W/Z-Wert verschlechtert. Insbesondere liegen die Versuchswerte für den W/Z-Wert 0,45 nicht mehr innerhalb der theoretisch berechneten Bandbreite, sondern etwas darüber. Eine Erklärung dafür könnte sein, daß unter günstigen Bedingungen auch Bruchzähigkeiten des Zementsteins erreicht werden können, die über dem angenommenen oberen Grenzwert von  $K_{IC}=0,5 \text{ MN/m}^{1,5}$  liegen.

Insgesamt zeigen die Vergleiche eine gute Übereinstimmung zwischen den Versuchswerten von Johnston und den eigenen, theoretisch berechneten Werten.

- (3) Teilergebnis 3: Der Einfluß der Kornform auf die kritische Rißlast ist nicht eindeutig, da er von mehreren Parametern abhängt, insbesondere vom Größtkorndurchmesser, vom Volumenanteil, von der Bruchzähigkeit der Matrix und von der Bruchzähigkeit der Kontaktzone.

Die theoretischen Untersuchungen haben gezeigt, daß eine einheitliche Aussage über die Auswirkungen der Kornform auf die kritische Rißlast nicht möglich ist, da es primär vom Größtkorndurchmesser und von der Bruchzähigkeit der Kontaktzone abhängt, ob die eine oder die andere Kornform die höheren kritischen Rißlasten liefert. Eine Bestimmung der kritischen Rißlast ist für jeden Einzelfall mit den Diagrammen des Anhanges B 5 möglich, da in diesen Diagrammen alle wesentlichen Parameter variiert wurden.

Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß der Kornform auf die kritische Rißlast bzw. auf die Betonzugfestigkeit mit systematischer Variation der maßgebenden Parameter sind nicht bekannt. Es gibt lediglich einige wenige Arbeiten, bei denen versucht

wurde, den Einfluß der Kornform auf die Betonzugfestigkeit durch alleinige Variation des Grobzuschlages zu ermitteln.

Welch [112] stellte fest, daß sich bei gebrochenem Zuschlag mit einem Größtkorn von 38 mm etwa 30% höhere Betonzugfestigkeiten ergaben als bei gerundetem Zuschlag mit gleichem Größtkorn. Ähnliche Ergebnisse fand er bei Zuschlägen mit einem Größtkorn von 19,5 mm. Da Welch bei diesen Versuchen einen Beton mit einem W/Z-Wert von 0,5 untersuchte, ist zu vermuten, daß sowohl eine mittlere Bruchzähigkeit der Matrix als auch eine mittlere Bruchzähigkeit der Kontaktzone vorgelegen haben. Die Auswertung der Diagramme des Anhanges B 5 ergibt bei mittleren Bruchzähigkeiten und bei einem Größtkorn von 38 mm übereinstimmend mit Welch etwa um 30% höhere kritische Rißlasten für Beton aus gebrochenen Zuschlägen. Bei einem Größtkorn von 19,5 mm hingegen liefern die Berechnungen mit den Diagrammen im Gegensatz zu den Versuchsergebnissen von Welch für beide Zuschlagarten annähernd gleiche kritische Rißlasten. Geht man jedoch von einer niedrigen Bruchzähigkeit der Kontaktzone aus - deren Vorhandensein aufgrund des W/Z-Wertes von 0,5 a priori auch nicht ganz auszuschließen ist - , so ergeben sich mit den Diagrammen auch bei einem Größtkorn von 19,5 mm ähnliche Verhältnisse wie bei Welch.

Hughes und Chapman [42] ermittelten für Beton aus gebrochenem Zuschlag schon bei einem Größtkorn von 9,5 mm höhere Betonzugfestigkeiten als bei Beton aus gerundetem Zuschlag mit gleichem Größtkorn. Diese Versuchsergebnisse stehen im Gegensatz zu den eigenen theoretischen Untersuchungen, da sich mit den Diagrammen selbst bei niedriger Bruchzähigkeit der Kontaktzone immer bei kugelförmigen Zuschlägen eine höhere kritische Rißlast ergibt.

- (4) Teilergebnis 4: Die kritische Rißlast läßt sich angenähert mit den Diagrammen des Anhangs B 5 berechnen.

Falls die Bruchzähigkeiten von Matrix und Kontaktzone und die Betonzusammensetzung bekannt sind, lassen sich mit den Diagrammen des Anhangs B 5 die kritischen Rißlasten berechnen. Da die kritischen



Rißlasten näherungsweise mit den Bruchlasten unter Zugbeanspruchung übereinstimmen, ist so eine Aussage über die zu erwartende Betonzugfestigkeit möglich. Sind die Bruchzähigkeiten nicht bekannt, so kann durch eine Grenzwertbetrachtung mit hohen und niedrigen Bruchzähigkeiten eine Bandbreite bestimmt werden, innerhalb der die zu erwartende Betonzugfestigkeit wahrscheinlich liegen wird. Eine Einengung der Bandbreite ist möglich, wenn man die Bruchzähigkeit anhand des Zusammenhangs mit dem W/Z-Wert nach [117] abschätzt.

Einige der Literatur entnommene experimentell ermittelte Betonzugfestigkeiten sind in Tabelle 6.3 den mit den Diagrammen berechneten Werten gegenübergestellt. Um die Bandbreite einzuengen, wurden die Bruchzähigkeiten in Abhängigkeit vom jeweils vorhandenen W/Z-Wert qualitativ abgeschätzt.

Quelle	Betonzusammensetzung				$K_{Ic}$ geschätzt	Betonzugfestigkeit		
	W/Z	Größt- korn- gruppe	$\alpha_{GKG}$	Korn- form		experi- mentell	Diagramm min	max
	[ - ]	[ mm ]	[ - ]	[ - ]		[ - ]	[ N/mm <sup>2</sup> ]	[ N/mm <sup>2</sup> ]
Bonzel [10]	0,50	15-30	0,22	gerun- det	mittel	2,5	1,7	2,7
Heilmann/ Hilsdorf/ Finster- walder [35]	0,63	7-15	0,16	gerun- det	niedrig	2,7 bis 3,3	2,3	3,3
Johnston [52]	0,50	19-38	0,41	kubisch	mittel	2,3	2,2	2,2
	0,50	9,5-19	0,40	"	"	2,7	2,5	2,5
Stock/ Hannant/ Williams [103]	0,50	9,5-19	0,60	unbe- kannt	mittel	2,4	2,2	2,7

Tabelle 6.3: Vergleich experimentell bestimmter Betonzugfestigkeiten mit den nach den Diagrammen aus den kritischen Rißlasten bestimmten Betonzugfestigkeiten

Die Übereinstimmung zwischen den mit den Diagrammen bestimmtem kritischen Reißlasten und den durch Versuche gewonnenen Betonzugfestigkeiten ist recht gut. Schätzt man die Bruchzähigkeit des Zementsteins nicht ab, sondern setzt nur die oberen und unteren Grenzwerte der Bruchzähigkeit ein, so liegen die Versuchswerte bei den nachgerechneten Beispielen immer in der sich dann ergebenden Bandbreite, d.h., obere und untere Grenzwerte der Betonzugfestigkeit können mit den Diagrammen auch ohne Kenntnis der wirklich vorhandenen Bruchzähigkeit der Matrix bestimmt werden. Sind die  $K_{IC}$ -Werte der Matrix bekannt oder schätzt man diese zumindest ab, so ergeben sich wesentliche Einengungen der Bandbreite und damit eine verbesserte Bestimmung der Betonzugfestigkeit.

## 7. Zusammenfassung

Mittels konformer Abbildungen und durch Ansatz einer komplexen Airyschen Spannungsfunktion wurden Formeln zur Berechnung der Spannungen am Rande von unterschiedlich geformten Einschlüssen (Ellipse, Dreieck, Quadrat) in einer elastischen Matrix hergeleitet und programmiert. Die in Diagrammen dargestellten Ergebnisse zeigen, daß die Spannungsverteilungen entlang des Einschlusses stark schwanken und daß sie im wesentlichen von der Einschlusform und der Orientierung des Einschlusses zur Belastungsrichtung abhängen. Unter einer äußeren Zugbeanspruchung treten entlang des Einschlusses ausge dehnte Bereiche mit einem zweiachsigen (im ebenen Fall) oder dreiachsigen (im räumlichen Fall) Zugspannungszustand auf. Dadurch bedingt besteht in der Kontaktzone eine ausgeprägte Neigung zum spröden Bruch.

Infolge teilweise sehr hoher Spannungskonzentrationen an ungünstig geformten Stellen des Einschlusses wird schon unter sehr niedrigen Zugbelastungen örtlich die Haftzugfestigkeit der Kontaktzone erreicht, so daß es dort zu engbegrenzten Ribbildungen kommt.

Die Ribberweiterungen in der Kontaktzone und in der Matrix wurden mit dem bruchmechanischen Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren auf der Grundlage der linear-elastischen Bruchmechanik untersucht. Da die energetischen Verhältnisse für die Risse in der Kontaktzone ungünstiger sind als für Matrixrisse, öffnen sich zunächst die Risse in der Kontaktzone entlang des Einschlusses. Die Endlänge dieser Risse hängt im wesentlichen von der Geometrie des Einschlusses ab; bei gerundeten Einschlüssen außerdem von der Bruchzähigkeit der Kontaktzone. Haben die Risse in der Kontaktzone durch spontane Ribberweiterung oder durch Belastungssteigerung ihre Endlänge erreicht, so wirken diese Risse als Initialrisse für die Matrix. Zur Bestimmung kritischer Riblasten des heterogenen Gesamtsystems (hier Beton) genügt es anschließend, eine mit einem System von Rissen durchzogene Matrix

zu betrachten. Durch diese Betrachtungsweise umgeht man die Schwierigkeiten, die sich bei einer globalen bruchmechanischen Betrachtung des heterogenen Baustoffes Beton einstellen. Es findet somit eine gewisse Entkopplung statt: Anzahl, Form und Größe der Einschlüsse bestimmen das Rißsystem (Anzahl, Länge und Orientierung der Initialrisse), das nun Ausgangspunkt für alle weiteren Untersuchungen ist. Alle anschließenden Berechnungen lassen sich mit den bruchmechanischen Kennwerten der Matrix durchführen.

Zur Bestimmung der kritischen Rißlast, die bei zugbeanspruchtem Beton hinreichend genau mit dessen Zugfestigkeit übereinstimmt, wurden regelmäßig in der Matrix angeordnete Rißsysteme untersucht und die Ergebnisse in Diagrammen zusammengefaßt. Es zeigt sich, daß die kritische Rißlast im wesentlichen bestimmt wird durch: Größe und Form der Einschlüsse, Anteil der Einschlüsse am Gesamtvolumen und Bruchzähigkeit der Matrix. Abschnitt 6 enthält eine ausführliche Darstellung des Einflusses aller maßgebender Parameter auf die kritische Rißlast.

Die Auswertung der entwickelten Diagramme für Beton mit bekannter Sieblinie des Zuschlaggemisches erlaubt eine angenäherte Bestimmung der zu erwartenden Betonzugfestigkeit. Wegen des großen Einflusses der Einschlußgröße genügt es, bei der Auswertung nur die oberste Korngruppe mit ihren Kennwerten (Korngröße, Kornform und Volumenanteil) zu betrachten. Ist die Bruchzähigkeit der Matrix bekannt, so läßt sich direkt ein Mittelwert der Betonzugfestigkeit bestimmen. Liegen keine Angaben über die Bruchzähigkeit vor, so kann man durch parallele Betrachtung oberer und unterer Grenzwerte dieser Bruchzähigkeiten eine Bandbreite der Betonzugfestigkeiten ermitteln. Da eine enge Abhängigkeit zwischen dem  $W/Z$ -Wert und der Bruchzähigkeit der Matrix besteht, läßt sich bei bekanntem  $W/Z$ -Wert die Bruchzähigkeit angenähert schätzen. Legt man den Auswertungen solche geschätzten Werte zugrunde, so lassen sich Einengungen der Bandbreite der Betonzugfestigkeiten erreichen.

Die Brauchbarkeit des vorgestellten theoretischen Konzepts wurde durch Anwendung der Diagramme auf Betonzusammensetzungen, für die in der Literatur experimentell ermittelte Betonzugfestigkeiten angegeben sind, nachweisen. Es ergab sich eine gute Übereinstimmung zwischen den theoretisch ermittelten und den experimentell bestimmten Betonzugfestigkeiten.

8. Literaturverzeichnis

- [1] Alexander, K.M.; Wardlaw, J. and Gilbert, D.J.:  
Aggregate-cement bond, cement paste strength and the  
strength of concrete  
The Structure of Concrete, Proceedings of the Inter-  
national Conference, London, September 1965,  
Cement and Concrete Association, London 1968, pp 59 - 81
- [2] Al-Kubaisy, M.A. and Young, A.G.:  
Failure of concrete under sustained tension  
Magazine of Concrete Research, Vol. 27. No. 92,  
September 1975, pp 171 - 178
- [3] Akroyd, T.N.W.:  
Concrete under triaxial stresses  
Magazine of Concrete Research, Vol. 13, No. 39,  
November 1961, pp 111 - 118
- [4] Anson, M.:  
An investigation into a hypothetical deformation and  
failure mechanism for concrete  
Magazine of Concrete Research, Vol. 16, No. 47,  
June 1964, pp 73 - 82
- [5] Baker, A.L.L.:  
An analysis of deformation and failure characteristics  
of concrete  
Magazine of Concrete Research, Vol. 11 (1959), No. 33,  
pp 119 - 128
- [6] Blakey, F.A. and Beresford, F.D.:  
A Note on the Strain Distribution in Concrete Beams  
Civil Engineering and Public Works Review,  
Vol. 50, p 415, London (1955)

- [7] Blakey, F.A. and Beresford, F.D.:  
Discussion of the Paper Crack Propagation and the  
Fracture of Concrete, by M.F. Kaplan  
Journal of the American Concrete Institute, No. 59,  
(1962), pp 919 - 923
- [8] Blauel, J.G.; Kalthoff, J.F. und Sommer, E.:  
Die Bruchmechanik als Grundlage für das Verständnis  
des Festigkeitsverhaltens  
Materialprüfung, Bd. 12, 1970, Nr. 3, S. 69 - 76
- [9] Blumenauer, H. und Pusch, G.:  
Technische Bruchmechanik  
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig,  
Leipzig (1982)
- [10] Bonzel, J.:  
Ein Beitrag zur Frage des Verformung des Betons  
beton 2/71, S. 57 - 60 und beton 3/71, S. 105 - 109
- [11] Brandt, A.M.:  
Crack Propagation Energy in Steel Fibre Reinforced Concrete  
International Journal of Cement Composites, 2 (1980)  
pp 35 - 42
- [12] Broek, D.:  
Elementary Engineering Fracture Mechanics  
Noordhoff, Groningen (1974)
- [13] Bronstein, I.N. und Semendjajew, K.A.:  
Taschenbuch der Mathematik  
16. Auflage  
Verlag Harri Deutsch (1976)
- [14] Brown, J.H.:  
Measuring the Fracture Toughness of Cement Paste  
and Mortar  
Magazine of Concrete Research, 24 (1972), pp 185 - 196

- [15] Brown, J.H. and Pomeroy, C.D.:  
Fracture Toughness of Cement Paste and Mortars  
Cement and Concrete Research, 3 (1973), pp 475 - 480
- [16] Corten, H.T.:  
Fracture Mechanics of Composites  
in: Fracture - An Advanced Treatise, Vol. VII  
Edited by H. Liebowitz  
Academic Press, New York and London (1972)
- [17] Dantu, P.:  
Etude des contraintes dans les milieux hétérogènes  
Application au béton  
Annales Inst. Techn. Bât. et Trav.  
Publ. (11), No. 121, Jan. 1958
- [18] Die Entwicklungsgeschichte der Erde  
Band II  
Verlag Werner Dausien, Hanau/M., (1974)
- [19] Diaz, S.I. and Hilsdorf, H.K.:  
Fracture mechanism of concrete under static, sustained,  
and repeated compressive loads  
Civil Engineering Studies, Structural Research Series,  
No. 382, University of Illinois, Urbana, Illinois,  
August 1971
- [20] Eibl, J. und Iványi, G.:  
Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton  
DAFStb, Heft 260,  
W. Ernst & Sohn, Berlin (1976)
- [21] England, A.H.:  
An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion  
Journal of Applied Mechanics, September 1966,  
pp 637 - 640



- [22] Erdogan, F.:  
Stress Distribution in a Nonhomogeneous Elastic Plane  
With Cracks  
Journal of Applied Mechanics, June 1963, pp 232 - 234
- [23] Evans, R.H.:  
Extensibility and Modulus of Rupture of Concrete  
The Structural Engineer, Vol. 24, pp 639 - 659  
London (1946)
- [24] Franz, G.:  
Betrachtungen zur Mechanik des Zusammenwirkens von Beton  
und Kunststoffen  
beton 18 (1968), Heft 1, S. 5 - 9
- [25] Fumagalli, E.:  
The use of models of reinforced concrete structures  
Magazine of Concrete Research, Vol. 12, No. 35,  
July 1960, pp 63 - 72
- [26] Girkmann, K.:  
Flächentragwerke  
Sechste Auflage  
Wien, Springer-Verlag, (1963)
- [27] Gjørv, O.E.; Sorensen, S.I. and Arnesen, A.:  
Notch Sensitivity and Fracture Toughness of Concrete  
Cement and Concrete Research, 7 (1977), pp 333 - 344
- [28] Glucklich, J.:  
Discussion of the Paper Crack Propagation and the Fracture  
of Concrete, by M.F. Kaplan  
Journal of the American Concrete Institute, No. 59, (1962),  
pp 923 - 929
- [29] Goodier, I.N.:  
Concentration of stress around spherical and cylindrical  
inclusions and flaws  
Journal of Applied Mechanics, APM-55-7,  
(1933), pp 39 - 44

- [30] Griffith, A.A.:  
The phenomena of rupture and flow in solids  
Philosophical Transactions, Roy. Soc.,  
Ser. A 221, pp 163 - 198 (1921)
- [31] Gross, D.:  
Spannungsintensitätsfaktoren von Rißsystemen  
Ingenieur-Archiv 51 (1982), S. 301 - 310,  
Springer-Verlag (1982)
- [32] Hahn, H.G.:  
Bruchmechanik  
B.G. Teubner, Stuttgart (1976)
- [33] Hannant, D.J. and Frederick, C.O.:  
Failure criteria for concrete in compression  
Magazine of Concrete Research, Vol. 20, No. 64,  
September 1968, pp 137 - 144
- [34] Hansen, T.C.:  
Cracking and Failure of Concrete and Cement Paste  
ACI Spezial Report No. 3,  
Detroit, Michig., (1968)
- [35] Heilmann, H.G.; Hilsdorf, H. und Finsterwalder, K.:  
Festigkeit und Verformung von Beton unter Zugspannungen  
DAFStb, Heft 203,  
W. Ernst & Sohn, Berlin (1969)
- [36] Higgins, D.D. and Bailey, J.E.:  
Fracture Measurements on Cement Paste  
Journal of Material Science, 11 (1976), pp 1995 - 2003
- [37] Hillemeier, B.:  
Bruchmechanische Untersuchungen des Rißfortschrittes in  
zementgebundenen Werkstoffen  
Dissertation an der Universität Karlsruhe (TH),  
Karlsruhe (1976)

- [38] Hillemeier, B. und Hilsdorf, H.K.:  
Fracture Mechanics Studies on Concrete Compounds  
Cement and Concrete Research, 7 (1977), pp 523 - 536
- [39] Hillerborg, A.:  
Analysis of one single crack  
in: Fracture Mechanics of Concrete  
Edited by F.H. Wittmann  
Elsevier Science Publishers B.V.,  
Amsterdam (1983)
- [40] Hilsdorf, H.K.:  
Sinn und Grenzen der Anwendbarkeit der Bruchmechanik in der  
Betontechnologie  
Kordina Festschrift  
Forschungsbeiträge für die Baupraxis, S. 59 - 73  
Braunschweig (1979)
- [41] Hughes, B.P. and Ash, J.E.:  
Short-term loading and deformation of concrete in uniaxial  
tension and pure tension  
Magazine of Concrete Research, Vol. 20, No. 64,  
September 1968, pp 145 - 154
- [42] Hughes, B.F. and Chapman, G.P.:  
The deformation of concrete and microconcrete in compression  
and tension with particular reference to aggregate size  
Magazine of Concrete Research, Vol. 18, No. 54,  
March 1966, pp 19 - 23
- [43] Hsu, T.T.C.:  
Mathematical analysis of shrinkage stresses in a model  
of hardened concrete  
Journal of the American Concrete Institute, Proceedings,  
Vol. 60, No. 3, pp 371 - 390, March 1963

- [44] Hsu, T.C. and Slate, F.O.:  
Tensile Bond Strength Between Aggregates and Cement Paste  
or Mortar  
Journal of the American Concrete Institute, No. 60-25,  
April 1963, pp 465 - 485
- [45] Hsu, T.C.; Slate, F.O.; Sturman, G.M. and Winter, G.:  
Microcracking of Plain Concrete and the Shape of the  
Stress-Strain Curve  
Journal of the American Concrete Institute, No. 60-14,  
February 1963, pp 209 - 224
- [46] Inglis, C.E.:  
Stresses in a plate due to the presence of cracks and  
sharp corners  
Transactions, Inst. Naval Architects, Vol. 60, (1913),  
pp 219
- [47] Irwin, G.R.:  
Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack  
Traversing a Plate  
Journal of Applied Mechanics, September 1957, pp 361 - 364
- [48] Irwin, G.R.:  
Fracture  
in: Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 551 - 590,  
Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1958)
- [49] Irwin, G.R.:  
Discussion of the Paper Crack Propagation and the Fracture  
of Concrete, by M.F. Kaplan  
Journal of the American Concrete Institute, No. 59, (1962),  
p 929
- [50] Isida, M.:  
Methode of Laurent series expansion for internal crack problems  
In: Mechanics of Fracture, Vol. 1: Methods of analysis and  
solution of crack problems, pp 56 - 130  
Edited by G.C. Sih,  
Noordhoff International Publishers, Leyden (1973)

- [51] Jahn, M.:  
Zum Ansatz der Betonzugfestigkeit bei den Nachweisen zur  
Trag- und Gebrauchsfähigkeit von unbewehrten und bewehrten  
Betonbauteilen  
DAfStb, Heft 341  
W. Ernst & Sohn, Berlin (1983)
- [52] Johnston, C.D.:  
Strenght and deformation of concrete in uniaxial tension  
and compression  
Magazine of Concrete Research, Vol. 22, No. 70,  
March 1970, pp 5 -16
- [53] Jones, R.:  
Non-destructive testing of concrete  
Cambridge University Press,  
London (1962)
- [54] Jones, R.:  
A Methode of Studying the Formation of Cracks in a  
Material Subjected to Stress  
British Journal of Applied Physics, Vol. 3, No. 7,  
pp 229 - 232, (1952)
- [55] Jones, R. and Kaplan. M.F.:  
The Effect of Coarse Aggregate on the Mode of Failure  
of Concrete in Compression and Flexure  
Magazine of Concrete Research, Vol. 9, No. 26,  
pp 89 - 94, London (1957)
- [56] Kaplan, M.F.:  
Crack Propagation and the Fracture of Concrete  
Journal of the American Concrete Institute, No. 58-28,  
Nov. 1961, pp 591 - 610

- [57] Kesler, C.E.; Naus, D.J. and Lott, J.L.:  
Fracture Mechanics - Its Applicability to Concrete  
in: Mechanical Behaviour of Materials, Proceedings of the  
International Conference on Mechanical Behaviour of Materials,  
Kyoto, 1971, The Society of Material Science,  
Vol. IV, pp 113 - 124
- [58] Knott, J.F.:  
Fundamentals of Fracture Mechanics  
London (1973)
- [59] Kolossoff, G.:  
Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der  
Elastizitätstheorie  
Zeitschrift f. Mathematik u. Physik,  
Bd. 62, Heft 4, S. 384 - 409, (1914)
- [60] Kutter, K.H.:  
Skriptum "Felsmechanik"  
Ruhr-Universität-Bochum, Institut für Geologie,  
Lehrstuhl III, (1979)
- [61] Leon, H.:  
Ingenieur-Archiv, Heft 4, S. 421 (1933)  
zitiert in 73
- [62] Light, M.F. and Luxmore, A.R.:  
Detection of cracks in concrete by holography  
Magazine of Concrete Research, Vol. 24, No. 80,  
September 1972
- [63] Lott, J.L. and Kesler, C.E.:  
Crack Propagation in Plain Concrete  
in: Symposium on Structure of Portland Cement Paste and Concrete  
Special Report 90, Highway Research Board,  
Washington, D.C., (1966), pp 204 - 218

- [64] Lusche, M.:  
Beitrag zum Bruchmechanismus von auf Druck beanspruchtem  
Normal- und Leichtbeton mit geschlossenem Gefüge  
Schriftenreihe der Zementindustrie, Heft 39/1972,  
Beton-Verlag GmbH, Düsseldorf (1972)
- [65] Macherauch, E.:  
Grundprinzipien der Bruchmechanik  
in: Gefüge und Bruch  
Hrsg.: Maurer, K.L. und Fischmeister, H.  
Materialkundlich- Technische Reihe 3,  
Gebrüder Borntraeger, Berlin - Stuttgart (1977)
- [66] Mc Creath, D.R.; Newman, J.B. and Newman, K.:  
The influence of aggregate particles on the local strain  
distribution and fracture mechanism of cement paste during  
drying, shrinkage and loading to failure  
RILEM, Materials and Structures, Vol. 2, No. 7,  
Jan. - Febr. 1969, pp 73 - 84
- [67] Mehmel, A. und Kern, E.:  
Elastische und plastische Stauchungen von Beton infolge  
Druckschwell- und Standbelastung  
DAFStb, Heft 153,  
W. Ernst & Sohn, Berlin (1962)
- [68] Mindess, S.:  
The application of fracture mechanics to cement and concrete:  
A historical review  
in: Fracture Mechanics of Concrete  
Edited by F.H. Wittmann  
Elsevier Sciences Publishers B.V.,  
Amsterdam (1983)
- [69] Mindess, S.:  
The Cracking and Fracture of Concrete: An Annotated Biblio-  
graphy 1928 - 1981  
in: Fracture Mechanics of Concrete  
Edited by F.H. Wittmann  
Elsevier Sciences Publishers B.V.,  
Amsterdam (1983)

- [70] Mindess, S.; Lawrence, F.V. and Kesler, C.E.:  
The J-Integral as a Fracture Criterion for Fibre Reinforced  
Concrete  
Cement and Concrete Research, 7 (1977), pp 731 - 742
- [71] Mohr, O.:  
Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den  
Bruch eines Materials?  
Zeitschrift VDI, Jahrgang 44, S 1524 (1900)  
zitiert in [73]
- [72] Mohr, O.:  
Abhandlungen aus dem Gebiet der Technischen Mechanik  
3. Auflage, W. Ernst & Sohn, Berlin (1928)
- [73] Müller, L.:  
Der Felsbau  
Erster Band  
Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart (1963)
- [74] Muskhelishvili, N.I.:  
Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie  
Carl Hanser Verlag, München, (1971)
- [75] Naus, D.J. and Lott, J.L.:  
Fracture Toughness of Portland Cement Concretes  
Journal of the American Concrete Institute, No. 66 (1969)  
pp 481 - 489
- [76] Newman, K.:  
Concrete systems  
In: Composite materials, pp 336 - 452  
Edited by L. Holliday  
Elsevier Publishing Co.,  
Amsterdam and London (1966)
- [77] Oladapo, P.:  
Cracking and failure in plane concrete beams  
Magazin of Concrete Research  
Vol. 16, No. 47, June 1964, pp 102 - 110



- [78] Panasyuk, V.V. und Berezhnitskiy, L.T.:  
"Determination of Limit Forces for Plate with Arc-Shaped  
Crack under Tension", *Voprosy Mekhaniki Real'nogo Tverdogo  
Tela (Problems of Real Solid Body)*, No. 3,  
Naukova Dumka Press, Kiev (1965)  
zitiert in [89] und [94]
- [79] Petersson, P.E.:  
Fracture Energie of Concrete: Methode of Determination  
Cement and Concrete Research, 10 (1980), pp 78 - 79
- [80] Raack, W.:  
Zur Airyschen Spannungsfunktion  
Die Bautechnik, 54. Jahrgang, Heft 1,  
Januar 1977
- [81] Rehm, G. und Zimbelmann, R.:  
Untersuchungen der für die Haftung zwischen Zuschlag und  
Zementmatrix maßgebenden Faktoren  
in: Technische Möglichkeiten zur Erhöhung der Zugfestigkeit  
von Beton  
DAfStb, Heft 283,  
W. Ernst & Sohn, Berlin (1977)
- [82] Reinius, R.:  
A theory of the deformation and the failure of concrete  
Magazine of Concrete Research, November 1956, pp 157 - 158
- [83] Rice, J.R.:  
Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture  
in: *Fracture - An Advanced Treatise -*, Vol. II,  
Edited by H. Liebowitz  
Academic Press, New York and London (1968)
- [84] Rice, J.R.:  
A path independent integral and the approximate analysis of  
strain concentration by notches and cracks  
Journal of Applied Mechanics, 35 (1968), p 379

- [85] Rice, J.R. and Sih, G.C.:  
Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media  
Journal of Applied Mechanics, June 1965, pp 418 - 423
- [86] Richards, T.H. and Robertson, A.W.:  
The Determination of Single and Mixed Mode Stress Intensity  
Factors for Engineering Components of Practical Interest  
in: Fracture Mechanics in Engineering Practice, pp 1 - 32  
Edited by P. Stanley  
Applied Science Publishers Ltd., London (1977)
- [87] Robinson, G.S.:  
Methods of Detecting the Formation and Propagation of  
Microcracks in Concrete  
Proceedings, International Conference on Structure of Concrete  
London (1965)
- [88] Romualdi, J.P. and Batson, G.B.:  
Mechanics of Crack Arrest in Concrete  
Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE,  
No. 89,(1963), pp 147 - 168
- [89] Rooke, D.P. and Cartwright, D.J.:  
Stress intensity factors  
Procurement Executive, Ministry of Defence,  
Her Majesty's Stationery Office, London (1976)
- [90] Rossmannith, H.-P.:  
Historische Aspekte der Bruchmechanik  
in: Grundlagen der Bruchmechanik  
Hrsg.: H.-P. Rossmannith  
Springer-Verlag, Wien-New York (1982)
- [91] Rossmannith, H.-P.:  
Einführung in die Ingenieur-Bruchmechanik  
in: Finite Elemente in der Bruchmechanik  
Hrsg.: Rossmannith, H.-P.  
Springer-Verlag, Wien-New York (1982)

- [92] Roy, H. and Sozen, M.A.:  
A model to simulate the response of concrete to multiaxial loading  
University of Illinois, Structural Research Series, No. 268,  
June 1963
- [93] Sawin, G.N.:  
Spannungserhöhungen am Rande von Löchern  
VEB Verlag Technik  
Berlin (1956)
- [94] Sawin, G.N.:  
Stress Distribution Around Holes  
Übersetzung aus dem Russischen  
NASA Technical Translation, NASA TT F607 (1970)
- [95] Schwalbe, K.-H.:  
Bruchmechanik metallischer Werkstoffe  
Carl Hanser Verlag, München - Wien, (1980)
- [96] Shah, S.P. and Mc Garry, F.J.:  
Griffith Fracture Criterion and Concrete  
Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE,  
97 (1971), pp 1663 - 1676
- [97] Shah, S.P. and Winter, G.:  
Inelastic behaviour and fracture of concrete  
Journal of the American Concrete Institute,  
Proceedings, Vol. 63, No. 9, pp 925 - 930,  
September 1966
- [98] Sih, G.C.; Paris, P.C. and Erdogan, F.:  
Crack-Tip Stress-Intensity Factors for Plane Extension  
and Plate Bending Problems  
Journal of Applied Mechanics, June 1962, pp 306 - 311

- [99] Slate, F.O. and Olsefski, S.:  
X-ray for study of internal structure and microcracking  
of concrete  
Journal of the American Concrete Institute,  
Proceedings, Vol. 60, No. 5, pp 575 - 587,  
May 1963
- [100] Sok, C.:  
Etude de la Propagation d'une Fissure dans un Béton non Armé  
Bull. Liaison Lab. Ponts et Chaussées, 98 (1978), S. 73 - 84
- [101] Southwell, R.V. and Gough, H.J.:  
Phil. Mag, Jan. 1926, p 71  
Presented at the National Applied Mechanics Meeting  
New Haven, Conn. 1932
- [102] Sturman, G.M.; Shah, S.P. and Winter, G.:  
Effect of flexural strain gradients on microcracking and  
stress-strain behaviour of concrete  
Journal of the American Concrete Institute,  
Proceedings, Vol. 62, No. 7, pp 805 - 822,  
Juli 1965
- [103] Stock, A.F.; Hannant, D.J. and Williams, R.I.T.:  
The effect of aggregate concentration upon the strength  
and modulus of elasticity of concrete  
Magazine of Concrete Research, Vol. 31, No. 109,  
December 1979, pp 225 - 234
- [104] Swamy, R.N.:  
Linear Elastic Fracture Mechanics of Concrete  
in: Fracture Mechanics of Concrete  
Edited by F.H. Wittmann  
Elsevier Science Publishers B.V.,  
Amsterdam (1983)
- [105] Tada, H.; Paris, P. and Irwin, G.R.:  
The Stress Analysis of Cracks  
Handbook  
Del Research Corp. (1973)

- [106] Taylor, M.A. and Broms, B.B.:  
Shear bond strength between coarse aggregate and cement  
paste or mortar  
Journal of the American Concrete Institute,  
Proceedings, Vol. 61, No. 8,  
August 1964, pp 939 - 958
- [107] Theocaris, P.S. and Prassianakis, J.N.:  
The Mohr envelope of failure for concrete: a study of  
its tension-compression part  
Magazine of Concrete Research, Vol. 26, No. 87,  
June 1974, pp 73 - 82
- [108] Torre, C.:  
Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung auf die Fließ-  
und Bruchgrenze  
Österreichisches Ingenieur Archiv, Bd. I, Heft 4/5, S. 339  
(1946)
- [109] Velazco, F.; Visalvanich, K. and Shah, S.P.:  
Fracture Behaviour and Analysis of Fibre Reinforced  
Concrete Beams  
Cement and Concrete Research, 10 (1980), pp 41 - 51
- [110] Ward, M.A.:  
The testing of concrete materials by precisely controlled  
uniaxial tension  
PhD. Thesis, University of London, March 1969
- [111] Weigler, H. und Becker, G.:  
Untersuchungen über das Bruch- und Verformungsverhalten  
von Beton bei zweiachsiger Beanspruchung  
DAfStb, Heft 157  
W. Ernst & Sohn, Berlin (1963)
- [112] Welch, G.B.:  
Tensile strains in unreinforced concrete beams  
Magazine of Concrete Research, Vol. 18, No. 54, pp 9 - 18  
March 1966

- [113] Westerdaard, H.M.:  
Bearing Pressure On Cracks  
Journal of Applied Mechanics, Vol. 6, p 49,  
June 1939
- [114] Zement Taschenbuch 1984  
Hrsg.:Verein deutscher Zementwerke  
Beitrag von Locher, F.W. und Wischers, G.:  
Aufbau und Eigenschaften des Zementsteins  
Bauverlag GmbH, Wiesbaden - Berlin  
(1984)
- [115] Zement Taschenbuch 1984  
Hrsg.: Verein deutscher Zementwerke  
Beitrag von Dahms, J.: Normalzuschlag  
Bauverlag GmbH, Wiesbaden - Berlin  
(1984)
- [116] Ziegeldorf, S.:  
10. Forschungskolloquium des DAfStb,  
Karlsruhe (1979), S. 43 - 47
- [117] Ziegeldorf, S.:  
Fracture Mechanics Parameter of Hardened Cement Paste,  
Aggregates and Interfaces  
in: Fracture Mechanics of Concrete  
Edited by F.H. Wittmann  
Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam (1983)
- [118] ZTV Beton 78  
Zusätzliche Technische Vorschriften und Richtlinien für  
den Bau von Fahrbahndecken aus Beton,  
Ausgabe 1978,  
Der Bundesminister für Verkehr

Anhang A1

A 1.1 Bestimmung des Vorzeichens des zweiten Summanden  
in der Formel ( 2.36)

Sawin gibt in [94] zur Berechnung von  $\beta_{-1}$  an ([94] , Seite 257):

$$\beta_{-1} = 2 - \frac{2(1 + \nu)}{\left(\frac{G}{G_1} - 1\right) - \left(1 + \nu_1 \frac{G}{G_1}\right)}$$

Nachstehend wird nachgewiesen, daß das Vorzeichen des zweiten Summanden nicht negativ sein kann, sondern positiv ist. Damit lautet dann die richtige Formel :

$$\beta_{-1} = 2 + \frac{2(1 + \nu)}{\left(\frac{G}{G_1} - 1\right) - \left(1 + \nu_1 \frac{G}{G_1}\right)}$$

Die Ausgangsformel von Sawin zur Berechnung von  $\beta_{-1}$  lautet (Gleichung (5.16) in [94] ) :

$$\beta_{-1} = 2 - \frac{2(1 + \nu)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{2}{n^2}\left(\frac{G}{G_1} - 1\right) - \left[\left(\frac{G}{G_1} - 1\right) - \left(1 - \nu_1 \frac{G}{G_1}\right)\right]}$$

Durch eigene Herleitung, die hier nicht wiedergegeben wird, konnte die Richtigkeit dieser Formel verifiziert werden

Im Falle der zusammenhängenden und isotropen Kreisscheibe in einer unendlichen Scheibe gilt für den inneren Scheibenradius  $R_1 = 0$  und für den äußeren Scheibenradius  $R_2 = \text{const.}$  In der Formel wird das Verhältnis des äußeren Radius  $R_2$  zum inneren Radius  $R_1$  mit  $n$  bezeichnet. Mit diesen Voraussetzungen ergibt

sich dann :

$$\frac{1}{n} = \frac{R_1}{R_2} = 0$$

Für den Grenzübergang  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \beta_{-1} &= 2 - \frac{2(1 + \chi)}{-\left[-\frac{G}{G_1} - 1\right] - \left(1 + \chi_1 \frac{G}{G_1}\right)} \\ &= 2 + \frac{2(1 + \chi)}{\left(-\frac{G}{G_1} - 1\right) - \left(1 + \chi_1 \frac{G}{G_1}\right)} \end{aligned}$$

Das positive Vorzeichen wird auch bestätigt durch die Formel für  $\beta_{-1}$ , die Sawin für den starren Einschluß ( Formelgruppe (5.18) in [94] ) angibt. Der für diesen Sonderfall richtig angegebene Wert

$$\beta_{-1} = 1 - \chi$$

ergibt sich nämlich auch, wenn man in (2.37)  $G_1 = \infty$  einsetzt.

Eine weitere Bestätigung des positiven Vorzeichens ergibt sich durch einen Vergleich der Ergebnisse mit den Werten, die sich bei einer Berechnung nach Goodier [29] ergaben.



A 1.2 Ermittlung der Formel zur Bestimmung von  $\beta_{-3}$

Sawin gibt in [94] in der dortigen Formelgruppe (5.20) keine Gleichung zur Bestimmung von  $\beta_{-3}$  an, so daß man annehmen könnte, daß dieser Wert identisch Null wäre. Das ist jedoch nicht der Fall, wie nachfolgend gezeigt wird.

Die Formeln zur Berechnung der Spannungen in einer infiniten Scheibe mit Kreisloch <sup>1)</sup> enthalten einen Term mit  $R^4$  (siehe hierzu z.B. [26]), wie sich nach partieller Ableitung der Airyschen Spannungsfunktion ergibt. Damit kann auch der zu diesem Term gehörende Koeffizient  $\beta_{-3}$  auf keinen Fall identisch Null sein. Wie der fehlende Ausdruck für  $\beta_{-3}$  lautet, wird nachfolgend hergeleitet.

Nach Sawin gilt für den allgemeinen Fall ( Formeln (5.16) und (5.17) in [94] ) <sup>2)</sup> :

$$\beta_{-3} = -2 + \frac{2(1 + \nu)}{D_1} \left[ \left( -\frac{G}{G_1} - 1 \right) (4n^6 - 7n^4 + 4n^2 - 1) + n^4(n^4 - 1) \left( 1 + \nu_1 \frac{G}{G_1} \right) \right] \quad (A1.2-1)$$

Mit

$$D_1 = \left( \nu + \frac{G}{G_1} \right) n^2 \left[ \left( -\frac{G}{G_1} - 1 \right) (3n^4 - 6n^2 + 4) + n^4 \left( 1 + \nu_1 \frac{G}{G_1} \right) \right] + \left( \nu_1 \frac{G}{G_1} - \nu \right) \left[ \left( -\frac{G}{G_1} - 1 \right) + n^4 \left( 1 + \nu_1 \frac{G}{G_1} \right) \right] \quad (A1.2-2)$$

---

<sup>1)</sup> Die infinite Scheibe mit Loch ist ja nur ein Sonderfall der infiniten Scheibe mit Einschuß, den man erhält, wenn man den Elastizitätsmodul des Einschlusses zu Null annimmt.

<sup>2)</sup> Durch eigene Herleitung wurde die Richtigkeit der Formeln (5.16) und (5.17) von Sawin bestätigt.

Dividiert man Formel (A1.2-2) sowie Zähler und Nenner des Bruches in Formel (A1.2-1) durch die höchste Potenz von n (also  $n^8$ ), so ergibt sich :

$$\beta_{-3} = -2 + \frac{2(1+\chi)}{\frac{D_1}{n^8}} \left( \frac{G}{G_1} - 1 \right) \left( \frac{4}{n^2} - \frac{7}{n^4} - \frac{4}{n^6} - \frac{1}{n} \right) + \left( 1 - \frac{1}{n^4} \right) \left( 1 + \chi_1 \frac{G}{G_1} \right) \quad (\text{A1.2-3})$$

$$\frac{D_1}{n^8} = \left( \chi + \frac{G}{G_1} \right) \left( \frac{G}{G_1} - 1 \right) \left( \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^4} + \frac{4}{n^6} \right) + \left( 1 + \chi_1 \frac{G}{G_1} \right) + \left( \chi_1 \frac{G}{G_1} - \chi \right) \frac{\frac{G}{G_1} - 1}{n^8} + \frac{1}{n^2} \left( 1 + \chi_1 \frac{G}{G_1} \right) \quad (\text{A1.2-4})$$

Für  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  ergeben sich die Grenzwerte zu :

$$\lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{D_1}{n^8} = \left( \chi + \frac{G}{G_1} \right) \left( 1 + \chi_1 \frac{G}{G_1} \right) \quad (\text{A1.2-5})$$

$$\lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \beta_{-3} = -2 + \frac{2(1+\chi) \left( 1 + \chi_1 \frac{G}{G_1} \right)}{\left( \chi + \frac{G}{G_1} \right) \left( 1 + \chi_1 \frac{G}{G_1} \right)} \quad (\text{A1.2-6})$$

$$\beta_{-3} = -2 + \frac{2(1+\chi)}{\chi + \frac{G}{G_1}} \quad (\text{A1.2-7})$$

Im Sonderfall des starren Einschlusses ergibt sich mit  $G_1 = \infty$  :

$$\beta_{-3} = -2 + \frac{2(1 + \kappa)}{\kappa} = \frac{2}{\kappa} \quad (\text{A1.2-8})$$

Formel (A1.2 -8) ist auch identisch mit der von Sawin für diesen Spezialfall angegebenen Formel ([94] Seite 257 ).



Anhang A2

A 2.1 Berechnungsbeispiele nach Goodier [29] für einen kugelförmigen Einschluß

A 2.1a Starrer Einschluß

$$\left. \begin{array}{l} E = 0,2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2 \\ \nu = 0,2 \end{array} \right\} \text{ Matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = \infty \\ \nu_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ Einschluß}$$

Die Berechnung der Spannungen erfolgt mit den Formeln von Goodier [29], bei denen die Bezeichnungen aber entsprechend den Bezeichnungen der eigenen Arbeit abgeändert wurden. Die oberen Indizes der Spannungen kennzeichnen die verschiedenen Einzelzustände, die für die endgültige Lösung zu überlagern sind.

Die "Störspannungen" ergeben sich dann durch :

$$\sigma_r^1 = 2 E \left\{ \frac{2 A}{r^3} - \frac{2 \nu}{1 - 2 \nu} \frac{C}{r^3} + 12 \frac{B}{r^5} + \left[ - \frac{2(5 - \nu)}{1 - 2 \nu} \frac{C}{r^3} + 36 \frac{B}{r^5} \right] \cos 2 \varphi \right\} \quad (\text{A2.1})$$

$$\sigma_\varphi^1 = 2 E \left\{ \frac{-A}{r^3} - \frac{2 \nu}{1 - 2 \nu} \frac{C}{r^3} - 3 \frac{B}{r^5} + \left[ \frac{C}{r^3} - 21 \frac{B}{r^5} \right] \cos 2 \varphi \right\} \quad (\text{A2.2})$$

$$\sigma_{\psi}^1 = 2 E \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{C}{r^3} - 9 \frac{B}{r^5} + \left[ 3 \frac{C}{r^3} - 15 \frac{B}{r^5} \right] \cos 2\varphi \right\} \quad (\text{A2.3})$$

$$\tau_{r\varphi} = 2 E \left\{ -\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{C}{r^3} + 24 \frac{B}{r^5} \right\} \sin 2\varphi \quad (\text{A2.4})$$

Mit

$$\frac{A}{R^3} = \frac{p}{4 E} \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{3}{16-20\nu} \right] \quad (\text{A2.5})$$

$$\frac{B}{R^3} = -\frac{p}{8 E} \frac{1}{8-10\nu} \quad (\text{A2.6})$$

$$\frac{C}{R^3} = -\frac{p}{8 E} \frac{5(1-2\nu)}{8-10\nu} \quad (\text{A2.7})$$

Mit  $\nu = 0,2$  und dem Einheitsradius  $R = 1$  ergibt sich dann :

$$A = \frac{0,2292 p}{E}$$

$$B = -\frac{0,0208 p}{E}$$

$$C = -\frac{0,0625 p}{E}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (A2.1) bis (A2.4) ein, so ergibt sich für die Kontaktfläche zwischen Matrix und Einschluß mit  $r = R = 1$  und unter einer Einheitsbelastung  $p = 1$  nach einigen Rechenschritten :

$$\sigma_r^1 = 0,50 + 0,50 \cdot \cos 2\varphi$$

$$\sigma_{\varphi}^1 = -0,25 + 0,75 \cdot \cos 2\varphi$$

$$\sigma_{\psi}^1 = 0,25 + 0,25 \cdot \cos 2\varphi$$

$$\tau_{r\varphi}^1 = -0,50 \cdot \sin 2\varphi$$

Die sich daraus ergebenden Spannungen sind zu überlagern mit den oben mit 2 indizierten Werten der Spannungsformeln für das homogene elastische Kontinuum unter einachsiger Beanspruchung.

$$\sigma_r^2 = 0,5 p ( 1 + \cos 2\varphi )$$

$$\tau_{r\varphi} = -0,5 p \cdot \sin 2\varphi$$

$$\sigma_\varphi^2 = 0,5 p ( 1 - \cos 2\varphi )^1)$$

Führt man die Überlagerung durch, so ergeben sich endgültig die in Tabelle A 2.1 angegebenen bezogenen Spannungen.

$\varphi$	Spannungen/ $p$			
	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$	$\sigma_\psi$	$\tau_{r\varphi}$
$0^\circ$	2,0	0,50	0,50	0
$45^\circ$	1,0	0,25	0,25	-1,0
$90^\circ$	0	0	0	0

Tabelle A 2.1 : Bezogene Spannungen für den starren Einschluß

### Berechnung der Hauptspannungen

Bei der vorliegenden einachsigen Belastung ist der Verlauf von  $\sigma_\psi$  rotationssymmetrisch in Umfangsrichtung. Da damit die zugehörige Schubspannung  $\tau_{r\psi}$  identisch Null für alle  $\psi$  ist, handelt es sich bei  $\sigma_\psi$  schon um eine der gesuchten Hauptspannungen.

$$\sigma_3 = \sigma_\psi$$

---

1) Goodier gibt in [29] aus nicht bekannten Gründen keine Formel zur Berechnung von  $\sigma_\varphi$  bei homogenem Kontinuum unter einachsiger Belastung an. Es läßt sich aber leicht herleiten, daß die zugehörige Formel wie oben angegeben lauten muß.

Für die beiden anderen Hauptspannungen gilt :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2}{4} + \tau_{r\varphi}^2}$$

Die Auswertung dieser Formel ergibt die in Tabelle A 2.2 angegebenen Spannungen.

$\varphi$	Spannungen / p		
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$0^\circ$	2,0	0,50	0,50
$45^\circ$	1,69	-0,44	0,25
$90^\circ$	0	0	0

Tabelle A 2.2 : Bezogene Hauptspannungen für den starren Einschuß



A 2.1b Elastischer Einschluß

$$\begin{array}{l|l} E = 0,20 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2 & \text{Matrix} \\ \nu = 0,2 & \\ \hline E = 0,70 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2 & \text{Einschluß} \\ \nu = 0,25 & \end{array}$$

Die Koeffizienten A, B und C ergeben sich nach Goodier [29] zu :

$$\begin{aligned} \frac{A}{R^3} &= \frac{p}{8E} \cdot \frac{E - E_1}{(7 - 5\nu)E + (8 - 10\nu)E_1} \\ &\cdot \frac{(1 - 2\nu_1)(6 - 5\nu)2E + (3 + 19\nu_1 - 20\nu\nu_1)E_1}{(1 - 2\nu_1)2E + (1 + \nu_1)E} \\ &+ \frac{p}{4E} \cdot \frac{\left[ (1 - \nu) \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu} - \nu_1 \right] E_1 - (1 - 2\nu_1)E}{(1 - 2\nu_1)2E + (1 + \nu_1)E} \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

$$\frac{B}{R^5} = \frac{p}{8E} \cdot \frac{E - E_1}{(7 - 5\nu)E + (8 - 10\nu)E_1} \quad (\text{A2.9})$$

$$\frac{C}{R^3} = \frac{p}{8E} \cdot \frac{5(1 - 2\nu)(E - E_1)}{(7 - 5\nu)E + (8 - 10\nu)E_1} \quad (\text{A2.10})$$

Setzt man die gegebenen Elastizitätskonstanten ein, so ergibt sich für  $R = 1$  und  $p = 1$  :

$$\begin{aligned} A &= 0,66661 \cdot 10^{-5} \\ B &= -0,0578 \cdot 10^{-5} \\ C &= -0,1736 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Die Formeln zur Berechnung der Spannungen ergeben sich dann zu :

$$\begin{aligned} \sigma_r^1 &= 0,3022 + 0,2775 \cos 2\varphi \\ \sigma_\phi^1 &= -0,1508 + 0,4161 \cos 2\varphi \\ \sigma_\psi^1 &= 0,1271 + 0,1385 \cos 2\varphi \\ \tau_{r\phi}^1 &= -0,277 \sin 2\varphi \end{aligned}$$

$$\sigma_r^2 = 0,5 p (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\sigma_\varphi^2 = 0,5 p (1 - \cos 2\varphi)$$

$$\tau_{r\varphi}^2 = -0,5 p \sin 2\varphi$$

Nach Überlagerung ergeben sich die in Tabelle A 2.3 zusammengestellten Spannungen.

$\varphi$	Spannungen / p			
	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$	$\sigma_\psi$	$\tau_{r\varphi}$
0°	1,58	0,27	0,27	0
45°	0,80	0,35	0,13	-0,78
90°	0,02	0,43	-0,01	0

Tabelle A 2.3 : Bezogene Spannungen bei elastischem Einschluß

Berechnung der Hauptspannungen

$\varphi$	Spannungen / p		
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
0°	1,58	0,27	0,27
45°	1,39	-0,23	0,13
90°	0,43	0,02	-0,01

Tabelle A 2.4 : Bezogene Hauptspannungen bei elastischem Einschluß

A 2.2 Berechnungsbeispiel nach Goodier [29] für eine  
infinite Scheibe mit kreisförmigem Einschuß

A 2.2a Starrer Einschuß

Elastizitätskonstanten wie bei A 2.1a.

Analog A 2.1a ergeben sich die Formeln zur Berechnung  
der Spannungen zu :

$$\sigma_r^1 = 2 E \left[ - \frac{A}{r^2} + \left( \frac{3 B}{r^4} - \frac{2 C}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right] \quad (\text{A2.11})$$

$$\sigma_\varphi^1 = 2 E \left[ \frac{A}{r^2} - \frac{3 B}{r^4} \cos 2\varphi \right] \quad (\text{A2.12})$$

$$\tau_{r\varphi}^1 = 2 E \left[ \frac{3 B}{r^4} - \frac{C}{r^2} \sin 2\varphi \right] \quad (\text{A2.13})$$

Mit :

$$\frac{A}{R^2} = - \frac{P}{4 E} (1 - 2\nu) \quad (\text{A2.14})$$

$$\frac{B}{R^4} = - \frac{P}{4 E} \frac{1}{3 - 4\nu} \quad (\text{A2.15})$$

$$\frac{C}{R^2} = - \frac{P}{2 E} \frac{1}{3 - 4\nu} \quad (\text{A2.16})$$

Mit  $\nu = 0,2$  und  $R = 1$  ergibt sich damit :

$$A = - 0,15 \frac{P}{E}$$

$$B = - 0,1136 \frac{P}{E}$$

$$C = - 0,2273 \frac{P}{E}$$

Setzt man diese Werte in (A2.11) bis (A2.13) ein, so ergibt sich für  $r = R = 1$  und  $p = 1$  nach einigen Rechenschritten :

$$\sigma_r^1 = 0,30 + 0,228 \cos 2\varphi$$

$$\sigma_\varphi^1 = -0,30 + 0,682 \cos 2\varphi$$

$$\tau_{r\varphi}^1 = -0,23 \sin 2\varphi$$

Die sich aus diesen Formeln ergebenden Spannungen sind zu superponieren mit den Werten für die homogene infinite Scheibe unter einachsiger Belastung.

$$\sigma_r^2 = 0,5 p ( 1 + \cos 2\varphi )$$

$$\sigma_\varphi^2 = 0,5 p ( 1 - \cos 2\varphi )$$

$$\tau_{r\varphi}^2 = -0,5 p \sin 2\varphi$$

Führt man die Überlagerung durch, so ergeben sich endgültig die in Tabelle A 2.5 angegebenen bezogenen Spannungen.

$\varphi$	Spannungen / p		
	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$	$\tau_{r\varphi}$
$0^\circ$	1,53	0,38	0
$45^\circ$	0,80	0,20	-0,73
$90^\circ$	0,07	0,02	0

Tabelle A 2.5 : Bezogene Spannungen bei starrem Einschluß

Berechnung der Hauptspannungen

$\varphi$	Spannungen/ p	
	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$0^\circ$	1,53	0,38
$45^\circ$	1,29	-0,29
$90^\circ$	0,07	0,02

Tabelle A 2.6 : Bezogene Hauptspannungen bei starrem Einschluß

A 2.2b Elastischer Einschluß

Elastizitätskonstanten wie bei A 2.1b.

Die Koeffizienten A, B und C ergeben sich zu :

$$\frac{A}{R^2} = \frac{p}{4 E} \frac{(1 - 2\nu) E - (1 - 2\nu) E}{(1 - 2\nu) E + E} \quad (A2.17)$$

$$\frac{B}{R^4} = \frac{p}{4 E} \frac{E - E_1}{E + (3 - 4\nu) E_1} \quad (A2.18)$$

$$\frac{B}{R^2} = \frac{p}{2 E} \frac{E - E_1}{E + (3 - 4\nu) E_1} \quad (A2.19)$$

Setzt man die gegebenen Elastizitätskonstanten ein, so ergibt sich mit  $R = 1$  und  $p = 1$  :

$$A = - \frac{0,10}{E}$$

$$B = - \frac{0,0718}{E}$$

$$C = - \frac{0,1437}{E}$$

Die "Störspannungen" ergeben sich dann aus :

$$\sigma_r^1 = + 0,20 + 0,1437 \cos 2\varphi$$

$$\sigma_\varphi^1 = - 0,20 + 0,421 \cos 2\varphi$$

$$\tau_{r\varphi}^1 = - 0,1434 \sin 2\varphi$$

Die Spannungen im homogenen Fall ergeben sich wie bei A 2.2a.

Nach Überlagerung ergeben sich die in Tabelle A 2.7 und A 2.8 angegebenen Spannungen.

$\varphi$	Spannungen / p		
	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$	$\tau_{r\varphi}$
$0^\circ$	1,34	0,23	0
$45^\circ$	0,70	0,30	-0,64
$90^\circ$	0,06	0,37	0

Tabelle A 2.7 : Bezogene Spannungen bei elastischem Einschluß

$\varphi$	Spannungen/ p	
	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$0^\circ$	1,34	0,23
$45^\circ$	1,17	-0,17
$90^\circ$	0,37	0,06

Tabelle A 2.8 : Bezogene Hauptspannungen bei elastischem Einschluß

Anhang A3.1

Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen  
am elliptischen Einschluß

Sawin gibt in [94] die komplexen Funktionen  $\varphi(\xi)$  und  $\psi(\xi)$  zur Berechnung der Spannungen an elliptischen Einschlässen in allgemeiner Form an durch :

$$\varphi(\xi) = \frac{p R}{4} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{p R}{4 \kappa} (m - 2 e^{2i\alpha}) \xi \quad (A3.1)$$

$$\psi(\xi) = -\frac{p R}{4} \cdot \frac{e^{-2i\alpha}}{\xi} + \left[ \frac{p R \kappa}{4} - \frac{p R}{4} \cdot \frac{1 + m^2}{1 - m \xi^2} \right] \xi - \left[ \frac{p R m}{4} - \frac{p R e^{2i\alpha}}{2} \right] \frac{(\xi^2 + m) \xi}{\kappa (m \xi^2 - 1)} \quad (A3.2)$$

Die konforme Abbildung einer Ellipse auf den Kreis wird erreicht durch :

$$z = \omega(\xi) = R \left( \frac{1}{\xi} + m \xi \right) \quad (A3.3)$$

$$m = \frac{a - b}{a + b}$$

a, b = Halbachsen der Ellipse

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{für den ebenen Spannungszustand} \\ 3 - 4\nu & \text{für den ebenen Dehnungszustand} \end{cases}$$

Die Kolosoff - Muskhelischwili - Formeln lauten in ihrer allgemeinen Form :

$$\sigma_\varphi + \sigma_r = 2 \left[ \Phi_{(\xi)} + \overline{\Phi_{(\xi)}} \right] = 4 \cdot \text{Re} \left[ \Phi_{(\xi)} \right] \quad (\text{A3.4})$$

$$\sigma_\varphi + \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = \frac{2\xi^2}{\rho^2 \overline{\omega_{(\xi)}}} \left[ \overline{\omega_{(\xi)}} \cdot \Phi'_{(\xi)} + \Psi'_{(\xi)} \right] \quad (\text{A3.5})$$

mit  $\Phi_{\xi} = \frac{\varphi'_{(\xi)}}{\omega'_{(\xi)}}$

Zur Herleitung der speziellen Berechnungsformeln ist es sinnvoll, zunächst die Einzelausdrücke bereitzustellen.

$$\varphi'_{(\xi)} = -\frac{\rho R}{4} \cdot \frac{1}{\xi^2} + \frac{\rho R}{4\kappa} (m - 2e^{2i\alpha})$$

$$\psi'_{(\xi)} = \frac{\rho R}{2} \cdot \frac{e^{2i\alpha}}{\xi^2} + \frac{\rho R \kappa}{4} - \frac{\rho R (1+m^2)}{4} \cdot \frac{(1-m\xi^2) - \xi(-2m\xi)}{(1-m\xi^2)^2}$$

$$-\left( \frac{\rho R m}{4\kappa} - \frac{\rho R e^{2i\alpha}}{2\kappa} \right) \frac{(m\xi^2-1)(3\xi^2+m) - (\xi^2+m)\xi \cdot 2m\xi}{(m\xi^2-1)^2}$$

$$= \frac{\rho R}{2} \left[ \frac{e^{-2i\alpha}}{\xi^2} + \frac{\kappa}{2} - \frac{(1+m^2)(1+m\xi^2)}{(m\xi^2-1)^2} \right]$$

$$- \left( \frac{m}{2\kappa} - \frac{e^{2i\alpha}}{\kappa} \right) \left( \frac{m\xi - m^2\xi^2 - 3\xi^2 - m}{(m\xi^2-1)^2} \right) \Big]$$

$$\omega'_{(\xi)} = R \left( -\frac{1}{\xi^2} + m \right)$$

$$\omega_{(\xi)} = R \left( \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} + m\rho e^{i\varphi} \right)$$

$$\overline{\omega_{(\xi)}} = R \left( \frac{1}{\rho} e^{i\varphi} + m\rho e^{-i\varphi} \right)$$

$$\overline{\omega'}_{(\xi)} = R \left( \frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m\rho^2}{\xi} \right)$$

$$\omega'_{(\xi)} = R \left( -\frac{1}{\rho^2} e^{-2i\varphi} + m \right)$$

$$\overline{\omega'_{(\xi)}} = R \left( -\frac{1}{\rho^2} e^{2i\varphi} + m \right)$$



$$\rho^2 \bar{\omega}'(\xi) = R \left( \rho^2 m - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} = \frac{1}{R \left( m - \frac{1}{\xi^2} \right)} \left[ -\frac{\rho R}{4 \xi^2} + \frac{\rho R}{4 \kappa} \left( m - 2 e^{2i\alpha} \right) \right]$$

$$\Phi(\xi) = \frac{\rho}{\left( m - \frac{1}{\xi^2} \right)^4} \left[ \frac{1}{\kappa} \left( m - 2 e^{2i\alpha} \right) - \frac{1}{\xi^2} \right]$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{\rho}{4} \left[ \frac{\left( m - \frac{1}{\xi^2} \right)^2 \frac{1}{\xi^3} - \left[ \frac{1}{\kappa} \left( m - 2 e^{2i\alpha} \right) - \frac{1}{\xi^2} \right] \frac{2}{\xi^3}}{\left( m - \frac{1}{\xi^2} \right)^2} \right]$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{\rho}{2} \left[ \frac{m - \frac{1}{\kappa} \left( m - 2 e^{2i\alpha} \right)}{\xi^3 \left( m - \frac{1}{\xi^2} \right)^2} \right]$$

Zur Vereinfachung der weiteren Herleitung werden die komplexen Ausdrücke in die trigonometrische Form gebracht.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{A3.6})$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \quad (\text{A3.7})$$

$$\Phi(\xi) = \frac{\rho}{4} \frac{\frac{m - 2 \cos 2\alpha}{\kappa} - i \frac{2 \sin 2\alpha}{\kappa} - \rho^2 \cos 2\varphi + i \rho^2 \sin 2\varphi}{m - \frac{1}{\rho^2} \cos 2\varphi + i \frac{1}{\rho^2} \sin 2\varphi}$$

Setzt man

$$a r_0 = \frac{m - 2 \cos 2\alpha}{\kappa}$$

$$a i_0 = \frac{2 \sin 2\alpha}{\kappa}$$

- A3/4 -

$$ar_1 = m - \cos 2\varphi \frac{1}{\rho^2}$$

$$ai_1 = \sin 2\varphi \frac{1}{\rho^2} \quad ,$$

so ergibt sich :

$$\Phi(\xi) = \frac{\rho}{4} \frac{(ar_0 - \rho^2 \cos 2\varphi + i(\rho^2 \sin 2\varphi - ai_0))}{ar_1 + i \cdot ai_1}$$

Setzt man weiter

$$ar_2 = ar_0 - \cos \varphi \cdot \rho^2$$

$$ai_2 = \rho^2 \cdot \sin 2\varphi - ai_0 \quad ,$$

so ergibt sich :

$$\Phi(\xi) = \frac{\rho}{4} \frac{ar_2 + i \cdot ai_2}{ar_1 + i \cdot ai_1}$$

Der Nenner wird durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners reell.

$$\Phi(\xi) = \frac{\rho}{4} \cdot \frac{ar_2 + i \cdot ai_2}{ar_1 + i \cdot ai_1} \cdot \frac{ar_1 - i \cdot ai_1}{ar_1 - i \cdot ai_1}$$

$$\Phi(\xi) = \frac{\rho}{4} \cdot \frac{ar_2 \cdot ar_1 + ai_2 \cdot ai_1 + i(ai_2 \cdot ar_1 - ai_1 \cdot ar_2)}{(ar_1)^2 + (ai_1)^2}$$

Mit den weiteren Abkürzungen

$$ar_3 = ar_1 \cdot ar_2 + ai_2 \cdot ai_1$$

$$ai_3 = ai_2 \cdot ar_1 - ai_1 \cdot ar_2$$

$$ar_4 = (ar_1)^2 + (ai_1)^2$$

wird daraus :

$$\Phi'(\xi) = \frac{\rho}{4} \cdot \frac{ar_3 + i \cdot ai_3}{ar_4} \quad (A3.8)$$

$\Phi'(\xi)$  und die anderen benötigten Ausdrücke werden in ähnlicher Weise entwickelt.

$$\Phi'(\xi) = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{m - \frac{1}{\kappa} [m - 2 (\cos 2\alpha + i \cdot \sin 2\alpha)]}{\rho^3 m^2 (\cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi) - 2m\rho (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) + \frac{\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi}{\rho}}$$

$$ar_5 = \rho^3 m^2 \cos 3\varphi - 2m\rho \cos \varphi + \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

$$ai_5 = \rho^3 m^2 \sin 3\varphi - 2m\rho \sin \varphi - \frac{\sin \varphi}{\rho}$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{m - ar_0 + i \cdot ai_0}{ar_5 + i \cdot ai_5}$$

$$ar_6 = m - ar_0$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{ar_6 + i \cdot ai_0}{ar_5 + i \cdot ai_5} \cdot \frac{ar_5 - i \cdot ai_5}{ar_5 - i \cdot ai_5}$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{ar_6 ar_5 + ai_0 ai_5 + i (ai_0 ar_5 - ai_5 ar_6)}{(ar_5)^2 + (ai_5)^2}$$

$$ar_7 = ar_6 ar_5 + ai_0 ai_5$$

$$ai_7 = ai_0 ar_5 - ai_5 ar_6$$

$$ar_8 = (ar_5)^2 + (ai_5)^2$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{ar_7 + i \cdot ai_7}{ar_8} \quad (A3.9)$$

$$\bar{\omega}(\xi) = R \frac{1}{\rho} (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) + m\rho (\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} ar_9 &= \cos \varphi \left( \frac{1}{\rho} + m \rho \right) \\ ai_9 &= \sin \varphi \left( \frac{1}{\rho} - m \rho \right) \end{aligned}$$

$$\bar{\omega}(\xi) = R ( ar_9 + i \cdot ai_9 ) \quad (A3.10)$$

$$\Phi'(\xi) \bar{\omega}(\xi) = \frac{\rho R}{2} \cdot \frac{ar_7 + i \cdot ai_7}{ar_8} ( ar_9 + i \cdot ai_9 )$$

$$\begin{aligned} ar_{10} &= ar_7 ar_9 - ai_7 ai_9 \\ ai_{10} &= ai_7 ar_9 + ar_7 ai_9 \end{aligned}$$

$$\Phi'(\xi) \bar{\omega}(\xi) = \frac{\rho R}{2} \cdot \frac{ar_{10} + i ai_{10}}{ar_8} \quad (A3.11)$$

$$\begin{aligned} \Psi'(\xi) &= \frac{\rho R}{2} \left[ e^{-2i\alpha} \cdot \frac{1}{\rho^2} e^{-2i\varphi} + \frac{\chi}{2} - \frac{(1+m^2)(1+m\rho^2 e^{2i\varphi})}{2(1-m\rho^2 e^{2i\varphi})^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\chi} \left( \frac{m}{2} - e^{2i\alpha} \right) \frac{m\rho^4 e^{4i\varphi} - m^2\rho^2 e^{2i\varphi} - 3\rho^2 e^{2i\varphi} - m}{(m\rho^2 e^{2i\varphi} - 1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$f_1(\xi) = \frac{e^{2i\alpha} \cdot e^{2i\varphi}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha)(\cos 2\varphi - i \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{1}{\rho^2} \cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\varphi \\ &\quad - i (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\varphi + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\varphi) \end{aligned}$$

$$ar_{11} = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\varphi$$

$$ai_{11} = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\varphi + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\varphi$$

$$f_1(\xi) = \frac{ar_{11} - i \cdot ai_{11}}{\rho^2}$$

$$f_{2(\xi)} = \frac{(1 + m^2) [1 + m \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)]}{2 [1 - m \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)]^2}$$

$$f_{2(\xi)} = \frac{(1 + m^2) [(1 + \rho^2 m \cos 2\varphi) + i m \rho^2 \sin 2\varphi]}{2 [1 - 2 m \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + m^2 \rho^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)]}$$

$$ar_{12} = (1 + m^2) (1 + \rho^2 m \cos 2\varphi)$$

$$ai_{12} = (1 + m^2) \rho^2 m \sin 2\varphi$$

$$ar_{13} = 1 - 2 m \rho^2 \cos 2\varphi + m^2 \rho^4 \cos 4\varphi$$

$$ai_{13} = m^2 \rho^4 \sin 4\varphi - 2 m \rho^2 \sin 2\varphi$$

$$f_{2(\xi)} = \frac{ar_{12} + i \cdot ai_{12}}{2(ar_{13} + i \cdot ai_{13})} \frac{ar_{13} - i \cdot ai_{13}}{ar_{13} - i \cdot ai_{13}}$$

$$f_{2(\xi)} = \frac{(ar_{12} ar_{13} + ai_{13} ai_{12}) + i(ai_{12} ar_{13} - ai_{13} ar_{12})}{2 [(ar_{13})^2 + (ai_{13})^2]}$$

$$ar_{14} = ar_{12} ar_{13} + ai_{12} ai_{13}$$

$$ai_{14} = ai_{12} ar_{13} - ai_{13} ar_{12}$$

$$ar_{15} = (ar_{13})^2 + (ai_{13})^2$$

$$f_{2(\xi)} = \frac{ar_{14} + i \cdot ai_{14}}{2 ar_{15}}$$

$$f_{3(\xi)} = \frac{1}{x} \frac{m}{2} - (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$ar_{16} = \frac{1}{x} \left( \frac{m}{2} - \cos 2\alpha \right)$$

$$ai_{16} = \frac{\sin 2\alpha}{x}$$

$$f_{3(\xi)} = ar_{16} - i \cdot ai_{16}$$

$$f_4(\xi) = \frac{m \rho^4 e^{4i\varphi} - m^2 \rho^2 e^{2i\varphi} - 3 \rho^2 e^{2i\varphi} - m}{m^2 \rho^4 e^{4i\varphi} - 2 m \rho^2 e^{2i\varphi} + 1}$$

$$f_4(\xi) = \frac{1}{ar_{13} + i ai_{13}} \left[ m \rho^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) - m^2 \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) - 3 \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) - m \right]$$

$$ar_{19} = m \rho^4 \cos 4\varphi - \rho^2 (m^2 + 3) \cos 2\varphi - m$$

$$ai_{19} = m \rho^4 \sin 4\varphi - \rho^2 (m^2 + 3) \sin 2\varphi$$

$$f_4(\xi) = \frac{ar_{19} + i \cdot ai_{19}}{ar_{13} + i \cdot ai_{13}} \cdot \frac{ar_{13} - ai_{13}}{ar_{13} - ai_{13}}$$

$$ar_{20} = ar_{19} ar_{13} + ai_{19} ai_{13}$$

$$ai_{20} = ai_{19} ar_{13} - ai_{13} ar_{19}$$

$$f_4(\xi) = \frac{ar_{20} + i ai_{20}}{ar_{15}}$$

$$f_5(\xi) = f_3(\xi) \cdot f_4(\xi) = (ar_{16} - i \cdot ai_{16}) \frac{ar_{20} + i \cdot ai_{20}}{ar_{15}}$$

$$ar_{21} = ar_{16} ar_{20} + ai_{16} ai_{20}$$

$$ai_{21} = ar_{16} ai_{20} - ai_{16} ar_{20}$$

$$f_5(\xi) = \frac{ar_{21} + i \cdot ai_{21}}{ar_{15}}$$

$$\Psi'_{(\xi)} = \frac{\rho R}{2} \left[ \frac{ar_{11} - i \cdot ai_{11}}{\rho^2} + \frac{\kappa}{2} - \frac{ar_{14} + i \cdot ai_{14}}{2 ar_{15}} - \frac{ar_{21} + i \cdot ai_{21}}{ar_{15}} \right]$$

$$ar_{22} = \frac{ar_{11}}{\rho^2} + \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{ar_{15}} \left( \frac{ar_{14}}{2} + ar_{21} \right)$$

$$ai_{22} = - \frac{ai_{11}}{\rho^2} - \frac{1}{ar_{15}} \left( \frac{ai_{14}}{2} + ai_{21} \right)$$

$$\Psi'_{(\xi)} = \frac{\rho R}{2} ( ar_{22} + i \cdot ai_{22} ) \quad (A3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{2 \xi^2}{\rho^2 \bar{\omega}'_{(\xi)}} &= \frac{2 \rho^2 e^{2i\varphi}}{R(\rho^2 m - e^{2i\varphi})} \\ &= \frac{2}{R} \cdot \frac{\rho^2 (\cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi)}{\rho^2 m - (\cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi)} \end{aligned}$$

$$\rho^2 ar_1 = \rho^2 \left( m - \frac{\cos 2\varphi}{\rho^2} \right)$$

$$\rho^2 ai_1 = \sin 2\varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{2 \xi^2}{\rho^2 \bar{\omega}'_{(\xi)}} &= \frac{2}{R} \cdot \frac{\rho^2 (\cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi)}{\rho^2 (ar_1 - i \cdot ai_1)} \\ &= \frac{2}{R} \cdot \frac{\cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi}{ar_1 - i \cdot ai_1} \cdot \frac{ar_1 + i \cdot ai_1}{ar_1 + i \cdot ai_1} \end{aligned}$$

$$ar_{23} = \cos 2\varphi \cdot ar_1 - \sin 2\varphi \cdot ai_1$$

$$ai_{23} = \cos 2\varphi \cdot ai_1 + \sin 2\varphi \cdot ar_1$$

$$\frac{2 \xi^2}{\rho^2 \bar{\omega}'_{(\xi)}} = \frac{2}{R} \cdot \frac{ar_{23} + i \cdot ai_{23}}{ar_4} \quad (A3.13)$$

Einsetzen der Ausdrücke in die allgemeinen Kolosoff -  
Muskhelischwili - Gleichungen ergibt dann:.

$$\sigma_{\varphi} + \sigma_r = p \frac{ar_3}{ar_4}$$

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = \frac{p}{ar_4} \left\{ (ar_{23} + i ai_{23}) \left[ \left( \frac{ar_{10}}{ar_8} + ar_{22} \right) + i \left( \frac{ai_{10}}{ar_8} + ai_{22} \right) \right] \right\}$$

$$ar_{26} = \frac{ar_{10}}{ar_8} + ar_{22}$$

$$ai_{26} = \frac{ai_{10}}{ar_8} + ai_{22}$$

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = \frac{p}{ar_4} ( ar_{23} + i \cdot ai_{23} ) ( ar_{26} + i \cdot ai_{26} )$$

$$ar_{27} = ar_{23} ar_{26} - ai_{23} ai_{26}$$

$$ai_{27} = ar_{23} ai_{26} + ai_{23} ar_{26}$$

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = \frac{p ( ar_{27} + i ai_{27} )}{ar_4} \quad (A3.14)$$

$$\sigma_{\varphi} + \sigma_r = p \frac{ar_3}{ar_4} \quad (A3.15)$$

Aus den Gleichungen (A3.14) und (A3.15) ergeben sich die  
Spannungen zu :

$$\sigma_{\varphi} = \frac{p}{ar_4} ( ar_3 + ar_{27} ) \quad (A3.16)$$

$$\sigma_r = \frac{p}{ar_4} ( ar_3 - ar_{27} ) \quad (A3.17)$$

$$\tau_{r\varphi} = p \frac{ai_{27}}{2 ar_4} \quad (A3.18)$$



Anhang A3.2

Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen am quadratischen Einschlüß

Sawin gibt in [94] die komplexen Funktionen  $\Phi(\xi)$  und  $\Psi(\xi)$  zur Berechnung der Spannungen an quadratischen Einschlüssen in allgemeiner Form an durch :

$$\Phi(\xi) = \frac{p R}{4} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{p R}{2} \left[ \frac{m \bar{e}^{2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} \xi + \frac{m}{2\chi} \xi^3 \right] \quad (A3.19)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) = & - \frac{p R e^{-2i\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{p R}{4} \left( \chi + \frac{3 m^2}{\chi} \right) \xi \\ & + \frac{p R}{4} \frac{1 + 3 m^2}{3 m \xi^4 - 1} \xi - \frac{(1 + 3 m^2) \xi^3}{3 m \xi^4 - 1} \varphi_0'(\xi) \end{aligned} \quad (A3.20)$$

$$\varphi_0(\xi) = \frac{p R}{2} \cdot \frac{m \bar{e}^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} \xi + \frac{p R m}{4 \chi} \xi^3 \quad (A3.21)$$

Die konforme Abbildung eines angenäherten Quadrates wird erreicht durch :

$$z = \omega(\xi) = R \left( \frac{1}{\xi} + m \xi^3 \right) \quad (A3.22)$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{für den ebenen Spannungszustand} \\ 3 - 4\nu & \text{für den ebenen Dehnungszustand} \end{cases}$$

Grundlage der Herleitung sind wiederum die allgemeinen Kolossoff-Muskhelischwili-Formeln (A3.1) und (A3.2), in die die speziellen Einzelausdrücke für das Quadrat einzusetzen sind.

Bereitstellung der speziellen Einzelausdrücke :

$$\Phi_0'(\xi) = \frac{p R}{2} \cdot \frac{m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} + \frac{3 p R m}{4 \chi} \xi^2$$

Zur Abkürzung sei gesetzt :

$$B = \chi + \frac{3 m^2}{\chi}$$

$$C = 1 + 3 m^2$$

$$D = \frac{m}{2 \chi}$$

Damit ergibt sich dann :

$$\Phi'(\xi) = -\frac{p R}{4} \frac{1}{\xi^2} + \frac{p R}{2} \left[ \frac{m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} + 3 D \xi^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \Psi'(\xi) &= \frac{p R e^2}{2} \frac{1}{\xi^2} + \frac{p R B}{4} - \frac{p R C}{4} \frac{9 m \xi^4 + 1}{(3 m \xi^4 - 1)^2} \\ &+ \frac{p R C}{2} \cdot \frac{m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} \cdot \frac{3 m \xi^6 + 3 \xi^2}{(3 m \xi^4 - 1)^2} \\ &- \frac{3 p R m C}{4 \chi} \cdot \frac{3 m \xi^8 - 5 \xi^4}{(3 m \xi^4 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\omega'(\xi) = R \left( 3 m \xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right)$$

$$\bar{\omega}(\xi) = R \left( \frac{1}{\rho} e^{i\varphi} + m \cdot \rho^3 \cdot e^{3i\varphi} \right)$$

$$\bar{\omega}'(\xi) = R \left( \frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m \rho^6}{\xi^3} \right)$$

$$\bar{\omega}'_{(\xi)} = R \left( 3 m \rho^2 e^{-2i\varphi} - \frac{1}{\rho^2} e^{2i\varphi} \right)$$

$$\rho^2 \bar{\omega}'_{(\xi)} = R \left( 3 m \rho^4 e^{-2i\varphi} - e^{2i\varphi} \right)$$

$$\rho^2 \bar{\omega}'_{(\xi)} = R \left( \frac{3 m \rho^6}{\xi^2} - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right)$$

$$\Phi_{(\xi)} = \frac{\Psi_{(\xi)}}{\omega'_{(\xi)}} = \frac{-\frac{p R}{4} \cdot \frac{1}{\xi^2} + \frac{p R}{2} \left[ \frac{m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} + 3 D \xi^2 \right]}{R \left( 3 m \xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right)}$$

$$\Phi_{(\xi)} = p \left[ -\frac{1}{4(3 m \xi^4 - 1)} + \frac{\frac{m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} + 3 D \xi^2}{2 \left( 3 m \xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right)} \right]$$

$$\Phi_{(\xi)} = p \left[ -\frac{1}{4(3 m \xi^4 - 1)} + \frac{\xi^2 \left( \frac{m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} + 3 D \xi^2 \right)}{2(3 m \xi^4 - 1)} \right]$$

$$\Phi_{(\xi)} = p \left[ \frac{\frac{1}{4} + \frac{\xi^2}{2} \cdot \frac{m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha}}{\chi^2 - m^2} + \frac{3}{2} D \xi^4}{3 m \xi^4 - 1} \right]$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A = \frac{1}{\chi^2 - m^2} ( m e^{-2i\alpha} - \chi e^{2i\alpha} )$$

mit  $E = \frac{1}{\chi^2 - m^2}$ ,

so ergibt sich :

$$A = E \left[ m (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) - \kappa (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \right]$$

$$A = E \left[ m (m - \kappa) \cos 2\alpha - i (m + \kappa) \sin 2\alpha \right]$$

Setzt man weiter

$$A_r = (m - \kappa) \cos 2\alpha$$

$$A_i = (m + \kappa) \sin 2\alpha \quad ,$$

so ergibt sich :

$$\Phi_{(\xi)} = p \left[ \frac{-0,25 + 0,5 \xi^2 E (A_r - i \cdot A_i) + 1,5 D \xi^4}{3 m \xi^4 - 1} \right] \quad (A3.23)$$

$$\Phi_{(\xi)} = \frac{p}{(3 m \xi^4 - 1)^2} \left\{ (3 m \xi^4 - 1) \left[ E (A_r - i A_i) \xi + 6D \xi^3 \right] - \left[ -0,25 + 0,5 \xi^2 E (A_r - i A_i) + 1,5 D \xi^4 \right] 12m \xi^3 \right\}$$

$$\Phi_{(\xi)} = \frac{p}{(3 m \xi^4 - 1)^2} \left[ -3 m \xi^5 E (A_r - i A_i) + (3m - 6D) \xi^3 - \xi E (A_r - i A_i) \right]$$

$$\Psi_{(\xi)} = \frac{p R}{2} (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) \frac{1}{\xi^2} + \frac{p R B}{4} - \frac{p R C}{4} \cdot \frac{9 m \xi^4 + 1}{(3 m \xi^4 - 1)^2}$$

$$+ \frac{p R C}{2} E (A_r - i A_i) \frac{3 m \xi^6 + 3 \xi^2}{(3 m \xi^4 - 1)^2}$$

$$- \frac{3 p R m C}{4 \kappa} \frac{3 m \xi^8 - 5 \xi^4}{(3 m \xi^4 - 1)^2}$$

Durch Einführung von  $\xi = \rho e^{i\varphi}$  ergibt sich :

$$\Phi_{\xi} = \frac{p}{3 m \rho^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) - 1} \left[ -0,25 \right. \\ \left. + 0,5 E (A_r - i A_i) \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \right. \\ \left. + 1,5 D \rho^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) \right]$$

$$a_{r_1} = -0,25 + 0,5 E \rho^2 (A_r \cdot \cos 2\varphi + A_i \cdot \sin 2\varphi) + 1,5 D \rho^4 \cos 4\varphi$$

$$a_{i_1} = 0,5 E \rho^2 (-A_i \cdot \cos 2\varphi + A_r \cdot \sin 2\varphi) + 1,5 D \rho^4 \sin 4\varphi$$

$$a_{r_2} = 3 m \rho^4 \cos 4\varphi - 1$$

$$a_{i_2} = 3 m \rho^4 \sin 4\varphi$$

$$\Phi_{(\xi)} = p \frac{a_{r_1} + i a_{i_1}}{a_{r_2} + i a_{i_2}} \frac{a_{r_2} - i a_{i_2}}{a_{r_2} - i a_{i_2}}$$

$$\Phi_{(\xi)} = p \frac{a_{r_1} \cdot a_{r_2} + a_{i_1} \cdot a_{i_2} + i(a_{r_2} \cdot a_{i_1} - a_{r_1} \cdot a_{i_2})}{(a_{r_2})^2 + (a_{i_2})^2}$$

$$a_{r_3} = a_{r_1} \cdot a_{r_2} + a_{i_1} \cdot a_{i_2}$$

$$a_{i_3} = a_{r_2} \cdot a_{i_1} - a_{r_1} \cdot a_{i_2}$$

$$a_{r_4} = (a_{r_2})^2 + (a_{i_2})^2$$

$$\Phi_{(\xi)} = p \frac{a_{r_3} + i a_{i_3}}{a_{r_4}} \quad (A3.24)$$

$$F = 3 m E$$

$$G = 3 m - 6 D$$

$$\Phi'_{(\xi)} = \frac{p}{(a r_2 + i a i_2)^2} \left[ -F(Ar - i Ai) \rho^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) \right. \\ \left. + G \rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) \right. \\ \left. + E (Ar - i Ai) \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \right]$$

$$\Phi'_{(\xi)} = \frac{p}{(a r_2 + i a i_2)^2} \left\{ -F \rho^5 \left[ (Ar \cos 5\varphi + Ai \sin 5\varphi) \right. \right. \\ \left. \left. + i(Ar \sin 5\varphi - Ai \cos 5\varphi) \right] \right. \\ \left. + G \rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) \right. \\ \left. - E \rho \left[ (Ar \cos \varphi + Ai \sin \varphi) \right. \right. \\ \left. \left. + i (Ar \sin \varphi - Ai \cos \varphi) \right] \right\}$$

$$a r_5 = -F \rho^5 (Ar \cdot \cos 5\varphi + Ai \cdot \sin 5\varphi) + G \rho^3 \cos 3\varphi - E \rho (Ar \cdot \cos \varphi + Ai \cdot \sin \varphi)$$

$$a i_5 = -F \rho^5 (Ar \cdot \sin 5\varphi - Ai \cdot \cos 5\varphi) + G \rho^3 \sin 3\varphi \\ - E \rho (Ar \cdot \sin \varphi - Ai \cdot \cos \varphi)$$

$$(a r_2 + i a i_2)^2 = (a r_2)^2 + i 2 a r_2 \cdot a i_2 - (a i_2)^2$$

$$a r_6 = (a r_2)^2 - (a i_2)^2$$

$$a i_6 = 2 a r_2 \cdot a i_2$$

$$\Phi'_{(\xi)} = p \frac{ar_5 + i ai_5}{ar_6 + i ai_6} \cdot \frac{ar_6 - i ai_6}{ar_6 - i ai_6}$$

$$ar_7 = ar_5 \cdot ar_6 + ai_5 \cdot ai_6$$

$$ai_7 = ai_5 \cdot ar_6 - ar_5 \cdot ai_6$$

$$ar_8 = (ar_6)^2 + (ai_6)^2$$

$$\Phi'_{(\xi)} = p \frac{ar_7 + i ai_7}{ar_8} \quad (A3.25)$$

$$\bar{\omega}_{(\xi)} = R \left[ \frac{1}{\rho} (\cos \varphi + i \sin \varphi) + m \rho^3 (\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi) \right]$$

$$ar_9 = \frac{1}{\rho} \cos \varphi + m \rho^3 \cos 3\varphi$$

$$ai_9 = \frac{1}{\rho} \sin \varphi - m \rho^3 \sin 3\varphi$$

$$\bar{\omega}_{(\xi)} = R (ar_9 + i ai_9) \quad (A3.26)$$

$$\Phi'_{(\xi)} \cdot \bar{\omega}_{(\xi)} = p \frac{ar_7 + i ai_7}{ar_8} R (ar_9 + i ai_9)$$

$$ar_{10} = ar_7 \cdot ar_9 - ai_7 \cdot ai_9$$

$$ai_{10} = ar_7 \cdot ai_9 + ai_7 \cdot ar_9$$

$$\Phi'_{(\xi)} \cdot \bar{\omega}_{(\xi)} = p R \frac{ar_{10} + i ai_{10}}{ar_8} \quad (A3.27)$$

$$\Psi'_{(\xi)} = \frac{\rho R}{2} \left[ (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) + \frac{B}{2} \right. \\ \left. - \frac{C}{2} \cdot \frac{1 + 9m\rho^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)}{a_{r_6} + i a_{i_6}} \right. \\ \left. + 3CE(Ar - i Ai) \frac{m\rho^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) + \rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}{a_{r_6} + i a_{i_6}} \right. \\ \left. - \frac{3mC}{2\kappa} \frac{3m\rho^8(\cos 8\varphi + i \sin 8\varphi) - 5\rho^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)}{a_{r_6} + i a_{i_6}} \right]$$

$$\Psi'_{\xi} = \frac{\rho R}{2(a_{r_6} + i a_{i_6})} \left\{ (a_{r_6} + i a_{i_6}) \left[ \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) \right. \right. \\ \left. \cdot (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) + \frac{B}{2} \right] - \frac{C}{2} \left[ 1 + 9m\rho^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) \right] \\ \left. + 3CE(Ar - i Ai) \left[ m\rho^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) + \rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \right] \right. \\ \left. - \frac{3mC}{2\kappa} \left[ 3m\rho^8(\cos 8\varphi + i \sin 8\varphi) - 5\rho^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) \right] \right\}$$

Zur Abkürzung werden Funktionen  $f_{i(\xi)}$  eingeführt.

$$f_1(\xi) = \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) + \frac{B}{2}$$

$$f_2(\xi) = \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\varphi) - i(\cos 2\alpha \cdot \sin 2\varphi \\ + \sin 2\alpha \cdot \cos 2\varphi) + \frac{B}{2}$$



$$ar_{11} = \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\varphi) + \frac{B}{2}$$

$$ai_{11} = \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\alpha \cdot \sin 2\varphi + \sin 2\alpha \cdot \cos 2\varphi)$$

$$f_1(\xi) = ar_{11} - i ai_{11}$$

$$f_1(\xi) \cdot (ar_6 + i ai_6) = (ar_{11} - i ai_{11}) (ar_6 + i ai_6)$$

$$f_1(\xi) \cdot (ar_6 + i ai_6) = (ar_{11} ar_6 + ai_{11} ai_6) + i(ar_{11} ai_6 - ai_{11} ar_6)$$

$$ar_{12} = ar_{11} ar_6 + ai_{11} ai_6$$

$$ai_{12} = ar_{11} ai_6 - ai_{11} ar_6$$

$$f_1(\xi) (ar_6 + i ai_6) = ar_{12} + i ai_{12}$$

$$f_2(\xi) = \frac{C}{2} \left[ 1 + 9 m \rho^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) \right]$$

$$ar_{13} = \frac{C}{2} (1 + 9 m \rho^4 \cos 4\varphi)$$

$$ai_{13} = \frac{C}{2} 9 m \rho^4 \sin 4\varphi$$

$$f_2(\xi) = ar_{13} + i ai_{13}$$

$$f_3(\xi) = 3 C E (Ar - i Ai) \left[ m \rho^6 (\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) + \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \right]$$

$$ar_{14} = 3 C E \left[ Ar(m \rho^6 \cos 6\varphi + \rho^2 \cos 2\varphi) + Ai(m \rho^6 \sin 6\varphi + \rho^2 \sin 2\varphi) \right]$$

$$ai_{14} = 3 C E \left[ Ar(m \rho^6 \sin 6\varphi + \rho^2 \sin 2\varphi) - Ai(m \rho^6 \cos 6\varphi + \rho^2 \cos 2\varphi) \right]$$

$$f_3(\xi) = ar_{14} + i ai_{14}$$

$$f(\xi) = \frac{3 m C}{2 \kappa} \left[ 3 m \rho^8 (\cos 8\varphi + i \sin 8\varphi) - 5 \rho^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) \right]$$

$$ar_{15} = \frac{3 m C}{2 \kappa} ( 3 m \rho^8 \cos 8\varphi - 5 \rho^4 \cos 4\varphi )$$

$$ai_{15} = \frac{3 m C}{2 \kappa} ( 3 m \rho^8 \sin 8\varphi - 5 \rho^4 \sin 4\varphi )$$

$$f_4(\xi) = ar_{15} + i ai_{15}$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{\rho R}{2(ar_6 + i ai_6)} \left[ (ar_{12} + i ai_{12}) - (ar_{13} + i ai_{13}) \right. \\ \left. + (ar_{14} + i ai_{14}) - (ar_{15} + i ai_{15}) \right]$$

$$ar_{16} = ar_{12} - ar_{13} + ar_{14} - ar_{15}$$

$$ai_{16} = ai_{12} - ai_{13} + ai_{14} - ai_{15}$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{\rho R}{2} \cdot \frac{ar_{16} + i ai_{16}}{ar_6 + i ai_6} \cdot \frac{ar_6 - i ai_6}{ar_6 - i ai_6}$$

$$ar_{17} = ar_{16} ar_6 + ai_{16} ai_6$$

$$ai_{17} = ai_{16} ar_6 - ar_{16} ai_6$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{\rho R}{2} \cdot \frac{ar_{17} + i ai_{17}}{ar_8} \quad (A3.28)$$

$$\frac{2 \xi^2}{\rho^2 \omega(\xi)} = \frac{2 \rho^2 e^{2i\varphi}}{\rho^2 R ( 3 m \rho^2 e^{-2i\varphi} - \frac{1}{\rho^2} e^{2i\varphi} )}$$

$$\frac{2 \xi^2}{\rho^2 \omega(\xi)} = \frac{2}{R} \cdot \frac{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{3 m \rho^2 (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) - \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}$$

$$ar_{18} = \cos 2\varphi ( 3 m \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} )$$

$$ai_{18} = \sin 2\varphi ( 3 m \rho^2 + \frac{1}{\rho^2} )$$

$$\frac{2 \xi^2}{\rho^2 \omega^2(\xi)} = \frac{2}{R} \cdot \frac{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{ar_{18} - i ai_{18}} \cdot \frac{ar_{18} + i ai_{18}}{ar_{18} + i ai_{18}}$$

$$ar_{19} = \cos 2\varphi \cdot ar_{18} - \sin 2\varphi \cdot ai_{18}$$

$$ai_{19} = \sin 2\varphi \cdot ar_{18} + \cos 2\varphi \cdot ai_{18}$$

$$ar_{20} = (ar_{18})^2 + (ai_{18})^2$$

$$\frac{2 \xi^2}{\rho^2 \omega^2(\xi)} = \frac{2}{R} \cdot \frac{ar_{19} + i ai_{19}}{ar_{20}} \quad (A3.29)$$

Eingesetzt in die allgemeinen Kolossoff-Muskhelischwili-Gleichungen ergibt sich mit diesen Einzelausdrücken :

$$\sigma_{\varphi} + \sigma_r = \rho \frac{4 ar_3}{ar_4}$$

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = \frac{2}{R} \cdot \frac{ar_{19} + i ai_{19}}{ar_{20}} \left[ \rho R \frac{ar_{10} + i ai_{10}}{ar_8} + \frac{\rho R}{2} \cdot \frac{ar_{17} + i ai_{17}}{ar_8} \right]$$

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = 2 \rho \frac{ar_{19} + i ai_{19}}{ar_{20} ar_8} \left[ (ar_{10} + 0,5 ar_{17}) + i(ai_{10} + 0,5 ai_{17}) \right]$$

$$ar_{21} = ar_{10} + 0,5 ar_{17}$$

$$ai_{21} = ai_{10} + 0,5 ai_{17}$$

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = 2 \rho \frac{(ar_{19} + i ai_{19}) (ar_{21} + i ai_{21})}{ar_{20} \cdot ar_8}$$

$$ar_{22} = ar_{19} \cdot ar_{21} - ai_{19} \cdot ai_{21}$$

$$ai_{22} = ai_{19} \cdot ar_{21} + ar_{19} \cdot ai_{21}$$

$$ar_{23} = ar_{20} \cdot ar_8$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = p \frac{ar_{22} + i ai_{22}}{ar_{23}} \quad 2 \quad (A3.30)$$

$$\sigma_\varphi + \sigma_r = p \frac{ar_3}{ar_4} \quad 4 \quad (A3.31)$$

Aus den Gleichungen /A3.30) und (A3.31) ergeben sich die Spannungen zu :

$$\sigma_\varphi = p \left( \frac{ar_{22}}{ar_{23}} + 2 \frac{ar_3}{ar_4} \right) \quad (A3.32)$$

$$\sigma_r = p \left( - \frac{ar_{22}}{ar_{23}} + 2 \frac{ar_3}{ar_4} \right) \quad (A3.33)$$

$$\tau_{r\varphi} = p \frac{ai_{22}}{ar_{23}} \quad (A3.34)$$

Anhang A3.3

Herleitung der Formeln zur Berechnung der Spannungen am dreieckigen Einschluß

Nach [94] lauten die komplexen Funktionen  $\varphi_{(\xi)}$  und  $\psi_{(\xi)}$  zur Berechnung der Spannungen an dreieckigen Einschlässen in allgemeiner Form :

$$\varphi_{(\xi)} = \frac{p R}{4} \cdot \frac{1}{\xi} - \frac{p R e^{2i\alpha}}{2 \kappa} \xi + \frac{p R m}{4 \kappa} \xi^2 \quad (A3.35)$$

$$\psi_{(\xi)} = - \frac{p R e^{2i\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{p R}{2} \left[ \kappa \xi + \frac{1 + 2 m^2}{2 m \xi^3 - 1} \xi \right] - \frac{\xi^3 + m}{2 m \xi^3 - 1} \varphi'_{(\xi)} \quad (A3.36)$$

$$\varphi'_{(\xi)} = - \frac{p R e^{2i\alpha}}{2 \kappa} \xi + \frac{p R m}{4 \kappa} \xi^2 \quad (A3.37)$$

Die konforme Abbildung eines angenäherten gleichseitigen Dreiecks wird erreicht durch :

$$z = \omega_{(\xi)} = R \left( \frac{1}{\xi} + m \xi^2 \right) \quad (A3.38)$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{für den ebenen Spannungszustand} \\ 3 - 4\nu & \text{für den ebenen Dehnungszustand} \end{cases}$$

Grundlage der Herleitung sind wiederum die allgemeinen Kolosoff-Muskhelischwili-Gleichungen (A3.1) und (A3.2), in die dann nachfolgend die speziellen Einzelausdrücke für das Dreieck einzusetzen sind.

Bereitstellung der speziellen Einzelausdrücke :

$$\varphi'_{(\xi)} = -\frac{\rho R e^{2i\alpha}}{2\kappa} + \frac{\rho R m}{2\kappa} \xi$$

$$\varphi'_{(\xi)} = \frac{\rho R}{2\kappa} (m\xi - e^{2i\alpha})$$

$$\varphi'_{(\xi)} = -\frac{\rho R}{4} \frac{1}{\xi^2} - \frac{\rho R e^{2i\alpha}}{2\kappa} + \frac{\rho R m}{2\kappa} \xi$$

$$\omega'_{(\xi)} = R \left( -\frac{1}{\xi^2} + 2m\xi \right)$$

$$\bar{\omega}'_{(\xi)} = R \left( \frac{e^{i\varphi}}{\rho} + \rho^2 m e^{-2i\varphi} \right)$$

$$\bar{\omega}'_{(\xi)} = R \left( 2m\rho e^{-i\varphi} - \frac{e^{2i\varphi}}{\rho^2} \right)$$

$$\rho^2 \bar{\omega}'_{(\xi)} = R \left( 2m\rho^3 e^{-i\varphi} - e^{2i\varphi} \right)$$

$$\bar{\Phi}'_{(\xi)} = \frac{\varphi'_{(\xi)}}{\omega'_{(\xi)}} = \rho \frac{-\frac{1}{4\xi^2} - \frac{e^{2i\alpha}}{2\kappa} + \frac{m}{2\kappa} \xi}{-\frac{1}{\xi^2} + 2m\xi}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A = \frac{m}{2\kappa}$$

und wandelt  $\bar{\Phi}'_{(\xi)}$  in die trigonometrische Form um, so ergibt sich :

$$\Phi(\xi) = p \frac{-\frac{1}{4\rho^2}(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) - \frac{1}{2\kappa}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + A(\cos\varphi + i \sin\varphi)}{2m\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) - \frac{1}{\rho^2}(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi)}$$

$$ar_1 = -\frac{\cos 2\varphi}{4\rho^2} - \frac{\cos 2\alpha}{2\kappa} + A \cos\varphi$$

$$ai_1 = \frac{\sin 2\varphi}{4\rho^2} - \frac{\sin 2\alpha}{2\kappa} + A \sin\varphi$$

$$ar_2 = 2m\rho \cos\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{\rho^2}$$

$$ai_2 = 2m\rho \sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}$$

$$\Phi(\xi) = p \frac{ar_1 + i \cdot ai_1}{ar_2 + i \cdot ai_2} \frac{ar_2 - i \cdot ai_2}{ar_2 - i \cdot ai_2}$$

$$\Phi(\xi) = p \frac{ar_1 \cdot ar_2 + ai_1 \cdot ai_2 + i(ar_2 \cdot ai_1 - ar_1 \cdot ai_2)}{(ar_2)^2 + (ai_1)^2}$$

$$ar_3 = ar_1 \cdot ar_2 + ai_1 \cdot ai_2$$

$$ai_3 = ar_2 \cdot ai_1 - ar_1 \cdot ai_2$$

$$ar_4 = (ar_2)^2 + (ai_1)^2$$

$$\Phi(\xi) = p \frac{ar_3 + i \cdot ai_3}{ar_4} \tag{A3.39}$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{p}{(2m\xi - \frac{1}{\xi^2})^2} \left[ \left(-\frac{1}{\xi^2} + 2m\xi\right) \left(-\frac{1}{2\xi^3} + A\right) - \left(-\frac{1}{4\xi^2} - \frac{e^{2i\alpha}}{2\chi} + A\xi\right) \left(2m + \frac{2}{\xi^3}\right) \right]$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{p}{(2m\xi - \frac{1}{\xi^2})^2} \left[ -\frac{1}{2\xi^5} - \frac{A}{\xi^2} + \frac{m}{\xi^2} + 2mA\xi + \frac{m}{2\xi^2} + \frac{1}{2\xi^5} + \frac{m e^{2i\alpha}}{\chi} + \frac{e^{2i\alpha}}{\chi\xi^3} - 2Am\xi - \frac{2A}{\xi^2} \right]$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{p}{(2m\xi^2 - \frac{1}{\xi^2})^2} \left( -\frac{3A}{\xi^2} - \frac{3m}{2\xi^2} + \frac{e^{2i\alpha}}{\chi\xi^3} + \frac{m e^{2i\alpha}}{\chi} \right)$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{p}{(2m\xi^2 - \frac{1}{\xi^2})^2} \left[ \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{3m}{2} - 3A \right) + \frac{e^{2i\alpha}}{\chi\xi^3} + \frac{m e^{2i\alpha}}{\chi} \right]$$

$$f_1(\xi) = \frac{e^{2i\alpha}}{\chi\xi^3}$$

$$f_1(\xi) = \frac{1}{\chi} \left[ (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \frac{1}{\rho^3} (\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi) \right]$$

$$f_1(\xi) = \frac{1}{\chi\xi^3} \left[ (\cos 2\alpha \cdot \cos 3\varphi + \sin 2\alpha \cdot \sin 3\varphi) + i(\sin 2\alpha \cdot \cos 3\varphi - \cos 2\alpha \cdot \sin 3\varphi) \right]$$

$$ar_s = \frac{\cos 2\alpha \cos 3\varphi + \sin 2\alpha \sin 3\varphi}{\chi \rho^3}$$

$$ai_s = \frac{\sin 2\alpha \cos 3\varphi - \cos 2\alpha \sin 3\varphi}{\chi \rho^3}$$

$$f_1(\xi) = ar_s + i ai_s$$



$$\Phi'_{(\xi)} = \frac{\rho}{(ar_2 + i ai_2)^2} \left[ \frac{1}{\rho^2} (1,5 m - 3 A) (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) + ar_5 \right. \\ \left. + i ai_5 + \frac{m}{\chi} (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \right]$$

$$ar_6 = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{3m}{2} - 3 A \right) \cos 2\varphi + ar_5 + \frac{m}{\chi} \sin 2\alpha$$

$$ai_6 = - \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{3m}{2} - 3 A \right) \sin 2\varphi + ai_5 + \frac{m}{\chi} \sin 2\alpha$$

$$ar_7 = (ar_2)^2 - (ai_2)^2$$

$$ai_7 = 2 ar_2 \cdot ai_2$$

$$\Phi'_{(\xi)} = \rho \frac{ar_6 + i ai_6}{ar_7 + i ai_7} \frac{ar_7 - i ai_7}{ar_7 - i ai_7} \quad (A3.40)$$

$$ar_8 = ar_6 \cdot ar_7 + ai_6 \cdot ai_7$$

$$ai_8 = ai_6 \cdot ar_7 - ai_7 \cdot ar_6$$

$$ar_9 = (ar_7)^2 + (ai_7)^2$$

$$\Phi'_{(\xi)} = \rho \frac{ar_8 + i ai_8}{ar_9}$$

$$\bar{\omega}_{(\xi)} = R \left[ \frac{1}{\rho} (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \rho^2 m (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) \right]$$

$$ar_{10} = \frac{1}{\rho} \cos \varphi + \rho^2 m \cos 2\varphi$$

$$a_{i0} = \frac{1}{\rho} \sin \varphi - \rho^2 m \sin \varphi$$

$$\bar{\omega}(\xi) = R (a_{r0} + i a_{i0}) \quad (A3.41)$$

$$\Phi'(\xi) \omega(\xi) = \rho \frac{a_{r0} + i a_{i0}}{a_{r0}} R (a_{r0} + i a_{i0})$$

$$a_{r1} = a_{r0} a_{r0} - a_{i0} a_{i0}$$

$$a_{i1} = a_{i0} a_{r0} + a_{r0} a_{i0}$$

$$\Phi'(\xi) \omega(\xi) = \rho R \frac{a_{r1} + i a_{i1}}{a_{r0}} \quad (A3.42)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) = & -\frac{\rho R e^{2i\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{\rho R}{4} \left( \chi \xi + \frac{1 + 2m^2}{2m\xi^3 - 1} \xi \right) \\ & - \frac{\xi^3 + m}{2m\xi^3 - 1} \cdot \frac{\rho R}{2\chi} (m\xi - e^{2i\alpha}) \end{aligned}$$

$$\Psi(\xi) = \frac{\rho R}{2} \left\{ -\frac{e^{-2i\alpha}}{\xi} + \frac{\chi}{2} \xi + \frac{1}{2m\xi^3 - 1} \left[ \frac{1 + 2m^2}{2} \xi - \frac{\xi^3 + m}{\chi} (m\xi - e^{2i\alpha}) \right] \right\}$$

$$\Psi(\xi) = \frac{\rho R}{2} \left\{ -\frac{e^{2i\alpha}}{\xi} + \frac{\chi}{2} \xi + \frac{1}{2m\xi^3 - 1} \left[ \frac{1 + 2m^2}{2} \xi - \frac{1}{\chi} (m\xi^4 - e^{2i\alpha} \xi^3 + m^2 \xi - m e^{2i\alpha}) \right] \right\}$$

$$\Psi' = \frac{p R}{2} \left\{ \frac{e^{-2i\alpha}}{\xi^2} + \frac{\chi}{2} + \frac{1}{(2 m \xi^3 - 1)^2} \left[ (2 m \xi^3 - 1) \left( \frac{1 + 2 m^2}{\chi} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{4 m}{\chi} \xi^3 + \frac{3 e^{2i\alpha}}{\chi} \xi^2 - \frac{m^2}{\chi} \right) - \left( \frac{1 + 2 m^2}{2} \xi - \frac{m}{\chi} \xi^4 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{e^{2i\alpha}}{\chi} \xi^3 - \frac{m^2}{\chi} \xi + \frac{m e^{2i\alpha}}{\chi} \right) 6 m \xi^2 \right] \right\}$$

$$B = \frac{1 + 2 m^2}{2}$$

$$C = \frac{m^2}{\chi}$$

$$D = \frac{4 m}{\chi}$$

$$\Psi'_{(\xi)} = \frac{p R}{2} \left\{ \frac{e^{-2i\alpha}}{\xi^2} + \frac{\chi}{2} + \frac{1}{(2 m \xi^3 - 1)^2} \left[ (2 m \xi^3 - 1) (B - D \xi^3 - C \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3 e^{2i\alpha}}{\chi} \xi^2 - 6 m \xi^2 (B \xi - \frac{m \xi^4}{\chi} + \frac{e^{2i\alpha}}{\chi} \xi^3 - C \xi + \frac{m e^{2i\alpha}}{\chi}) \right] \right\}$$

$$\Psi'_{(\xi)} = \frac{p R}{2} \left\{ \frac{e^{-2i\alpha}}{\xi^2} + \frac{\chi}{2} + \frac{1}{(2 m \xi^3 - 1)^2} \left[ (B - C) 2 m \xi^3 - 2 m D \xi^6 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{6 m e^{2i\alpha}}{\chi} \xi^5 - B + D \xi^3 - \frac{3 e^{2i\alpha}}{\chi} \xi^2 - 6 m B \xi^3 + \frac{6 m^2 \xi^6}{\chi} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{6 m e^{2i\alpha}}{\chi} \xi^5 + 6 m C \xi^3 - \frac{6 m^2 e^{2i\alpha}}{\chi} \xi^2 \right] \right\}$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{p \cdot R}{2} \left\{ \frac{e^{-2i\alpha}}{\xi^2} + \frac{\chi}{2} + \frac{1}{(2m\xi^3 - 1)^2} \left[ C - B + (6C - 2mD)\xi^6 \right. \right. \\ \left. \left. + (-4mB + 4mC + D)\xi^3 - \left(6C e^{2i\alpha} + \frac{3 e^{2i\alpha}}{\chi}\right)\xi^2 \right] \right\}$$

$$E = 6C - 2mD$$

$$F = 4m(C - B) + D$$

$$G = 6C + \frac{3}{\chi}$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{p \cdot R}{2} \left\{ \frac{e^{-2i\alpha}}{\xi^2} + \frac{\chi}{2} + \frac{1}{(2m\xi^3 - 1)^2} \left[ C - B + E\xi^6 + F\xi^3 - G e^{2i\alpha}\xi^2 \right] \right\}$$

$$f_2(\xi) = \frac{e^{-2i\alpha}}{\xi^2} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha}{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi} \cdot \frac{\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi}$$

$$a_{12} = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\varphi$$

$$a_{i2} = \cos 2\alpha \cdot \sin 2\varphi + \sin 2\alpha \cdot \cos 2\varphi$$

$$f_2(\xi) = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{a_{12} - i a_{i2}}{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}$$

$$f_2(\xi) = \frac{1}{\rho^2} (a_{12} - i a_{i2})$$

$$f_3(\xi) = G e^{2i\alpha} \rho^2 e^{2i\varphi}$$

$$f_3(\xi) = G \rho^2 \left[ (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \right]$$

$$f_3(\xi) = G \rho^2 (a_{12} + i a_{i2})$$

$$f_4(\xi) = (2 m \xi^3 - 1)^2$$

$$f_4(\xi) = \left[ 2 m \rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) - 1 \right]^2$$

$$ar_{15} = 2 m \rho^3 \cos 3\varphi - 1$$

$$ai_{15} = 2 m \rho^3 \sin 3\varphi$$

$$f_4(\xi) = (ar_{15} + i ai_{15})^2$$

$$ar_{16} = (ar_{15})^2 - (ai_{15})^2$$

$$ai_{16} = 2 ar_{15} \cdot ai_{15}$$

$$f_4(\xi) = ar_{16} + i ai_{16}$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{p \cdot R}{2} \left\{ \frac{1}{\rho^2} (ar_{12} - i ai_{12}) + \frac{x}{2} + \frac{1}{ar_{16} + i ai_{16}} \left[ C - B \right. \right.$$

$$\left. + E (\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) + F (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) \right.$$

$$\left. - G \rho^2 (ar_{12} + i ai_{12}) \right\}$$

$$ar_{17} = C - B + E \cos 6\varphi + F \cos 3\varphi - G \rho^2 ar_{12}$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{p \cdot R}{2} \left[ \frac{1}{\rho^2} (ar_{12} - i ai_{12}) + \frac{x}{2} + \frac{ar_{17} + i ai_{17}}{ar_{16} + i ai_{16}} \cdot \frac{ar_{16} - i ai_{16}}{ar_{16} - i ai_{16}} \right]$$

$$ar_{18} = ar_{17} \cdot ar_{16} + ai_{17} \cdot ai_{16}$$

$$ai_{18} = ai_{17} \cdot ar_{16} - ar_{17} \cdot ai_{16}$$

$$ar_{19} = (ar_{16})^2 + (ai_{16})^2$$

$$\Psi'_{(\xi)} = \frac{p R}{2} \left[ \left( \frac{ar_{12}}{\rho^2} + \frac{x}{2} + \frac{ar_{18}}{ar_{19}} \right) + i \left( -\frac{ai_{12}}{\rho^2} + \frac{ai_{18}}{ar_{19}} \right) \right]$$

$$ar_{20} = \frac{ar_{12}}{\rho^2} + \frac{x}{2} + \frac{ar_{18}}{ar_{19}}$$

$$ar_{20} = \frac{ai_{18}}{ar_{19}} - \frac{ai_{12}}{\rho^2}$$

$$\Psi'_{(\xi)} = \frac{p R}{2} (ar_{20} + i ai_{20}) \quad (A3.43)$$

$$\frac{2 \xi^2}{\rho^2 \overline{\omega'_{(\xi)}}} = \frac{2 e^{2i\varphi}}{R (2 m \rho e^{-i\varphi} - \frac{1}{\rho^2} e^{2i\varphi})}$$

$$\frac{2 \xi^2}{\rho^2 \overline{\omega'_{(\xi)}}} = \frac{2}{R} \cdot \frac{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{2 m \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi) - \frac{1}{\rho^2} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}$$

$$\frac{2 \xi^2}{\rho^2 \overline{\omega'_{(\xi)}}} = \frac{2}{R} \frac{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{ar_2 - i ai_2} \quad (A3.44)$$

Einsetzen der hergeleiteten Ausdrücke in die allgemeinen Kolossoff-Muskhelischwili-Gleichungen ergibt:

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = \frac{2}{R} \frac{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{ar_2 - i ai_2} \left[ p R \frac{ar_{11} + i ai_{11}}{ar_9} + \frac{p R}{2} (ar_{20} + i ai_{20}) \right]$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = 2 p \frac{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{ar - i ai} \left( \frac{ar_{11} + i ai_{11}}{ar_9} + \frac{ar_{20} + i ai_{20}}{2} \right)$$

$$ar_{22} = \frac{ar_{11}}{ar_3} + \frac{ar_{20}}{2}$$

$$ai_{22} = \frac{ai_{11}}{ar_3} + \frac{ai_{20}}{2}$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2iT_{r\varphi} = 2\rho \frac{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{ar_2 - i ai_2} (ar_{22} + i ai_{22})$$

$$ar_{23} = \cos 2\varphi ar_{22} - \sin 2\varphi ai_{22}$$

$$ai_{23} = \sin 2\varphi ar_{22} + \cos 2\varphi ai_{22}$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2iT_{r\varphi} = 2\rho \frac{ar_{23} + i ai_{23}}{ar_2 - i ai_2} \frac{ar_2 + i ai_2}{ar_2 + i ai_2}$$

$$ar_{24} = ar_{23} \cdot ar_2 - ai_{23} \cdot ai_2$$

$$ai_{24} = ai_{23} \cdot ar_2 + ar_{23} \cdot ai_2$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2iT_{r\varphi} = 2\rho \frac{ar_{24} + i ai_{24}}{ar_4} \quad (A3.45)$$

$$\sigma_\varphi + \sigma_r = 4\rho \frac{ar_3}{ar_4} \quad (A3.46)$$

$$2\sigma_\varphi + 2iT_{r\varphi} = 2\rho \frac{ar_{24} + i ai_{24}}{ar_4} + 4\rho \frac{ar_3}{ar_4}$$

$$\sigma_{\varphi} = \rho \left( 2 \frac{ar_3}{ar_4} + \frac{ar_{24}}{ar_4} \right) \quad (\text{A3.47})$$

$$\sigma_r = \rho \left( 2 \frac{ar_3}{ar_4} - \frac{ar_{24}}{ar_4} \right) \quad (\text{A3.48})$$

$$\tau_{i\varphi} = \rho \frac{ai_{24}}{ar_4} \quad (\text{A3.49})$$



Anhang A4

Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren und der  $\sigma_{\infty, IC}$ -Werte für die Kontaktfläche

A4.1 Kontaktfläche Marmor/Zementstein

Elastizitätskonstanten

Marmor :  $E_1 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu_1 = 0,28$

Zementstein :  $E = 0,2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu = 0,20$

$$G = \frac{0,20}{2(1+0,2)} = 0,083 \quad [10^5 \text{ MN/m}^2]$$

$$G_1 = \frac{1,1}{2(1+0,28)} = 0,43 \quad [10^5 \text{ MN/m}^2]$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \frac{\frac{3-0,2}{1,2 \cdot 0,083} + \frac{1}{0,43}}{\frac{3-0,28}{1,28 \cdot 0,43} + \frac{1}{0,083}} \right]$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \frac{28,0 + 2,33}{4,94 + 12,05} \right]$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln 1,78$$

$$\epsilon = 0,09177$$

Setzt man  $\epsilon$  in die Formeln (4.23) und (4.24) (vgl. Abschnitt 4.4.2) ein und bezieht  $K_n$  auf  $\sigma_{\infty}$ , so ergibt sich :

$$\frac{K_I}{\sigma_{\infty}} = \frac{\sqrt{\pi a}}{\cosh \frac{\ln 1,78}{2}} \left[ \cos(0,09177 \cdot \ln 2a) + 2 \cdot 0,09177 \sin(0,09177 \cdot \ln 2a) \right]$$

$$\frac{K_I}{\sigma_{\infty}} = 0,9598 \sqrt{\pi a} \left[ \cos(0,09177 \cdot \ln 2a) + 0,1834 \sin(0,09177 \cdot \ln 2a) \right] \quad (A4.1)$$

$$\frac{K_{II}}{\sigma_{\infty}} = - 0,9598 \sqrt{\pi a} \left[ \sin(0,09177 \cdot \ln 2a) - 0,1834 \cos(0,09177 \cdot \ln 2a) \right] \quad (A4.2)$$

Die Gleichungen (A4.1) und (A4.2) wurden in Tabelle A4.1 ausgewertet und die Ergebnisse zur Ermittlung von  $\sigma_{\infty IC}$  benutzt. Dabei wurde nach Rice [85] vorausgesetzt, daß für K gilt :

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$$

a [mm]	$\frac{K_I}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$	$\sigma_{\infty IC}$ [MN/m <sup>2</sup> ] bei	
				min $K_{IC}=0,1 \frac{MN}{m^{3/2}}$	max $K_{IC}=0,21 \frac{MN}{m^{3/2}}$
1	0,0537	0,0104	0,0547	1,82	3,82
2	0,0759	0,0146	0,0773	1,29	2,71
3	0,0930	0,0179	0,0947	1,06	2,22
4	0,1074	0,0206	0,1094	0,91	1,92
5	0,1201	0,0223	0,1222	0,82	1,72
6	0,1316	0,0251	0,1340	0,75	1,57
7	0,1422	0,0271	0,1448	0,69	1,45
8	0,1520	0,0289	0,1547	0,65	1,36
9	0,1612	0,0306	0,1641	0,61	1,28
10	0,1699	0,0323	0,1729	0,58	1,21
20	0,2304	0,0454	0,2446	0,41	0,86

Tabelle A4.1 : Spannungsintensitätsfaktoren und  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte in der Kontaktfläche Marmor/Zementstein

## A4.2 Kontaktfläche Tonstein/Zementstein

Elastizitätskonstanten

$$\text{Tonstein : } E_1 = 0,55 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2, \quad \nu_1 = 0,16$$

$$\text{Zementstein : } E = 0,20 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2, \quad \nu = 0,20$$

$$G = 0,083 \quad [10^5 \text{ MN/m}^2]$$

$$G_1 = \frac{0,55}{2(1 + 0,16)} = 0,237 \quad [10^5 \text{ MN/m}^2]$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left[ \frac{\frac{3 - 0,2}{1,2 \cdot 0,083} + \frac{1}{0,237}}{\frac{3 - 0,16}{1,16 \cdot 0,237} + \frac{1}{0,083}} \right]$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left[ \frac{28,0 + 4,22}{10,33 + 12,05} \right]$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln 1,4397$$

$$\epsilon = 0,0580$$

$$\frac{K_I}{\sigma_{\infty}} = 0,9836 \sqrt{\pi a} \left[ \cos(0,0580 \cdot \ln 2a) + 0,1160 \sin(0,0580 \cdot \ln 2a) \right] \quad (\text{A4.3})$$

$$\frac{K_{II}}{\sigma_{\infty}} = -0,9836 \sqrt{\pi a} \left[ \sin(0,0580 \cdot \ln 2a) - 0,1160 \cos(0,0580 \cdot \ln 2a) \right] \quad (\text{A4.4})$$

Die Gleichungen (A4.3) und (A4.4) wurden in Tabelle A4.2 ausgewertet und die Ergebnisse zur Ermittlung von  $\sigma_{\infty IC}$  benutzt.

a [mm]	$\frac{K_I}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_\infty}$	$\frac{K}{\sigma_\infty}$	$\sigma_{\infty Ic}$ [MN/m <sup>2</sup> ] bei	
				min $K_{Ic} = 0,1 \frac{MN}{m^{1,5}}$	max $K_{Ic} = 0,21 \frac{MN}{m^{1,5}}$
1	0,0563	0,0041	0,0555	1,80	3,78
2	0,0784	0,0028	0,0785	1,27	2,67
3	0,0961	0,0111	0,0961	1,04	2,18
4	0,1110	-0,0006	0,1110	0,90	1,89
5	0,1241	-0,0022	0,1241	0,81	1,70
6	0,1359	-0,0039	0,1359	0,74	1,55
7	0,1467	-0,0055	0,1468	0,68	1,42
8	0,1568	-0,0071	0,1570	0,64	1,34
9	0,1663	-0,0087	0,1665	0,60	1,25
10	0,1752	-0,0102	0,1755	0,57	1,19
20	0,2472	-0,0244	0,2481	0,40	0,84

Tabelle A4.2 : Spannungsintensitätsfaktoren und  $\sigma_{\infty Ic}$ -Werte  
in der Kontaktfläche Tonstein/Zementstein

### A4.3 Kontaktfläche starrer Einschluß/Zementstein

Elastizitätskonstanten

Starrer Einschluß :  $E_1 = \infty$  ,  $\nu_1 = 0$

Zementstein :  $E = 0,2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$  ,  $\nu = 0,20$

$$G = 0,083 \quad [10^5 \text{ MN/m}^2]$$

$$G_1 = \infty$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left[ \frac{3 - 0,20}{1 + 0,2} \right]$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln 2,33$$

$$\epsilon = 0,1344$$

$$\frac{K_I}{\sigma_\infty} = 0,9168 \sqrt{\pi a} \left[ \cos(0,1344 \cdot \ln 2a) + 0,2688 \sin(0,1344 \cdot \ln 2a) \right] \quad (\text{A4.5})$$

$$\frac{K_{II}}{\sigma_\infty} = -0,9168 \sqrt{\pi a} \left[ \sin(0,1344 \cdot \ln 2a) - 0,2688 \cos(0,1344 \cdot \ln 2a) \right] \quad (\text{A4.6})$$

Die Gleichungen (A4.5) und (A4.6) wurden in Tabelle A4.3 ausgewertet und die Ergebnisse zur Ermittlung von  $\sigma_{\infty Ic}$  benutzt.

a [mm]	$\frac{K_I}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_\infty}$	$\frac{K}{\sigma_\infty}$	$\sigma_{\infty Ic}$ [MN/m <sup>2</sup> ] bei	
				min $K_{Ic} = 0,10 \frac{MN}{m^{1,5}}$	max $K_{Ic} = 0,21 \frac{MN}{m^{1,5}}$
1	0,0525	0,0090	0,0532	1,88	3,95
2	0,0750	0,0057	0,0753	1,33	2,79
3	0,0932	0,0234	0,0961	1,04	2,18
4	0,1064	-0,0018	0,1064	0,94	1,97
5	0,1189	-0,0056	0,1190	0,84	1,76
6	0,1300	-0,0093	0,1304	0,77	1,62
7	0,1402	-0,0130	0,1408	0,71	1,49
8	0,1406	-0,0166	0,1505	0,66	1,39
9	0,1584	-0,0201	0,1597	0,63	1,32
10	0,1666	-0,0235	0,1689	0,59	1,24
20	0,2315	-0,0551	0,2380	0,42	0,88

Tabelle A4.3 : Spannungsintensitätsfaktoren und  $\sigma_{\infty Ic}$ -Werte  
in der Kontaktfläche starrer Einschluß/Zementstein

A4.4 Kontaktfläche unter 45° zur Belastungsrichtung (starrer Einschluß)

Elastizitätskonstanten

Starrer Einschluß :  $E_1 = \infty$  ,  $\nu_1 = 0$

Zementstein :  $E = 0,20 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu = 0,2$

$$\left. \begin{array}{l} G = 0,083 \\ G_1 = \infty \\ \epsilon = 0,1344 \end{array} \right\} \text{vergl. Beispiel A4.3}$$

Im Unendlichen wirken die Belastungen :

$$\sigma_{\infty r} = 0,5 \sigma_{\infty}$$

$$\tau = 0,5 \sigma_{\infty}$$

Setzt man diese Belastungen in die Gleichungen (4.23) und (4.24) ein, so ergibt sich nach einigen elementaren Rechenschritten :

$$K_I = \frac{0,5 \sigma_{\infty}}{\cosh \pi \epsilon} \left[ \cos(\epsilon \cdot \ln 2a)(1 - 2\epsilon) + \sin(\epsilon \cdot \ln 2a)(1 + 2\epsilon) \right] \sqrt{\pi a}$$

$$\frac{K_I}{\sigma_{\infty}} = 0,4584 \sqrt{\pi a} \left[ \cos(0,1344 \cdot \ln 2a)(1 - 2 \cdot 0,1344) + \sin(0,1344 \cdot \ln 2a)(1 + 2 \cdot 0,1344) \right] \quad (\text{A4.7})$$

$$K_{II} = \frac{0,5 \sigma_{\infty}}{\cosh \pi \epsilon} \left[ \cos(\epsilon \cdot \ln 2a)(1 + 2\epsilon) - \sin(\epsilon \cdot \ln 2a)(1 - 2\epsilon) \right] \sqrt{\pi a}$$

$$\frac{K_{II}}{\sigma_{\infty}} = 0,4584 \sqrt{\pi a} \left[ \cos(0,1344 \cdot \ln 2a)(1 + 2 \cdot 0,1344) - \sin(0,1344 \cdot \ln 2a)(1 - 2 \cdot 0,1344) \right] \quad (\text{A4.8})$$

Die Gleichungen (A4.7) und (A4.8) wurden in Tabelle A4.4 ausgewertet und die Ergebnisse zur Berechnung von  $\sigma_{\infty Ic}$  benutzt.

a [mm]	$\frac{K_I}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_\infty}$	$\frac{K}{\sigma_\infty}$	$\sigma_{\infty Ic} \text{ [MN/m}^2\text{] bei}$	
				min $K_{Ic} = 0,10 \frac{\text{MN}}{\text{m}^{1,5}}$	max $K_{Ic} = 0,21 \frac{\text{MN}}{\text{m}^{1,5}}$
1	0,0183	0,0329	0,0388	2,57	5,40
2	0,0260	0,0484	0,0532	1,88	3,95
3	0,0319	0,0569	0,0652	1,53	3,22
4	0,0368	0,0656	0,0752	1,33	2,79
5	0,0412	0,0733	0,0841	1,19	2,50
6	0,0452	0,0803	0,0921	1,09	2,28
7	0,0488	0,0867	0,0995	1,01	2,11
8	0,0522	0,0927	0,1073	0,93	1,97
9	0,0554	0,0983	0,1128	0,89	1,86
10	0,0585	0,1036	0,1190	0,84	1,77
20	0,0829	0,1464	0,1680	0,60	1,25

Tabelle A4.4 : Spannungsintensitätsfaktoren und  $\sigma_{\infty Ic}$ -Werte  
in einer unter 45° zur Belastungsrichtung lie-  
genden Kontaktfläche bei starrem Einschluß



Nr.	Gestein	$\kappa$	$\kappa_1$	G	$G_1$	$\alpha_{-1}$	$\beta_{-1}$	$\beta_{-3}$	$\frac{r}{R}$	$G_r/p$			$G_\varphi/p$			$\tau_{r\varphi}/p$		
										$\varphi=0^\circ$	$\varphi=45^\circ$	$\varphi=90^\circ$	$\varphi=0^\circ$	$\varphi=45^\circ$	$\varphi=90^\circ$	$\varphi=0^\circ$	$\varphi=45^\circ$	$\varphi=90^\circ$
1	Marmor	2.33	2.125	0.02	0.43	-0.80	-1.245	0.80	1	1.51	0.81	0.11	0.29	0.19	0.09	-0.70		
									2	1.24	0.58	-0.08	-0.04	0.42	0.88	-0.44		
									3	1.11	0.53	-0.05	-0.03	0.47	0.96	-0.46		
									4	1.07	0.52	-0.03	-0.02	0.48	0.98	-0.40		
2	Gabbro	2.33	1.965	0.02	0.39	-0.80	-1.248	0.80	1	1.51	0.81	0.11	0.25	0.19	0.09	-0.70		
									2	1.24	0.58	-0.08	-0.04	0.42	0.88	-0.44		
									3	1.11	0.53	-0.05	-0.03	0.47	0.96	-0.46		
									4	1.07	0.52	-0.03	-0.02	0.48	0.98	-0.48		
3	Basalt	2.33	2.125	0.02	0.39	-0.80	-1.237	0.80	1	1.51	0.81	0.11	0.29	0.19	0.09	-0.70		
									2	1.24	0.58	-0.08	-0.04	0.42	0.88	-0.44		
									3	1.11	0.53	-0.05	-0.03	0.47	0.96	-0.46		
									4	1.07	0.52	-0.03	-0.02	0.48	0.98	-0.48		
4	Granit <sup>4)</sup>	2.33	2.310	0.02	0.23	-0.76	-1.151	0.76	1	1.48	0.79	0.10	0.28	0.21	0.14	-0.69		
									2	1.23	0.57	-0.08	-0.04	0.43	0.89	-0.44		
									3	1.11	0.53	-0.04	-0.02	0.47	0.96	-0.47		
									4	1.06	0.52	-0.03	-0.02	0.48	0.98	-0.48		
5	Granit <sup>5)</sup>	2.33	2.125	0.02	0.36	-0.79	-1.226	0.79	1	1.50	0.81	0.11	0.29	0.19	0.10	-0.70		
									2	1.24	0.58	-0.08	-0.04	0.42	0.89	-0.44		
									3	1.11	0.53	-0.04	-0.03	0.47	0.96	-0.46		
									4	1.06	0.52	-0.03	-0.02	0.49	0.98	-0.48		
6	Sandstein	2.33	1.860	0.02	0.25	-0.76	-1.219	0.76	1	1.49	0.80	0.11	0.27	0.20	0.13	-0.69		
									2	1.23	0.58	-0.08	-0.04	0.42	0.89	-0.44		
									3	1.11	0.53	-0.04	-0.03	0.47	0.96	-0.47		
									4	1.06	0.52	-0.03	-0.02	0.48	0.98	-0.48		
7	Ton- schiefer	2.33	2.450	0.02	0.24	-0.76	-1.140	0.76	1	1.48	0.79	0.10	0.29	0.22	0.15	-0.69		
									2	1.23	0.57	-0.08	-0.04	0.43	0.89	-0.44		
									3	1.11	0.53	-0.04	-0.02	0.47	0.96	-0.47		
									4	1.06	0.52	-0.03	-0.02	0.48	0.98	-0.48		
8	Starrer Einschluß	2.33	3.000	0.02	$\infty$	-0.86	-1.333	0.86	1	1.55	0.83	0.12	0.31	0.17	0.02	-0.72		
									2	1.26	0.58	-0.09	-0.04	0.42	0.88	-0.43		
									3	1.12	0.54	-0.05	-0.03	0.46	0.96	-0.46		
									4	1.07	0.52	-0.03	-0.01	0.48	0.98	-0.48		

Bemerkungen :

1) Granit mit  $E_1 = 0.55 \times 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu_1 = 0.21$

2) Granit mit  $E_1 = 0.90 \times 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu_1 = 0.28$

Elastizitätsmodul der Matrix :  $E = 0.05 \times 10^5 \text{ MN/m}^2$

Anhang B1

Bezogene Radial-, Tangential- und Schubspannungen  
 $G_r$ ,  $G_\varphi$  und  $\tau_{r\varphi}$  für verschiedene Arten von Zu-  
schlägen bei kreisförmigen Einschlüssen

Tabelle B 1.1

Nr.	Gestein	$\kappa$	$\kappa_1$	G	G <sub>1</sub>	$\alpha_{-1}$	$\beta_{-1}$	$\beta_{-3}$	$\frac{r}{R}$	$\sigma_r/p$			$\sigma_\varphi/p$			$\tau_{r\varphi}/p$		
										$\varphi=0^\circ$	$\varphi=45^\circ$	$\varphi=90^\circ$	$\varphi=0^\circ$	$\varphi=45^\circ$	$\varphi=90^\circ$	$\varphi=0^\circ$	$\varphi=45^\circ$	$\varphi=90^\circ$
9	Marmor	2.33	2.125	0.083	0.43	-0.64	-1.003	0.64	1	1.41	0.75	0.09	0.23	0.25	0.27	-0.66		
									2	1.19	0.56	-0.07	-0.03	0.44	0.91	-0.45		
									3	1.09	0.53	-0.04	-0.02	0.47	0.97	-0.47		
									4	1.05	0.52	-0.02	-0.01	0.48	0.98	-0.48		
10	Gabbro	2.33	1.985	0.083	0.39	-0.62	-1.014	0.62	1	1.41	0.75	0.09	0.21	0.25	0.28	-0.66		
									2	1.19	0.56	-0.07	-0.03	0.44	0.91	-0.45		
									3	1.09	0.53	-0.04	-0.02	0.47	0.97	-0.47		
									4	1.05	0.52	-0.02	-0.01	0.48	0.98	-0.48		
11	Basalt	2.33	2.125	0.083	0.39	-0.62	-0.974	0.62	1	1.40	0.74	0.09	0.22	0.26	0.29	-0.66		
									2	1.18	0.56	-0.07	-0.03	0.44	0.91	-0.45		
									3	1.09	0.53	-0.04	-0.02	0.47	0.97	-0.47		
									4	1.05	0.52	-0.02	-0.01	0.48	0.98	-0.48		
12	Granit <sup>1)</sup>	2.33	2.310	0.083	0.23	-0.48	-0.693	0.48	1	1.29	0.67	0.05	0.19	0.33	0.47	-0.62		
									2	1.14	0.54	-0.05	-0.02	0.46	0.93	-0.46		
									3	1.07	0.52	-0.03	-0.01	0.48	0.98	-0.48		
									4	1.04	0.51	-0.01	-0.01	0.49	0.99	-0.49		
13	Granit <sup>2)</sup>	2.33	2.125	0.083	0.35	-0.59	-0.938	0.59	1	1.38	0.73	0.09	0.21	0.27	0.32	-0.65		
									2	1.18	0.56	-0.07	-0.03	0.44	0.91	-0.45		
									3	1.09	0.53	-0.04	-0.02	0.47	0.97	-0.47		
									4	1.05	0.52	-0.02	-0.01	0.49	0.98	-0.48		
14	Sandstein	2.33	1.860	0.083	0.25	-0.50	-0.914	0.50	1	1.35	0.73	0.10	0.15	0.27	0.40	-0.63		
									2	1.16	0.56	-0.04	-0.03	0.44	0.92	-0.46		
									3	1.07	0.52	-0.03	-0.02	0.48	0.97	-0.48		
									4	1.04	0.51	-0.02	-0.01	0.49	0.98	-0.49		
15	Ton- schiefer	2.33	2.450	0.083	0.24	-0.49	-0.662	0.49	1	1.29	0.67	0.04	0.20	0.33	0.47	-0.62		
									2	1.14	0.54	-0.05	-0.02	0.46	0.94	-0.46		
									3	1.07	0.52	-0.03	-0.01	0.48	0.98	-0.48		
									4	1.04	0.51	-0.01	-0.01	0.49	0.99	-0.49		
16	Starrer Einschluß	2.33	3.000	0.083	$\infty$	-0.86	-1.330	0.86	1	1.55	0.83	0.12	0.31	0.17	0.02	-0.72		
									2	1.26	0.58	-0.09	-0.04	0.42	0.88	-0.43		
									3	1.12	0.54	-0.05	-0.03	0.46	0.96	-0.46		
									4	1.07	0.52	-0.03	-0.01	0.48	0.98	-0.48		

**Bemerkungen :**

1) Granit mit  $E_1 = 0.55 \times 10^8 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu_1 = 0.21$

2) Granit mit  $E_1 = 0.90 \times 10^8 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu_1 = 0.28$

Elastizitätsmodul der Matrix :  $E = 0.2 \times 10^8 \text{ MN/m}^2$

Bezogene Radial-, Tangential- und Schubspannungen  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  und  $\tau_{r\varphi}$  für verschiedene Arten von Zschlägen bei kreisförmigen Einschlässen

Anhang B1

Tabelle B 1.2

Nr.	Gestein	$\frac{r}{R}$	$\sigma_1/p$			$\sigma_2/p$			Elastizitätsmodul der Matrix
			$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 45^\circ$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 45^\circ$	$\varphi = 90^\circ$	
1	Marmor	1	1.51	1.27	0.11	0.29	-0.27	0.09	0.05 * 10 <sup>8</sup> MN/m <sup>2</sup>
		2	1.24	0.95	0.88	-0.04	0.05	-0.08	
		3	1.11	0.96	0.96	-0.03	0.04	-0.05	
		4	1.07	0.98	0.98	-0.02	0.02	-0.03	
2	Gabbro	1	1.51	1.27	0.11	0.29	-0.27	0.09	
		2	1.24	0.95	0.88	-0.04	0.05	-0.08	
		3	1.11	0.96	0.96	-0.03	0.04	-0.05	
		4	1.07	0.98	0.98	-0.02	0.02	-0.03	
3	Basalt	1	1.51	1.27	0.11	0.29	-0.27	0.09	
		2	1.24	0.95	0.88	-0.04	0.05	-0.08	
		3	1.11	0.96	0.96	-0.03	0.04	-0.05	
		4	1.07	0.98	0.98	-0.02	0.02	-0.03	
4	Granit <sup>1)</sup>	1	1.48	1.25	0.14	0.28	-0.25	0.10	
		2	1.23	0.95	0.89	-0.04	0.05	-0.08	
		3	1.11	0.97	0.96	-0.03	0.03	-0.04	
		4	1.06	0.98	0.98	-0.02	0.02	-0.03	
5	Granit <sup>2)</sup>	1	1.50	1.27	0.11	0.29	-0.27	0.10	
		2	1.24	0.95	0.89	-0.04	0.05	-0.08	
		3	1.11	0.97	0.96	-0.03	0.03	-0.04	
		4	1.06	0.98	0.98	-0.02	0.02	-0.03	
6	Sandstein	1	1.49	1.25	0.13	0.27	-0.25	0.11	
		2	1.23	0.95	0.89	-0.04	0.05	-0.08	
		3	1.11	0.97	0.96	-0.03	0.03	-0.04	
		4	1.06	0.98	0.98	-0.02	0.02	-0.03	
7	Ton-schiefer	1	1.48	1.25	0.15	0.29	-0.24	0.10	
		2	1.23	0.95	0.89	-0.04	0.05	0.08	
		3	1.11	0.97	0.96	-0.02	0.03	-0.04	
		4	1.06	0.98	0.98	-0.02	0.02	-0.02	
8	Stanner Einschluß	1	1.55	1.29	0.12	0.31	-0.29	0.02	beliebig
		2	1.26	0.93	0.88	-0.04	0.06	-0.09	
		3	1.12	0.96	0.96	-0.03	0.04	-0.05	
		4	1.07	0.98	0.98	-0.01	0.02	-0.03	
9	Marmor	1	1.41	1.21	0.27	0.23	-0.21	0.09	
		2	1.19	0.95	0.91	-0.03	0.05	-0.07	
		3	1.09	0.97	0.97	-0.02	0.03	-0.04	
		4	1.05	0.98	0.98	-0.01	0.02	-0.02	
10	Gabbro	1	1.41	1.21	0.27	0.23	-0.21	0.09	
		2	1.19	0.95	0.91	-0.03	0.05	-0.07	
		3	1.09	0.97	0.97	-0.02	0.03	-0.04	
		4	1.05	0.98	0.98	-0.01	0.02	-0.02	
11	Basalt	1	1.40	1.20	0.29	0.22	-0.20	0.09	
		2	1.18	0.95	0.91	-0.03	0.05	-0.07	
		3	1.09	0.97	0.97	-0.02	0.03	-0.04	
		4	1.05	0.98	0.98	-0.01	0.02	-0.02	
12	Granit <sup>1)</sup>	1	1.29	1.14	0.47	0.19	-0.14	0.05	0.02 * 10 <sup>8</sup> MN/m <sup>2</sup>
		2	1.14	0.96	0.93	-0.02	0.04	-0.05	
		3	1.07	0.98	0.98	-0.01	0.02	-0.03	
		4	1.04	0.99	0.99	-0.01	0.01	-0.01	
13	Granit <sup>2)</sup>	1	1.38	1.19	0.32	0.21	-0.19	0.09	
		2	1.18	0.95	0.91	-0.03	0.05	-0.07	
		3	1.09	0.97	0.97	-0.02	0.03	-0.04	
		4	1.05	0.99	0.98	-0.01	0.02	-0.02	
14	Sandstein	1	1.35	1.17	0.40	0.15	-0.17	0.10	
		2	1.16	0.96	0.92	-0.03	0.04	-0.04	
		3	1.07	0.98	0.97	-0.02	0.02	-0.03	
		4	1.04	0.99	0.98	-0.01	0.01	-0.02	
15	Ton-schiefer	1	1.29	1.14	0.47	0.20	-0.14	0.04	
		2	1.14	0.96	0.94	-0.02	0.04	-0.05	
		3	1.07	0.98	0.98	-0.01	0.02	-0.03	
		4	1.04	0.99	0.99	-0.01	0.01	-0.01	
	1) bzw. 2) Siehe Tabelle B1.1		Hauptspannungen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ für verschiedene Arten von Zuschlägen bei kreisförmigem Einschluß					Anhang B1 Tabelle B 1.3	

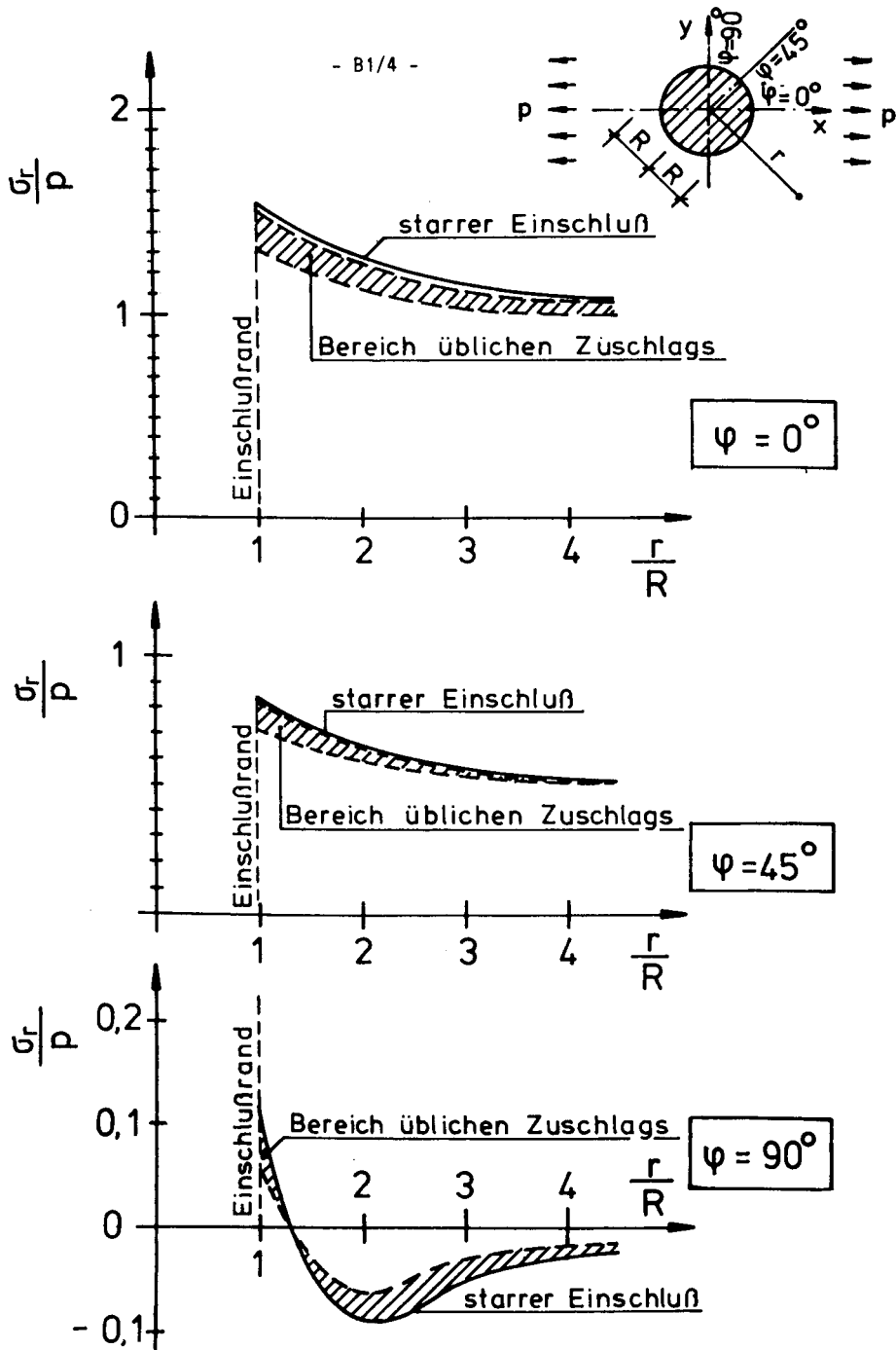


Abb. B1.4: Verlauf der bezogenen Radialspannungen  $\sigma_r/p$  bei starrem Einschluss und bei ueblichen Zuschlaegen

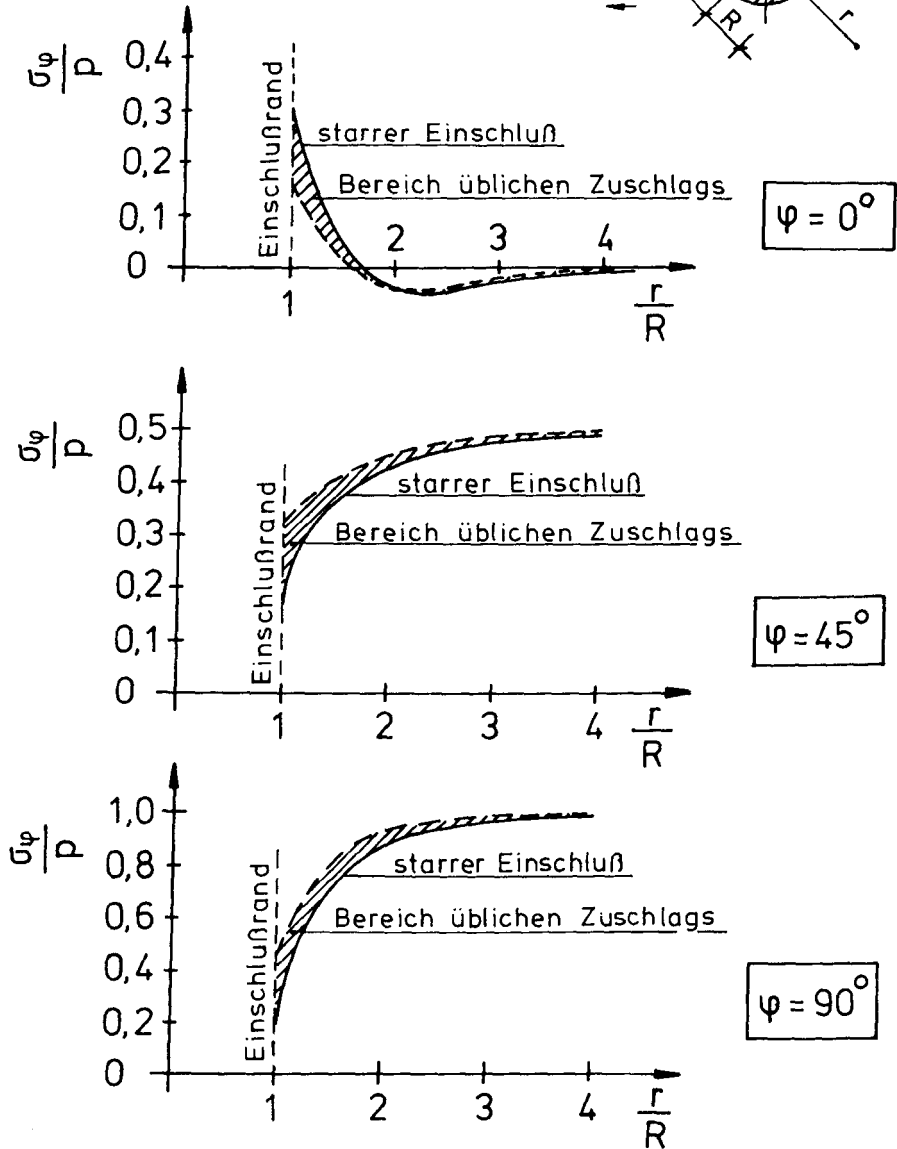
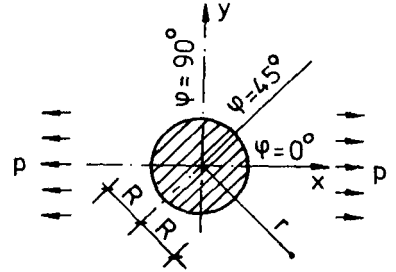


Abb. B1.5: Verlauf der bezogenen Tangentialspannungen  $\sigma_\varphi/p$  bei starrem Einschuß und bei üblichen Zuschlägen

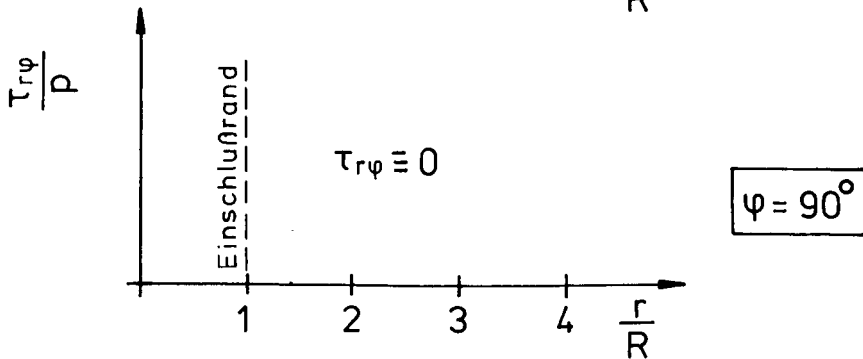
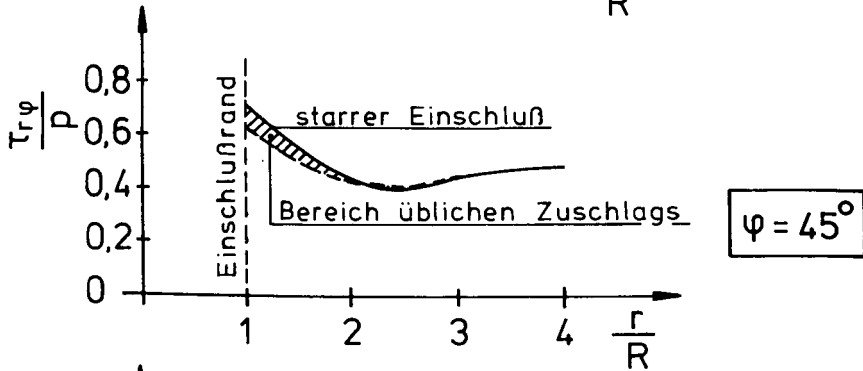
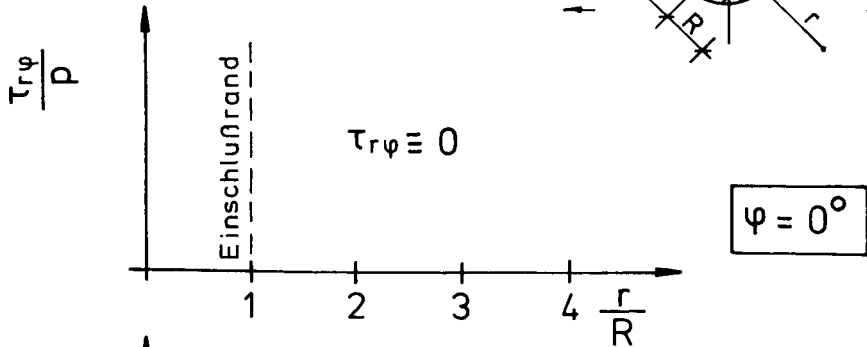
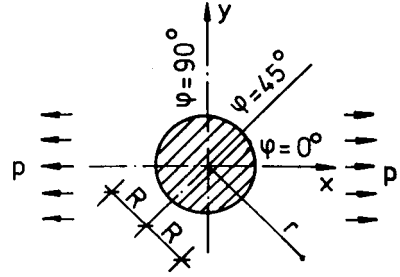


Abb. B1.6: Verlauf der bezogenen Schubspannungen  $\tau_{r\varphi}/p$  bei starrem Einschluß und bei üblichen Zuschlägen

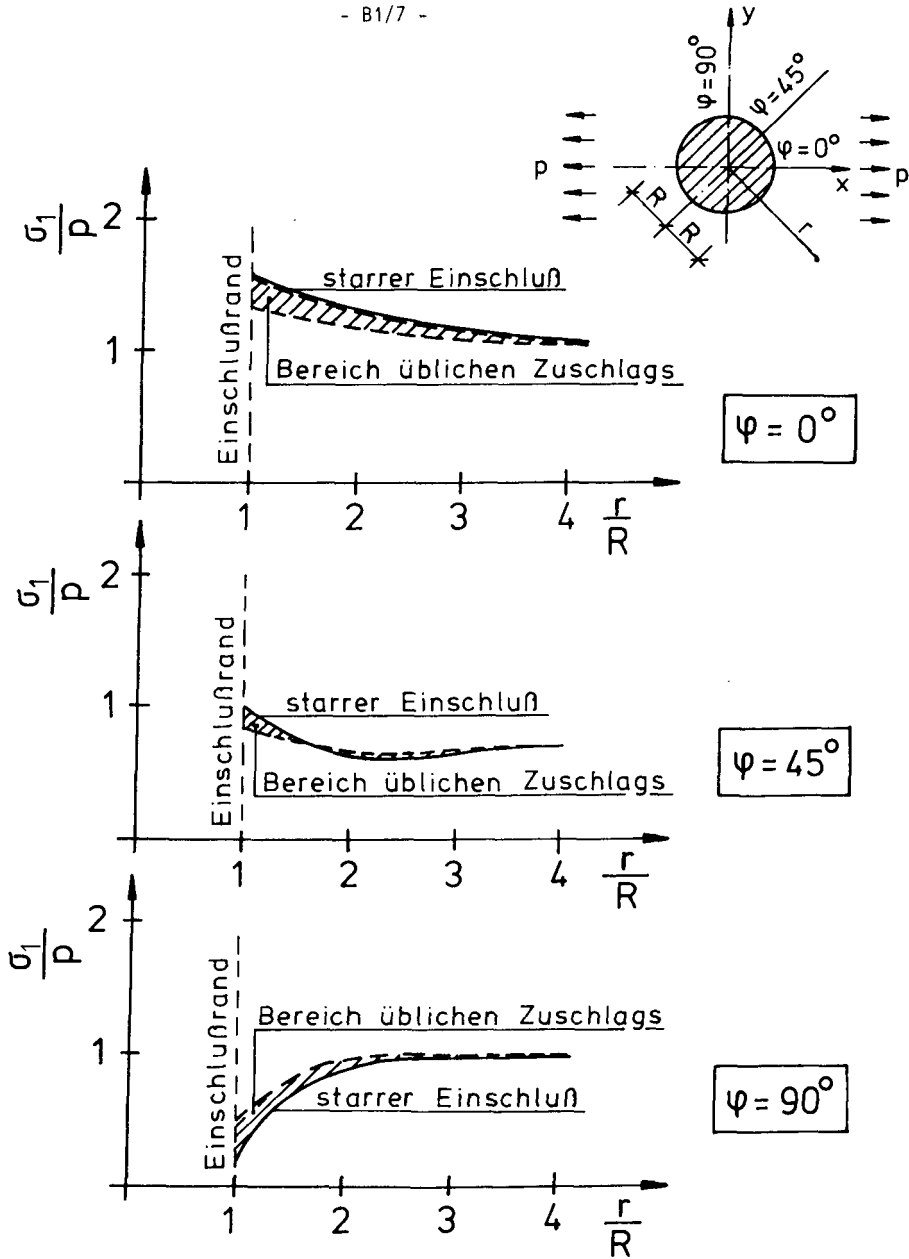


Abb. B1.7: Verlauf der bezogenen Hauptspannungen  $\sigma_1/p$  bei starrem Einschuß und bei üblichen Zuschlägen

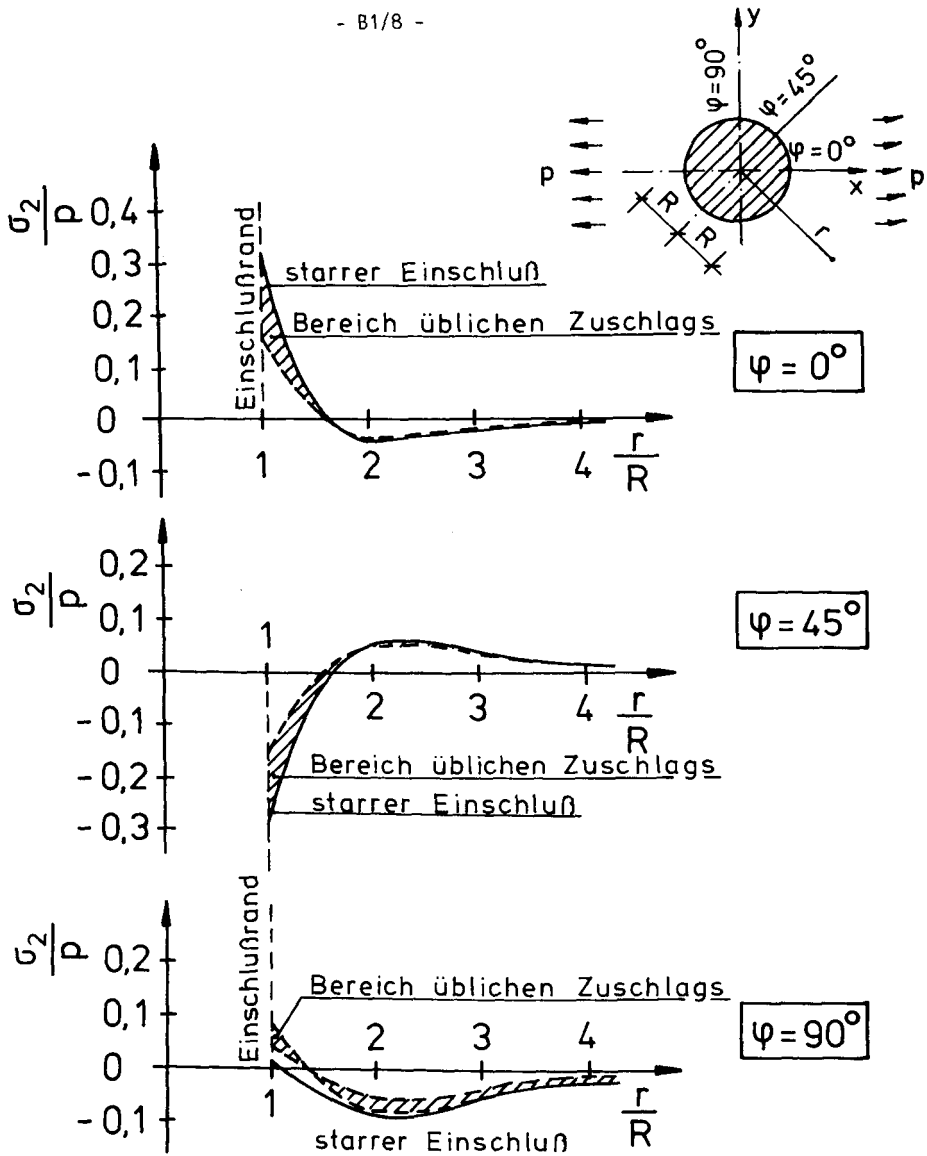


Abb. B1.8: Verlauf der bezogenen Hauptspannung  $\sigma_2/p$  bei starrem Einschluss und bei ueblichen Zuschlaegen



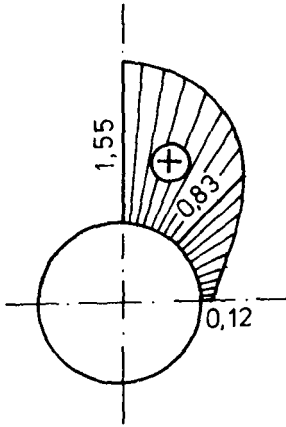
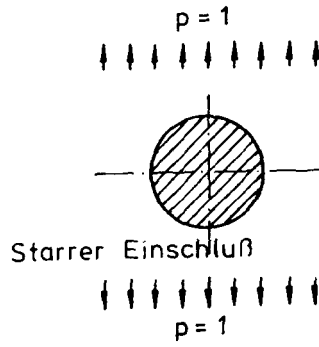


Abb. B1.9: Verlauf der Radialspannungen  $\sigma_r$  in der Matrix am Einschlussrand

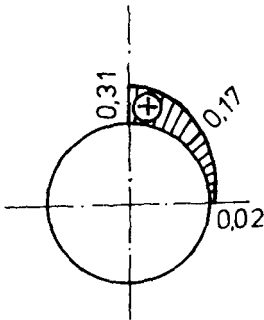


Abb. B1.10: Verlauf der Tangentialspannungen  $\sigma_\varphi$  in der Matrix am Einschlussrand

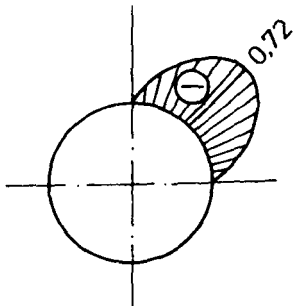


Abb. B1.11: Verlauf der Schubspannungen  $\tau_{r\varphi}$  in der Matrix am Einschlussrand

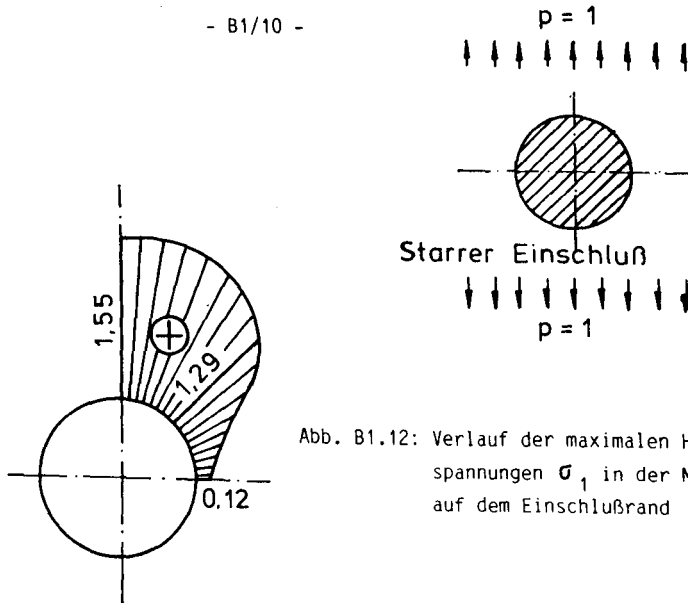


Abb. B1.12: Verlauf der maximalen Hauptspannungen  $\sigma_1$  in der Matrix auf dem Einschußrand

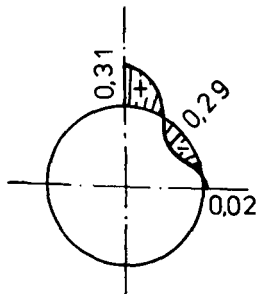
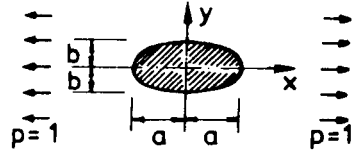


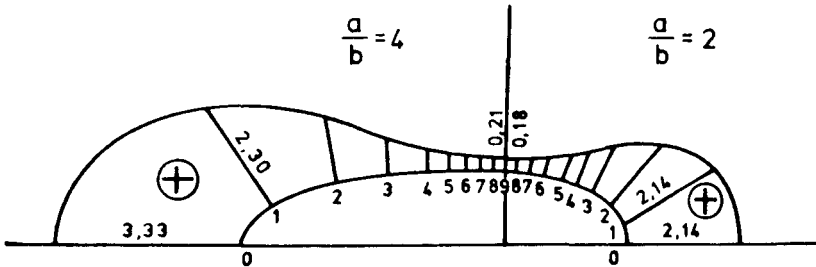
Abb B1.13: Verlauf der minimalen Hauptspannungen  $\sigma_2$  in der Matrix auf dem Einschußrand

Anhang B2

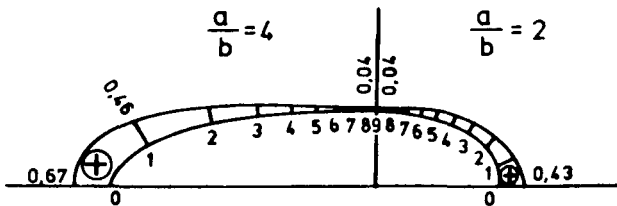
Spannungsverläufe um elliptische Einschlüsse



a) Radialspannung  $\sigma_r$



b) Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$



c) Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$

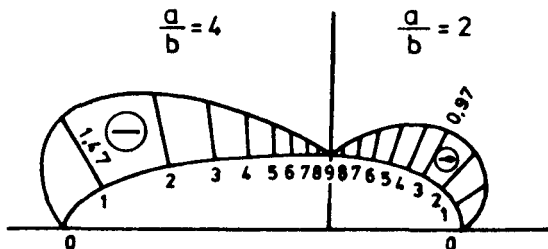
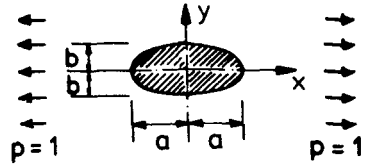
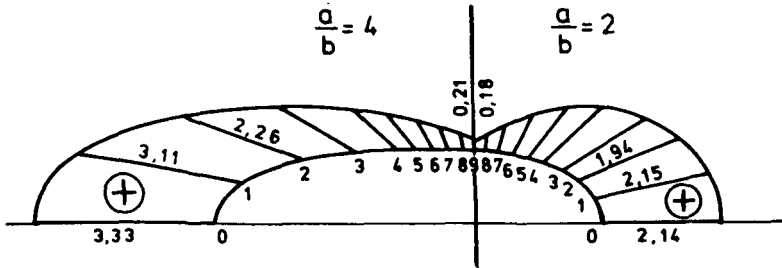


Abb. B 2.1 : Radial-, Tangential- und Schubspannungen bei starrem elliptischen Einschuß bei Belastung in x-Richtung



a) max. Hauptspannung  $\sigma_1$



b) min. Hauptspannung  $\sigma_2$

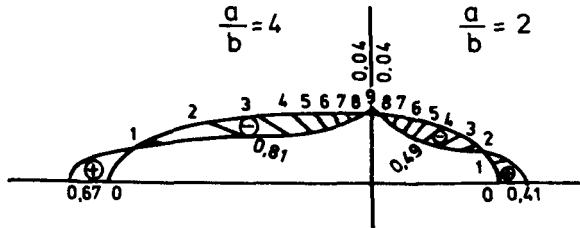
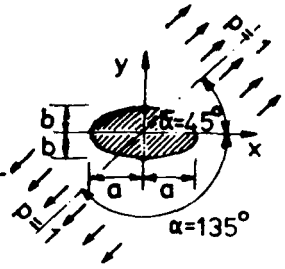
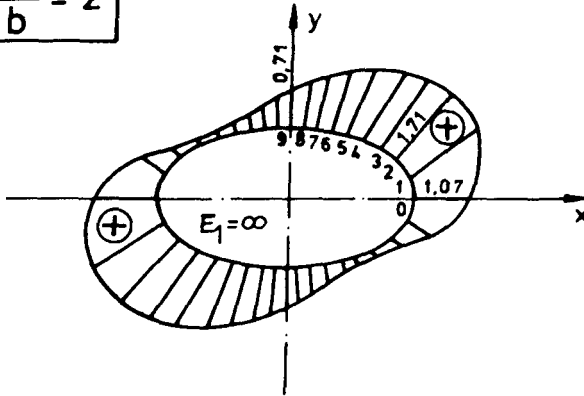


Abb. B 2.2 : Hauptspannungen bei starrem elliptischen Einschluß und Belastung in x-Richtung

Radialspannung  $\sigma_r$



a)  $\frac{a}{b} = 2$



b)  $\frac{a}{b} = 4$

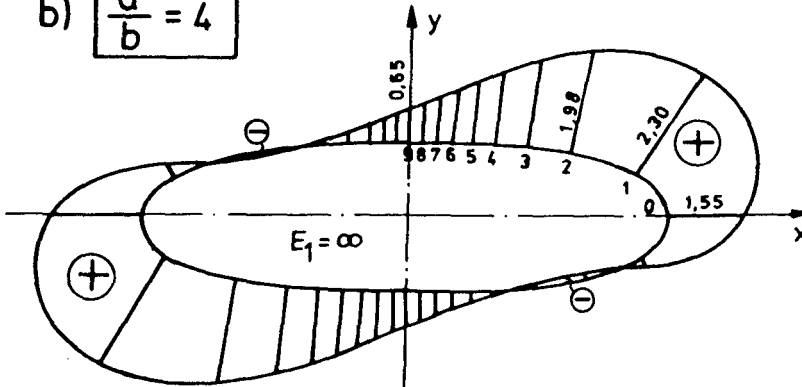
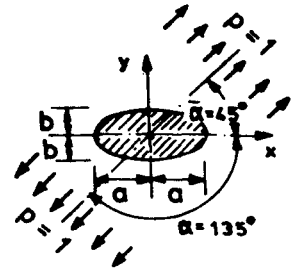
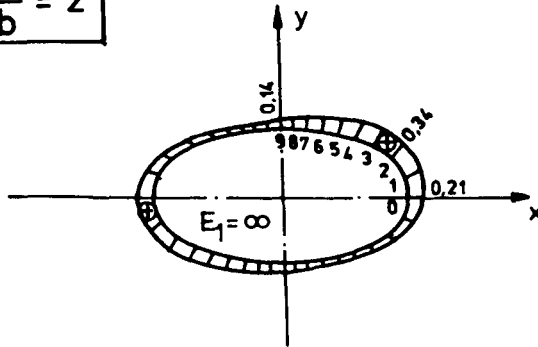


Abb. B 2.3 : Radialspannungen bei starrem elliptischen Einschluß und Belastung unter  $45^\circ$

### Tangentialspannung $\sigma_{\psi}$



a)  $\frac{a}{b} = 2$



b)  $\frac{a}{b} = 4$

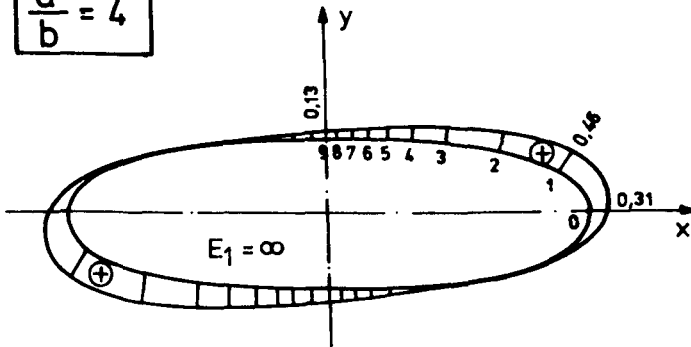
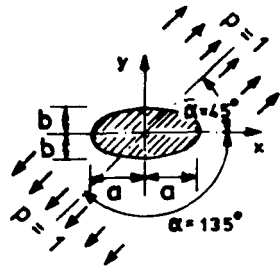
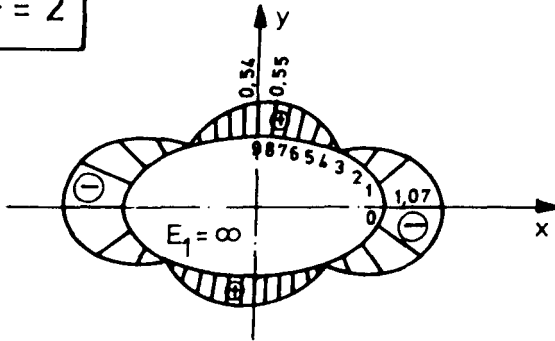


Abb. B 2.4 : Tangentialspannung bei starrem elliptischen Einschluß und Belastung unter 45°



Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$

a)  $\frac{a}{b} = 2$



b)  $\frac{a}{b} = 4$

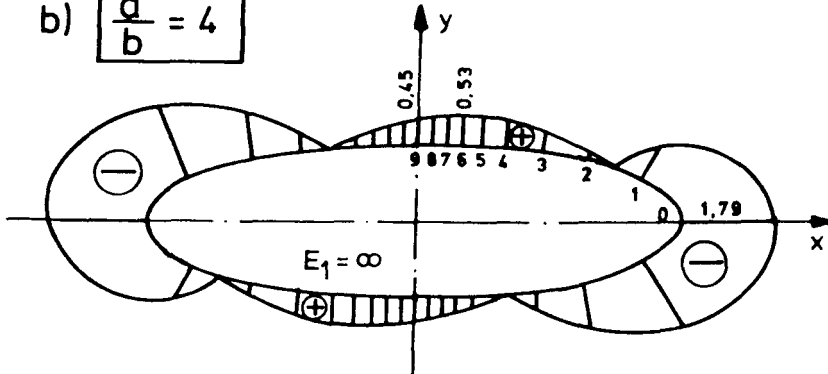
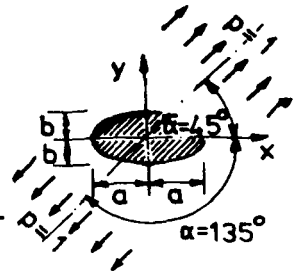
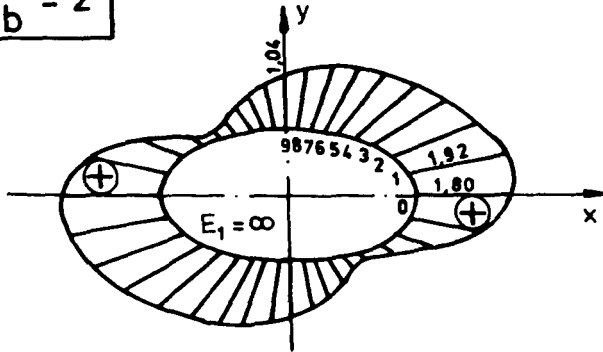


Abb. B 2.5 : Schubspannung bei starrem elliptischen Einschluß und Belastung unter 45°



max. Hauptspannung  $\sigma_1$

a)  $\frac{a}{b} = 2$



b)  $\frac{a}{b} = 4$

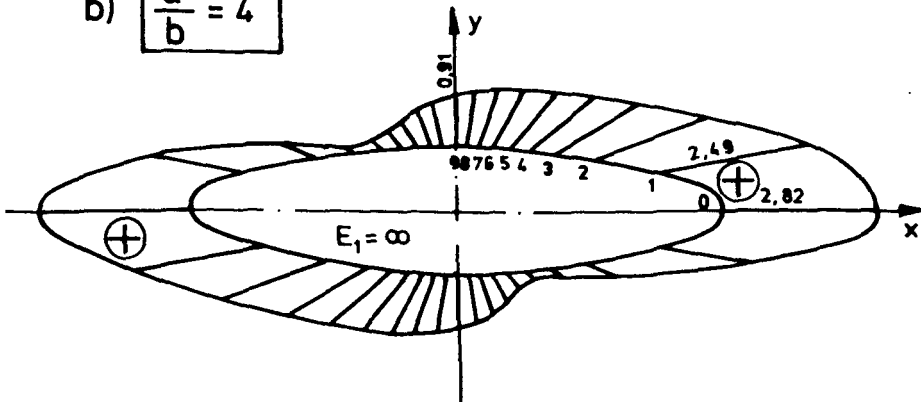
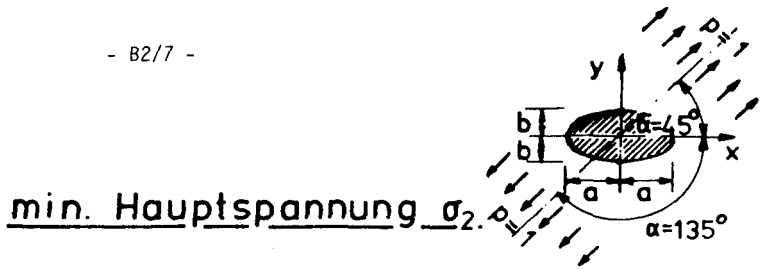


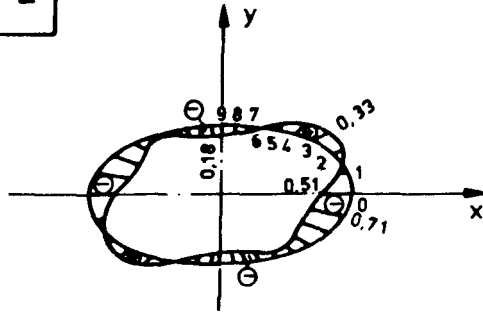
Abb. B 2.6 : Maximale Hauptspannung bei starrem elliptischen Einschluß und Belastung unter  $45^\circ$





min. Hauptspannung  $\sigma_2$

a)  $\frac{a}{b} = 2$



b)  $\frac{a}{b} = 4$

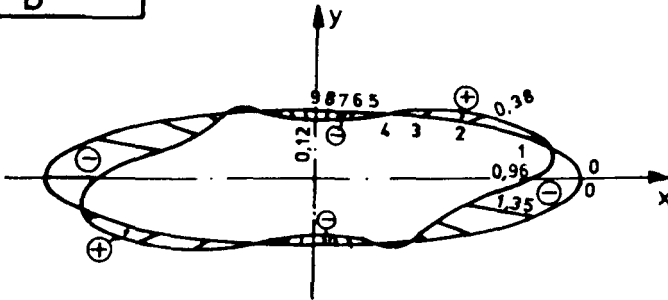
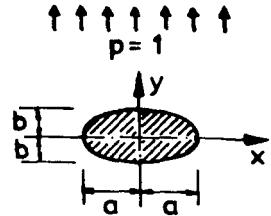
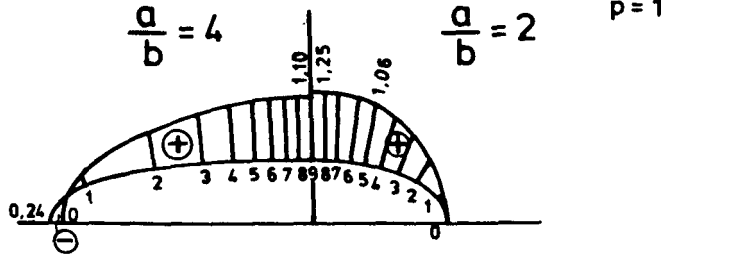


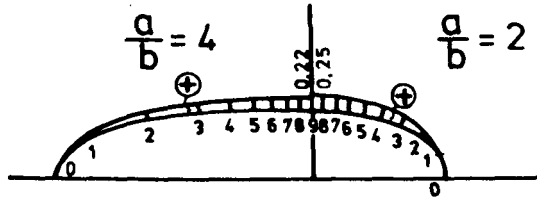
Abb. B 2.7 : Minimale Hauptspannung bei starrem elliptischen Einschluß und Belastung unter 45°



a) Radialspannung  $\sigma_r$



b) Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$



c) Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$

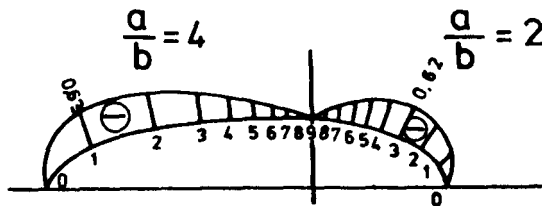
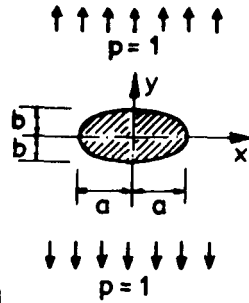
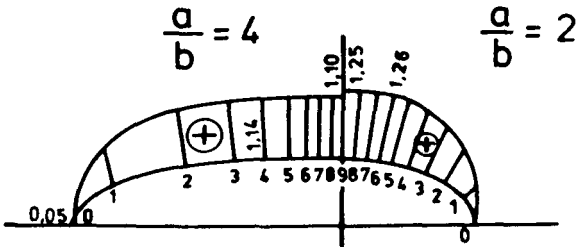


Abb. B 2.8 : Radial-, Tangential- und Schubspannungen bei starrem elliptischen Einschluß unter Belastung in y-Richtung



a) max. Hauptspannung  $\sigma_1$



b) min. Hauptspannung  $\sigma_2$

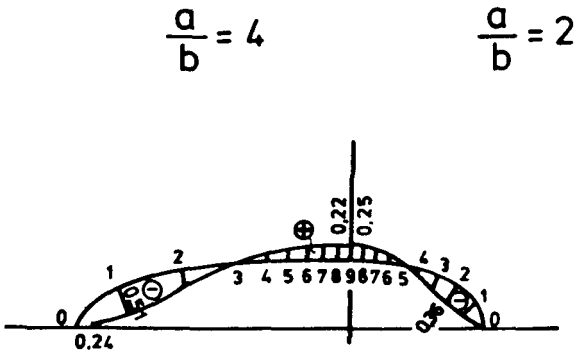


Abb. B 2.9 : Hauptspannungen bei starrem elliptischen Einschluß und Belastung in y-Richtung

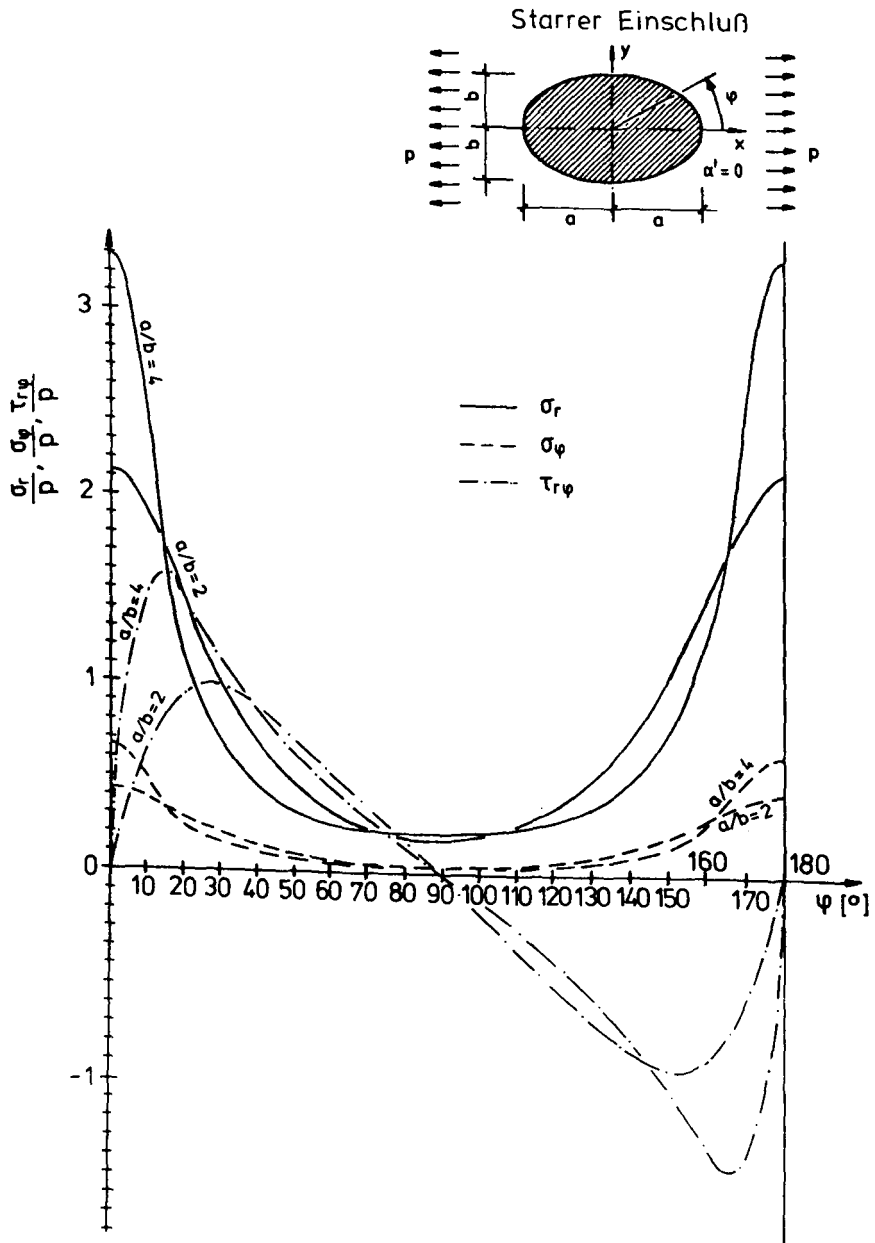


Abb. B 2.10: Bezogene Radial-, Tangential- und Schubspannungen für  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  bei Belastung in x-Richtung ( $\alpha' = 0$ )

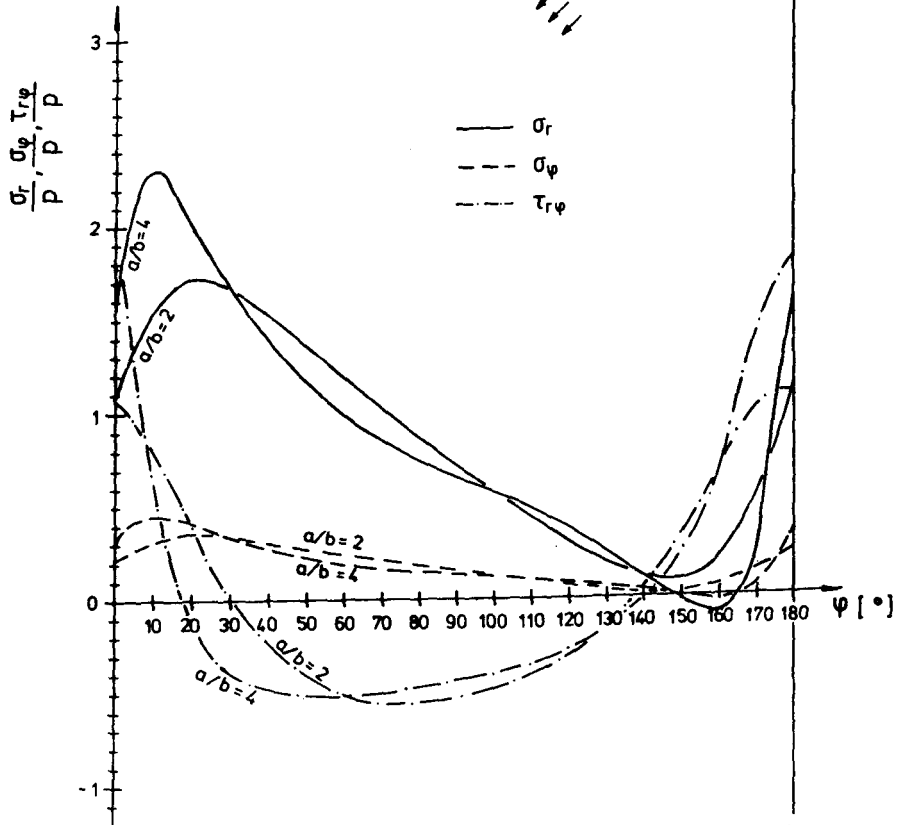
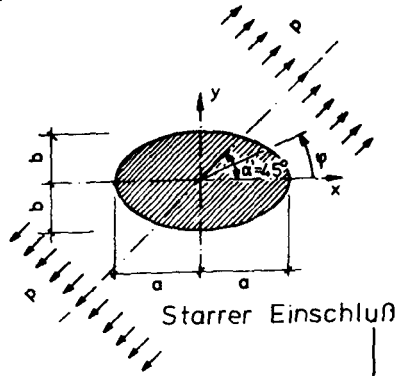


Abb. B 2.11: Bezogene Radial-, Tangential- und Schubspannungen für  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  bei Belastung unter  $\alpha = 45^\circ$

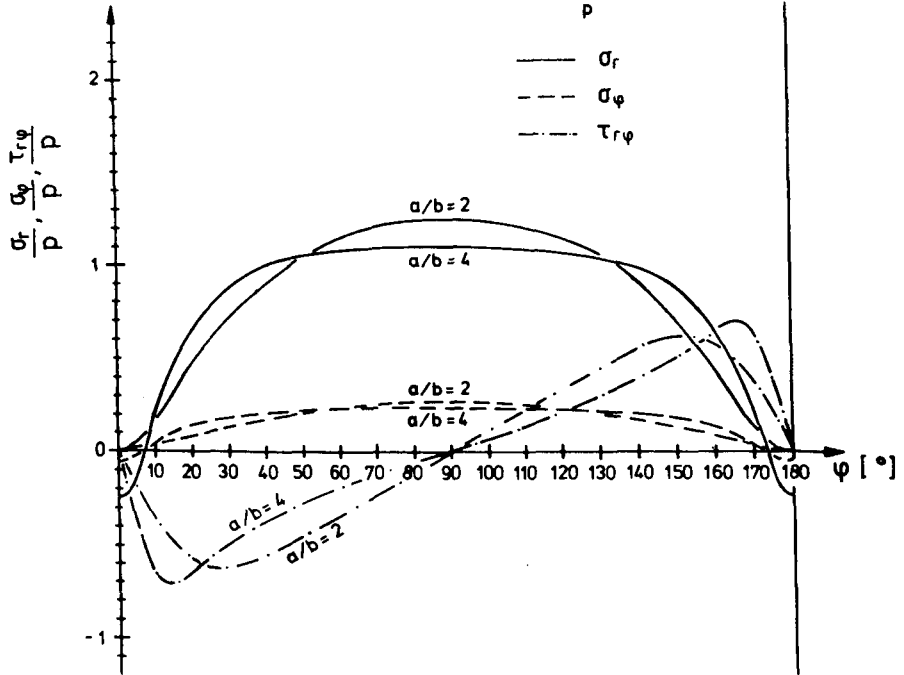
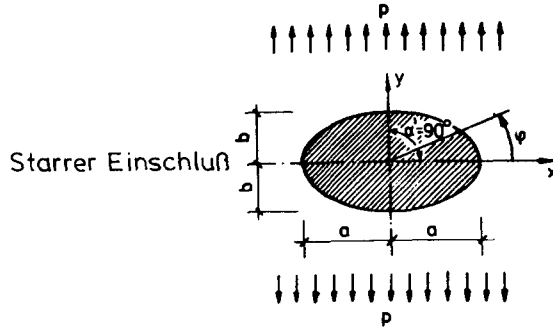


Abb. B 2.12: Bezogene Radial-, Tangential- und Schubspannungen für  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  bei Belastung unter  $\alpha' = 90^\circ$

Anhang B3

Spannungsverläufe um quadratische Einschlüsse

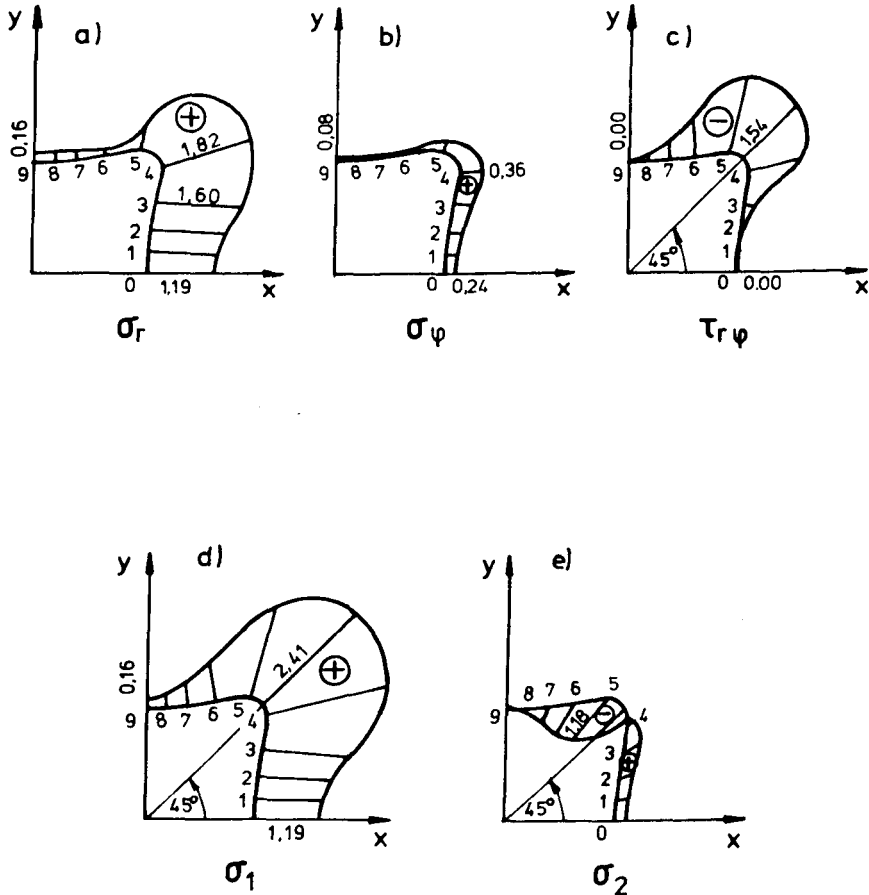
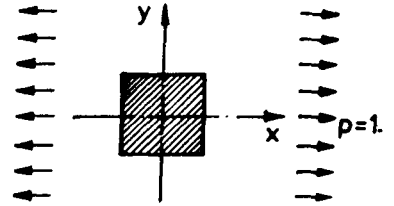


Abb. B 3.1 : Radial-, Tangential-, Schub- und Hauptspannungen bei starrem quadratischen Einschuß unter Belastung in x-Richtung (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

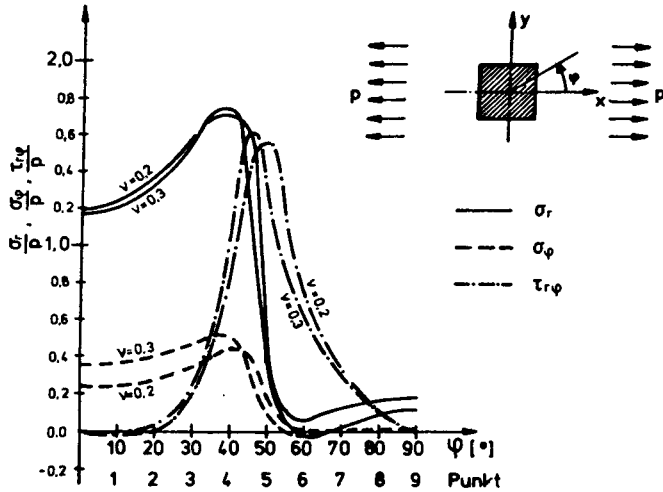


Abb. B 3.2 : Bezogene Radial-, Tangential- und Schubspannungen bei starrem quadratischen Einschluß und Belastung in x-Richtung (Querdehnzahlen  $\nu = 0,2$  und  $\nu = 0,3$ )

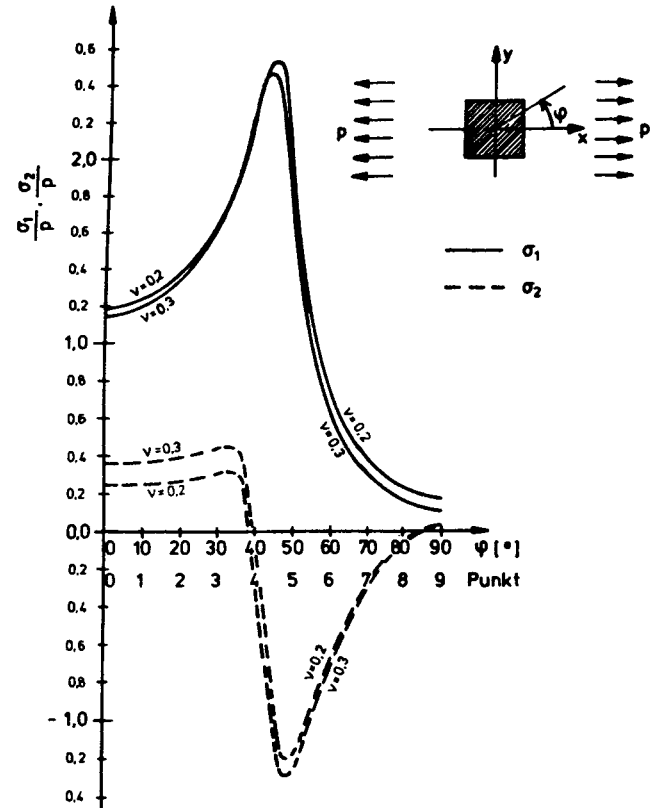
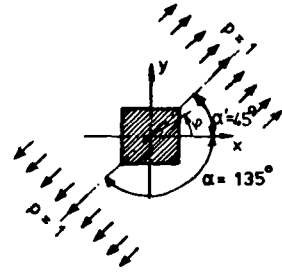
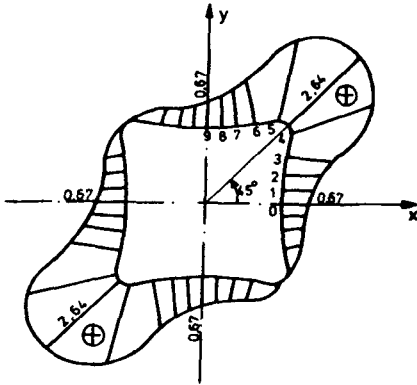


Abb. B 3.3 : Bezogene Hauptspannungen bei starrem quadratischen Einschluß und Belastung in x-Richtung (Querdehnzahlen  $\nu = 0,2$  und  $\nu = 0,3$ )

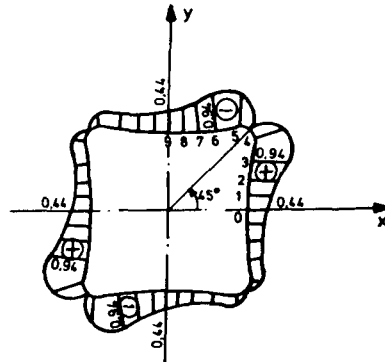
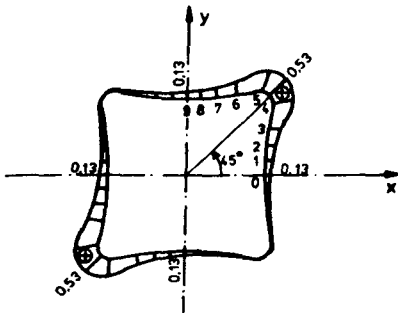


a) Radialspannung  $\sigma_r$

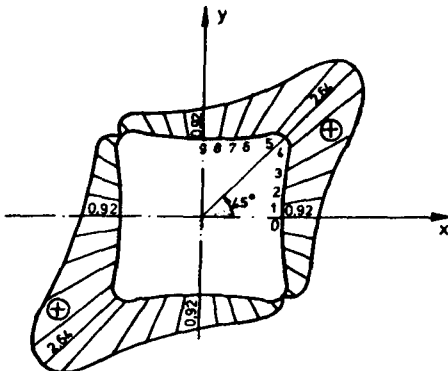


c) Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$

b) Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$



a) max. Hauptspannung  $\sigma_1$



b) min. Hauptspannung  $\sigma_2$

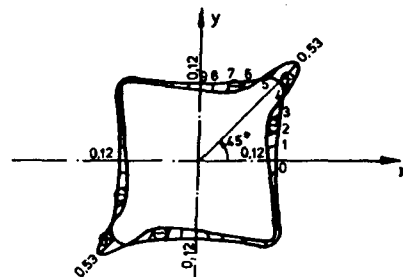


Abb. B 3.4 : Radial- Tangential-, Schub- und Hauptspannungen bei starrem quadratischen Einschluß und unter Belastung in Diagonalenrichtung (Querdehnzahl  $\nu=0,2$ )

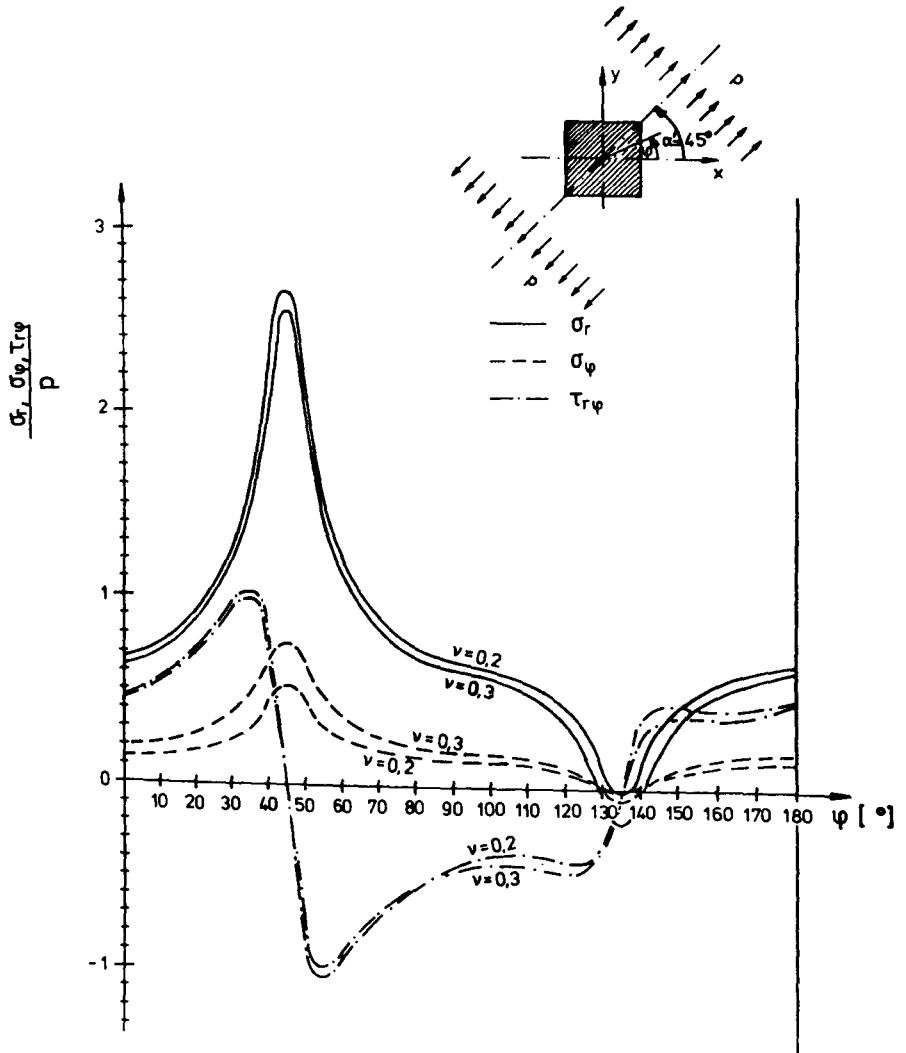


Abb. B 3.5: Bezogene Radial-, Tangential- und Schubspannungen für  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  bei Belastung in Diagonalenrichtung

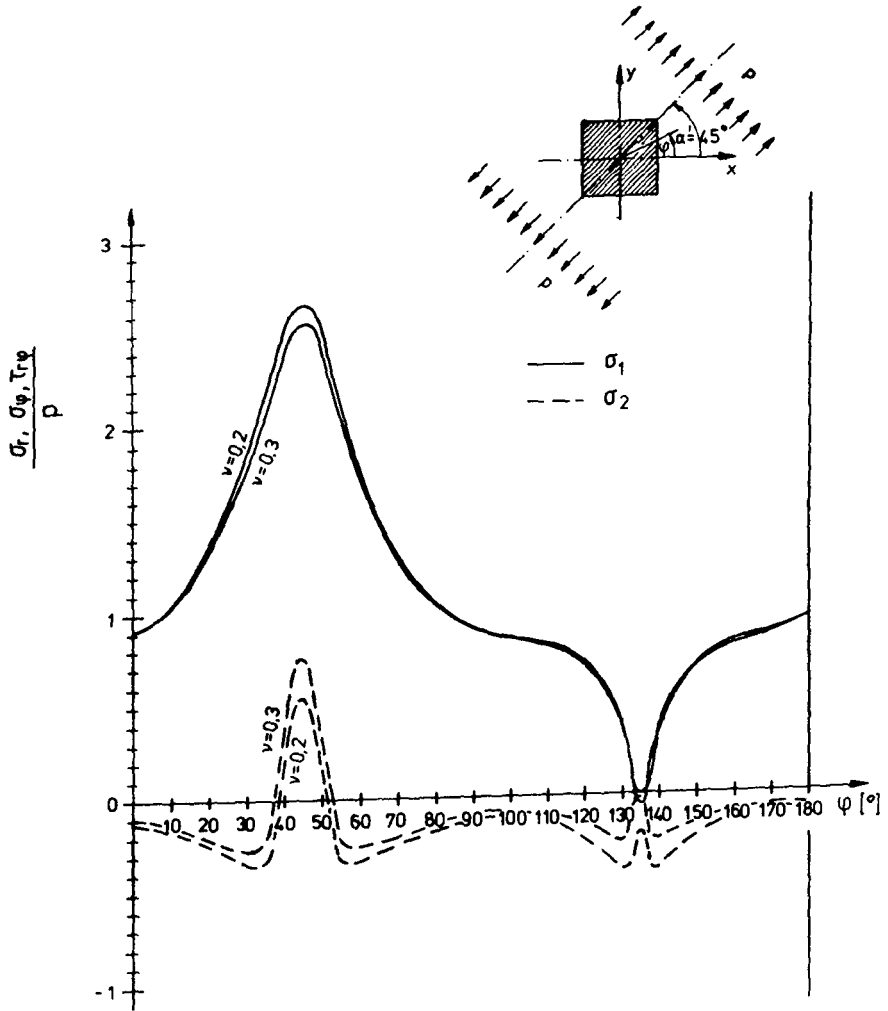
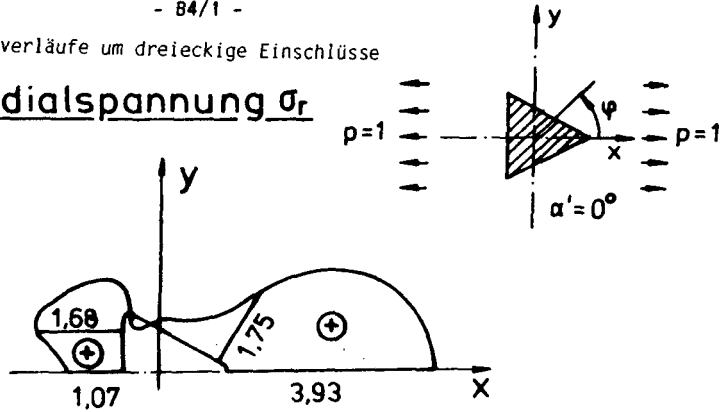


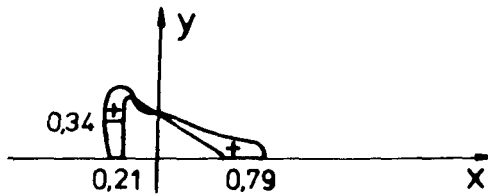
Abb. B 3.6: Bezogene Hauptspannungen für  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  bei Belastung in Diagonalenrichtung



a) Radialspannung  $\sigma_r$



b) Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$



c) Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$

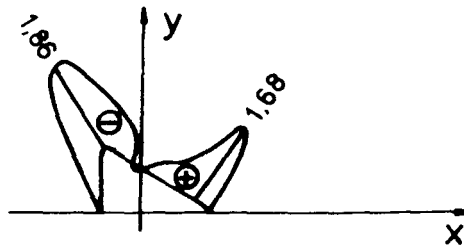
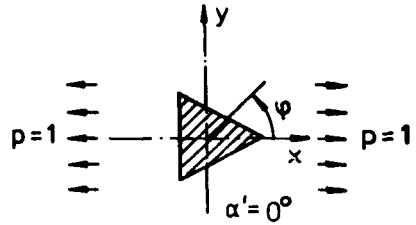
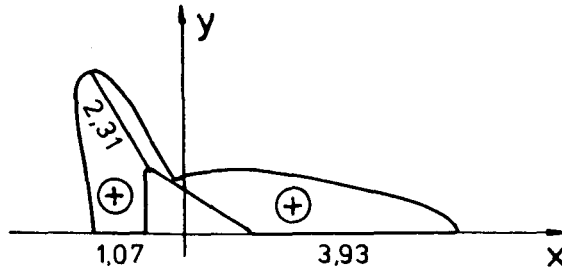


Abb. B 4.1: Radial-, Tangential- und Schubspannungen bei starrem dreieckigen Einschluss unter Belastung in x-Richtung (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )



a) Maximale Hauptspannung  $\sigma_1$



b) Minimale Hauptspannung  $\sigma_2$

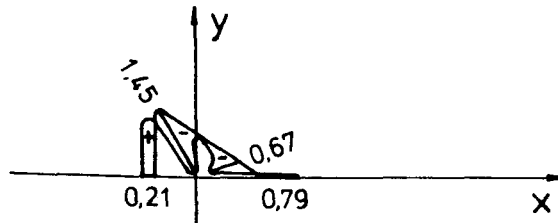


Abb. B 4.2: Maximale und minimale Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bei starrem dreieckigen Einschluss unter Belastung in x-Richtung (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

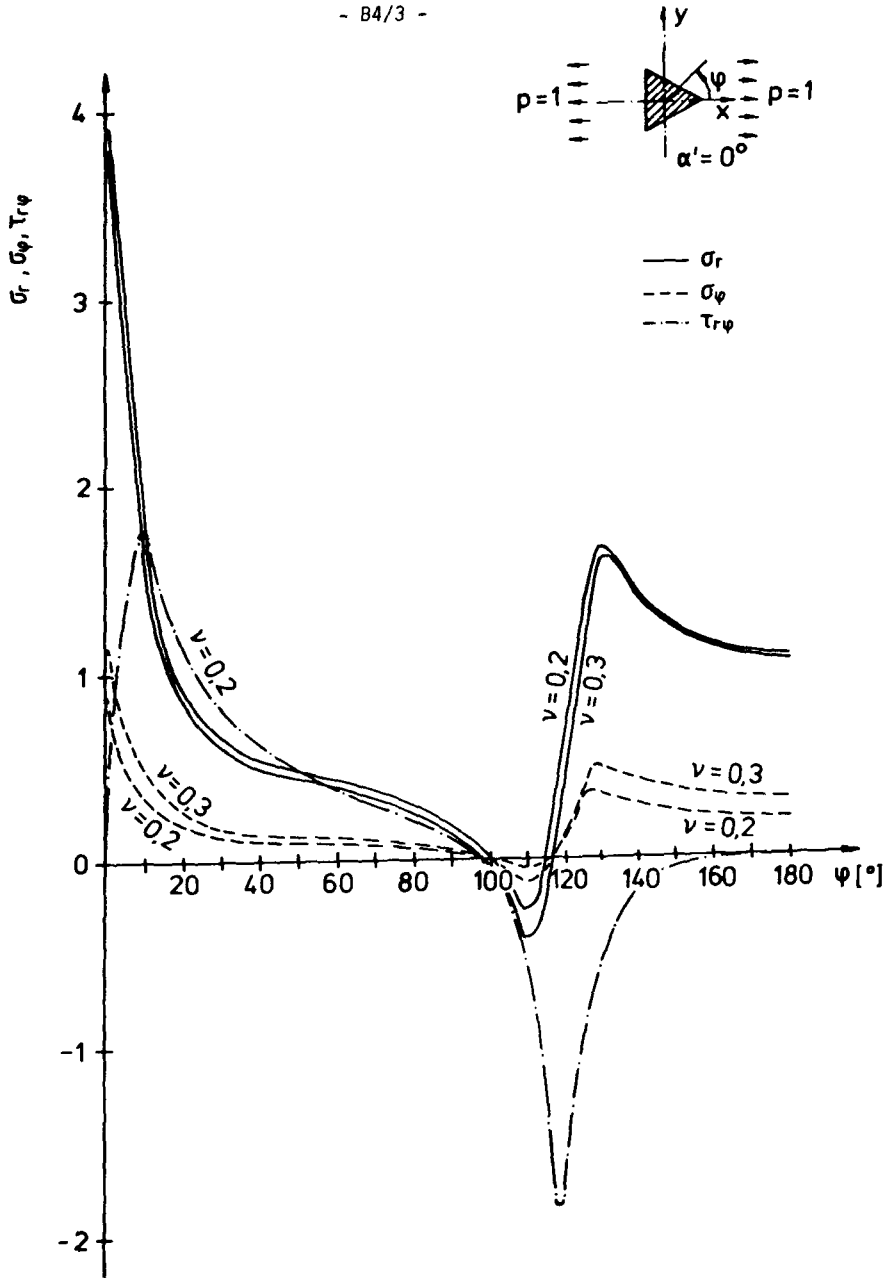


Abb. B 4.3: Radial-, Tangential- und Schubspannungen in Abhängigkeit von  $\psi$  bei starrem dreieckigen Einschluss und Belastung in x-Richtung

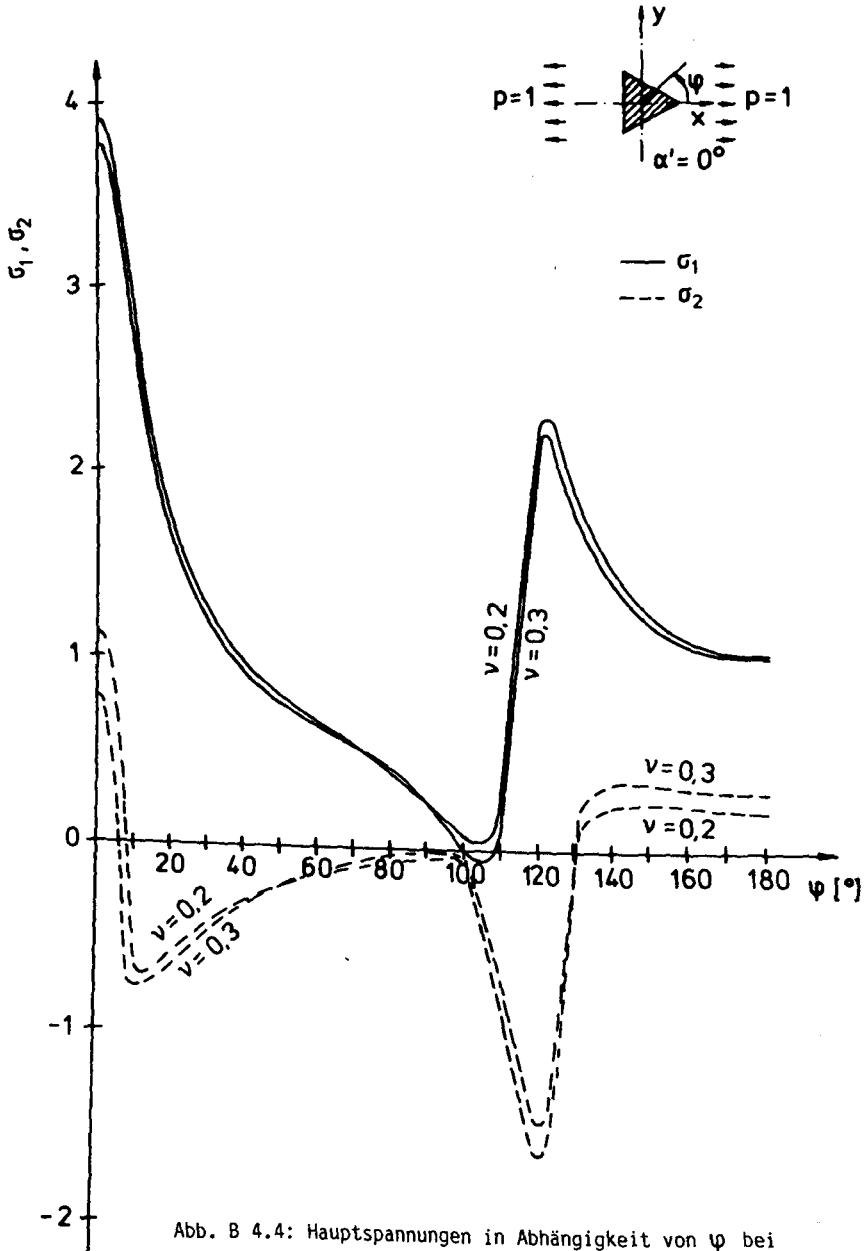
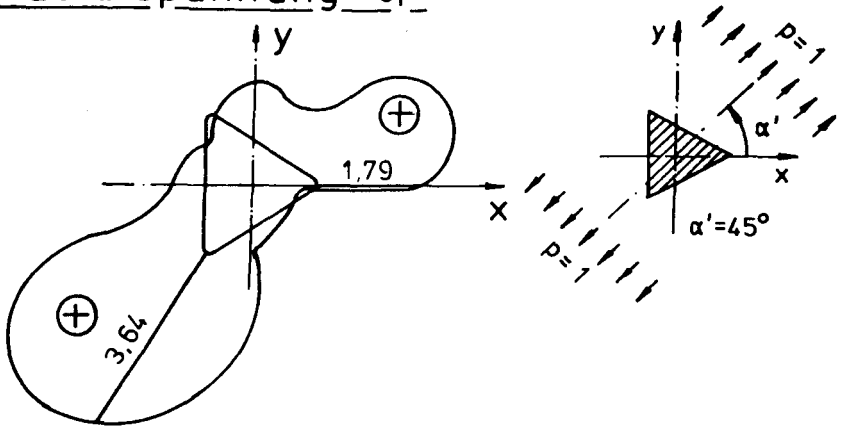


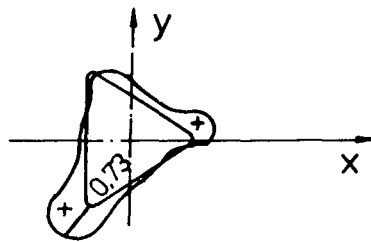
Abb. B 4.4: Hauptspannungen in Abhängigkeit von  $\varphi$  bei starrem dreieckigen Einschuß und Belastung in  $x$ -Richtung



a) Radialspannung  $\sigma_r$



b) Tangentialspannung  $\sigma_t$



c) Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$

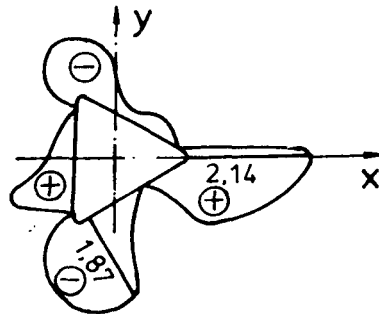
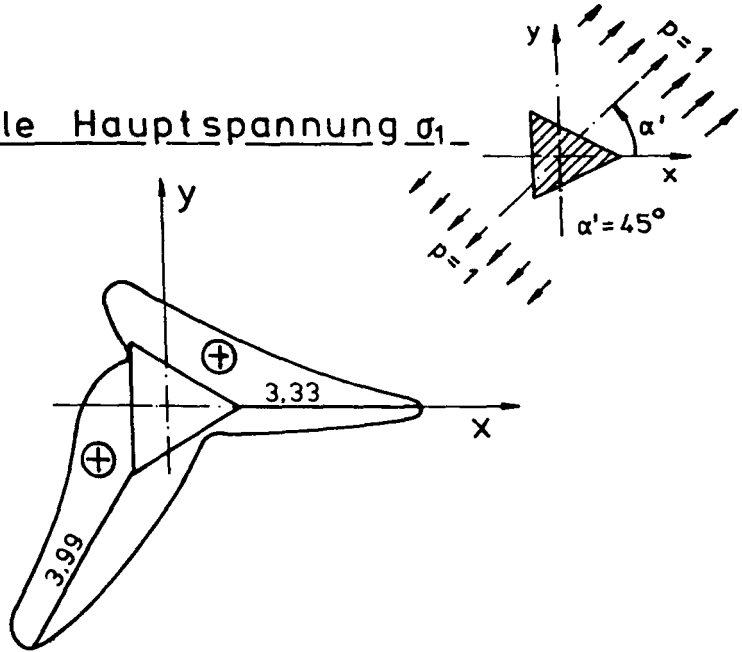


Abb. B 4.5: Radial-, Tangential- und Schubspannungen bei starrem dreieckigen Einschuß bei Belastung unter  $\alpha' = 45^\circ$  (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

a) Maximale Hauptspannung  $\sigma_1$



b) Minimale Hauptspannung  $\sigma_2$

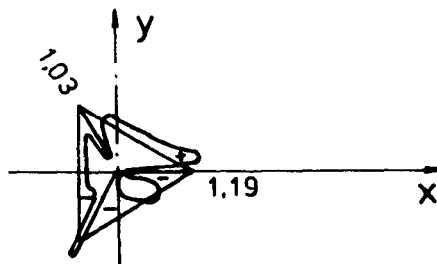


Abb. B 4.6: Maximale und minimale Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bei starrem dreieckigen Einschluss bei Belastung unter  $\alpha' = 45^\circ$  (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

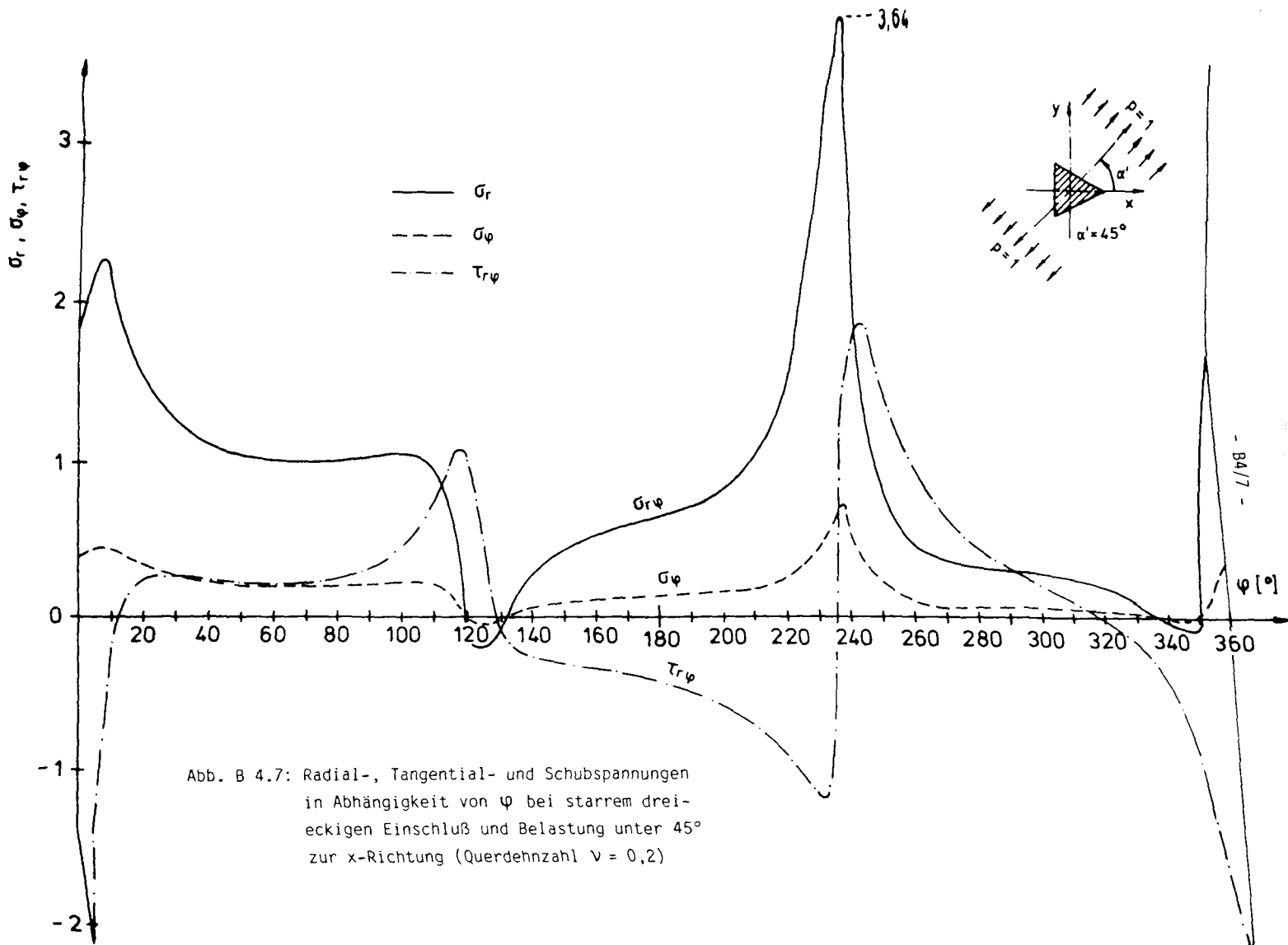
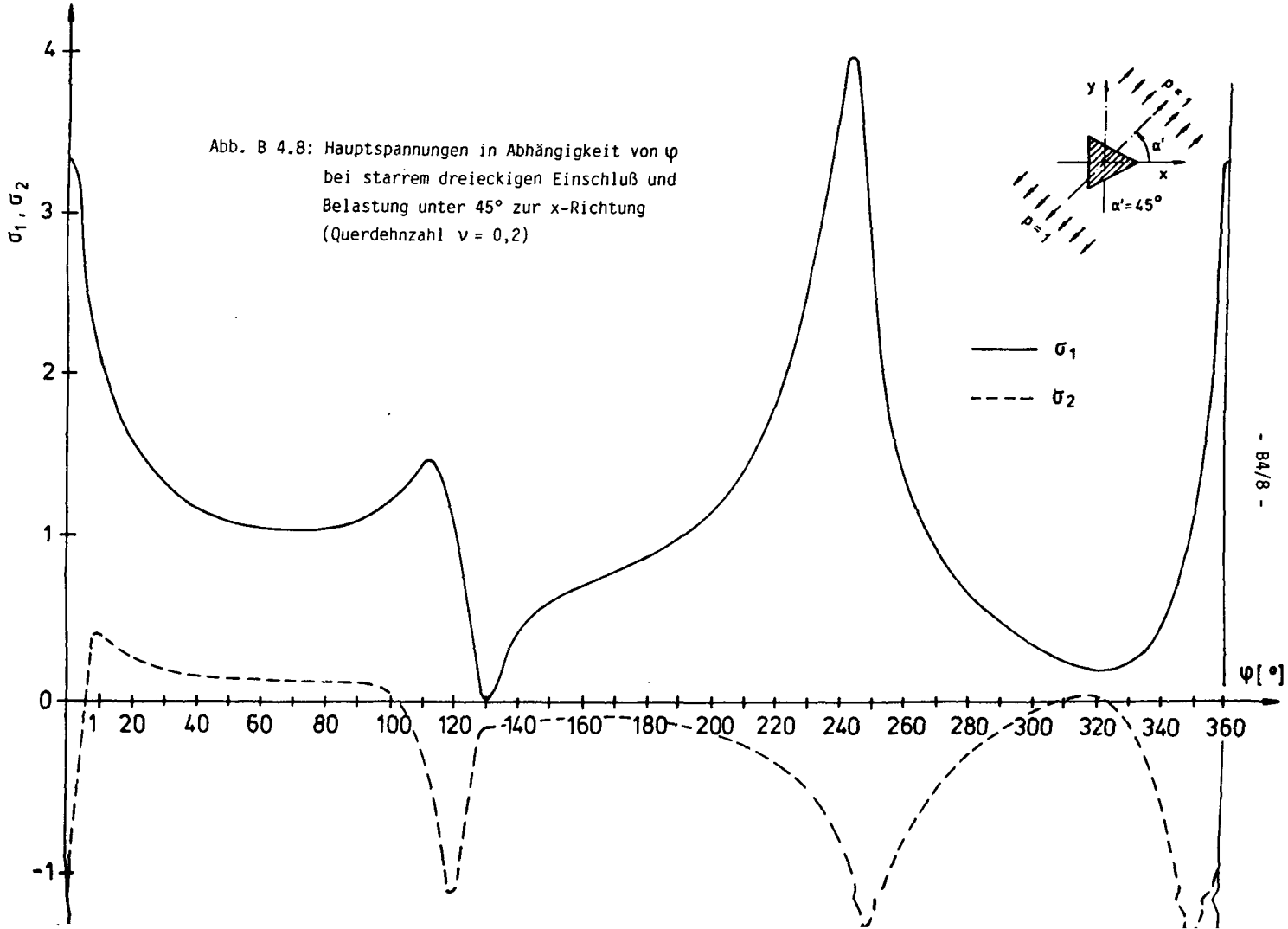
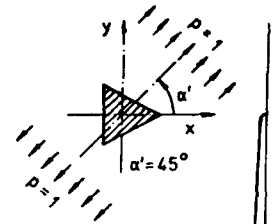


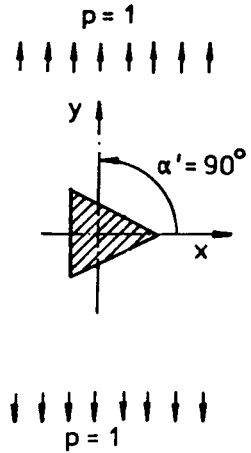
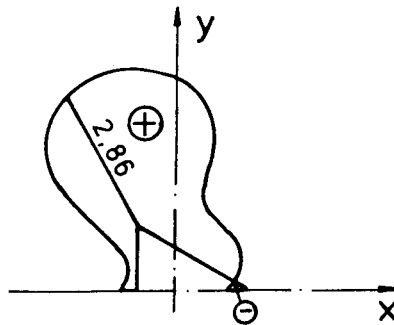
Abb. B 4.7: Radial-, Tangential- und Schubspannungen  
 in Abhängigkeit von  $\varphi$  bei starrem drei-  
 eckigen Einschluss und Belastung unter  $45^\circ$   
 zur x-Richtung (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

Abb. B 4.8: Hauptspannungen in Abhängigkeit von  $\varphi$   
 bei starrem dreieckigen Einschuß und  
 Belastung unter  $45^\circ$  zur x-Richtung  
 (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

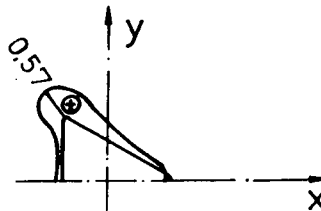


- B4/8 -

a) Radialspannung  $\sigma_r$



b) Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$



c) Schubspannungen  $\tau_{r\varphi}$

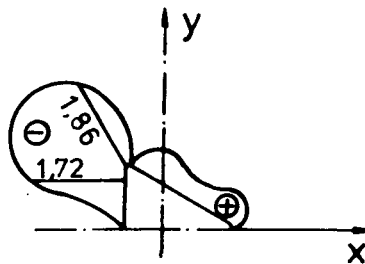
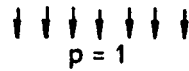
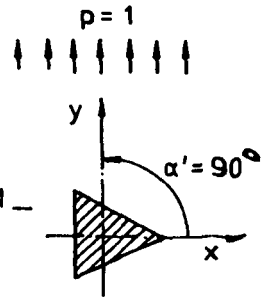
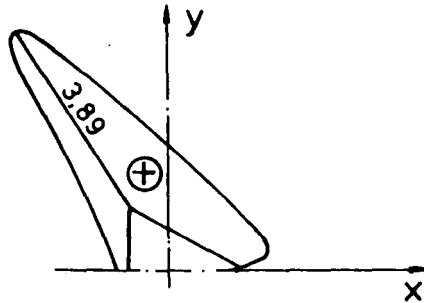


Abb. B 4.9: Radial-, Tangential- und Schubspannungen bei starrem dreieckigen Einschluss bei Belastung unter  $\alpha' = 90^\circ$  (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

a) Maximale Hauptspannung  $\sigma_1$



b) Minimale Hauptspannung  $\sigma_2$

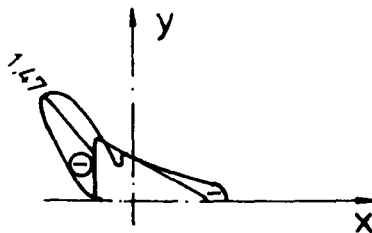


Abb. B 4.10: Maximale und minimale Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bei starrem dreieckigen Einschluß bei Belastung unter  $\alpha' = 90^\circ$  (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

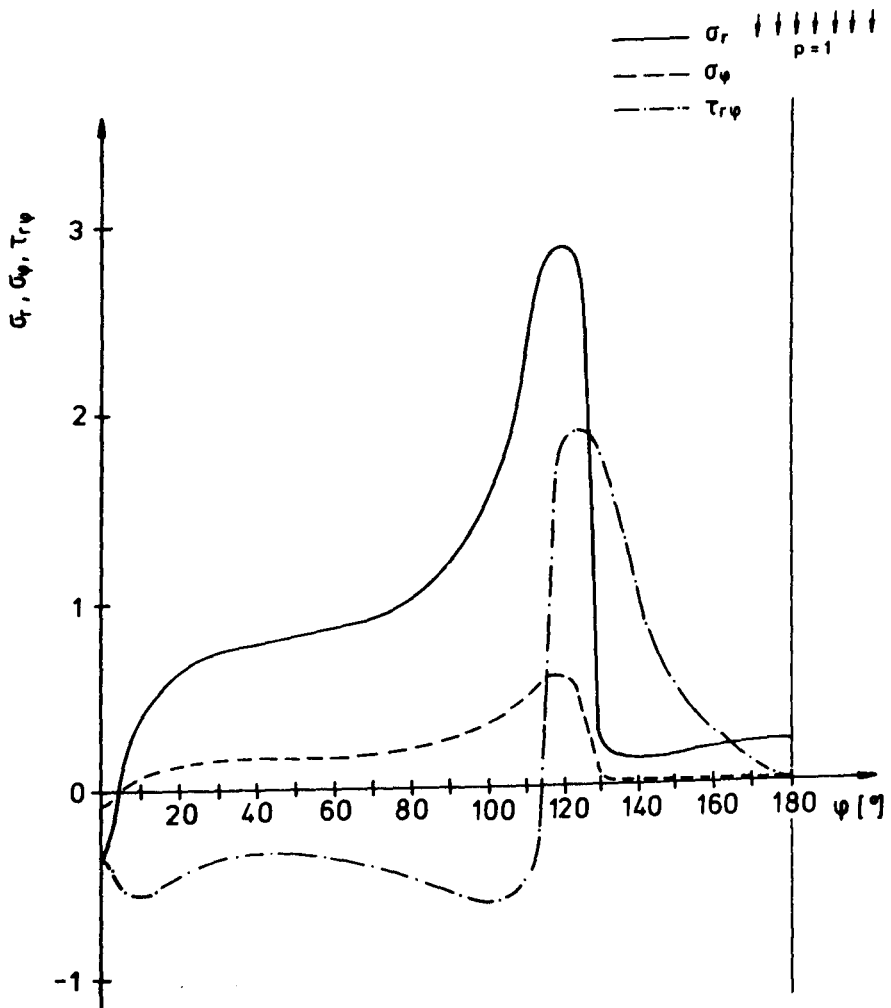
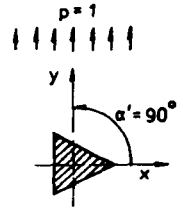


Abb. B 4.11: Radial-, Tangential- und Schubspannungen in Abhängigkeit von  $\varphi$  bei starrem dreieckigen Einschluss und Belastung unter  $90^\circ$  zur x-Richtung (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )

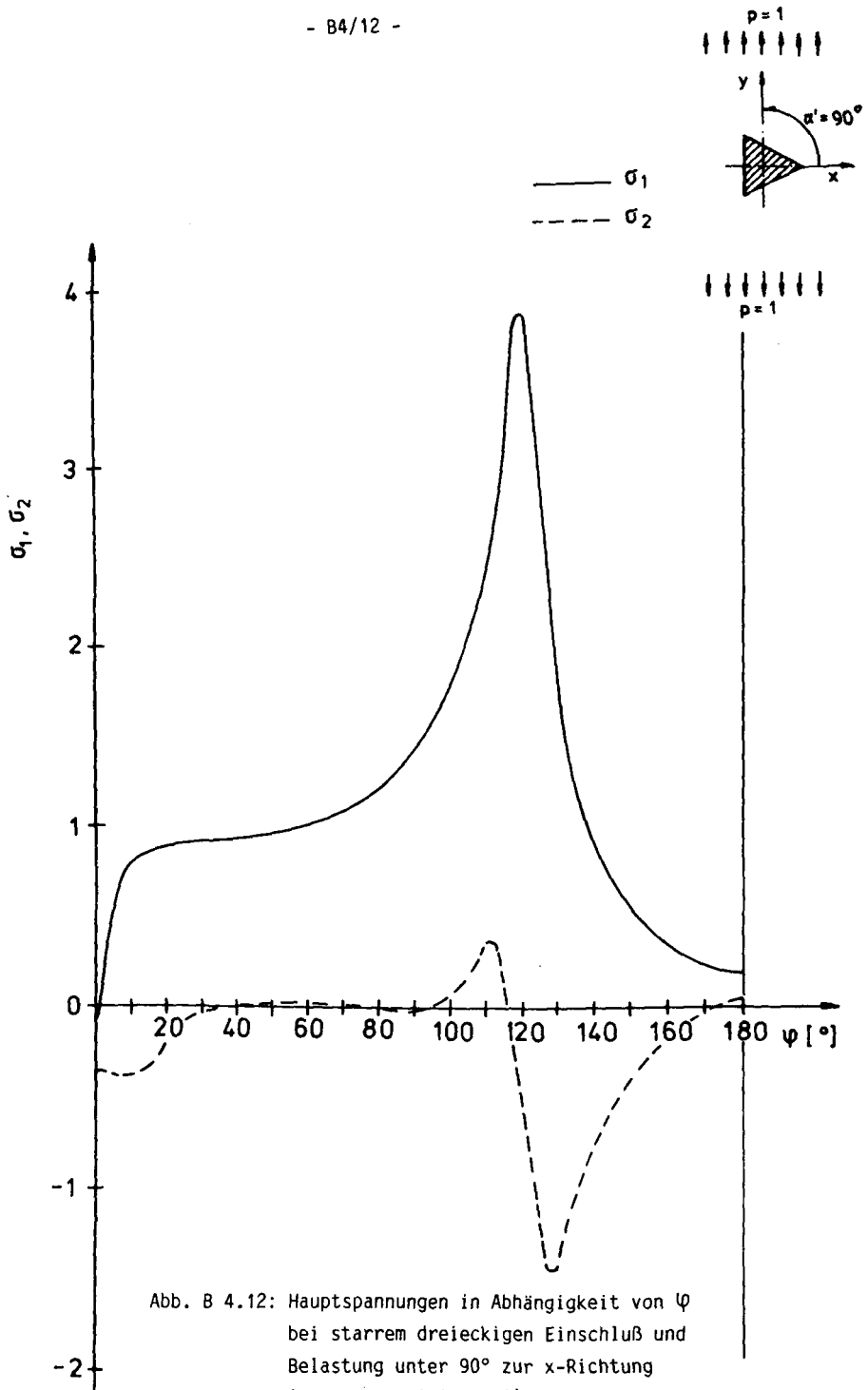


Abb. B 4.12: Hauptspannungen in Abhängigkeit von  $\psi$  bei starrem dreieckigen Einschluss und Belastung unter  $90^\circ$  zur x-Richtung (Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ )



Anhang B5 Tabellen und Diagramme zur Bestimmung der kritischen RiBlast

Volumenanteil $\chi_{GK}$	R [cm]	e [cm]	a [cm]	$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$	$\sigma_{\infty Ic}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	
					min $K_{Ic}$	max $K_{Ic}$
0.1	2.0	6.95	1.72	0.2616	1.15	1.92
	1.5	5.21	1.27	0.2238	1.34	2.23
	1.0	3.47	0.83	0.1801	1.67	2.78
	0.5	1.74	0.39	0.1216	2.47	4.12
	0.25	0.87	0.16	0.0753	3.98	6.63
0.2	2.0	5.51	1.72	0.2826	1.05	1.75
	1.5	4.13	1.27	0.2445	1.23	2.05
	1.0	2.76	0.83	0.1954	1.54	2.57
	0.5	1.38	0.39	0.1302	2.30	3.83
	0.25	0.69	0.16	0.0785	3.82	6.37
0.3	2.0	4.82	1.72	0.3160	0.95	1.58
	1.5	3.61	1.27	0.2681	1.12	1.87
	1.0	2.41	0.83	0.2129	1.41	2.35
	0.5	1.20	0.39	0.1399	2.14	3.56
	0.25	0.60	0.16	0.0816	3.68	6.13
0.4	2.0	4.38	1.72	0.3535	0.85	1.42
	1.5	3.28	1.27	0.2977	1.01	1.68
	1.0	2.19	0.83	0.2341	1.28	2.13
	0.5	1.09	0.39	0.1508	1.99	3.32
	0.25	0.55	0.16	0.0845	3.55	5.92
0.5	2.0	4.06	1.72	0.4074	0.74	1.23
	1.5	3.05	1.27	0.3368	0.89	1.48
	1.0	2.03	0.83	0.2626	1.14	1.90
	0.5	1.02	0.39	0.1623	1.85	3.08
	0.25	0.51	0.16	0.0877	3.42	5.70
0.6	2.0	3.82	1.72	0.4924	0.61	1.02
	1.5	2.87	1.27	0.3964	0.76	1.27
	1.0	1.91	0.83	0.3026	0.99	1.65
	0.5	0.96	0.39	0.1779	1.69	2.82
	0.25	0.48	0.16	0.0912	3.29	5.48
0.7	2.0	3.63	1.72	0.6637	0.45	0.75
	1.5	2.72	1.27	0.5106	0.59	0.98
	1.0	1.82	0.83	0.3619	0.83	1.38
	0.5	0.91	0.39	0.1997	1.50	2.50
	0.25	0.45	0.16	0.0961	3.12	5.20
0.8	2.0	3.47	1.72	1.5980	0.19	0.32
	1.5	2.60	1.27	0.8467	0.35	0.58
	1.0	1.74	0.83	0.4904	0.61	1.02
	0.5	0.87	0.39	0.2304	1.30	2.17
	0.25	0.43	0.16	0.1006	2.98	4.97

$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$  - und  $\sigma_{\infty Ic}$  - Werte für kreisförmige Einschlüsse und minimaler Bruchzähigkeit der Kontaktzone

Anhang B5  
Tabelle B 5.1

Volumenanteil $\chi_{GK}$	R [cm]	e [cm]	a [cm]	$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$	$\sigma_{\infty Ic}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	
					min $K_{Ic}$	max $K_{Ic}$
0.1	2.0	6.95	1.52	0.2388	1.26	2.09
	1.5	5.21	1.08	0.1993	1.51	2.51
	1.0	3.47	0.65	0.1522	1.97	3.29
	0.5	1.74	0.21	0.0833	3.60	6.00
	0.25	0.87	0.10	0.0573	5.23	8.72
0.2	2.0	5.51	1.52	0.2547	1.18	1.96
	1.5	4.13	1.08	0.2107	1.43	2.38
	1.0	2.76	0.65	0.1587	1.89	3.15
	0.5	1.38	0.21	0.0846	3.55	5.91
	0.25	0.69	0.10	0.0581	5.16	8.60
0.3	2.0	4.82	1.52	0.2712	1.11	1.85
	1.5	3.61	1.08	0.2223	1.35	2.24
	1.0	2.41	0.65	0.1652	1.82	3.03
	0.5	1.20	0.21	0.0858	3.50	5.83
	0.25	0.60	0.10	0.0589	5.10	8.50
0.4	2.0	4.38	1.52	0.2899	1.03	1.72
	1.5	3.28	1.08	0.2349	1.28	2.13
	1.0	2.19	0.65	0.1718	1.74	2.91
	0.5	1.09	0.21	0.0868	3.45	5.76
	0.25	0.55	0.10	0.0595	5.04	8.41
0.5	2.0	4.06	1.52	0.3122	0.96	1.60
	1.5	3.05	1.08	0.2486	1.21	2.01
	1.0	2.03	0.65	0.1790	1.68	2.80
	0.5	1.02	0.21	0.0878	3.42	5.69
	0.25	0.51	0.10	0.0601	5.00	8.33
0.6	2.0	3.82	1.52	0.3391	0.89	1.48
	1.5	2.87	1.08	0.2648	1.13	1.87
	1.0	1.91	0.65	0.1866	1.61	2.68
	0.5	0.96	0.21	0.0888	3.38	5.63
	0.25	0.48	0.10	0.0607	4.94	8.23
0.7	2.0	3.63	1.52	0.3729	0.80	1.34
	1.5	2.72	1.08	0.2849	1.05	1.76
	1.0	1.82	0.65	0.1944	1.54	2.57
	0.5	0.91	0.21	0.0898	3.34	5.57
	0.25	0.45	0.10	0.0614	4.88	8.13
0.8	2.0	3.47	1.52	0.4195	0.72	1.19
	1.5	2.60	1.08	0.3090	0.97	1.62
	1.0	1.74	0.65	0.2037	1.47	2.45
	0.5	0.87	0.21	0.0908	3.30	5.51
	0.25	0.43	0.10	0.0621	4.83	8.05

$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$  - und  $\sigma_{\infty Ic}$  - Werte für kreisförmige Einschlüsse und maximal. Bruchzähigkeit der Kontaktzone

Anhang B5  
Tabelle B 5.2

Volumenanteil $\chi_{GK}$	$b_{GK}$ [cm]	$a$ [cm]	$e$ [cm]	$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$	$\sigma_{\infty Ic}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	
					min $K_{Ic}$	max $K_{Ic}$
0.1	3.22	1.61	6.95	0.2488	1.21	2.01
	2.42	1.21	5.21	0.2158	1.39	2.32
	1.61	0.805	3.47	0.1760	1.70	2.84
	0.81	0.405	1.74	0.1249	2.40	4.00
	0.40	0.20	0.87	0.0857	3.43	5.71
0.2	3.22	1.61	5.51	0.2686	1.12	1.87
	2.42	1.21	4.13	0.2330	1.29	2.14
	1.61	0.805	2.76	0.1817	1.58	2.63
	0.81	0.405	1.38	0.1349	2.22	3.70
	0.40	0.20	0.69	0.0943	3.18	5.31
0.3	3.22	1.61	4.82	0.2897	1.03	1.72
	2.42	1.21	3.61	0.2517	1.19	1.99
	1.61	0.805	2.41	0.2048	1.46	2.44
	0.81	0.405	1.20	0.1464	2.05	3.42
	0.40	0.20	0.60	0.1019	2.94	4.91
0.4	3.22	1.61	4.38	0.3189	0.95	1.59
	2.42	1.21	3.28	0.2740	1.09	1.83
	1.61	0.805	2.19	0.2226	1.35	2.24
	0.81	0.405	1.09	0.1598	1.88	3.13
	0.40	0.20	0.55	0.1097	2.73	4.56
0.5	3.22	1.61	4.06	0.3471	0.86	1.44
	2.42	1.21	3.05	0.3011	1.00	1.66
	1.61	0.805	2.03	0.2455	1.22	3.02
	0.81	0.405	1.02	0.1744	1.72	2.87
	0.40	0.20	0.51	0.1203	2.49	4.15
0.6	3.22	1.61	3.82	0.3895	0.77	1.29
	2.42	1.21	2.87	0.3444	0.87	1.45
	1.61	0.805	1.91	0.2754	1.09	1.82
	0.81	0.405	0.96	0.1958	1.53	2.55
	0.40	0.20	0.48	0.1338	2.24	3.73
0.7	3.22	1.61	3.63	0.4499	0.67	1.11
	2.42	1.21	2.72	0.3942	0.76	1.27
	1.61	0.805	1.82	0.3151	0.95	1.58
	0.81	0.405	0.91	0.2285	1.31	2.18
	0.40	0.20	0.45	0.1598	1.88	3.13
0.8	3.22	1.61	3.47	0.5525	0.54	0.91
	2.42	1.21	2.60	0.4880	0.61	1.02
	1.61	0.805	1.74	0.3842	0.78	1.31
	0.81	0.405	0.87	0.2828	1.06	1.77
	0.40	0.20	0.43	0.1977	1.52	2.53

$\sigma_{\infty Ic}$  - Werte bei quadratischen Einschlüssen und Belastung unter  $\beta = 0^\circ$

Anhang B5  
Tabelle B 5.3

$\chi_{GK}$	$b_{GK}$ [cm]	$a$ [cm]	$\lambda$	$F_I$	$F_{II}$	$G_I$	$G_{II}$	$\frac{G}{K_I}$ $\sigma_{\infty}$	$\frac{G}{K_{II}}$ $\sigma_{\infty}$	$\frac{T}{K_I}$ $\sigma_{\infty}$	$\frac{T}{K_{II}}$ $\sigma_{\infty}$
0.1	3.22	1.61	0.2321	1.1327	-0.0047	-0.0047	1.0438	0.2377	-0.0010	-0.0003	0.0587
	2.42	1.21						0.2133	-0.0009	-0.0002	0.0509
	1.61	0.805						0.1681	-0.0007	-0.0002	0.0415
	0.81	0.405						0.1192	-0.0005	-0.0001	0.0294
	0.40	0.20						0.0838	-0.0003	-0.0001	0.0207
0.2	3.22	1.61	0.2924	1.2326	-0.0420	-0.0420	1.0690	0.2586	-0.0088	-0.0024	0.0601
	2.42	1.21						0.2321	-0.0079	-0.0020	0.0521
	1.61	0.805						0.1829	-0.0062	-0.0017	0.0425
	0.81	0.405						0.1297	-0.0044	-0.0012	0.0301
	0.40	0.20						0.0912	-0.0031	-0.0008	0.0212
0.3	3.22	1.61	0.3347	1.3290	-0.0930	-0.0930	1.0899	0.2789	-0.0195	-0.0052	0.0613
	2.42	1.21						0.2503	-0.0175	-0.0045	0.0531
	1.61	0.805						0.1972	-0.0138	-0.0037	0.0433
	0.81	0.405						0.1399	-0.0098	-0.0026	0.0307
	0.40	0.20						0.0983	-0.0069	-0.0018	0.0216
0.4	3.22	1.61	0.3684	1.4247	-0.1538	-0.1538	1.1083	0.2990	-0.0323	-0.0086	0.0623
	2.42	1.21						0.2683	-0.0290	-0.0075	0.0540
	1.61	0.805						0.2114	-0.0228	-0.0061	0.0441
	0.81	0.405						0.1499	-0.0162	-0.0043	0.0313
	0.40	0.20						0.1054	-0.0114	-0.0030	0.0220
0.5	3.22	1.61	0.3969	1.5208	-0.2224	-0.2224	1.1251	0.3192	-0.0467	-0.0125	0.0633
	2.42	1.21						0.2864	-0.0419	-0.0108	0.0548
	1.61	0.805						0.2256	-0.0330	-0.0088	0.0447
	0.81	0.405						0.1600	-0.0234	-0.0063	0.0317
	0.40	0.20						0.1125	-0.0164	-0.0044	0.0223
0.6	3.22	1.61	0.4217	1.6173	-0.2922	-0.2922	1.1406	0.3394	-0.0613	-0.0164	0.0641
	2.42	1.21						0.3046	-0.0550	-0.0142	0.0556
	1.61	0.805						0.2400	-0.0434	-0.0116	0.0453
	0.81	0.405						0.1702	-0.0508	-0.0082	0.0322
	0.40	0.20						0.1196	-0.0216	-0.0058	0.0226
0.7	3.22	1.61	0.4440	1.7152	-0.3781	-0.3781	1.1552	0.3599	-0.0793	-0.0213	0.0650
	2.42	1.21						0.3230	-0.0712	-0.0184	0.0563
	1.61	0.805						0.2545	-0.0561	-0.0150	0.0459
	0.81	0.405						0.1805	-0.0398	-0.0107	0.0326
	0.40	0.20						0.1269	-0.0280	-0.0075	0.0229
0.8	3.22	1.61	0.4642	1.8139	-0.4639	-0.4639	1.1689	0.3806	-0.0973	-0.0261	0.0657
	2.42	1.21						0.3416	-0.0873	-0.0226	0.0570
	1.61	0.805						0.2691	-0.0688	-0.0184	0.0465
	0.81	0.405						0.1909	-0.0488	-0.0131	0.0330
	0.40	0.20						0.1342	-0.0343	-0.0092	0.0232

Einzel-Spannungsintensitätsfaktoren bei quadratischen Einschlüssen und Belastung unter  $\beta = 15^\circ$

Anhang B5  
Tabelle B 5.4

$\chi_{GK}$	$b_{GK}$ [cm]	$a$ [cm]	$\frac{K_I}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$	$\sigma_{\infty Ic}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	
						min $K_{Ic}$	max $K_{Ic}$
0.1	3.22	1.61	0.2374	0.0577	0.2443	1.23	2.01
	2.42	1.21	0.2131	0.0500	0.2189	1.37	2.24
	1.61	0.805	0.1679	0.0408	0.1728	1.74	2.84
	0.81	0.405	0.1191	0.0289	0.1226	2.45	4.00
	0.40	0.20	0.0837	0.0204	0.0862	3.48	5.69
0.2	3.22	1.61	0.2562	0.0513	0.2570	1.17	1.91
	2.42	1.21	0.2301	0.0442	0.2343	1.28	2.09
	1.61	0.805	0.1812	0.0363	0.1848	1.62	2.65
	0.81	0.405	0.1285	0.0257	0.1310	2.29	3.74
	0.40	0.20	0.0904	0.0181	0.0922	3.25	5.31
0.3	3.22	1.61	0.2737	0.0418	0.2769	1.08	1.77
	2.42	1.21	0.2458	0.0356	0.2484	1.21	1.97
	1.61	0.805	0.1935	0.0295	0.1957	1.53	2.50
	0.81	0.405	0.1373	0.0209	0.1389	2.16	3.53
	0.40	0.20	0.0965	0.0147	0.0976	3.07	5.02
0.4	3.22	1.61	0.2904	0.0300	0.2919	1.03	1.68
	2.42	1.21	0.2608	0.0250	0.2620	1.15	1.87
	1.61	0.805	0.2053	0.0213	0.2064	1.45	2.37
	0.81	0.405	0.1456	0.0151	0.1464	2.05	3.35
	0.40	0.20	0.1024	0.0106	0.1029	2.91	4.76
0.5	3.22	1.61	0.3067	0.0166	0.3071	0.98	1.60
	2.42	1.21	0.2756	0.0129	0.2759	1.09	1.78
	1.61	0.805	0.2168	0.0117	0.2171	1.38	2.26
	0.81	0.405	0.1537	0.0083	0.1539	1.95	3.18
	0.40	0.20	0.1081	0.0059	0.1083	2.77	4.53
0.6	3.22	1.61	0.3230	0.0028	0.3230	0.93	1.52
	2.42	1.21	0.2904	0.0006	0.2904	1.03	1.69
	1.61	0.805	0.2284	-0.0019	0.2284	1.31	2.15
	0.81	0.405	0.1620	-0.0186	0.1631	1.84	3.00
	0.40	0.20	0.1138	0.0010	0.1138	2.64	4.31
0.7	3.22	1.61	0.3386	-0.0143	0.3389	0.89	1.45
	2.42	1.21	0.3046	-0.0149	0.3050	0.98	1.61
	1.61	0.805	0.2395	-0.0102	0.2397	1.25	2.04
	0.81	0.405	0.1698	-0.0072	0.1699	1.77	2.88
	0.40	0.20	0.1194	-0.0051	0.1195	2.51	4.10
0.8	3.22	1.61	0.3545	-0.0316	0.3559	0.84	1.38
	2.42	1.21	0.3190	-0.0303	0.3204	0.94	1.53
	1.61	0.805	0.2507	-0.0223	0.2517	1.19	1.95
	0.81	0.405	0.1778	-0.0158	0.1785	1.68	2.75
	0.40	0.20	0.1250	-0.0111	0.1255	2.39	3.90

$\sigma_{\infty Ic}$  - Werte bei quadratischen Einschlüssen und Belastung unter  $\beta = 15^\circ$

Anhang B5  
Tabelle B 5.5

$\chi_{GK}$	$b_{GK}$ [cm]	$a$ [cm]	$\lambda$	$F_I$	$F_{II}$	$G_I$	$G_{II}$	$\frac{K_I^\sigma}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_{II}^\sigma}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_I^\tau}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_{II}^\tau}{\sigma_\infty}$
0.1	3.22	1.61	0.2321	1.1541	-0.0122	-0.0122	0.947	0.1947	-0.0021	-0.0012	0.0922
	2.42	1.21						0.1688	-0.0018	-0.0010	0.0799
	1.61	0.805						0.1377	-0.0015	-0.0008	0.0652
	0.81	0.405						0.0976	-0.0010	-0.0006	0.0463
	0.40	0.20						0.0686	-0.0007	-0.0004	0.0325
0.2	3.22	1.61	0.2924	1.2644	-0.0308	-0.0308	0.908	0.2133	-0.0052	-0.0030	0.0884
	2.42	1.21						0.1849	-0.0045	-0.0026	0.0766
	1.61	0.805						0.1508	-0.0037	-0.0021	0.0625
	0.81	0.405						0.1070	-0.0026	-0.0015	0.0443
	0.40	0.20						0.0752	-0.0018	-0.0011	0.0312
0.3	3.22	1.61	0.3347	1.3681	-0.0529	-0.0529	0.871	0.2308	-0.0089	-0.0052	0.0848
	2.42	1.21						0.2000	-0.0077	-0.0045	0.0735
	1.61	0.805						0.1632	-0.0063	-0.0036	0.0600
	0.81	0.405						0.1157	-0.0045	-0.0026	0.0425
	0.40	0.20						0.0813	-0.0031	-0.0018	0.0299
0.4	3.22	1.61	0.3684	1.4694	-0.0777	-0.0777	0.834	0.2478	-0.0131	-0.0076	0.0812
	2.42	1.21						0.2149	-0.0114	-0.0066	0.0704
	1.61	0.805						0.1753	-0.0093	-0.0054	0.0574
	0.81	0.405						0.1243	-0.0066	-0.0038	0.0407
	0.40	0.20						0.0874	-0.0046	-0.0027	0.0286
0.5	3.22	1.61	0.3969	1.5700	-0.1047	-0.1047	0.797	0.2648	-0.0177	-0.0102	0.0776
	2.42	1.21						0.2296	-0.0153	-0.0088	0.0673
	1.61	0.805						0.1873	-0.0125	-0.0072	0.0549
	0.81	0.405						0.1328	-0.0089	-0.0051	0.0389
	0.40	0.20						0.0933	-0.0062	-0.0036	0.0274
0.6	3.22	1.61	0.4217	1.6698	-0.1334	-0.1334	0.760	0.2817	-0.0225	-0.0130	0.0740
	2.42	1.21						0.2442	-0.0195	-0.0113	0.0642
	1.61	0.805						0.1992	-0.0159	-0.0092	0.0523
	0.81	0.405						0.1413	-0.0113	-0.0065	0.0371
	0.40	0.20						0.0993	-0.0079	-0.0046	0.0248
0.7	3.22	1.61	0.4440	1.7703	-0.1639	-0.1639	0.722	0.2986	-0.0276	-0.0160	0.0703
	2.42	1.21						0.2589	-0.0240	-0.0138	0.0610
	1.61	0.805						0.2111	-0.0195	-0.0113	0.0497
	0.81	0.405						0.1498	-0.0139	-0.0080	0.0353
	0.40	0.20						0.1052	-0.0097	-0.0056	0.0248
0.8	3.22	1.61	0.4642	1.8709	-0.1958	-0.1958	0.685	0.3156	-0.0330	-0.0191	0.0667
	2.42	1.21						0.2736	-0.0286	-0.0165	0.0578
	1.61	0.805						0.2231	-0.0234	-0.0135	0.0472
	0.81	0.405						0.1583	-0.0166	-0.0096	0.0335
	0.40	0.20						0.1112	-0.0116	-0.0067	0.0235

Einzel-Spannungsintensitätsfaktoren bei quadratischen Einschlüssen und Belastung unter  $\beta = 30^\circ$

Anhang B5  
Tabelle B 5.6

$\kappa_{GK}$	$b_{GK}$ [cm]	$a$ [cm]	$\frac{K_I}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$	$\sigma_{\infty Ic}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	
						min $K_{Ic}$	max $K_{Ic}$
0.1	3.22	1.61	0.1926	0.0910	0.2130	1.41	2.30
	2.42	1.21	0.1670	0.0789	0.1847	1.62	2.66
	1.61	0.805	0.1362	0.0644	0.1507	1.99	3.25
	0.81	0.405	0.0966	0.0457	0.1069	2.81	4.59
	0.40	0.20	0.0679	0.0321	0.0751	3.99	6.52
0.2	3.22	1.61	0.2081	0.0854	0.2249	1.33	2.18
	2.42	1.21	0.1804	0.0740	0.1950	1.54	2.51
	1.61	0.805	0.1471	0.0604	0.1590	1.89	3.08
	0.81	0.405	0.1044	0.0428	0.1128	2.66	4.34
	0.40	0.20	0.0734	0.0301	0.0793	3.78	6.18
0.3	3.22	1.61	0.2219	0.0796	0.2357	1.27	2.08
	2.42	1.21	0.1923	0.0690	0.2043	1.47	2.40
	1.61	0.805	0.1569	0.0564	0.1667	1.80	2.94
	0.81	0.405	0.1112	0.0399	0.1181	2.54	4.15
	0.40	0.20	0.0782	0.0281	0.0831	3.61	5.90
0.4	3.22	1.61	0.2347	0.0736	0.2460	1.22	1.99
	2.42	1.21	0.2035	0.0638	0.2133	1.41	2.30
	1.61	0.805	0.1660	0.0520	0.1740	1.72	2.82
	0.81	0.405	0.1177	0.0369	0.1233	2.43	3.97
	0.40	0.20	0.0828	0.0261	0.0868	3.46	5.64
0.5	3.22	1.61	0.2471	0.0674	0.2561	1.17	1.91
	2.42	1.21	0.2143	0.0585	0.2221	1.35	2.20
	1.61	0.805	0.1748	0.0477	0.1812	1.66	2.70
	0.81	0.405	0.1239	0.0338	0.1284	2.36	3.82
	0.40	0.20	0.0871	0.0238	0.0903	3.32	5.43
0.6	3.22	1.61	0.2592	0.0610	0.2663	1.13	1.84
	2.42	1.21	0.2247	0.0529	0.2308	1.30	2.12
	1.61	0.805	0.1833	0.0431	0.1883	1.59	2.60
	0.81	0.405	0.1300	0.0306	0.1336	2.25	3.67
	0.40	0.20	0.0914	0.0202	0.0936	3.20	5.23
0.7	3.22	1.61	0.2710	0.0543	0.2764	1.09	1.77
	2.42	1.21	0.2349	0.0472	0.2396	1.25	2.05
	1.61	0.805	0.1916	0.0384	0.1954	1.54	2.51
	0.81	0.405	0.1359	0.0273	0.1386	2.16	3.53
	0.40	0.20	0.0955	0.0192	0.0974	3.08	5.03
0.8	3.22	1.61	0.2826	0.0476	0.2876	1.04	1.70
	2.42	1.21	0.2450	0.0413	0.2485	1.21	1.97
	1.61	0.805	0.1997	0.0337	0.2025	1.48	2.42
	0.81	0.405	0.1417	0.0239	0.1437	2.09	3.41
	0.40	0.20	0.0996	0.0168	0.1010	2.97	4.85

$\sigma_{\infty Ic}$  - Werte bei quadratischen Einschlüssen und Belastung unter  $\beta = 30^\circ$

Anhang B5  
Tabelle B 5.7

$\chi_{GK}$	$b_{GK}$ [cm]	$a$ [cm]	$\lambda$	$F_I$	$F_{II}$	$G_I$	$G_{II}$	$\frac{K_I^\sigma}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_{II}^\sigma}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_I^\tau}{\sigma_\infty}$	$\frac{K_{II}^\tau}{\sigma_\infty}$
0.1	3.22	1.61	0.2321	1.0830	-0.0590	-0.0590	0.934	0.2436	-0.0133	-0.0133	0.2100
	2.42	1.21						0.2112	-0.0115	-0.0115	0.1821
	1.61	0.805						0.1722	-0.0094	-0.0094	0.1485
	0.81	0.405						0.1222	-0.0067	-0.0067	0.1054
	0.40	0.20						0.0858	-0.0047	-0.0047	0.0740
0.2	3.22	1.61	0.2924	1.1270	-0.0650	-0.0650	0.917	0.2535	-0.0146	-0.0146	0.2060
	2.42	1.21						0.2197	-0.0127	-0.0127	0.1788
	1.61	0.805						0.1792	-0.0103	-0.0103	0.1458
	0.81	0.405						0.1271	-0.0073	-0.0073	0.1034
	0.40	0.20						0.0893	-0.0052	-0.0052	0.0727
0.3	3.22	1.61	0.3347	1.1610	-0.0550	-0.0550	0.914	0.2611	-0.0123	-0.0123	0.2060
	2.42	1.21						0.2264	-0.0107	-0.0107	0.1782
	1.61	0.805						0.1846	-0.0087	-0.0087	0.1454
	0.81	0.405						0.1310	-0.0062	-0.0062	0.1031
	0.40	0.20						0.0920	-0.0044	-0.0044	0.0724
0.4	3.22	1.61	0.3684	1.1880	-0.0340	-0.0340	0.921	0.2672	-0.0076	-0.0076	0.2070
	2.42	1.21						0.2316	-0.0066	-0.0066	0.1796
	1.61	0.805						0.1889	-0.0054	-0.0054	0.1465
	0.81	0.405						0.1340	-0.0038	-0.0038	0.1039
	0.40	0.20						0.0942	-0.0027	-0.0027	0.0730
0.5	3.22	1.61	0.3969	1.2121	-0.0040	-0.0040	0.936	0.2726	-0.0009	-0.0009	0.2105
	2.42	1.21						0.2363	-0.0008	-0.0008	0.1825
	1.61	0.805						0.1928	-0.0006	-0.0006	0.1488
	0.81	0.405						0.1367	-0.0005	-0.0005	0.1056
	0.40	0.20						0.0961	-0.0003	-0.0003	0.0742
0.6	3.22	1.61	0.4217	1.2326	0.0330	0.0330	0.956	0.2772	0.0074	0.0074	0.2150
	2.42	1.21						0.2403	0.0064	0.0064	0.1864
	1.61	0.805						0.1960	0.0052	0.0052	0.1520
	0.81	0.405						0.1390	0.0037	0.0037	0.1078
	0.40	0.20						0.0977	0.0026	0.0026	0.0758
0.7	3.22	1.61	0.4440	1.2507	0.0753	0.0753	0.981	0.2813	0.0169	0.0169	0.2206
	2.42	1.21						0.2438	0.0147	0.0147	0.1913
	1.61	0.805						0.1989	0.0120	0.0120	0.1560
	0.81	0.405						0.1411	0.0085	0.0085	0.1107
	0.40	0.20						0.0991	0.0060	0.0060	0.0778
0.8	3.22	1.61	0.4642	1.2665	0.1230	0.1230	1.010	0.2848	0.0277	0.0277	0.2271
	2.42	1.21						0.2469	0.0240	0.0240	0.1969
	1.61	0.805						0.2014	0.0196	0.0196	0.1606
	0.81	0.405						0.1429	0.0139	0.0139	0.1139
	0.40	0.20						0.1004	0.0097	0.0097	0.0801

Einzel-Spannungsintensitätsfaktoren bei quadratischen Einschlüssen und Belastung unter  $\beta = 45^\circ$

Anhang B5  
Tabelle B 5.8



$\chi_{GK}$	$b_{GK}$ [cm]	$a$ [cm]	$\frac{K_I}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{K}{\sigma_{\infty}}$	$\sigma_{\infty K_{Ic}}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	
						min $K_{Ic}$	max $K_{Ic}$
0.1	3.22	1.61	0.1152	0.0984	0.1515	1.98	3.23
	2.42	1.21	0.0999	0.0853	0.1314	2.28	3.73
	1.61	0.805	0.0814	0.0696	0.1071	2.80	4.58
	0.81	0.405	0.0579	0.0494	0.0761	3.94	6.44
	0.40	0.20	0.0406	0.0347	0.0534	5.62	9.17
0.2	3.22	1.61	0.1195	0.0957	0.1531	1.96	3.20
	2.42	1.21	0.1035	0.0831	0.1327	2.26	3.69
	1.61	0.805	0.0845	0.0678	0.1083	2.77	4.52
	0.81	0.405	0.0599	0.0481	0.0768	3.91	6.38
	0.40	0.20	0.0421	0.0338	0.0539	5.56	9.08
0.3	3.22	1.61	0.1244	0.0969	0.1577	1.90	3.11
	2.42	1.21	0.1079	0.0838	0.1366	2.20	3.59
	1.61	0.805	0.0880	0.0684	0.1115	2.69	4.40
	0.81	0.405	0.0624	0.0485	0.0790	3.80	6.20
	0.40	0.20	0.0438	0.0340	0.0554	5.41	8.84
0.4	3.22	1.61	0.1298	0.0997	0.1637	1.83	2.99
	2.42	1.21	0.1125	0.0865	0.1419	2.11	3.45
	1.61	0.805	0.0918	0.0706	0.1158	2.59	4.23
	0.81	0.405	0.0651	0.0501	0.0821	3.65	5.96
	0.40	0.20	0.0458	0.0351	0.0577	5.20	8.49
0.5	3.22	1.61	0.1359	0.1048	0.1716	1.75	2.86
	2.42	1.21	0.1178	0.0909	0.1488	2.02	3.29
	1.61	0.805	0.0961	0.0741	0.1214	2.47	4.04
	0.81	0.405	0.0681	0.0526	0.0860	3.49	5.70
	0.40	0.20	0.0479	0.0370	0.0605	4.96	8.10
0.6	3.22	1.61	0.1423	0.1112	0.1806	1.66	2.71
	2.42	1.21	0.1234	0.0964	0.1566	1.92	3.13
	1.61	0.805	0.1006	0.0786	0.1277	2.35	3.84
	0.81	0.405	0.0714	0.0521	0.0884	3.39	5.54
	0.40	0.20	0.0502	0.0392	0.0637	4.71	7.69
0.7	3.22	1.61	0.1491	0.1188	0.1906	1.57	2.57
	2.42	1.21	0.1293	0.1030	0.1653	1.81	2.96
	1.61	0.805	0.1055	0.0840	0.1349	2.22	3.63
	0.81	0.405	0.0748	0.0596	0.0956	3.17	5.12
	0.40	0.20	0.0526	0.0419	0.0672	4.46	7.29
0.8	3.22	1.61	0.1563	0.1274	0.2016	1.49	2.43
	2.42	1.21	0.1355	0.1105	0.1748	1.72	2.80
	1.61	0.805	0.1105	0.0901	0.1426	2.10	3.44
	0.81	0.405	0.0784	0.0639	0.1011	2.97	4.85
	0.40	0.20	0.0551	0.0449	0.0711	4.22	6.89

$\sigma_{\infty K_{Ic}}$  - Werte bei quadratischen Einschlüssen und Belastung unter  $\beta = 45^\circ$

Anhang B5  
Tabelle B 5.9

$\min K_{IC} = 0,3 \text{ MN/m}^{1,5}$		Quadratischer Einschluß				
		$b_{GK}$	0,4	0,81	1,61	2,42
$K_{GK}$	0,1	4,00	2,78	1,97	1,59	1,40
	0,2	3,74	2,65	1,87	1,51	1,32
	0,3	3,56	2,51	1,78	1,44	1,25
	0,4	3,42	2,38	1,69	1,37	1,20
	0,5	3,22	2,27	1,61	1,30	1,13
	0,6	3,06	2,14	1,51	1,23	1,08
	0,7	2,87	2,04	1,44	1,16	1,02
	0,8	2,71	1,92	1,36	1,10	0,96

Tabelle B 5.10:  $\sigma_{\infty, IC}$  in Abhängigkeit vom Volumen-  
anteil  $K_{GK}$  und von der Kantenlänge  
 $b_{GK}$  des Einschusses

max $K_{IC} = 0,5 \text{ MN/m}^{1,5}$ Quadratischer Einschuß					
$\frac{b_{GK}}{x_{GK}}$	0,4	0,81	1,61	2,42	3,22
0,1	6,66	4,63	3,28	2,65	2,33
0,2	6,23	4,38	3,12	2,56	2,20
0,3	5,93	4,18	2,97	2,40	2,08
0,4	5,70	3,97	2,82	2,28	2,00
0,5	5,37	3,78	2,68	2,17	1,88
0,6	5,10	3,57	2,52	2,05	1,80
0,7	4,78	3,40	2,40	1,93	1,70
0,8	4,52	3,20	2,27	1,83	1,60

Tabelle B 5.11:  $\sigma_{\infty IC}$  in Abhängigkeit vom Volumenanteil  $x_{GK}$  und von der Kantenlänge  $b_{GK}$  des Einschlusses

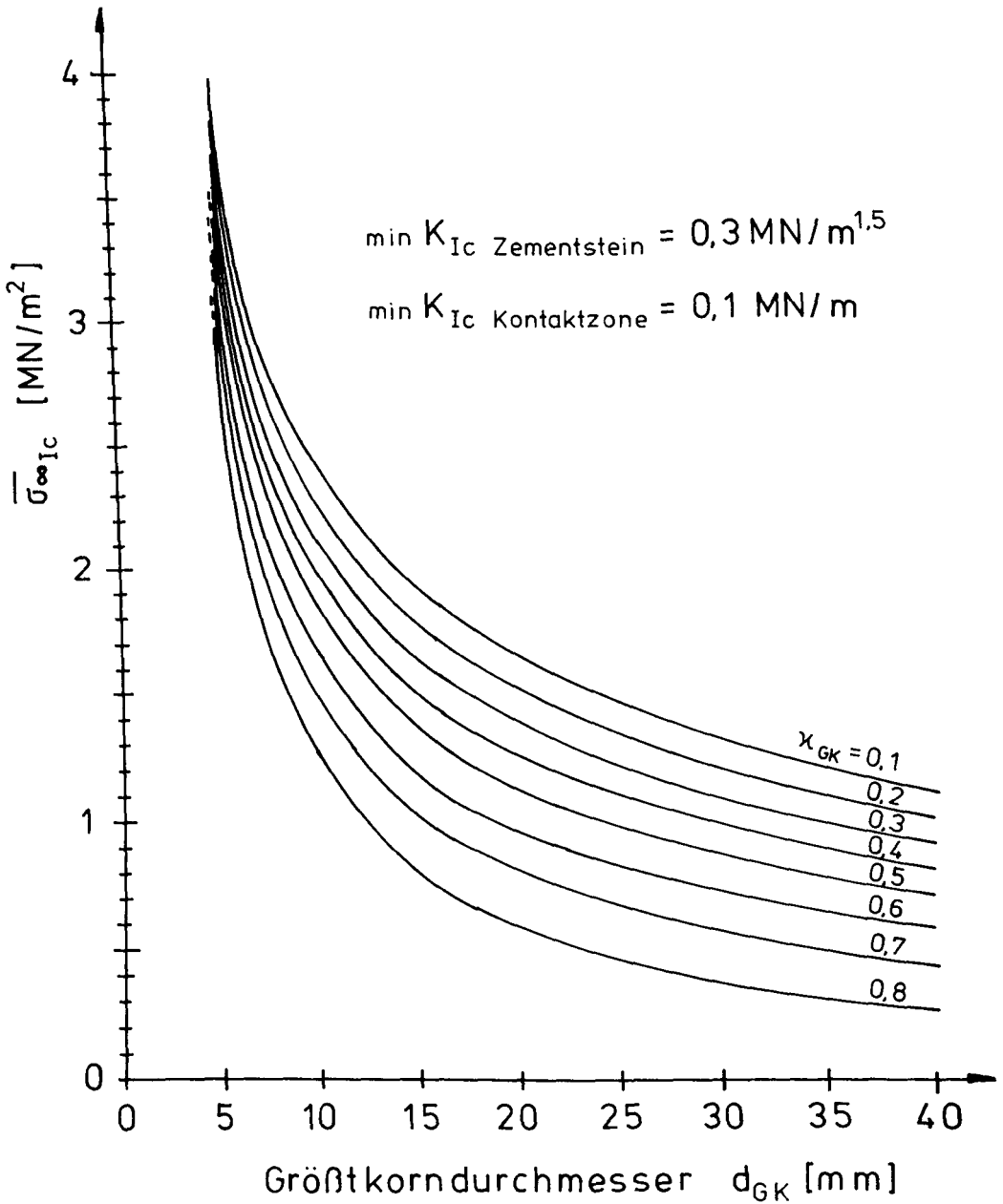


Abb. B 5.1:  $\bar{\sigma}_{\infty Ic}$  in Abhängigkeit vom Volumenanteil

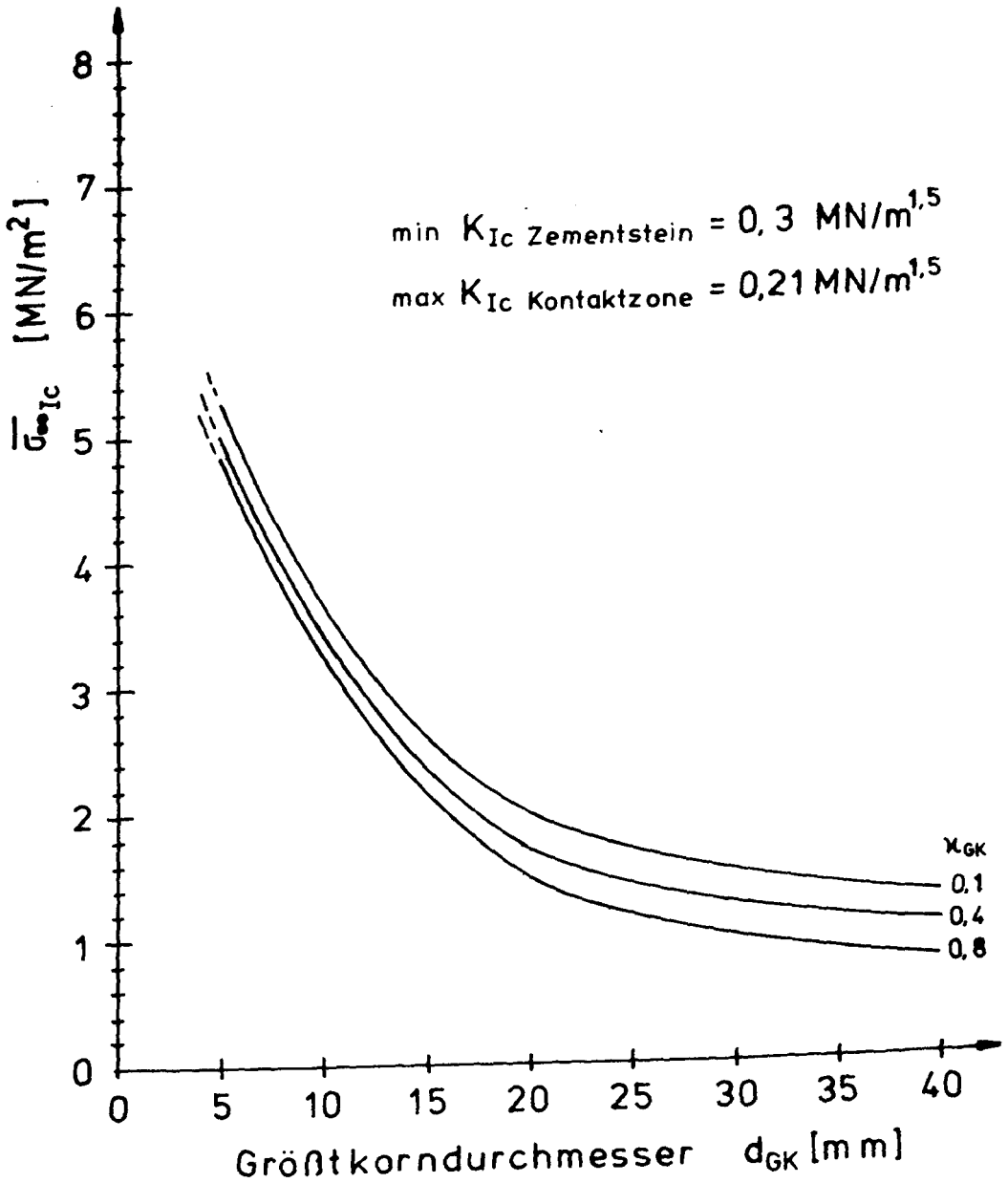


Abb. B 5.2 :  $\bar{\sigma}_{\infty Ic}$  in Abhängigkeit vom Volumenanteil

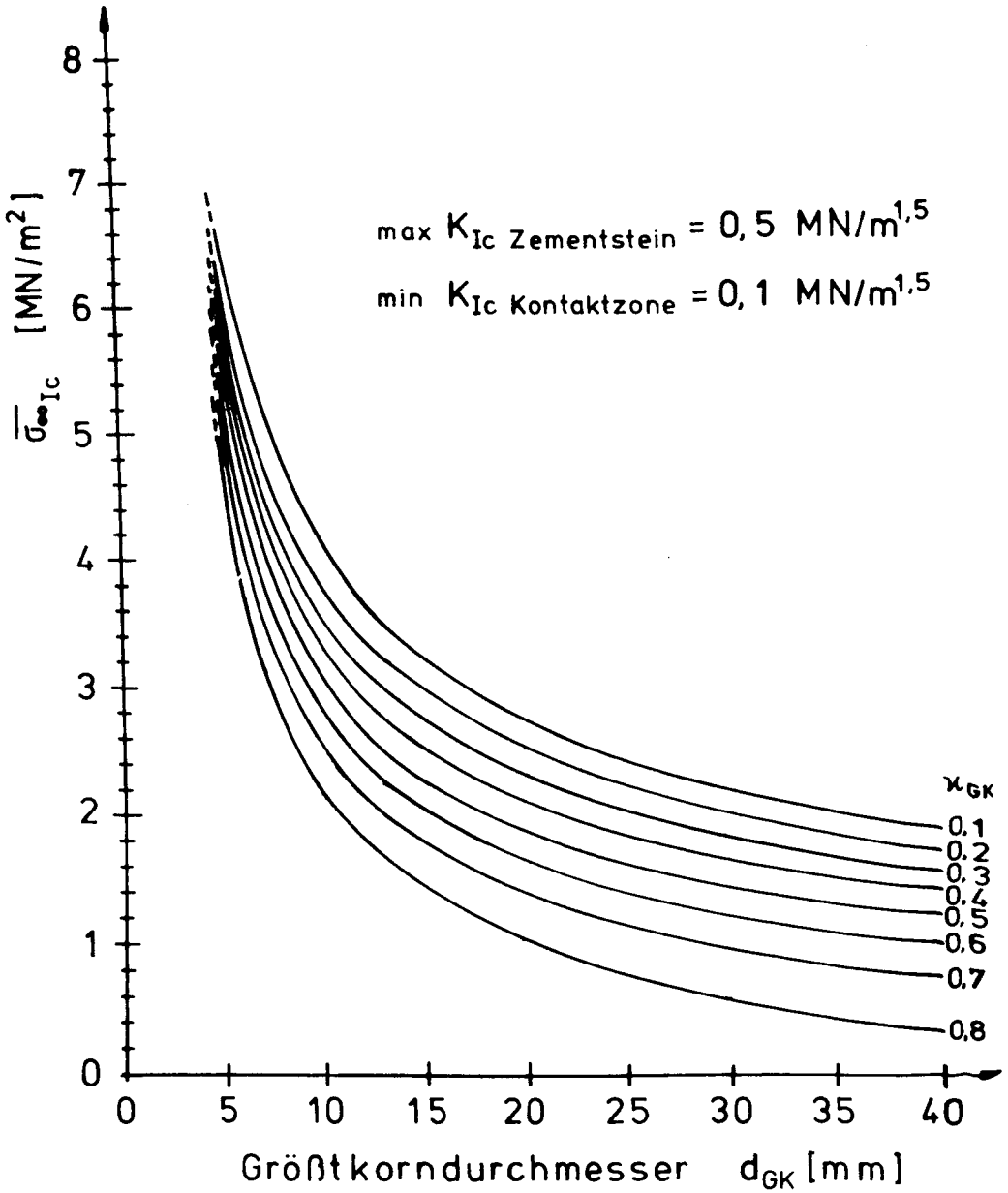


Abb. B 5.3 :  $\bar{\sigma}_{\infty I_c}$  in Abhängigkeit vom Volumenanteil

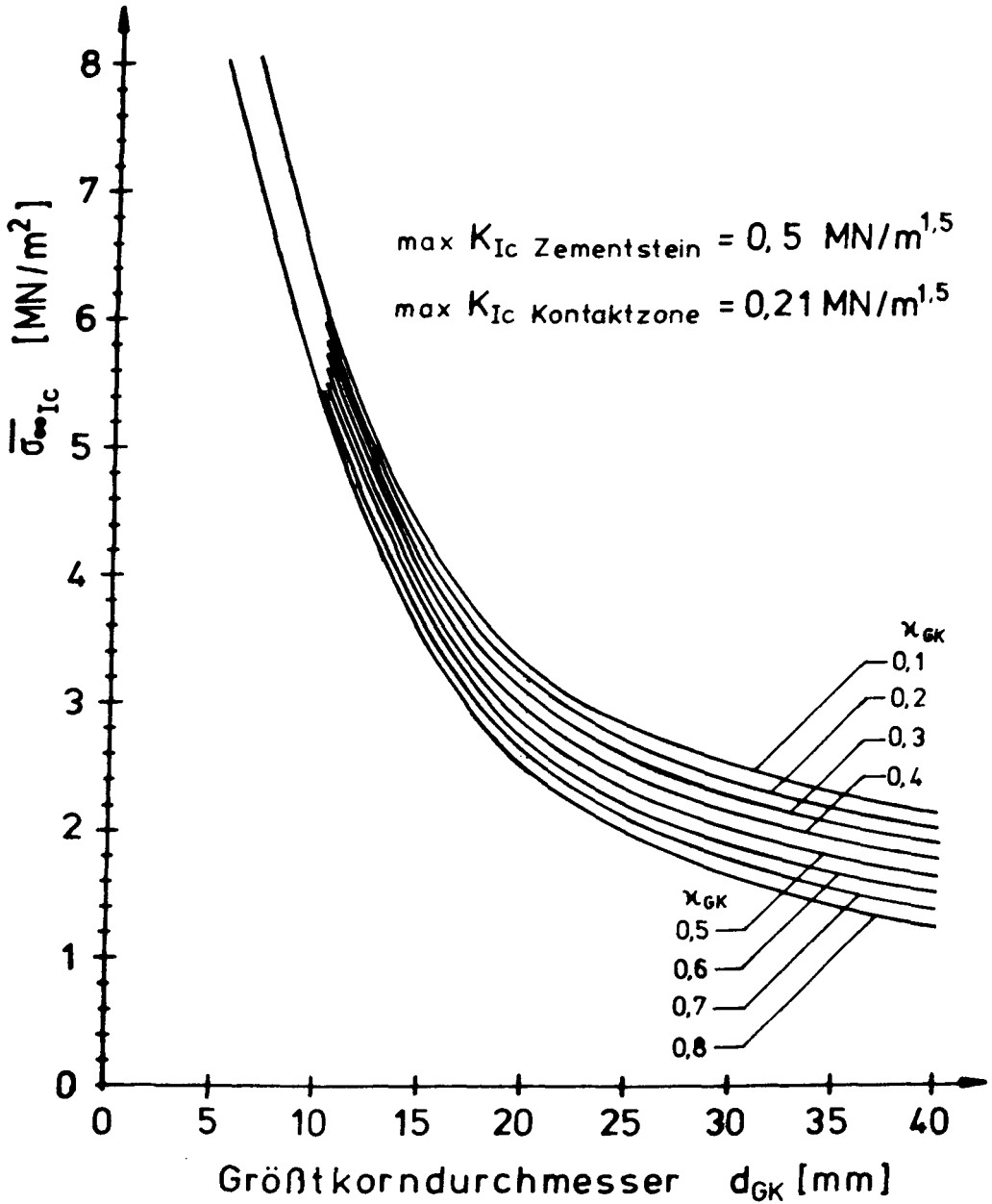


Abb. B 5.4 :  $\sigma_{0, Ic}$  in Abhängigkeit vom Volumenanteil

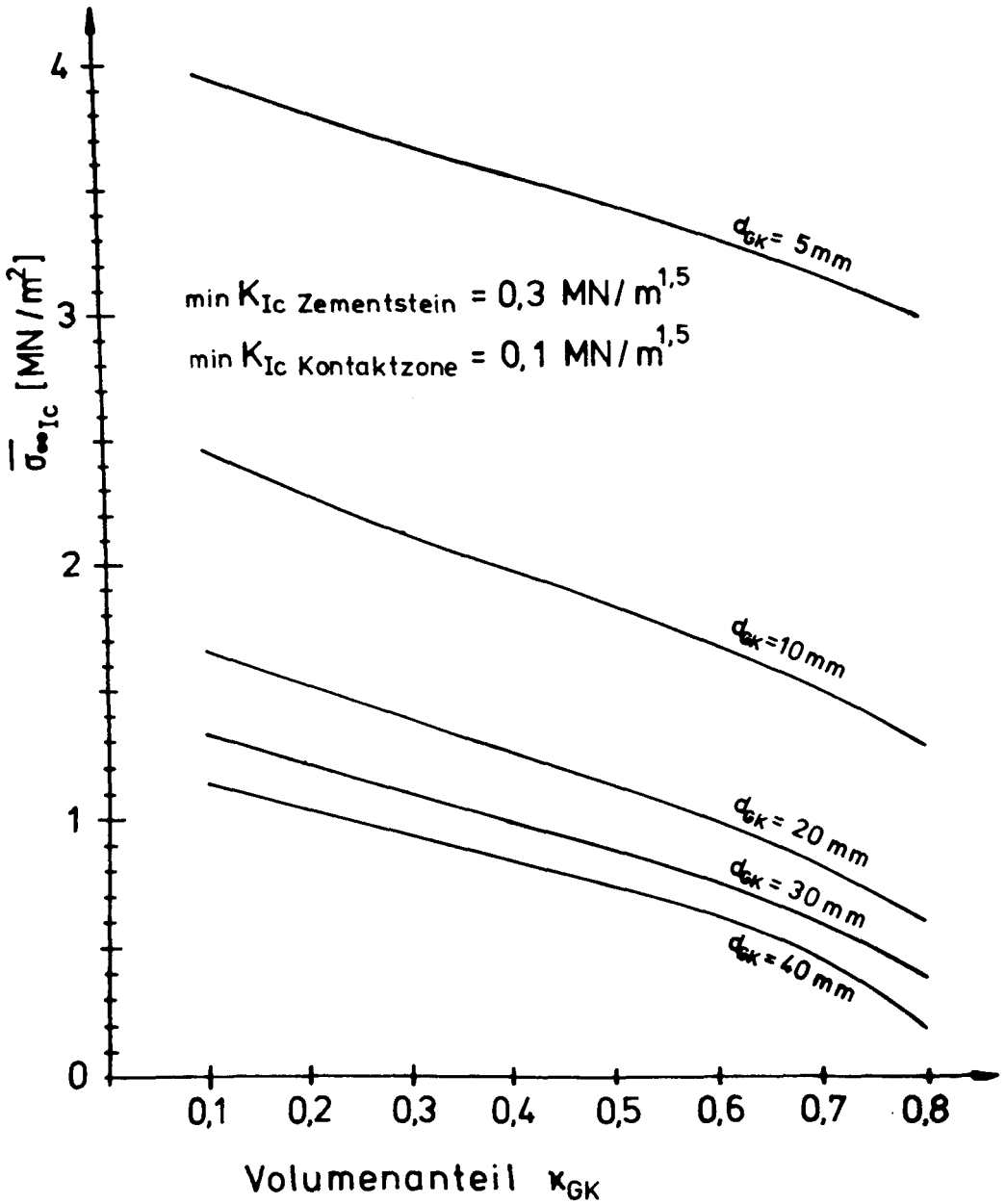


Abb. B 5.5 :  $\bar{\sigma}_{\infty I_c}$  in Abhängigkeit vom Größtkorndurchmesser



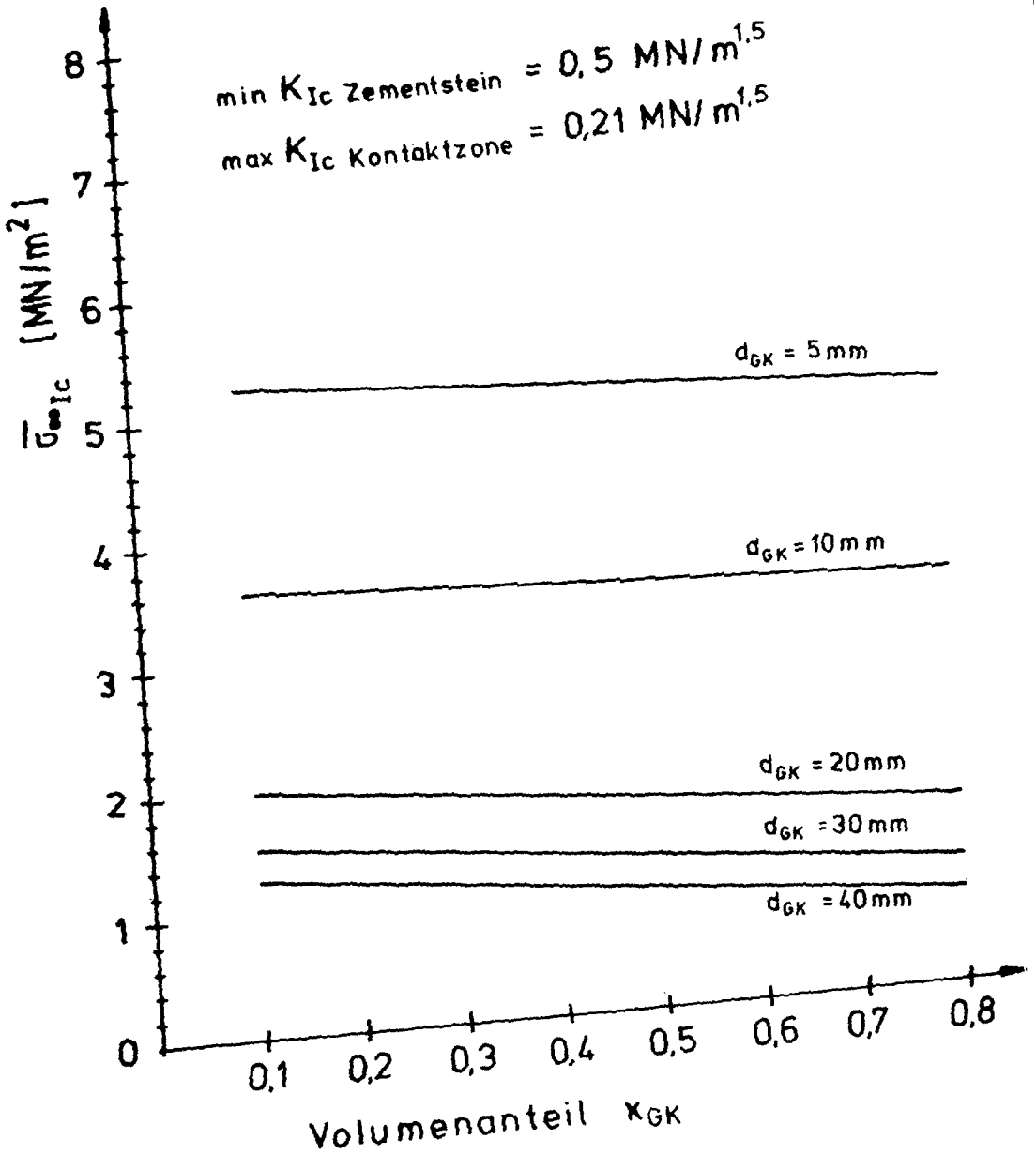


Abb. 8 5.6 :  $\bar{G}_{m, Ic}$  in Abhängigkeit vom Größtkorndurchmesser

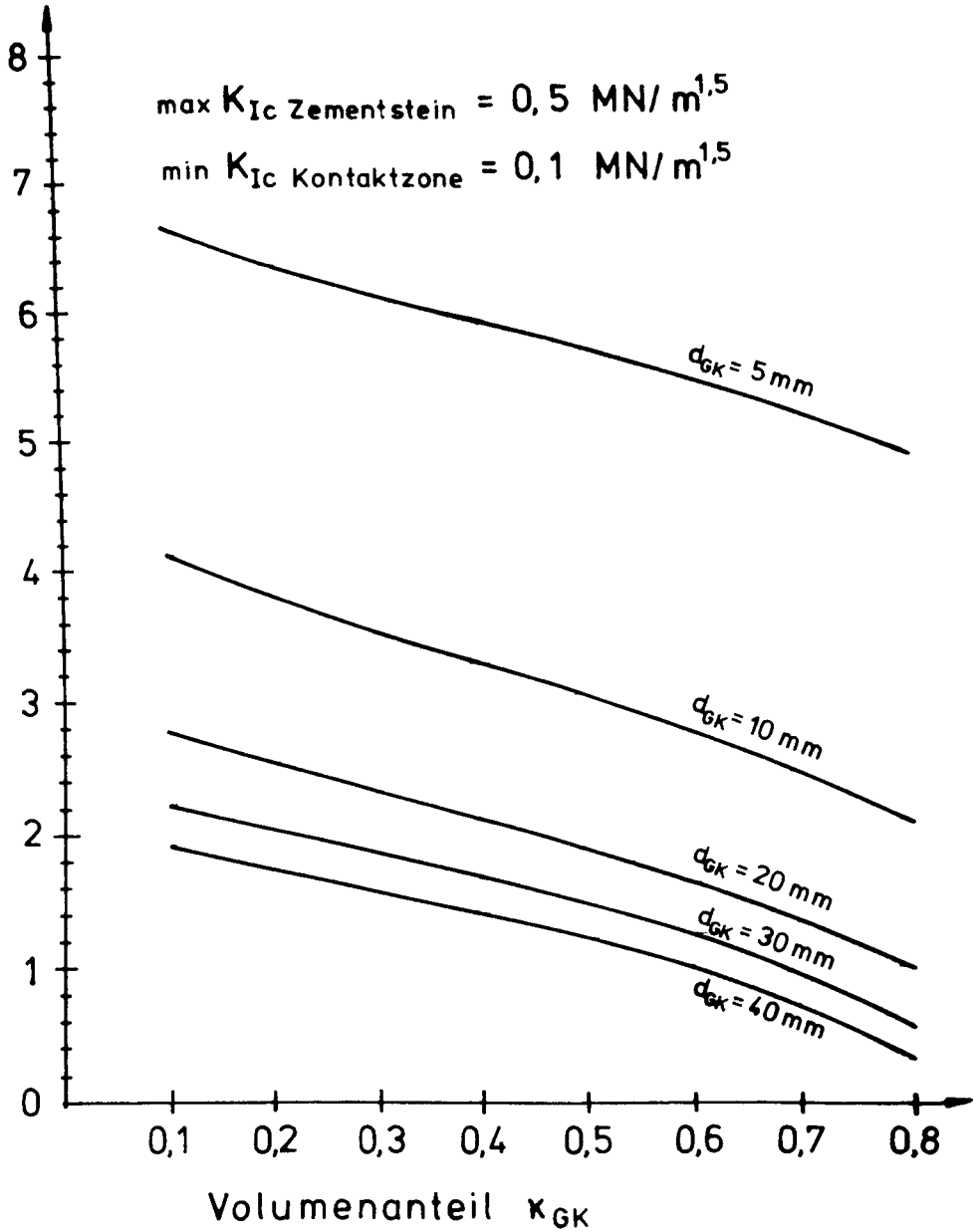


Abb. B 5.7 :  $\sigma_{Ic}$  in Abhängigkeit vom Größtkorndurchmesser

$d_{GK} = 5 \text{ mm}$

$\max K_{Ic} \text{ Zementstein} = 0,5 \text{ MN/m}^{1,5}$

$\max K_{Ic} \text{ Kontaktzone} = 0,21 \text{ MN/m}^{1,5}$

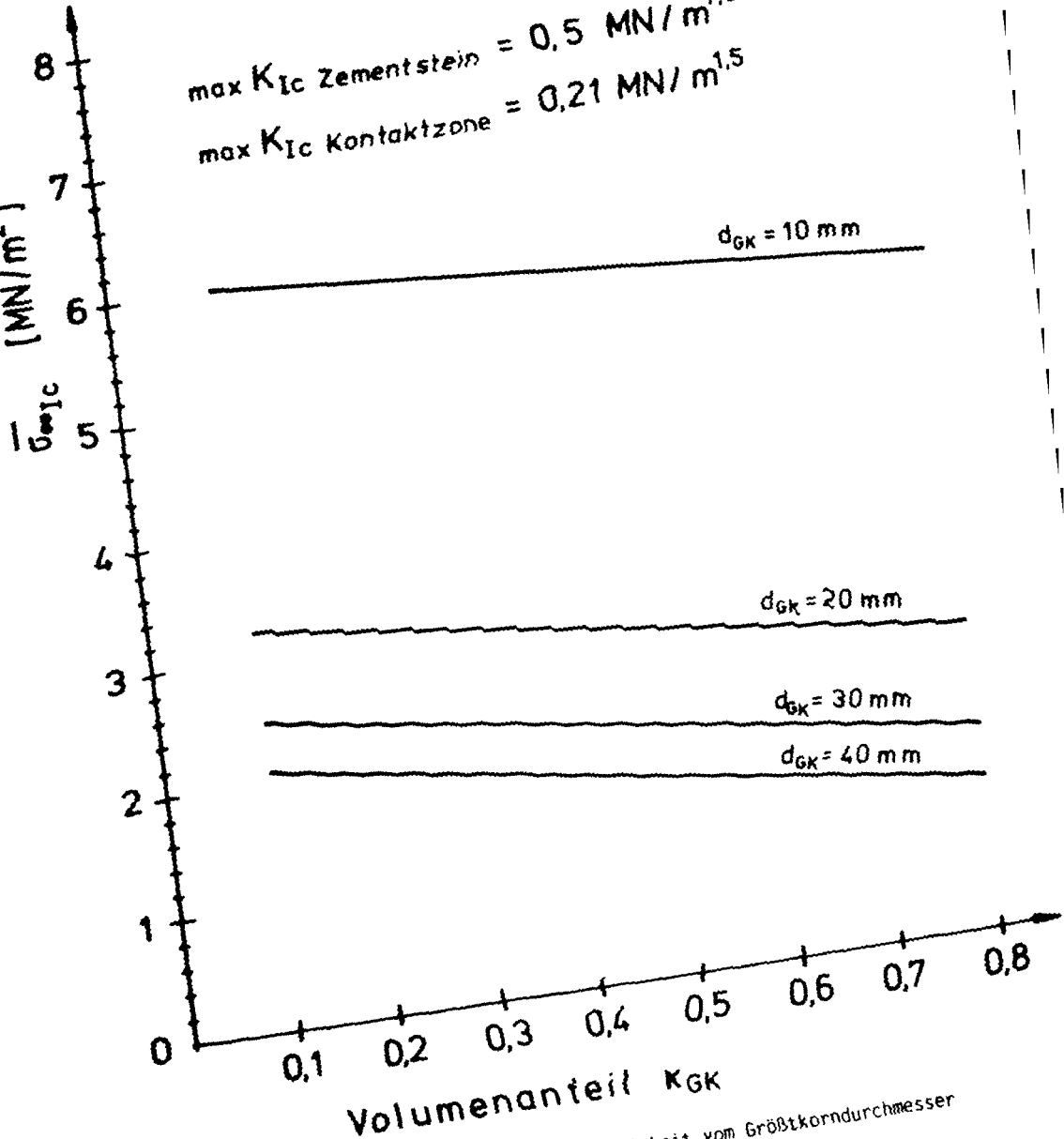


Abb. B 5.8 :  $K_{Ic}$  in Abhängigkeit vom Größtkorndurchmesser

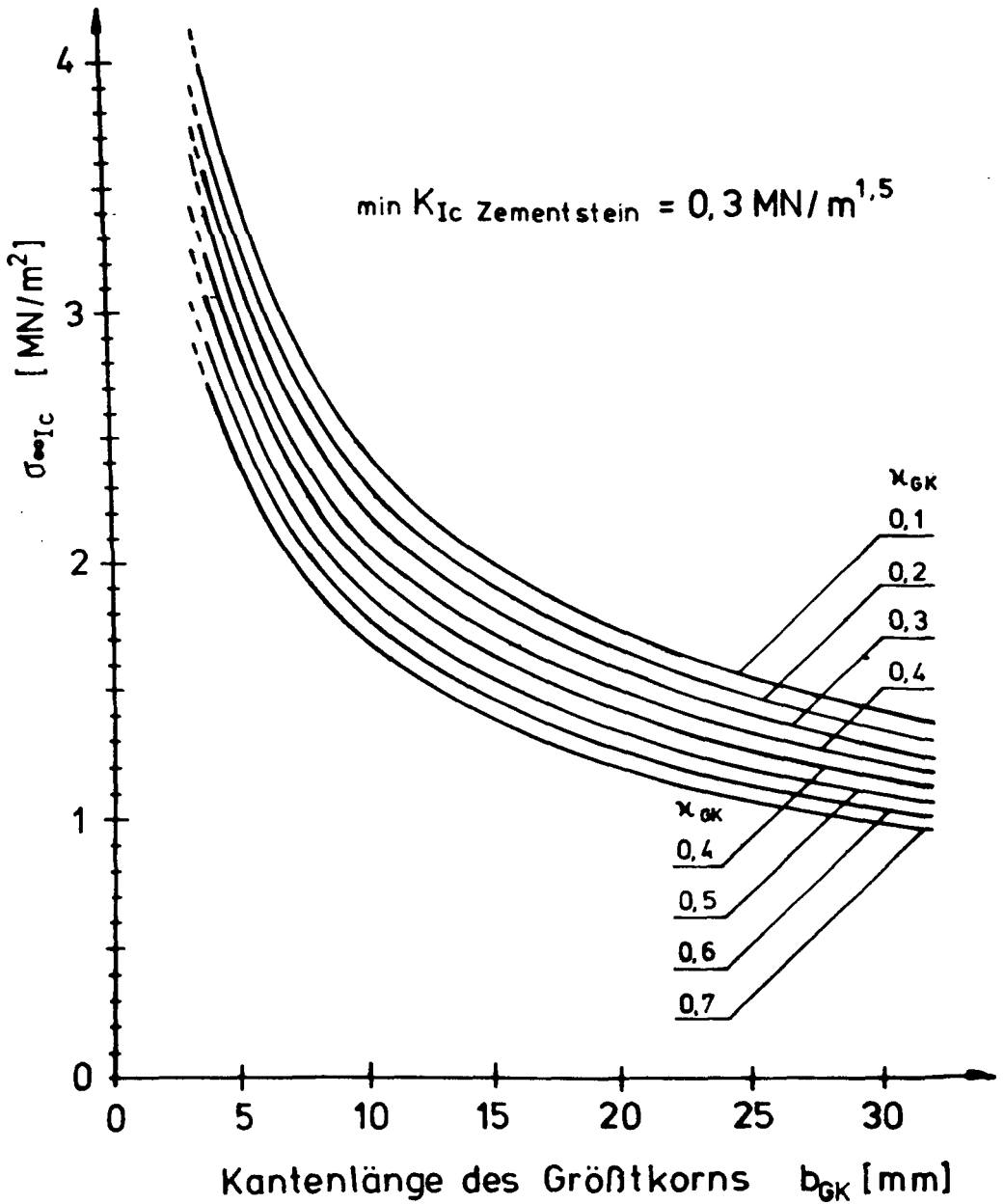


Abb. B 5.9:  $\sigma_{\infty Ic}$  in Abhängigkeit vom Volumenanteil

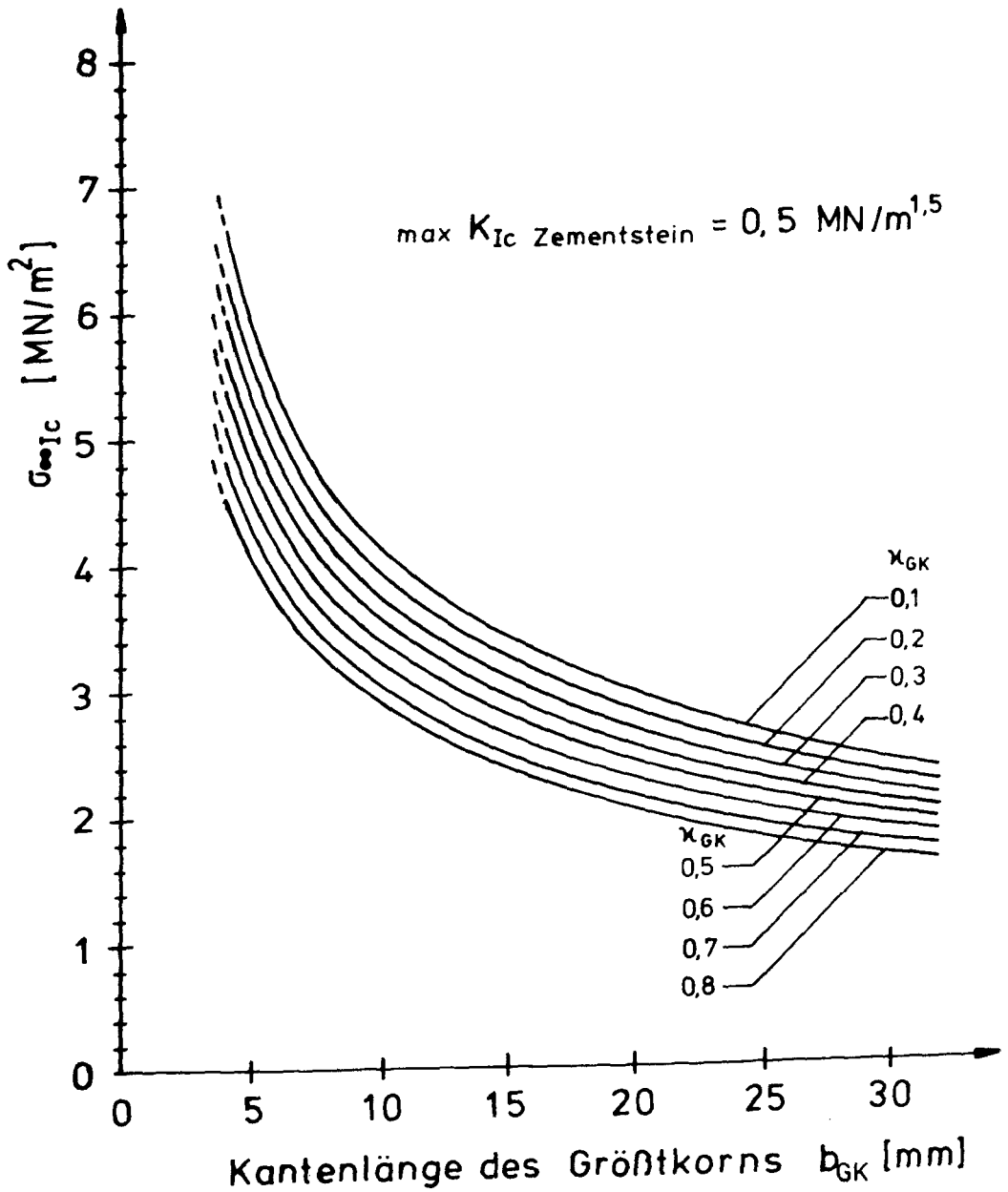


Abb. B 5.10:  $\sigma_{\infty Ic}$  in Abhängigkeit vom Volumenanteil

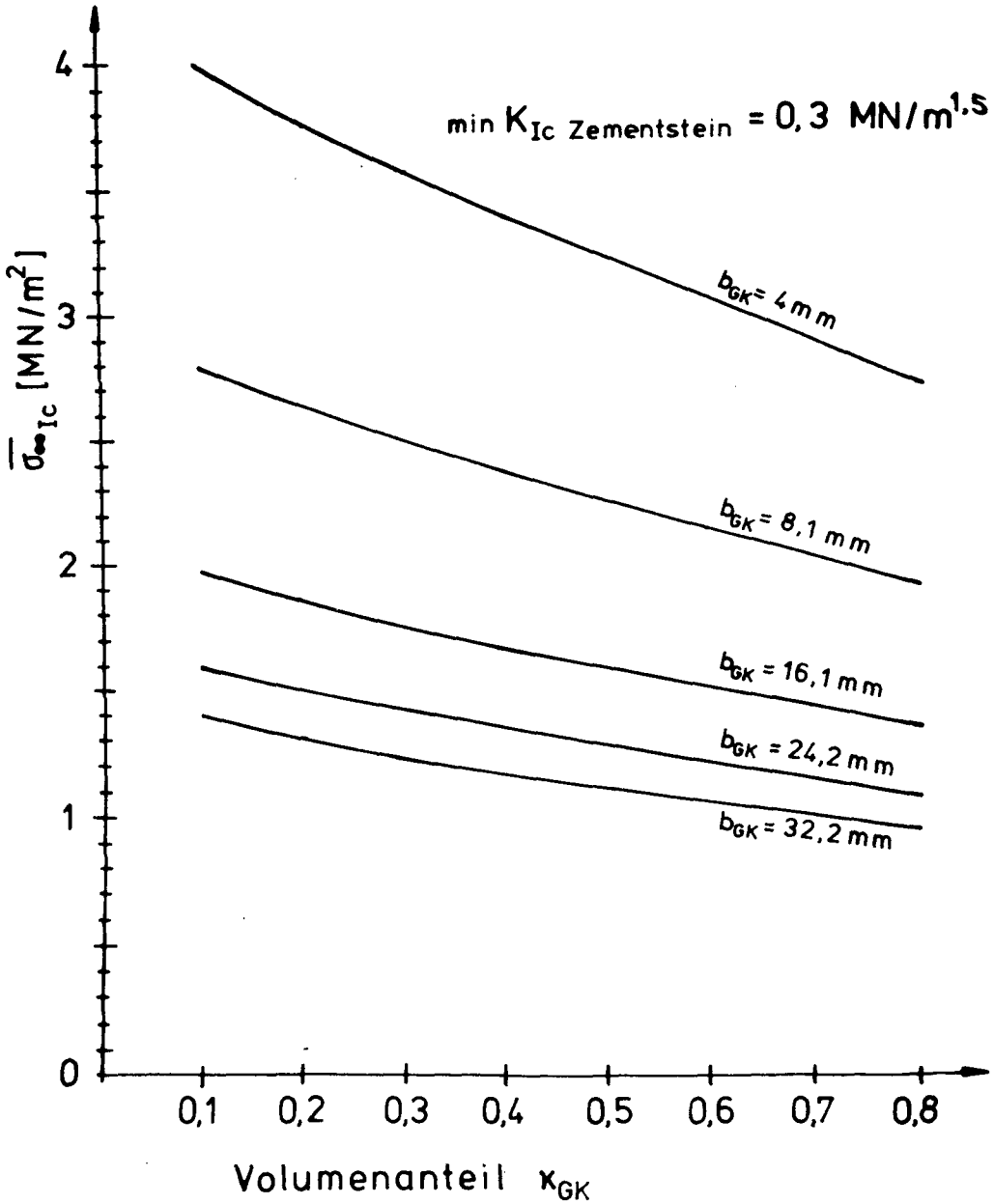


Abb. B 5.11:  $\bar{\sigma}_{\infty Ic}$  in Abhängigkeit von der Kantenlänge des Größtkornes ( $b_{GK}$ )

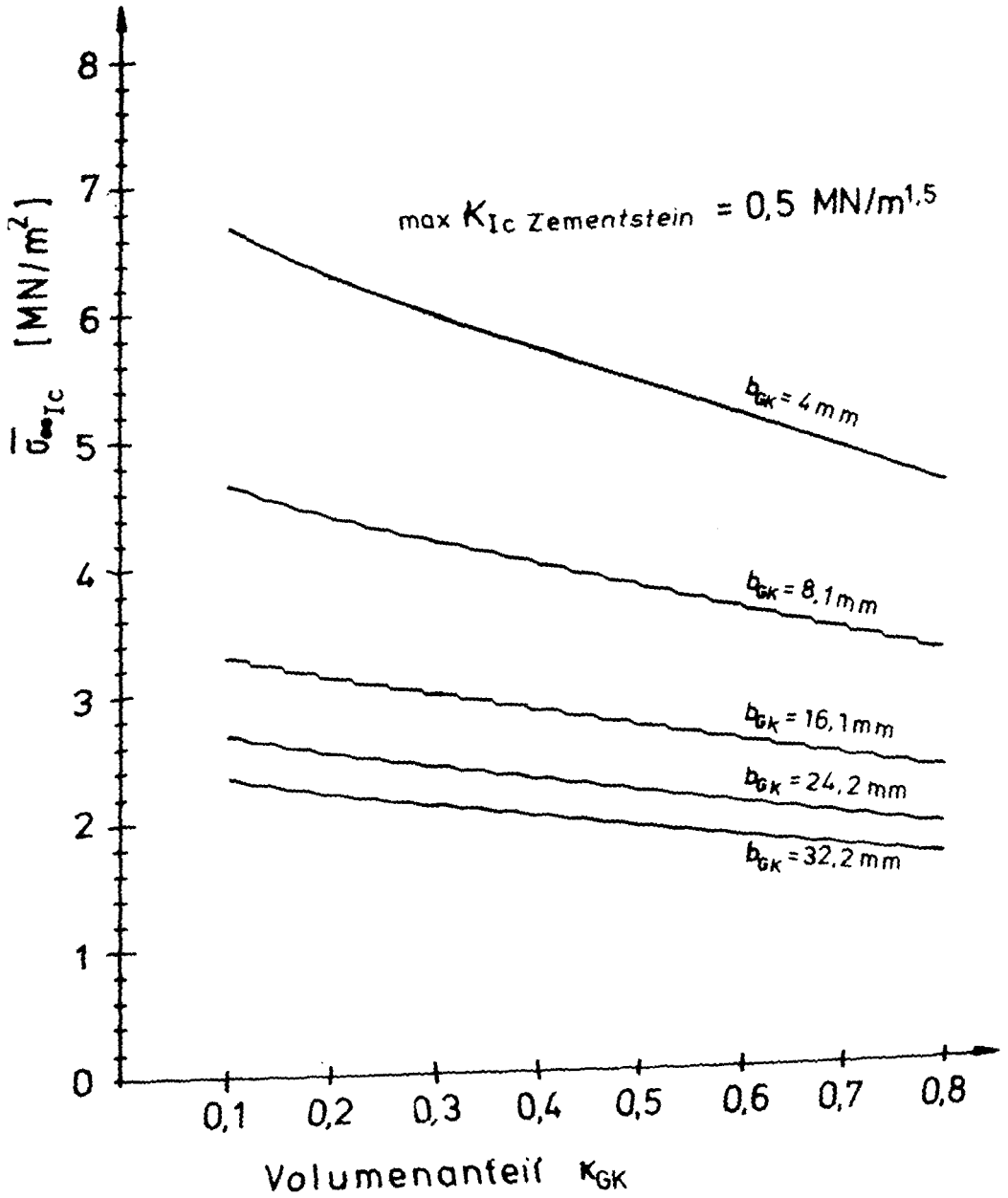


Abb. B 5.12:  $\bar{\sigma}_{c,IC}$  in Abhängigkeit von der Kantenlänge des Größtkornes ( $b_{GK}$ )





## Anhang B6

### Beispiel zur Berechnung von $\overline{\sigma_{\infty IC}}$ für quadratische Einschlüsse

Volumenanteil des Größtkornes:  $x_{GK} = 0,30$

Bruchzähigkeit des Zementsteins:  $\min K_{IC} = 0,3 \text{ MN/m}^{1,5}$

Als erstes werden die in den Tabellen B 5.2 bis B 5.9 ermittelten  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte in Abhängigkeit von der Belastungsrichtung für Einschlüsse mit unterschiedlichen Kantenlängen aufgetragen (Abb. B 6.1).

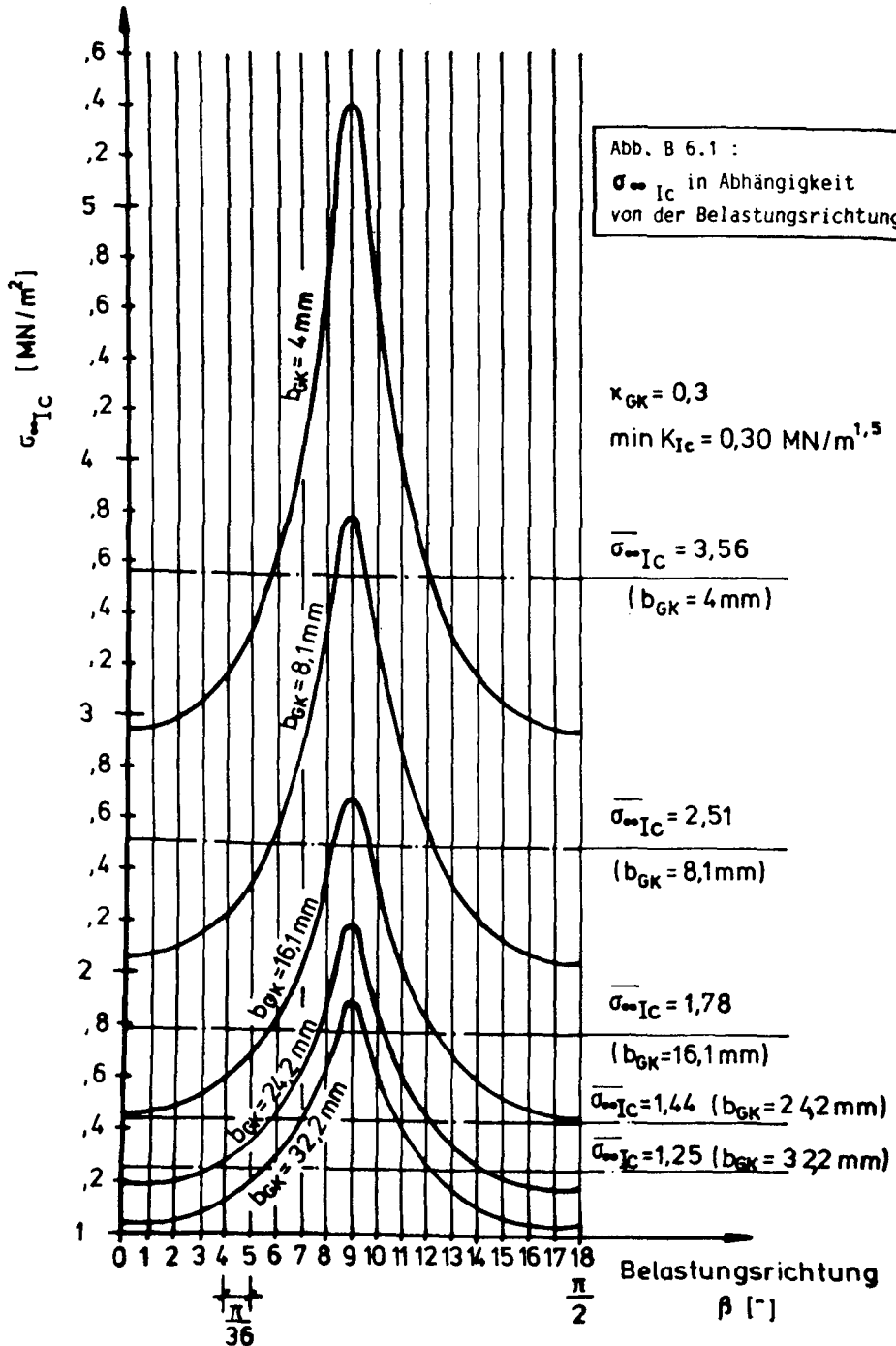
Als nächstes erfolgt das Ausmessen der  $\sigma_{\infty IC}$ -Werte an den Stützstellen 0 bis 18 und anschließend die tabellenmäßige Berechnung von  $\overline{\sigma_{\infty IC}}$ . In Tabelle B 6.1 ist der Rechengang am Beispiel des Einschlusses mit 16,1 mm Kantenlänge dargestellt. Grundlage dieser Berechnung ist Gleichung (B 6.1).

$$\sigma_{\infty IC} \approx \frac{2h}{3\pi} \left[ \sigma_{\infty IC_0} + 4\sigma_{\infty IC_1} + 2\sigma_{\infty IC_2} + 4\sigma_{\infty IC_3} + \dots + 4\sigma_{\infty IC_{17}} + \sigma_{\infty IC_{18}} \right] \quad (\text{B 6.1})$$

$$h = \frac{\pi}{36}$$

i = Index der Stützstelle

$C_k$  = Koeffizienten



i	$\sigma_{\infty Ic}$	$C_k$	$C_k \cdot \sigma_{\infty Ic}$
0	1,46	1	1,46
1	1,47	4	5,88
2	1,49	2	2,98
3	1,53	4	6,12
4	1,60	2	3,20
5	1,69	4	6,76
6	1,83	2	3,66
7	2,04	4	8,08
8	2,38	2	4,76
9	2,69	4	10,76
10	2,38	2	4,76
11	2,04	4	8,08
12	1,83	2	3,66
13	1,69	4	6,76
14	1,60	2	3,20
15	1,53	4	6,12
16	1,49	2	2,98
17	1,47	4	5,88
18	1,46	1	1,46
			$\Sigma = 96,56$

Tabelle B 6.1 :

Berechnung von  $\overline{\sigma_{\infty Ic}}$

$$\overline{\sigma_{\infty Ic}} = \frac{96,56}{54} = 1,79$$





```
WRITE (2,617)
WRITE (6,617)
WRITE (2,618)
WRITE (6,618)
WRITE (2,619)
WRITE (6,619)
WRITE (2,620)
WRITE (6,620)
WRITE (2,621) RADMAT,PHIMAT,SIGMAR,SIGPHI,TAU
WRITE (6,621) RADMAT,PHIMAT,SIGMAR,SIGPHI,TAU
WRITE (2,617)
WRITE (6,617)
WRITE (2,622)
READ (1,501) WEITER
IF (WEITER.EQ.'J') GOTO 5
GOTO 9999
C
100 WRITE (2,623)
    READ (1,500) VARIAT
    IF (VARIAT.EQ.'J') GOTO 150
    GOTO 10
110 WRITE (2,624)
    WRITE (2,625)
    READ (1,504) RADVER
    WRITE (2,626) RADVER
    WRITE (6,626) RADVER
    CALL SPANDVA (EMAT,EEIN,QUERMAT,QUEREIN,RADVER,SIGMAR,
    *SIGPHI,TAU)
C
150 CONTINUE
C
500 FORMAT (A1)
C
501 FORMAT (F10.2)
C
502 FORMAT (F4.2)
C
503 FORMAT (F5.2)
C
504 FORMAT (F5.3)
C
600 FORMAT (8X,'PROGRAMM ZUR BERECHNUNG VON SPANNUNGEN EINER UNENDLICH
    * AUSGEDEHNTEN SCHEIBE MIT RUNDEM EINSCHLUSS')
C
601 FORMAT (8X,'EINGABEDATEN : '/')
C
602 FORMAT (8X,'E-MODUL DER MATRIX IN MN/M**M : ')
C
603 FORMAT (8X,'EINZELBERECHNUNG ? (J/N): ')
C
604 FORMAT (8X,F10.2,'MN/M**M')
C
605 FORMAT (8X,'E-MODUL DES EINSCHLUSSES IN MN/M**M : ')
C
606 FORMAT (8X,'QUERDEHNZAHL DER MATRIX : ')
C
607 FORMAT (8X,F4.2/)
C
608 FORMAT (8X,'QUERDEHNZAHL DES EINSCHLUSSES : ')
C
C
C
C
C
```

```
609 FORMAT (BX,'RADIUS DES EINSCHLUSSES IN CM : ')
C
610 FORMAT (BX,'RADIUS EINSCHLUSSES = ',F5.2,'CM'/)
C
611 FORMAT (BX,'BERECHNUNG FUER DIE MATRIX BEI RMAT =')
C
612 FORMAT (BX,'BERECHNUNG FUER DIE MATRIX BEI RMAT = ',F5.2,1X,'CM'/)
C
613 FORMAT (BX,'BERECHNUNG FUER DEN WINKEL PHI = ')
C
614 FORMAT (BX,'BERECHNUNG FUER DEN WINKEL PHI = ',F6.2,' GRAD')
C
615 FORMAT (///20X,'ERGEBNISSE')
C
616 FORMAT (20X,'=====')
C
617 FORMAT (BX,'+-----
*-----+')
C
618 FORMAT (BX,'ö',2X,'RADIUS',2X,'ö',2X,'WINKEL',2X,'ö',3X,'RADIAL-'
*,3X,'ö',1X,'TANGENTIAL-',1X,'ö',4X,'SCHUB-',4X,'ö')
C
619 FORMAT (BX,'ö',3X,' (CM)',3X,'ö',2X,' (GRAD)',2X,'ö',2X,'SPANNUNGEN
*',2X,'ö',2X,'SPANNUNGEN',2X,'ö',2X,'SPANNUNGEN',2X,'ö')
C
620 FORMAT (BX,'=====
*=====')
C
621 FORMAT (BX,'ö',2X,F5.2,3X,'ö',2X,F6.2)
C
622 FORMAT (BX,'WEITERE BERECHNUNGEN ? (J/N):')
C
623 FORMAT (BX,'SOLLEN MATERIALKONSTANTEN VARIIERT WERDEN ? (J/N): ')
C
624 FORMAT (BX,'DIE BERECHNUNG BEGINNT AM RANDE DES EINSCHLUSSES (REI
*NSCHLUSS/RMATRIX = 1 )')
C
625 FORMAT (BX,'BEI WELCHEM RADIENVERHAELTNIS SOLL DIE BERECHNUNG BEE
*NDET SEIN ? MINIMAL MOEGLICH IST 0.01')
C
626 FORMAT (BX,'DIE BERECHNUNG WIRD BEIM RADIENVERHAELTNIS ',F5.3,'BEE
*NDET ! ')
C
9999 STOP
END
C
C *****
C
SUBROUTINE AEINS (EMAT,EEIN,QUERMAT,QUEREIN,FAK1)
C
C =====
C = DAS UNTERPROGRAMM AEINS BERECHNET DEN FAKTOR A1 ZUR BE-
C = RECHNUNG DER SPANNUNGEN INNERHALB EINES EINSCHLUSSES DER =
C = SICH IN EINER UNENDLICH AUSGEDEHNTEN SCHEIBE BEFINDET =
C =====
C
ZAEHLER = ((3-QUERMAT) / (1 + QUERMAT)) + 1
SCHMAT = 0.5*EMAT/(1+QUERMAT)
SCHEIN = 0.5*EEIN/(1+QUEREIN)
CAPEIN = (3-QUEREIN)/(1+QUEREIN)
ENNER = (SCHMAT/SCHEIN) - 2 - (CAPEIN*SCHMAT/SCHEIN)
FAK1 = -(ZAEHLER / ENNER)
RETURN
END
```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE ALFBET (FAKA1,BEINS,ALFMIN,BETMIN)

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

=====  
= DAS UNTERPROGRAMM ALFBET BERECHNET DIE FAKTOREN ALPHA-1 =  
= UND BETA-1 ZUR BERECHNUNG DER SPANNUNGEN IN EINER UNEND- =  
= LICH AUSGEDEHNTEN SCHEIBE MIT EINEM KREISRUNDEN EINSCHLUSS =  
=====

ALFMIN = 2 - BEINS  
BETMIN = 2 - 2 \* FAKA1  
RETURN  
END

C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE MSIGPRU (VERRAD,PHI,ALFMIN,BETMIN,SIGPHI)

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*  
\* DAS UNTERPROGRAMM MSIGPRU BERECHNET DIE TANGENTIAL- \*  
\* SPANNUNG IN EINER UNENDLICH AUSGEDEHNTEN SCHEIBE MIT \*  
\* KREISRUNDEN EINSCHLUSS. \*  
\*\*\*\*\*

PI = 3.1415  
REZVER = 1./VERRAD  
BOGEN = 2.\*PI\*PHI/180.  
COSIN = COS (BOGEN)  
BETDREI = - ALFMIN  
RHOCH2 = REZVER \* REZVER  
RHOCH4 = RHOCH2 \* RHOCH2  
SIGPHI = 0.5\*((1+0.5\*BETMIN\*RHOCH2)-(1-1.5\*BETDREI\*RHOCH4)\*COSIN)  
RETURN  
END

C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE MSIGRRU (VERRAD,PHI,ALFMIN,BETMIN,SIGMAR)

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*  
\* DAS UNTERPROGRAMM MSIGRRU BERECHNET DIE RADIALSPANNUNG \*  
\* IN EINER UNENDLICH AUSGEDEHNTEN SCHEIBE MIT KREISRUNDEN \*  
\* EINSCHLUSS. \*  
\*\*\*\*\*

REZVER = 1./VERRAD  
BETDREI = -ALFMIN  
RHOCH2 = REZVER \* REZVER  
RHOCH4 = RHOCH2 \* RHOCH2  
SUMM1 = 1 - 0.5 \* BETMIN \* RHOCH2  
SUMM2 = 1 - 2. \* ALFMIN \* RHOCH2 - 1.5 \* BETDREI \* RHOCH4  
COSIN = COS (2\*PHI)  
SIGMAR= 0.5 \* (SUMM1 + SUMM2\*COSIN)  
RETURN  
END

C  
C  
C



C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE MTAURRU (VERRAD,PHI,ALFMIN,TAU)

\*\*\*\*\*  
\* DAS UNTERPROGRAMM MTAURRU BERECHNET DIE SCHUB- \*  
\* SPANNUNG IN EINER UNENDLICH AUSGEDEHNTEN SCHEIBE MIT \*  
\* KREISRUNDEN EINSCHLUSS. \*  
\*\*\*\*\*

REZVER = 1./VERRAD  
SINUS = SIN (2\*PHI)  
BETDREI = -ALFMIN  
RHOCH2 = REZVER \* REZVER  
RHOCH4 = RHOCH2 \* RHOCH2  
TAU = -0.5 \* (1 + ALFMIN \* RHOCH2 + 1.5 \* BETDREI \*RHOCH4) \* SINUS  
RETURN  
END

C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE FAKB1 (EMAT,EEIN,QUERMAT,QUEREIN,BEINS)

=====  
= DAS UNTERPROGRAMM FAKB1 BERCHNET DEN FAKTOR B1 ZUR BERECH- =  
= NUNG DER SPANNUNGEN IN EINEM EINSCHLUSS, DER SICH IN EINER =  
= UNENLICH AUSGEDEHNTEN SCHEIBE BEFINDET =  
=====

FAK1 = 1 + QUEREIN  
SUMM1 = 3 - QUERMAT  
SUMM2 = EMAT \* FAK1 / EEIN  
BEINS = 8 / (SUMM1 + SUMM2)  
RETURN  
END

C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE SPANOVA (EMAT,EEIN,QUERMAT,QUEREIN,RADVER,SIGMAR,  
\*SIGPHI,TAU)

\*\*\*\*\*  
\* DAS UNTERPROGRAMM SPANOVA BERECHNET DIE SPANNUNGEN IN EINER \*  
\* UNENDLICH AUSGEDEHNTEN SCHEIBE FUER PHI=0 BIS PHI=90 GRAD \*  
\* IN ABSTAEINDEN VON 10 GRAD UND FUER RADIIENVERHAELTNISSE VON \*  
\* 1 BIS ZU EINEM VORGEgebenEN RADIIENENDVERHAELTNIS UND DRUCKT \*  
\* DAS ERGEBNIS AUS. \*  
\*\*\*\*\*

DIMENSION SIGMAR(10), SIGPHI(10), TAU(10), SPANUNG(3)

CHARACTER SPANUNG\*8

WRITE (6,607)  
WRITE (6,600)  
WRITE (6,601)  
WRITE (6,602)  
WRITE (6,603)  
WRITE (6,604)

C  
C

```
C
ENDRAD = 1./RADVER
DELTRAD = 0.01*ENDRAD
SPANUNG(1) = ' SIGMAR '
SPANUNG(2) = ' SIGPHI '
SPANUNG(3) = ' TAU   '

C
CALL AEINS (EMAT,EEIN,QUERMAT,QUEREIN,FAKA1)
CALL FAKB1 (EMAT,EEIN,QUERMAT,QUEREIN,BEINS)
CALL ALFBET (FAKA1,BEINS,ALFMIN,BETMIN)
WRITE (6,700) PHI, ALFMIN, BETMIN
WRITE (6,700) PHI, FAKA1, BEINS
K = 0
VERRAD = 1.
10 CONTINUE
DO 20 I =1,10
PHI = (I-1)*10.
CALL MSIGRRU (VERRAD,PHI,ALFMIN,BETMIN,SIGRAD)
700 FORMAT (4X, F10.2, 4X, F10.2, 4X, F10.2)
SIGMAR(I) = SIGRAD
CALL MSIGPRU (VERRAD,PHI,ALFMIN,BETMIN,SIGTAN)
SIGPHI(I) = SIGTAN
CALL MTAURRU (VERRAD,PHI,ALFMIN,TAURPHI)
TAU(I) = TAURPHI
20 CONTINUE

C
WRITE (6,605) SIGMAR(1), SIGMAR(2), SIGMAR(3),SIGMAR(4),SIGMAR(5),
*SIGMAR(6),SIGMAR(7),SIGMAR(8),SIGMAR(9),SIGMAR(10), SPANUNG(1)

C
WRITE (6,606) VERRAD, SIGPHI(1), SIGPHI(2),SIGPHI(3),SIGPHI(4),
*SIGPHI(5),SIGPHI(6),SIGPHI(7),SIGPHI(8),SIGPHI(9), SIGPHI(10),
*SPANUNG(2)

C
WRITE (6,605) TAU(1), TAU(2), TAU(3), TAU(4), TAU(5),
*TAU(6), TAU(7), TAU(8), TAU(9), TAU(10), SPANUNG(3)
WRITE (6,600)

C
VERRAD = VERRAD + DELTRAD
K=K+1
IF (VERRAD.GT.ENDRAD) RETURN
IF (K.LE.13) GOTO 10
WRITE (6,607)
WRITE (6,600)
WRITE (6,601)
WRITE (6,602)
WRITE (6,603)
WRITE (6,604)
K = 0
GOTO 10

C
C
600 FORMAT (8X, '-----+-----'
*-----+')
C
601 FORMAT (8X, 'ö RMATRIX ö',39X, 'PHI (GRAD)',41X, 'ö')
C
602 FORMAT (8X, 'ö-----ö',89X, 'ö')
C
603 FORMAT (8X, 'ö REINSCHLUSS ö',3X, '0',3X, 'ö',2X, '10',3X, 'ö',2X, '20',
*3X, 'ö',2X, '30',3X, 'ö',2X, '40',3X, 'ö',2X, '50',3X, 'ö',2X, '60',3X, 'ö',
*2X, '70',3X, 'ö',2X, '80',3X, 'ö',2X, '90',3X, 'ö')

C
C
C
```

```
C
604 FORMAT (BX,'I=====
#=====I')
C
605 FORMAT (BX,'ö',13X,'ö',1X,F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,
*' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',
#F5.2,' ö ',AB,'ö')
C
606 FORMAT (BX,'ö',2X,F6.2,5X,'ö',1X,F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,
*' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',
#F5.2,' ö ',F5.2,' ö ',AB,'ö')
C
607 FORMAT ('1'////)
C
RETURN
END
```



```
C *****
C *** ELLIPSE ***                               Anhang C2
C *****
C
C PROGRAMM ZUR BERECHNUNG VON FAKTOREN ZUR BERECHNUNG VON
C SPANNUNGEN UM ELLIPTISCHE EINSCHLUESSE
C
C   DIMENSION AR1(11),AI1(11),AR2(11),AI2(11),AR3(11),AI3(11),
C *AR4(11),AR5(11),AI5(11),AR6(11),AR7(11),AI7(11),
C *AR8(11),AR9(11),AI9(11),AR10(11),AI10(11),AR11(11),AI11(11),
C *AR12(11),AI12(11),AR13(11),AI13(11),AR14(11),AI14(11),AR15(11),
C *AI15(11),AR16(11),AI16(11),
C *AR19(11),AI19(11),AR20(11),AI20(11),AR21(11),AI21(11),AR22(11),
C *AI22(11),AR23(11),AI23(11),AR26(11),AI26(11),AR27(11),AI27(11),
C *SIGPHI(11),SIGRA(11),TAU(11),SIGMA1(11),SIGMA2(11)
C
C CHARACTER FAKTOR*4, SPANNG*7, FAKTOR1*3
C
C   A = 16.
C   B = 1.
C   RHO = 1.
C   AV = A/B
C   AM = (A-B)/(A+B)
C   WRITE (6,608) AV, AM
C   ANUE = 0.2
C   IZUSTA = 1
C   IF (IZUSTA.EQ.1) CAPP = (3.-ANUE)/(1.+ANUE)
C   IF (IZUSTA.EQ.2) CAPP = 3.- 4.*ANUE
C   ALFA = 0.
C   ALFAB = 0.
C   K = 0
C 10 WRITE (6,606) ALFAB
C   DPHI = 3.141593/18.
C   K = K+1
C   WRITE (6,600)
C   WRITE (6,601)
C   WRITE (6,600)
C   WRITE (6,602)
C   WRITE (6,600)
C
C   AR = (AM-2.*COS(2.*ALFA))/CAPP
C   AI = 2.*SIN(2.*ALFA)/CAPP
C
C   DO 50 I=1,11
C   PHI = DPHI*(I-1)
C   IF (I.EQ.11) PHI = 4.5*DPHI
C
C   AR1(I) = AM - COS(2.*PHI)/(RHO*RHO)
C   AI1(I) = SIN(2.*PHI)/(RHO*RHO)
C   AR2(I) = AR - COS(2.*PHI)*RHO*RHO
C   AI2(I) = -AI + SIN(2.*PHI)*RHO*RHO
C   AR3(I) = AR1(I)*AR2(I) + AI1(I)*AI2(I)
C   AI3(I) = AR1(I)*AI2(I) - AI1(I)*AR2(I)
C   AR4(I) = AR1(I)*AR1(I) + AI1(I)*AI1(I)
C   AR5(I) = RHO*RHO*RHO*AM*AM*COS(3.*PHI) - 2.*AM*COS(PHI)*RHO
C **COS(PHI)/RHO
C   AI5(I) = RHO*RHO*RHO*AM*AM*SIN(3.*PHI) - 2.*AM*SIN(PHI)*RHO
C **-SIN(PHI)/RHO
C   AR6(I) = AM - AR
C   AR7(I) = AR6(I)*AR5(I) + AI*AI5(I)
C   AI7(I) = AI*AR5(I) - AR6(I)*AI5(I)
C   AR8(I) = AR5(I)*AR5(I) + AI5(I)*AI5(I)
C
C
C
```



```
FAKTOR ='AR3 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR3 (1),AR3 (2),AR3 (3),AR3 (4),AR3 (5),AR3 (11),  
*AR3 (6),AR3 (7),AR3 (8),AR3 (9),AR3 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI3 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI3 (1),AI3 (2),AI3 (3),AI3 (4),AI3 (5),AI3 (11),  
*AI3 (6),AI3 (7),AI3 (8),AI3 (9),AI3 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR4 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR4 (1),AR4 (2),AR4 (3),AR4 (4),AR4 (5),AR4 (11),  
*AR4 (6),AR4 (7),AR4 (8),AR4 (9),AR4 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR5 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR5 (1),AR5 (2),AR5 (3),AR5 (4),AR5 (5),AR5 (11),  
*AR5 (6),AR5 (7),AR5 (8),AR5 (9),AR5 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI5 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI5 (1),AI5 (2),AI5 (3),AI5 (4),AI5 (5),AI5 (11),  
*AI5 (6),AI5 (7),AI5 (8),AI5 (9),AI5 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR6 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR6 (1),AR6 (2),AR6 (3),AR6 (4),AR6 (5),AR6 (11),  
*AR6 (6),AR6 (7),AR6 (8),AR6 (9),AR6 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR7 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR7 (1),AR7 (2),AR7 (3),AR7 (4),AR7 (5),AR7 (11),  
*AR7 (6),AR7 (7),AR7 (8),AR7 (9),AR7 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI7 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI7 (1),AI7 (2),AI7 (3),AI7 (4),AI7 (5),AI7 (11),  
*AI7 (6),AI7 (7),AI7 (8),AI7 (9),AI7 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='ARB '  
WRITE (6,603) FAKTOR,ARB (1),ARB (2),ARB (3),ARB (4),ARB (5),ARB (11),  
*ARB (6),ARB (7),ARB (8),ARB (9),ARB (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR9 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR9 (1),AR9 (2),AR9 (3),AR9 (4),AR9 (5),AR9 (11),  
*AR9 (6),AR9 (7),AR9 (8),AR9 (9),AR9 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI9 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI9 (1),AI9 (2),AI9 (3),AI9 (4),AI9 (5),AI9 (11),  
*AI9 (6),AI9 (7),AI9 (8),AI9 (9),AI9 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR10'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR10 (1),AR10 (2),AR10 (3),AR10 (4),AR10 (5),  
*AR10 (11),AR10 (6),AR10 (7),AR10 (8),AR10 (9),AR10 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
C  
C  
C  
C
```

```
FAKTOR ='AI10'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI10(1), AI10(2), AI10(3), AI10(4), AI10(5),  
*AI10(11), AI10(6), AI10(7), AI10(8), AI10(9), AI10(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR11'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR11(1), AR11(2), AR11(3), AR11(4), AR11(5),  
*AR11(11), AR11(6), AR11(7), AR11(8), AR11(9), AR11(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI11'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI11(1), AI11(2), AI11(3), AI11(4), AI11(5),  
*AI11(11), AI11(6), AI11(7), AI11(8), AI11(9), AI11(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR12'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR12(1), AR12(2), AR12(3), AR12(4), AR12(5),  
*AR12(11), AR12(6), AR12(7), AR12(8), AR12(9), AR12(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI12'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI12(1), AI12(2), AI12(3), AI12(4), AI12(5),  
*AI12(11), AI12(6), AI12(7), AI12(8), AI12(9), AI12(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR13'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR13(1), AR13(2), AR13(3), AR13(4), AR13(5),  
*AR13(11), AR13(6), AR13(7), AR13(8), AR13(9), AR13(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI13'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI13(1), AI13(2), AI13(3), AI13(4), AI13(5),  
*AI13(11), AI13(6), AI13(7), AI13(8), AI13(9), AI13(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR14'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR14(1), AR14(2), AR14(3), AR14(4), AR14(5),  
*AR14(11), AR14(6), AR14(7), AR14(8), AR14(9), AR14(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI14'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI14(1), AI14(2), AI14(3), AI14(4), AI14(5),  
*AI14(11), AI14(6), AI14(7), AI14(8), AI14(9), AI14(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR15'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR15(1), AR15(2), AR15(3), AR15(4), AR15(5),  
*AR15(11), AR15(6), AR15(7), AR15(8), AR15(9), AR15(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR16'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR16(1), AR16(2), AR16(3), AR16(4), AR16(5),  
*AR16(11), AR16(6), AR16(7), AR16(8), AR16(9), AR16(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI16'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI16(1), AI16(2), AI16(3), AI16(4), AI16(5),  
*AI16(11), AI16(6), AI16(7), AI16(8), AI16(9), AI16(10)  
WRITE (6,600)  
C  
C  
C  
C  
C
```



```
FAKTOR ='AR19'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR19(1),AR19(2),AR19(3),AR19(4),AR19(5),  
*AR19(11),AR19(6),AR19(7),AR19(8),AR19(9),AR19(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI19'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI19(1),AI19(2),AI19(3),AI19(4),AI19(5),  
*AI19(11),AI19(6),AI19(7),AI19(8),AI19(9),AI19(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR20'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR20(1),AR20(2),AR20(3),AR20(4),AR20(5),  
*AR20(11),AR20(6),AR19(7),AR20(8),AR20(9),AR20(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI20'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI20(1),AI20(2),AI20(3),AI20(4),AI20(5),  
*AI20(11),AI20(6),AI20(7),AI20(8),AI20(9),AI20(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR21'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR21(1),AR21(2),AR21(3),AR21(4),AR21(5),  
*AR21(11),AR21(6),AR21(7),AR21(8),AR21(9),AR21(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI21'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI21(1),AI21(2),AI21(3),AI21(4),AI21(5),  
*AI21(11),AI21(6),AI21(7),AI21(8),AI21(9),AI21(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR22'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR22(1),AR22(2),AR22(3),AR22(4),AR22(5),  
*AR22(11),AR22(6),AR22(7),AR22(8),AR22(9),AR22(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI22'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI22(1),AI22(2),AI22(3),AI22(4),AI22(5),  
*AI22(11),AI22(6),AI22(7),AI22(8),AI22(9),AI22(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR23'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR23(1),AR23(2),AR23(3),AR23(4),AR23(5),  
*AR23(11),AR23(6),AR23(7),AR23(8),AR23(9),AR23(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI23'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI23(1),AI23(2),AI23(3),AI23(4),AI23(5),  
*AI23(11),AI23(6),AI23(7),AI23(8),AI23(9),AI23(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR26'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR26(1),AR26(2),AR26(3),AR26(4),AR26(5),  
*AR26(11),AR26(6),AR26(7),AR26(8),AR26(9),AR26(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI26'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI26(1),AI26(2),AI26(3),AI26(4),AI26(5),  
*AI26(11),AI26(6),AI26(7),AI26(8),AI26(9),AI26(10)  
WRITE (6,600)
```

```
C  
C  
C  
C
```

```
FAKTOR ='AR27'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR27 (1),AR27 (2),AR27 (3),AR27 (4),AR27 (5),  
*AR27 (11),AR27 (6),AR27 (7),AR27 (8),AR27 (9),AR27 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI27'  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI27 (1),AI27 (2),AI27 (3),AI27 (4),AI27 (5),  
*AI27 (11),AI27 (6),AI27 (7),AI27 (8),AI27 (9),AI27 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
80 SPANNG = ' SIGPHI'  
WRITE (6,604) SPANNG, SIGPHI (1), SIGPHI (2), SIGPHI (3), SIGPHI (4),  
*SIGPHI (5),SIGPHI (11),SIGPHI (6), SIGPHI (7), SIGPHI (8), SIGPHI (9),  
*SIGPHI (10)  
WRITE (6,600)  
C  
SPANNG = ' SIGRA '  
WRITE (6,604) SPANNG, SIGRA (1), SIGRA (2), SIGRA (3), SIGRA (4),  
*SIGRA (5), SIGRA (11),SIGRA (6), SIGRA (7), SIGRA (8), SIGRA (9),  
*SIGRA (10)  
WRITE (6,600)  
C  
SPANNG = ' TAU '  
WRITE (6,604) SPANNG, TAU (1), TAU (2), TAU (3), TAU (4), TAU (5),  
*TAU (11),TAU (6), TAU (7), TAU (8), TAU (9), TAU (10)  
WRITE (6,600)  
C  
C  
BERECHNUNG DER HAUPTSPANNUNGEN  
C  
C  
DO 100 I =1,11  
SUMA1 = 0.5*(SIGPHI (I) + SIGRA (I))  
SUMA2 = 0.5*(SIGRA (I) - SIGPHI (I))  
SUMA2Q= SUMA2*SUMA2  
WARGUM= SUMA2Q + TAU (I)*TAU (I)  
WURZEL= SQRT (WARGUM)  
SIGMA1 (I) = SUMA1 + WURZEL  
100 SIGMA2 (I) = SUMA1 - WURZEL  
SPANNG = ' SIGMA1'  
WRITE (6,604) SPANNG, SIGMA1 (1), SIGMA1 (2), SIGMA1 (3), SIGMA1 (4),  
*SIGMA1 (5), SIGMA1 (11), SIGMA1 (6), SIGMA1 (7), SIGMA1 (8),  
*SIGMA1 (9), SIGMA1 (10)  
WRITE (6,600)  
SPANNG = ' SIGMA2'  
WRITE (6,604) SPANNG, SIGMA2 (1), SIGMA2 (2), SIGMA2 (3), SIGMA2 (4),  
*SIGMA2 (5), SIGMA2 (11), SIGMA2 (6), SIGMA2 (7), SIGMA2 (8),  
*SIGMA2 (9), SIGMA2 (10)  
WRITE (6,600)  
C  
-----  
IF (K.EQ.1) GOTO 150  
K = 0  
WRITE (6,605)  
150 ALFA = ALFA +DPHI*0.5  
ALFAB = ALFAB + 5.  
IF (ALFAB.GT.180.) GOTO 999  
GOTO 10  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C
```

```
600 FORMAT (5X,'-----')
*-----')
C
601 FORMAT (5X,'I      I                                PHI (GRAD)
*                                I')
C
602 FORMAT (5X,'I FAKTORI    0 I 10 I 20 I 30 I 40 I
- 45 I 50 I 60 I 70 I 80 I 90 I')
C
603 FORMAT (5X,'I',3X,A,2X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
C
604 FORMAT (5X,'I',A,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
C
605 FORMAT ('1'//)
C
606 FORMAT (//10X,'ALPHA = ',F6.2,' GRAD'//)
C
607 FORMAT (5X,'I',3X,A,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
C
608 FORMAT(5X,'ACHSENVERHAELTNIS DER ELLIPSE A/B = ',F5.2,10X,
*'M = ',F5.2//)
C
999 STOP
END
```



```
C *****
C *** QUADRAT ***                               Anhang C3
C *****
C
C PROGRAMM ZUR BERECHNUNG VON SPANNUNGEN UM QUADRATISCHE
C EINSCHLUESSE
C
C DIMENSION AR1(11),AI1(11),AR2(11),AI2(11),AR3(11),AI3(11),
C *AR4(11),ARS(11),AIS(11),AR6(11),AI6(11),AR7(11),AI7(11),AR8(11),
C *AR9(11),AR10(11),AI10(11),AR11(11),AI11(11),
C *AR12(11),AI12(11),AR13(11),AI13(11),AR14(11),AR15(11),
C *AI15(11),AR16(11),AI16(11),AR17(11),AI17(11),AR18(11),AI18(11),
C *AR19(11),AI19(11),AR20(11),AR21(11),
C *AI21(11),AR22(11),AI22(11),AR23(11),
C *SIGPHI(11),SIGRA(11),TAU(11),SIGMA1(11),SIGMA2(11)
C
C CHARACTER FAKTOR*4, SPANNG*7
C
C AM = 0.3333
C ANUE = 0.3
C IZUSTA = 1
C IF (IZUSTA.EQ.1) CAPP A = (3.-ANUE)/(1.*ANUE)
C IF (IZUSTA.EQ.2) CAPP A = 3.- 4.*ANUE
C ALFA = 0.
C ALFAB = 0.
C K = 0
C DELTA =0
C 10 WRITE (6,606) ALFAB
C 11 DPHI = 3.141593/18.
C K = K+1
C WRITE (6,600)
C WRITE (6,601)
C WRITE (6,600)
C IF (DELTA.NE.0) GOTO 12
C WRITE (6,602)
C GOTO 13
C 12 WRITE (6,608)
C 13 WRITE (6,600)
C
C AR= (AM-CAPPA)*COS(2*ALFA)
C AI= (AM+CAPPA)*SIN(2*ALFA)
C B = CAPPA + 3.*AM*AM/CAPPA
C C = 1 + 3*AM*AM
C D = AM/(2*CAPPA)
C E = 1/(CAPPA*CAPPA+AM*AM)
C F = 3.*AM*E
C G = 3.*AM - 6*D
C
C DO 50 I=1,11
C PHI = DPHI*(I-1) + DELTA
C IF (I.EQ.11) PHI = 4.5*DPHI + DELTA
C
C AR1(I) = -.25 + .5*E*(AR*COS(2.*PHI) + AI*SIN(2.*PHI))
C * + 1.5*D*COS(4.*PHI)
C AI1(I) = 0.5*E*(-AI*COS(2.*PHI) + AR*SIN(2.*PHI))
C **1.5*D*SIN(4.*PHI)
C AR2(I) = 3.*AM*COS(4.*PHI) -1.
C AI2(I) = 3.*AM*SIN(4.*PHI)
C AR3(I) = AR1(I)*AR2(I) + AI1(I)*AI2(I)
C AI3(I) = AI1(I)*AR2(I) - AI2(I)*AR1(I)
C AR4(I) = AR2(I)*AR2(I) + AI2(I)*AI2(I)
C AR5(I) = -F*(AR*COS(5.*PHI) + AI*SIN(5.*PHI)) + G*COS(3.*PHI)
C *-E*(AR*COS(PHI) + AI*SIN(PHI))
C AI5(I) = -F*(AR*SIN(5.*PHI) - AI*COS(5.*PHI)) + G*SIN(3.*PHI)
```

```
AR6(I) = AR2(I)*AR2(I) - AI2(I)*AI2(I)
AI6(I) = 2.*AR2(I)*AI2(I)
AR7(I) = AR5(I)*AR6(I) + AI5(I)*AI6(I)
AI7(I) = AI5(I)*AR6(I) - AR5(I)*AI6(I)
AR8(I) = AR6(I)*AR6(I) + AI6(I)*AI6(I)
AR9(I) = COS(PHI) + AM*COS(3.*PHI)
AI9(I) = SIN(PHI) - AM*SIN(3.*PHI)
AR10(I) = AR7(I)*AR9(I) - AI7(I)*AI9(I)
AI10(I) = AR7(I)*AI9(I) + AI7(I)*AR9(I)
AR11(I) = .5*B + (COS(2.*ALFA)*COS(2.*PHI) - SIN(2.*ALFA)
**SIN(2.*PHI))
AI11(I) = COS(2.*ALFA)*SIN(2.*PHI) + SIN(2.*ALFA)*COS(2.*PHI)
AR12(I) = AR11(I)*AR6(I) + AI11(I)*AI6(I)
AI12(I) = AR11(I)*AI6(I) - AI11(I)*AR6(I)
AR13(I) = .5*C*(1. + 9.*AM*COS(4.*PHI))
AI13(I) = .5*C*9.*AM*SIN(4.*PHI)
AR14(I) = 3.*C*E*(AR*(AM*COS(6.*PHI) + COS(2.*PHI)) +AI*(AM*
*SIN(6.*PHI)+ SIN(2.*PHI)))
AR15(I) = (1.5*AM*C/CAPPA)*(3.*AM*COS(8.*PHI) - 5.*COS(4.*PHI))
AI15(I) = (1.5*AM*C/CAPPA)*(3.*AM*SIN(8.*PHI) - 5.*SIN(4.*PHI))
AR16(I) = AR12(I)-AR13(I) * AI14(I)-AR15(I)
AI16(I) = AI12(I)-AI13(I)+AI14(I)-AI15(I)
AR17(I) = AR16(I)*AR6(I) + AI16(I)*AI6(I)
AI17(I) = AI16(I)*AR6(I) - AR16(I)*AI6(I)
AR18(I) = COS(2.*PHI)*(3.*AM -1.)
AI18(I) = SIN(2.*PHI)*(3.*AM +1.)
AR19(I) = COS(2.*PHI)*AR18(I) - SIN(2.*PHI)*AI18(I)
AI19(I) = SIN(2.*PHI)*AR18(I) + COS(2.*PHI)*AI18(I)
AR20(I) = AR18(I)*AR18(I) + AI18(I)*AI18(I)
AR21(I) = AR10(I) + 0.5*AR17(I)
AI21(I) = AI10(I) + 0.5*AI17(I)
AR22(I) = AR19(I)*AR21(I) - AI19(I)*AI21(I)
AI22(I) = AI19(I)*AR21(I) + AR19(I)*AI21(I)
AR23(I) = AR20(I)*AR8(I)

C
SIGPHI(I) = AR22(I)/AR23(I) + 2.*AR3(I)/AR4(I)
SIGRA(I) = 2.*AR3(I)/AR4(I) - AR22(I)/AR23(I)
TAU(I) = AI22(I)/AR23(I)

C
50 CONTINUE

C
GOTO 80

C
FAKTOR = 'AR1 '
WRITE(6,603) FAKTOR,AR1(1),AR1(2),AR1(3),AR1(4),AR1(5),AR1(11),
*AR1(6),AR1(7),AR1(8),AR1(9),AR1(10)
WRITE(6,600)

C
FAKTOR = 'AI1 '
WRITE(6,603) FAKTOR,AI1(1),AI1(2),AI1(3),AI1(4),AI1(5),AI1(11),
*AI1(6),AI1(7),AI1(8),AI1(9),AI1(10)
WRITE(6,600)

C
FAKTOR = 'AR2 '
WRITE(6,603) FAKTOR,AR2(1),AR2(2),AR2(3),AR2(4),AR2(5),AR2(11),
*AR2(6),AR2(7),AR2(8),AR2(9),AR2(10)
WRITE(6,600)

C
FAKTOR = 'AI2 '
WRITE(6,603) FAKTOR,AI2(1),AI2(2),AI2(3),AI2(4),AI2(5),AI2(11),
*AI2(6),AI2(7),AI2(8),AI2(9),AI2(10)
WRITE(6,600)

C
FAKTOR = 'AR3 '
```

```
WRITE (6,603) FAKTOR,AR3(1),AR3(2),AR3(3),AR3(4),AR3(5),AR3(11),
*AR3(6),AR3(7),AR3(8),AR3(9),AR3(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AI3 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AI3(1),AI3(2),AI3(3),AI3(4),AI3(5),AI3(11),
*AI3(6),AI3(7),AI3(8),AI3(9),AI3(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AR4 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AR4(1),AR4(2),AR4(3),AR4(4),AR4(5),AR4(11),
*AR4(6),AR4(7),AR4(8),AR4(9),AR4(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AR5 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AR5(1),AR5(2),AR5(3),AR5(4),AR5(5),AR5(11),
*AR5(6),AR5(7),AR5(8),AR5(9),AR5(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AI5 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AI5(1),AI5(2),AI5(3),AI5(4),AI5(5),AI5(11),
*AI5(6),AI5(7),AI5(8),AI5(9),AI5(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AR6 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AR6(1),AR6(2),AR6(3),AR6(4),AR6(5),AR6(11),
*AR6(6),AR6(7),AR6(8),AR6(9),AR6(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AI6 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AI6(1),AI6(2),AI6(3),AI6(4),AI6(5),AI6(11),
*AI6(6),AI6(7),AI6(8),AI6(9),AI6(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AR7 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AR7(1),AR7(2),AR7(3),AR7(4),AR7(5),AR7(11),
*AR7(6),AR7(7),AR7(8),AR7(9),AR7(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AI7 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AI7(1),AI7(2),AI7(3),AI7(4),AI7(5),AI7(11),
*AI7(6),AI7(7),AI7(8),AI7(9),AI7(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AR8 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AR8(1),AR8(2),AR8(3),AR8(4),AR8(5),AR8(11),
*AR8(6),AR8(7),AR8(8),AR8(9),AR8(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AR9 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AR9(1),AR9(2),AR9(3),AR9(4),AR9(5),AR9(11),
*AR9(6),AR9(7),AR9(8),AR9(9),AR9(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AI9 '
WRITE (6,603) FAKTOR,AI9(1),AI9(2),AI9(3),AI9(4),AI9(5),AI9(11),
*AI9(6),AI9(7),AI9(8),AI9(9),AI9(10)
WRITE (6,600)
C
FAKTOR ='AR10'
WRITE (6,603) FAKTOR,AR10(1),AR10(2),AR10(3),AR10(4),AR10(5),
*AR10(11),AR10(6),AR10(7),AR10(8),AR10(9),AR10(10)
WRITE (6,600)
C
```

```
FAKTOR ='AI10'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI10(1), AI10(2), AI10(3), AI10(4), AI10(5),  
*AI10(11), AI10(6), AI10(7), AI10(8), AI10(9), AI10(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR11'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR11(1), AR11(2), AR11(3), AR11(4), AR11(5),  
*AR11(11), AR11(6), AR11(7), AR11(8), AR11(9), AR11(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI11'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI11(1), AI11(2), AI11(3), AI11(4), AI11(5),  
*AI11(11), AI11(6), AI11(7), AI11(8), AI11(9), AI11(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR12'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR12(1), AR12(2), AR12(3), AR12(4), AR12(5),  
*AR12(11), AR12(6), AR12(7), AR12(8), AR12(9), AR12(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI12'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI12(1), AI12(2), AI12(3), AI12(4), AI12(5),  
*AI12(11), AI12(6), AI12(7), AI12(8), AI12(9), AI12(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR13'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR13(1), AR13(2), AR13(3), AR13(4), AR13(5),  
*AR13(11), AR13(6), AR13(7), AR13(8), AR13(9), AR13(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI13'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI13(1), AI13(2), AI13(3), AI13(4), AI13(5),  
*AI13(11), AI13(6), AI13(7), AI13(8), AI13(9), AI13(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR14'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR14(1), AR14(2), AR14(3), AR14(4), AR14(5),  
*AR14(11), AR14(6), AR14(7), AR14(8), AR14(9), AR14(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR15'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR15(1), AR15(2), AR15(3), AR15(4), AR15(5),  
*AR15(11), AR15(6), AR15(7), AR15(8), AR15(9), AR15(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI15'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI15(1), AI15(2), AI15(3), AI15(4), AI15(5),  
*AI15(11), AI15(6), AI15(7), AI15(8), AI15(9), AI15(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR16'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR16(1), AR16(2), AR16(3), AR16(4), AR16(5),  
*AR16(11), AR16(6), AR16(7), AR16(8), AR16(9), AR16(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AI16'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI16(1), AI16(2), AI16(3), AI16(4), AI16(5),  
*AI16(11), AI16(6), AI16(7), AI16(8), AI16(9), AI16(10)  
WRITE (6,600)  
C  
FAKTOR ='AR17'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR17(1), AR17(2), AR17(3), AR17(4), AR17(5),  
*AR17(11), AR17(6), AR17(7), AR17(8), AR17(9), AR17(10)  
WRITE (6,600)
```



```
C
  FAKTOR ='AI17'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AI17(1), AI17(2), AI17(3), AI17(4), AI17(5),
  *AI17(11), AI17(6), AI17(7), AI17(8), AI17(9), AI17(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AR18'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AR18(1), AR18(2), AR18(3), AR18(4), AR18(5),
  *AR18(11), AR18(6), AR18(7), AR18(8), AR18(9), AR18(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AI18'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AI18(1), AI18(2), AI18(3), AI18(4), AI18(5),
  *AI18(11), AI18(6), AI18(7), AI18(8), AI18(9), AI18(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AR19'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AR19(1), AR19(2), AR19(3), AR19(4), AR19(5),
  *AR19(11), AR19(6), AR19(7), AR19(8), AR19(9), AR19(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AI19'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AI19(1), AI19(2), AI19(3), AI19(4), AI19(5),
  *AI19(11), AI19(6), AI19(7), AI19(8), AI19(9), AI19(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AR20'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AR20(1), AR20(2), AR20(3), AR20(4), AR20(5),
  *AR20(11), AR20(6), AR20(7), AR20(8), AR20(9), AR20(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AR21'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AR21(1), AR21(2), AR21(3), AR21(4), AR21(5),
  *AR21(11), AR21(6), AR21(7), AR21(8), AR21(9), AR21(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AI21'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AI21(1), AI21(2), AI21(3), AI21(4), AI21(5),
  *AI21(11), AI21(6), AI21(7), AI21(8), AI21(9), AI21(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AR22'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AR22(1), AR22(2), AR22(3), AR22(4), AR22(5),
  *AR22(11), AR22(6), AR22(7), AR22(8), AR22(9), AR22(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AI22'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AI22(1), AI22(2), AI22(3), AI22(4), AI22(5),
  *AI22(11), AI22(6), AI22(7), AI22(8), AI22(9), AI22(10)
  WRITE (6,600)

C
  FAKTOR ='AR23'
  WRITE (6,603) FAKTOR, AR23(1), AR23(2), AR23(3), AR23(4), AR23(5),
  *AR23(11), AR23(6), AR23(7), AR23(8), AR23(9), AR23(10)
  WRITE (6,600)

C
C
C
  BO SPANNG = 'SIGPHI'
  WRITE (6,604) SPANNG, SIGPHI(1), SIGPHI(2), SIGPHI(3), SIGPHI(4),
  *SIGPHI(5), SIGPHI(11), SIGPHI(6), SIGPHI(7), SIGPHI(8), SIGPHI(9),
  *SIGPHI(10)
  WRITE (6,600)

C
```

```

      SPANNG = ' SIGRA '
      WRITE(6,604) SPANNG, SIGRA(1), SIGRA(2), SIGRA(3), SIGRA(4),
      *SIGRA(5), SIGRA(11),SIGRA(6), SIGRA(7), SIGRA(8), SIGRA(9),
      *SIGRA(10)
      WRITE (6,600)
C
      SPANNG = ' TAU '
      WRITE(6,604) SPANNG, TAU(1), TAU(2), TAU(3), TAU(4), TAU(5),
      *TAU(11),TAU(6), TAU(7), TAU(8), TAU(9), TAU(10)
      WRITE (6,600)
C
C
C
      BERECHNUNG DER HAUPTSPANNUNGEN
      -----
      DO 100 I =1,11
      SUMA1 = 0.5*(SIGPHI(I) + SIGRA(I))
      SUMA2 = 0.5*(SIGRA(I) - SIGPHI(I))
      SUMA2Q= SUMA2*SUMA2
      WARGUM= SUMA2Q + TAU(I)*TAU(I)
      WURZEL= SQRT(WARGUM)
      SIGMA1(I) = SUMA1 + WURZEL
100  SIGMA2(I) = SUMA1 - WURZEL
      SPANNG = ' SIGMA1'
      WRITE(6,604) SPANNG, SIGMA1(1), SIGMA1(2), SIGMA1(3), SIGMA1(4),
      *SIGMA1(5), SIGMA1(11), SIGMA1(6), SIGMA1(7), SIGMA1(8),
      *SIGMA1(9), SIGMA1(10)
      WRITE (6,600)
      SPANNG = ' SIGMA2'
      WRITE(6,604) SPANNG, SIGMA2(1), SIGMA2(2), SIGMA2(3), SIGMA2(4),
      *SIGMA2(5), SIGMA2(11), SIGMA2(6), SIGMA2(7), SIGMA2(8),
      *SIGMA2(9), SIGMA2(10)
      WRITE (6,600)
C
      WRITE (6,605)
C
      -----
      IF (DELTA.EQ.0) GOTO 130
      IF (K.LT.3) GOTO 134
      DELTA = 0
      GOTO 140
130  DELTA = 9.*DPHI
      IF (K.EQ.3) GOTO 132
      GOTO 11
132  WRITE (6,605)
      K=0
      GOTO 11
134  DELTA=0
      GOTO 150
140  CONTINUE
      IF (K.EQ.3) GOTO 150
      K = 0
      WRITE (6,605)
150  ALFA = ALFA +DPHI*0.5
      ALFAB = ALFAB + 5.
      IF (ALFAB.GT.180.) GOTO 999
      GOTO 10
C
C
C
      600 FORMAT (5X,'-----
      *-----')
C
      601 FORMAT (5X,'I      I                                PHI (GRAD)
      *                                I')
C
      602 FORMAT (5X,'I FAKTORI      0  I  10  I  20  I  30  I  40  I
      - 45  I  50  I  60  I  70  I  80  I  90  I')
```

```
C
603 FORMAT (5X,'I',3X,A,2X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
C
604 FORMAT (5X,'I',A,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
C
605 FORMAT ('1'/)
C
606 FORMAT (//10X,'ALPHA = ',F6.2,' GRAD'//)
C
607 FORMAT (5X,'I',3X,A,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
C
608 FORMAT (5X,'I FAKTORI 90 I 100 I 110 I 120 I 130 I
- 135 I 140 I 150 I 160 I 170 I 180 I')
C
999 STOP
END
```



C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*  
\*\*\* DREIECK \*\*\*  
\*\*\*\*\*

Anhang C4

PROGRAMM ZUR BERECHNUNG VON SPANNUNGEN UM DREIECKIGE  
EINSCHLUESSE

DIMENSION AR1(11),AI1(11),AR2(11),AI2(11),AR3(11),AI3(11),  
\*AR4(11),AR5(11),AI5(11),AR6(11),AI6(11),AR7(11),AI7(11),AR8(11),  
\*AI8(11),AR9(11),AR10(11),AI10(11),AR11(11),AI11(11),  
\*AR12(11),AI12(11),AR15(11),  
\*AI15(11),AR16(11),AI16(11),AR17(11),AI17(11),AR18(11),AI18(11),  
\*AR19(11),AR20(11),AI20(11),AR22(11),  
\*AI22(11),AR23(11),AI23(11),AR24(11),AI24(11),  
\*SIGPHI(11),SIGRA(11),TAU(11),SIGMA1(11),SIGMA2(11)

C  
C

CHARACTER FAKTOR\*4, SPANNG\*7

AM = 0.3333  
ANUE = 0.3  
IZUSTA = 1  
IF (IZUSTA.EQ.1) CAPP A = (3.-ANUE)/(1.+ANUE)  
IF (IZUSTA.EQ.2) CAPP A = 3.- 4.\*ANUE  
ALFA = 0.  
ALFAB = 0.  
K = 0  
DELTA = 0  
10 WRITE (6,606) ALFAB  
11 DPFI = 3.141593/18.  
K = K+1  
WRITE (6,600)  
WRITE (6,601)  
WRITE (6,600)  
IF (DELTA.NE.0) GOTO 12  
WRITE (6,602)  
GOTO 13  
12 WRITE (6,608)  
13 WRITE (6,600)

C

A = (2.\*AM)/(4.\*CAPP A)  
B = (1.+2.\*AM\*AM)/2.  
C = AM\*AM/CAPP A  
D = 4.\*AM/CAPP A  
E = 6.\*C - 2.\*AM\*D  
F = -4.\*AM\*B + 4.\*AM\*C + D  
G = 6.\*C + 3./CAPP A

C

DO 50 I=1,11  
PHI = DPFI\*(I-1) + DELTA  
IF (I.EQ.11) PHI = 4.5\*DPFI + DELTA

C

AR1(I) = A\*COS(PHI) - 0.25\*COS(2.\*PHI) - COS(2.\*ALFA)/(2.\*CAPP A)  
AI1(I) = 0.25\*SIN(2.\*PHI) - SIN(2.\*ALFA)/(2.\*CAPP A) + A\*SIN(PHI)  
AR2(I) = - COS(2.\*PHI) + 2.\*COS(PHI)\*AM  
AI2(I) = SIN(2.\*PHI) + SIN(PHI)\*2.\*AM  
AR3(I) = AR1(I)\*AR2(I) + AI1(I)\*AI2(I)  
AI3(I) = AI1(I)\*AR2(I) - AI2(I)\*AR1(I)  
AR4(I) = AR2(I)\*AR2(I) + AI2(I)\*AI2(I)  
AR5(I) = COS(3.\*PHI)\*COS(2.\*ALFA) + SIN(2.\*ALFA)\*SIN(3.\*PHI)  
AI5(I) = SIN(2.\*ALFA)\*COS(3.\*PHI) - COS(2.\*ALFA)\*SIN(3.\*PHI)  
AR6(I) = COS(2.\*PHI) \*(1.5\*AM-3.\*A)  
\*\* AR5(I)/CAPP A + COS(2.\*ALFA)\*AM/CAPP A



C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*  
\*\*\* DREIECK \*\*\*  
\*\*\*\*\*

Anhang C4

PROGRAMM ZUR BERECHNUNG VON SPANNUNGEN UM DREIECKIGE  
EINSCHLUESSE

DIMENSION AR1(11),AI1(11),AR2(11),AI2(11),AR3(11),AI3(11),  
\*AR4(11),AR5(11),AI5(11),AR6(11),AI6(11),AR7(11),AI7(11),AR8(11),  
\*AI8(11),AR9(11),AR10(11),AI10(11),AR11(11),AI11(11),  
\*AR12(11),AI12(11),AR15(11),  
\*AI15(11),AR16(11),AI16(11),AR17(11),AI17(11),AR18(11),AI18(11),  
\*AR19(11),AR20(11),AI20(11),AR22(11),  
\*AI22(11),AR23(11),AI23(11),AR24(11),AI24(11),  
\*SIGPHI(11),SIGRA(11),TAU(11),SIGMA1(11),SIGMA2(11)

C  
C

CHARACTER FAKTOR\*4, SPANNG\*7

AM = 0.3333  
ANUE = 0.3  
IZUSTA = 1  
IF (IZUSTA.EQ.1) CAPP A = (3.-ANUE)/(1.+ANUE)  
IF (IZUSTA.EQ.2) CAPP A = 3.- 4.\*ANUE  
ALFA = 0.  
ALFAB = 0.  
K = 0  
DELTA = 0  
10 WRITE (6,606) ALFAB  
11 DPHI = 3.141593/18.  
K = K+1  
WRITE (6,600)  
WRITE (6,601)  
WRITE (6,600)  
IF (DELTA.NE.0) GOTO 12  
WRITE (6,602)  
GOTO 13  
12 WRITE (6,608)  
13 WRITE (6,600)

C

A = (2.\*AM)/(4.\*CAPP A)  
B = (1.+2.\*AM\*AM)/2.  
C = AM\*AM/CAPP A  
D = 4.\*AM/CAPP A  
E = 6.\*C - 2.\*AM\*D  
F = -4.\*AM\*B + 4.\*AM\*C + D  
G = 6.\*C + 3./CAPP A

C

DO 50 I=1,11  
PHI = DPHI\*(I-1) + DELTA  
IF (I.EQ.11) PHI = 4.5\*DPHI + DELTA

C

AR1(I) = A\* $\cos(\text{PHI}) - 0.25*\cos(2.*\text{PHI}) - \cos(2.*\text{ALFA})/(2.*\text{CAPP A}) + A*\sin(\text{PHI})$   
AI1(I) = 0.25\*SIN(2.\*PHI) - SIN(2.\*ALFA)/(2.\*CAPP A) + A\*SIN(PHI)  
AR2(I) = - $\cos(2.*\text{PHI}) + 2.*\cos(\text{PHI})*AM$   
AI2(I) = SIN(2.\*PHI) + SIN(PHI)\*2.\*AM  
AR3(I) = AR1(I)\*AR2(I) + AI1(I)\*AI2(I)  
AI3(I) = AI1(I)\*AR2(I) - AI2(I)\*AR1(I)  
AR4(I) = AR2(I)\*AR2(I) + AI2(I)\*AI2(I)  
AR5(I) =  $\cos(3.*\text{PHI})*\cos(2.*\text{ALFA}) + \sin(2.*\text{ALFA})*\sin(3.*\text{PHI})$   
AI5(I) =  $\sin(2.*\text{ALFA})*\cos(3.*\text{PHI}) - \cos(2.*\text{ALFA})*\sin(3.*\text{PHI})$   
AR6(I) =  $\cos(2.*\text{PHI}) * (1.5*AM-3.*A)$   
\*\* AR5(I)/CAPP A +  $\cos(2.*\text{ALFA})*AM/CAPP A$

```
AI6(I) = SIN(2.*PHI) * (3.*A-1.5*AM)
**AI5(I)/CAPPA + SIN(2.*ALFA)*AM/CAPPA
AR7(I) = AR2(I)*AR2(I) - AI2(I)*AI2(I)
AI7(I) = 2.*AR2(I)*AI2(I)
ARB(I) = AR6(I)*AR7(I) + AI6(I)*AI7(I)
AIB(I) = AI6(I)*AR7(I) - AI7(I)*AR6(I)
AR9(I) = AR7(I)*AR7(I) + AI7(I)*AI7(I)
AR10(I) = COS(PHI) + AM*COS(2.*PHI)
AI10(I) = SIN(PHI) - AM*SIN(2.*PHI)
AR11(I) = ARB(I)*AR10(I) - AIB(I)*AI10(I)
AI11(I) = AIB(I)*AR10(I) + AI10(I)*ARB(I)
AR12(I) = COS(2.*ALFA)*COS(2.*PHI) - SIN(2.*ALFA)*SIN(2.*PHI)
AI12(I) = COS(2.*ALFA)*SIN(2.*PHI) + SIN(2.*ALFA)*COS(2.*PHI)
AR15(I) = 2.*AM*COS(3.*PHI) - 1.
AI15(I) = 2.*AM*SIN(3.*PHI)
AR16(I) = AR15(I)*AR15(I) - AI15(I)*AI15(I)
AI16(I) = 2.*AR15(I)*AI15(I)
AR17(I) = C - B + E*COS(6.*PHI)
** F*COS(3.*PHI) - G*AR12(I)
AI17(I) = E*SIN(6.*PHI) + F*SIN(3.*PHI)
*- G*AI12(I)
AR18(I) = AR17(I)*AR16(I) + AI17(I)*AI16(I)
AI18(I) = AI17(I)*AR16(I) - AR17(I)*AI16(I)
AR19(I) = AR16(I)*AR16(I) + AI16(I)*AI16(I)
AR20(I) = AR12(I) + AR18(I)/AR19(I) + 0.5*CAPPA
AI20(I) = AI18(I)/AR19(I) - AI12(I)
AR22(I) = AR11(I)/AR9(I) + 0.5*AR20(I)
AI22(I) = AI11(I)/AR9(I) + 0.5*AI20(I)
AR23(I) = COS(2.*PHI)*AR22(I) - SIN(2.*PHI)*AI22(I)
AI23(I) = SIN(2.*PHI)*AR22(I) + COS(2.*PHI)*AI22(I)
AR24(I) = AR23(I)*AR2(I) - AI23(I)*AI2(I)
AI24(I) = AI23(I)*AR2(I) + AI2(I)*AR23(I)
C
SIGPHI(I) = AR24(I)/AR4(I) + 2.*AR3(I)/AR4(I)
SIGRA(I) = 2.*AR3(I)/AR4(I) - AR24(I)/AR4(I)
TAU(I) = AI24(I)/AR4(I)
C
50 CONTINUE
C
GOTO 80
C
FAKTOR = 'AR1 '
WRITE(6,603) FAKTOR,AR1(1),AR1(2),AR1(3),AR1(4),AR1(5),AR1(11),
*AR1(6),AR1(7),AR1(8),AR1(9),AR1(10)
WRITE(6,600)
C
FAKTOR ='AI1 '
WRITE(6,603) FAKTOR,AI1(1),AI1(2),AI1(3),AI1(4),AI1(5),AI1(11),
*AI1(6),AI1(7),AI1(8),AI1(9),AI1(10)
WRITE(6,600)
C
FAKTOR ='AR2 '
WRITE(6,603) FAKTOR,AR2(1),AR2(2),AR2(3),AR2(4),AR2(5),AR2(11),
*AR2(6),AR2(7),AR2(8),AR2(9),AR2(10)
WRITE(6,600)
C
FAKTOR ='AI2 '
WRITE(6,603) FAKTOR,AI2(1),AI2(2),AI2(3),AI2(4),AI2(5),AI2(11),
*AI2(6),AI2(7),AI2(8),AI2(9),AI2(10)
WRITE(6,600)
C
C
C
C
```



```
FAKTOR ='AR3 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR3 (1),AR3 (2),AR3 (3),AR3 (4),AR3 (5),AR3 (11),  
*AR3 (6),AR3 (7),AR3 (8),AR3 (9),AR3 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AI3 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI3 (1),AI3 (2),AI3 (3),AI3 (4),AI3 (5),AI3 (11),  
*AI3 (6),AI3 (7),AI3 (8),AI3 (9),AI3 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AR4 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR4 (1),AR4 (2),AR4 (3),AR4 (4),AR4 (5),AR4 (11),  
*AR4 (6),AR4 (7),AR4 (8),AR4 (9),AR4 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AR5 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR5 (1),AR5 (2),AR5 (3),AR5 (4),AR5 (5),AR5 (11),  
*AR5 (6),AR5 (7),AR5 (8),AR5 (9),AR5 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AI5 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI5 (1),AI5 (2),AI5 (3),AI5 (4),AI5 (5),AI5 (11),  
*AI5 (6),AI5 (7),AI5 (8),AI5 (9),AI5 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AR6 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR6 (1),AR6 (2),AR6 (3),AR6 (4),AR6 (5),AR6 (11),  
*AR6 (6),AR6 (7),AR6 (8),AR6 (9),AR6 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AI6 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI6 (1),AI6 (2),AI6 (3),AI6 (4),AI6 (5),AI6 (11),  
*AI6 (6),AI6 (7),AI6 (8),AI6 (9),AI6 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AR7 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR7 (1),AR7 (2),AR7 (3),AR7 (4),AR7 (5),AR7 (11),  
*AR7 (6),AR7 (7),AR7 (8),AR7 (9),AR7 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AI7 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AI7 (1),AI7 (2),AI7 (3),AI7 (4),AI7 (5),AI7 (11),  
*AI7 (6),AI7 (7),AI7 (8),AI7 (9),AI7 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='ARB '  
WRITE (6,603) FAKTOR,ARB (1),ARB (2),ARB (3),ARB (4),ARB (5),ARB (11),  
*ARB (6),ARB (7),ARB (8),ARB (9),ARB (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AR9 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR9 (1),AR9 (2),AR9 (3),AR9 (4),AR9 (5),AR9 (11),  
*AR9 (6),AR9 (7),AR9 (8),AR9 (9),AR9 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

```
FAKTOR ='AR10 '  
WRITE (6,603) FAKTOR,AR10 (1),AR10 (2),AR10 (3),AR10 (4),AR10 (5),  
*AR10 (11),AR10 (6),AR10 (7),AR10 (8),AR10 (9),AR10 (10)  
WRITE (6,600)
```

C

C

C

C

C

```
FAKTOR ='AI10'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI10(1), AI10(2), AI10(3), AI10(4), AI10(5),  
*AI10(11), AI10(6), AI10(7), AI10(8), AI10(9), AI10(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AR11'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR11(1), AR11(2), AR11(3), AR11(4), AR11(5),  
*AR11(11), AR11(6), AR11(7), AR11(8), AR11(9), AR11(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AI11'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI11(1), AI11(2), AI11(3), AI11(4), AI11(5),  
*AI11(11), AI11(6), AI11(7), AI11(8), AI11(9), AI11(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AR12'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR12(1), AR12(2), AR12(3), AR12(4), AR12(5),  
*AR12(11), AR12(6), AR12(7), AR12(8), AR12(9), AR12(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AI12'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI12(1), AI12(2), AI12(3), AI12(4), AI12(5),  
*AI12(11), AI12(6), AI12(7), AI12(8), AI12(9), AI12(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AR15'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR15(1), AR15(2), AR15(3), AR15(4), AR15(5),  
*AR15(11), AR15(6), AR15(7), AR15(8), AR15(9), AR15(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AI15'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI15(1), AI15(2), AI15(3), AI15(4), AI15(5),  
*AI15(11), AI15(6), AI15(7), AI15(8), AI15(9), AI15(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AR16'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR16(1), AR16(2), AR16(3), AR16(4), AR16(5),  
*AR16(11), AR16(6), AR16(7), AR16(8), AR16(9), AR16(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AI16'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI16(1), AI16(2), AI16(3), AI16(4), AI16(5),  
*AI16(11), AI16(6), AI16(7), AI16(8), AI16(9), AI16(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AR17'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR17(1), AR17(2), AR17(3), AR17(4), AR17(5),  
*AR17(11), AR17(6), AR17(7), AR17(8), AR17(9), AR17(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AI17'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI17(1), AI17(2), AI17(3), AI17(4), AI17(5),  
*AI17(11), AI17(6), AI17(7), AI17(8), AI17(9), AI17(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
FAKTOR ='AR18'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR18(1), AR18(2), AR18(3), AR18(4), AR18(5),  
*AR18(11), AR18(6), AR18(7), AR18(8), AR18(9), AR18(10)  
WRITE (6,600)  
  
C  
C  
C  
C  
C
```

FAKTOR ='AI18'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI18(1), AI18(2), AI18(3), AI18(4), AI18(5),  
\*AI18(11), AI18(6), AI18(7), AI18(8), AI18(9), AI18(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AR19'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR19(1), AR19(2), AR19(3), AR19(4), AR19(5),  
\*AR19(11), AR19(6), AR19(7), AR19(8), AR19(9), AR19(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AR20'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR20(1), AR20(2), AR20(3), AR20(4), AR20(5),  
\*AR20(11), AR20(6), AR20(7), AR20(8), AR20(9), AR20(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AI20'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI20(1), AI20(2), AI20(3), AI20(4), AI20(5),  
\*AI20(11), AI20(6), AI20(7), AI20(8), AI20(9), AI20(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AR22'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR22(1), AR22(2), AR22(3), AR22(4), AR22(5),  
\*AR22(11), AR22(6), AR22(7), AR22(8), AR22(9), AR22(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AI22'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI22(1), AI22(2), AI22(3), AI22(4), AI22(5),  
\*AI22(11), AI22(6), AI22(7), AI22(8), AI22(9), AI22(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AR23'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR23(1), AR23(2), AR23(3), AR23(4), AR23(5),  
\*AR23(11), AR23(6), AR23(7), AR23(8), AR23(9), AR23(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AI23'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI23(1), AI23(2), AI23(3), AI23(4), AI23(5),  
\*AI23(11), AI23(6), AI23(7), AI23(8), AI23(9), AI23(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AR24'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AR24(1), AR24(2), AR24(3), AR24(4), AR24(5),  
\*AR24(11), AR24(6), AR24(7), AR24(8), AR24(9), AR24(10)  
WRITE (6,600)

C

FAKTOR ='AI24'  
WRITE (6,603) FAKTOR, AI24(1), AI24(2), AI24(3), AI24(4), AI24(5),  
\*AI24(11), AI24(6), AI24(7), AI24(8), AI24(9), AI24(10)  
WRITE (6,600)

C

C

C

BO SPANNG = ' SIGPHI'  
WRITE (6,604) SPANNG, SIGPHI(1), SIGPHI(2), SIGPHI(3), SIGPHI(4),  
\*SIGPHI(5), SIGPHI(11), SIGPHI(6), SIGPHI(7), SIGPHI(8), SIGPHI(9),  
\*SIGPHI(10)  
WRITE (6,600)

C

C

C

C

C

C

```
SPANNG = ' SIGRA '  
WRITE (6,604) SPANNG, SIGRA(1), SIGRA(2), SIGRA(3), SIGRA(4),  
*SIGRA(5), SIGRA(11),SIGRA(6), SIGRA(7), SIGRA(8), SIGRA(9),  
*SIGRA(10)  
WRITE (6,600)  
C  
SPANNG = ' TAU '  
WRITE(6,604) SPANNG, TAU(1), TAU(2), TAU(3), TAU(4), TAU(5),  
*TAU(11),TAU(6), TAU(7), TAU(8), TAU(9), TAU(10)  
WRITE (6,600)  
C  
C  
C BERECHNUNG DER HAUPTSPANNUNGEN  
C -----  
DO 100 I =1,11  
SUMA1 = 0.5*(SIGPHI(I) + SIGRA(I))  
SUMA2 = 0.5*(SIGRA(I) - SIGPHI(I))  
SUMA20= SUMA2*SUMA2  
WARGUM= SUMA20 + TAU(I)*TAU(I)  
WURZEL= SQRT(WARGUM)  
SIGMA1(I) = SUMA1 + WURZEL  
100 SIGMA2(I) = SUMA1 - WURZEL  
SPANNG = ' SIGMA1'  
WRITE(6,604) SPANNG, SIGMA1(1), SIGMA1(2), SIGMA1(3), SIGMA1(4),  
*SIGMA1(5), SIGMA1(11), SIGMA1(6), SIGMA1(7), SIGMA1(8),  
*SIGMA1(9), SIGMA1(10)  
WRITE (6,600)  
SPANNG = ' SIGMA2'  
WRITE(6,604) SPANNG, SIGMA2(1), SIGMA2(2), SIGMA2(3), SIGMA2(4),  
*SIGMA2(5), SIGMA2(11), SIGMA2(6), SIGMA2(7), SIGMA2(8),  
*SIGMA2(9), SIGMA2(10)  
WRITE (6,600)  
C  
C WRITE (6,605)  
C -----  
IF (DELTA.EQ.0) GOTO 130  
IF (K.LT.3) GOTO 134  
DELTA = 0  
GOTO 140  
130 DELTA = 9.*DPHI  
IF (K.EQ.3) GOTO 132  
GOTO 11  
132 WRITE (6,605)  
K=0  
GOTO 11  
134 DELTA=0  
GOTO 150  
140 CONTINUE  
IF (K.EQ.3) GOTO 150  
K = 0  
WRITE (6,605)  
150 ALFA = ALFA +DPHI*0.5  
ALFAB = ALFAB + 5.  
IF (ALFAB.GT.180.) GOTO 999  
GOTO 10  
C  
C  
C  
600 FORMAT (5X,'-----  
*-----')  
C  
601 FORMAT (5X,'I I PHI (GRAD)  
* I')  
C  
C  
C
```

```
602 FORMAT (5X,'I FAKTORI    0  I  10  I  20  I  30  I  40  I  
-   45  I  50  I  60  I  70  I  80  I  90  I')
```

C

```
603 FORMAT (5X,'I',3X,A,2X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,  
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'  
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
```

C

```
604 FORMAT (5X,'I',A,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,  
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'  
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
```

C

```
605 FORMAT ('I')
```

C

```
606 FORMAT (//10X,'ALPHA = ',F6.2,' GRAD'//)
```

C

```
607 FORMAT (5X,'I',3X,A,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,  
*1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I'  
*,1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I',1X,F6.2,1X,'I')
```

C

```
608 FORMAT (5X,'I FAKTORI    90  I  100  I  110  I  120  I  130  I  
-   135  I  140  I  150  I  160  I  170  I  180  I')
```

C

```
999 STOP  
END
```

In der Schriftenreihe des Instituts für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der Technischen Universität Braunschweig, die im Selbstverlag herausgegeben wird, sind bisher erschienen: (ISSN 0178-5796)

- Heft 1: Über das Verdunstungsverhalten und den Nachweis öligler Holzschutzmittel (Dissertation). (1962)  
von Rolf Deters -vergriffen-
- Heft 2: Das Verhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen unter Feuerangriff. (1963)  
von Karl Kordina -vergriffen-
- Heft 3: Zur Stabilitätsfrage des Zweigelenkbogens mit biegeweichem Zugband und schlaffen Hangestangen (Diss.) (1963).  
von Josef Eibl -vergriffen-
- Heft 4: Ein Verfahren zur Bestimmung des Vorspannverlustes infolge Schlupf in der Verankerung. Zur Frage der Temperaturbeanspruchung von kreiszylindrischen Stahlbetonsilos. (1964)  
von Karl Kordina und Josef Eibl -vergriffen-
- Heft 5: Über den Schalungsdruck von Frischbeton (Diss.). (1964)  
von Helmut Ertingshausen
- Heft 6: Transportphänomene in Betonporen (Diss.). (1966)  
von Nils Valerian Waubke
- Heft 7: Ein Beitrag zur rechnerischen Bemessung von brandbeanspruchten balkenartigen Stahlbetonbauteilen. (Diss.) (1967).  
von Herbert Ehm -vergriffen-
- Heft 8: Möglichkeiten der Bestimmung der kritischen Last von Stab- und Flächentragwerken mit Hilfe ihrer Eigenfrequenz (Diss.). (1967)  
von Joachim Steinert -vergriffen-
- Heft 9: Untersuchungen an dämmschichtbildenden Feuer-  
schutzmitteln (Diss.). (1967)  
von Axel Lämmke -vergriffen-
- Heft 10: Beitrag zur Frage der Kippstabilität aufgehängter Balkenträger und gerader, flächenartiger Träger (Diss.) (1968).  
von Kamal Fouad Rafla -vergriffen-
- Heft 11: Die Traglast von offenen, kreisförmigen Stahlbetonquerschnitten - Brazier-Effekt - (Diss.). (1968)  
von György Iványi -vergriffen-
- Heft 12: Brandverhalten verschiedener Bauplatten aus Baustoffen der Klassen A und B, insbesondere aus Baustoffen der Klasse A 2. (1969)  
von Claus Meyer-Ottens -vergriffen-

- Heft 13: Zum Tragverhalten von kreisförmigen Doppelsilos unter Berücksichtigung der Eigensteifigkeit des Füllgutes. (Diss.) (1969).  
von Günther Fuchs -vergriffen-
- Heft 14: Wände aus Holz und Holzwerkstoffen unter Feuerangriff. (1970)  
von Claus Meyer-Ottens -vergriffen-
- Heft 15: Beurteilung von Bauwerksfestigkeiten an Hand von Betongütewürfeln und -bohrproben (Diss.). (1970)  
von Ralf Lewandowski -vergriffen-
- Heft 16: Untersuchungen zur Frage der Rissesicherung von leichten Trennwänden aus Gips-Wandbauplatten. (Diss.) (1970).  
von Fritz Joachim Neubauer -vergriffen-
- Heft 17: Brandverhalten von Bauteilen aus dampfgehartetem Gasbeton. (1970)  
von Claus Meyer-Ottens und Karl Kordina
- Heft 18: Die Stahlblech-Holz-Nagelverbindung und ihre Anwendung - Grundlagen und Bemessungsvorschläge -. (Diss.) (1971).  
von Wilfried Bödeker
- Heft 19: Bauaufsichtliche Brandschutzvorschriften - Beispiele für ihre Erfüllung bei Wänden, Brandwänden und Decken -. (1971)  
von Claus Meyer-Ottens -vergriffen-
- Heft 20: Das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbrückenpfeilern mit Rollenlagern (Diss.). (1972)  
von Kurt Liermann
- Heft 21: Zum Trag- und Verformungsverhalten ebener Stockwerksrahmen aus Stahlbeton. (Diss.) (1972).  
von Béla Jankó
- Heft 22: Zur Frage des Spannungsrißkorrosionsverhaltens kohlenstoffarmer Betonstähle in Nitratlösungen unter Berücksichtigung praxisnaher Verhältnisse (Diss.). (1972)  
von Ulf Nürnberger
- Heft 23: Zur Frage der Abplatzungen an Betonbauteilen aus Normalbeton bei Brandbeanspruchung. (Diss.) (1972).  
von Claus Meyer-Ottens -vergriffen-
- Heft 24: Über die Steinkohlenflugasche und ihre Wirkung auf die Eigenschaften von Leichtbeton mit geschlossenem Gefüge im frischen und festen Zustand (Diss.). (1973)  
von Hassan Taha El-Arousy

- Heft 25: Mechanismen der Spannungskorrosion von Spannstählen im Hinblick auf ihr Verhalten in Spannbetonkonstruktionen (Diss.). (1973)  
von Günter Rieche
- Heft 26: Beitrag zur rechnerischen Ermittlung von Zwangsschnittgrößen unter Berücksichtigung des wirklichen Verformungsverhaltens des Stahlbetons (Diss.). (1974)  
von Eckhard Tennstedt
- Heft 27: Zur Kinetik festigkeitsmindernder Reaktionen in Normalbetonen bei hohen Temperaturen (Diss.) (1973).  
von Ulrich Schneider -vergriffen-
- Heft 28: Ein dreiparametrisches, komplexes Ultraschall-Prüfverfahren für die zerstörungsfreie Materialprüfung im Bauwesen (Diss.). (1974)  
von Jürgen Neisecke -vergriffen-
- Heft 29: Traglastermittlung an Stahlbeton-Druckgliedern. (1974)  
von Karl Kordina, Peter Maack und Olaf Hjorth
- Heft 30: Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit von Randbalken bei Stahlbetondecken. (1974)  
von Josef Eibl und György Iványi -vergriffen-
- Heft 31: Stabilitätsnachweise von Rahmensystemen im Stahlbetonbau. (1974)  
von Karl Kordina und Béla Jankó
- Heft 32: Ein Beitrag zur Frage der Festigkeiten und des Verbundverhaltens von Stahl und Beton bei hohen Beanspruchungsgeschwindigkeiten (Diss.) (1976).  
von Olaf Hjorth -vergriffen-
- Heft 33: Traglastberechnung instationär thermisch belasteter Stahlbetondruckglieder mittels zwei- und dreidimensionaler Diskretisierung. (Diss.) (1976).  
von Wolfram Klingsch -vergriffen-
- Heft 34: Thermische Zerstörung natürlicher Zuschlagstoffe im Beton (Diss.). (1977)  
von Farid Djamous -vergriffen-
- Heft 35: Zur Frage des Trag- und Verformungsverhaltens ebener Stahlbetonrahmen im Brandfall (Diss.). (1977)  
von Ataman Haksever -vergriffen-
- Heft 36: Ein Beitrag zur Traglastermittlung von vierseitig gelagerten Stahlbetonwänden (Diss.) (1977).  
von Karl-Heinz Storkebaum
- Heft 37: Zur thermischen Beanspruchung von Außenstützen im Brandfall (Diss.). (1977)  
von Rolf Bechtold



- Heft 38: Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit von Kiesbeton aus dem Wassereindringverhalten. (1978)  
von Joachim Steinert
- Heft 39: Ein haufwerkstheoretisches Modell der Restfestigkeit geschädigter Betone (Diss.) (1978).  
von Rolf Weiß
- Heft 40: Zum Schwingkriechen von Beton (Diss.). (1978)  
von Willi Alda
- Heft 41: Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken mit rechteckigem Querschnitt unter kombinierter Beanspruchung aus Biegung, Querkraft und Torsion (Diss.). (1979)  
von Manfred Teutsch
- Heft 42: Ein Beitrag zur Frage des Kriechens und der Relaxation von Beton unter hohen Temperaturen. (Habil.-Schr.)(1979).  
von Ulrich Schneider -vergriffen-
- Heft 43: Veröffentlichungen 1967 - 1979.(1979).
- Heft 44: Druckmessungen in Silozellen mit einer neu entwickelten Sonde. (1979)  
von Karl Kordina und Helmut Fröning
- Heft 45: Ein Beitrag zur Zuverlässigkeit frei gelagerter Stahlbetonstützen unter genormter Brandeinwirkung. (Diss.) (1980).  
von Volker Henke -vergriffen-
- Heft 46: Wärmebilanzrechnungen für Brandräume mit unterschiedlichen Randbedingungen (Teil I). (1981)  
von Ulrich Schneider und Aysen Haksever -vergriffen-
- Heft 47: Partiiell brandbeanspruchte Stahlbetondecken - Berechnung des inneren Zwanges mit einem Scheibenmodell - (Diss.). (1981)  
von Robert Walter
- Heft 48: Zum Verformungsverhalten gerissener Stahlbetonbalken unter Einschluß der Mitwirkung des Betons auf Zug in Abhängigkeit von Last und Zeit (Diss.). (1981)  
von Björn Svensvik
- Heft 49: Veröffentlichungen 1967 - 1981.(1981).
- Heft 50: Die Steifigkeit und das Verformungsverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken unter kombinierter Beanspruchung aus Torsion, Biegemoment, Querkraft und Axialkraft. (1982)  
von Surendra K. Ojha
- Heft 51: Zusammenstellung und Anwendung Bayes'scher Verfahren bei der Stichprobenbeurteilung. (1982)  
von Volker Henke

- Heft 52: Stahlbetonstützen mit Rechteckquerschnitten bei natürlichen Bränden (Habil.-Schr.TU Istanbul). (1982)  
von Ataman Haksever
- Heft 53: Untersuchung des Riß- und Verformungsverhaltens segmentärer Spannbetonbauteile (Diss.). (1982)  
von Viggo Weber
- Heft 54: Zur Tragfähigkeit von Verklebungen zwischen Baustahl und Beton - Geklebte Bewehrung -. (Diss.) (1982).  
von Ernst-Holger Ranisch ISBN 3-89288-010-7
- Heft 55: Zum Einfluß tiefer Temperaturen auf Festigkeit und Verformung von Beton. (Diss.) (1982).  
von Günter Wiedemann -vergriffen-
- Heft 56: Ein geometrisch und physikalisch nichtlineares Rechenmodell zur optimalen Biegebemessung ebener Stahlbetonrahmen(Diss.)(1982).  
von Reiner Timm
- Heft 57: Untersuchungen über den Verbund zwischen Stahl und Beton bei hohen Temperaturen (Diss.). (1983)  
von Ulrich Diederichs
- Heft 58: Wärmebilanzrechnungen in Verbindung mit Versuchen in Brandräumen (Teil II). (1983)  
von Ulrich Schneider
- Heft 59: Wärmebilanzrechnungen in Brandräumen unter Berücksichtigung der Mehrzonenmodellbildung (Teil III). (1983)  
von Reinhold Dobbernack und Ulrich Schneider
- Heft 60: Verbesserungen und Erweiterungen von Ultraschallprüfverfahren zur zerstörungsfreien Fehlstellen- und Qualitätskontrolle von Betonbauteilen (Diss.). (1983)  
von Wolfgang Hillger ISBN 3-89288-014-X
- Heft 61: Zur Wirklichkeitsnahe der Lastannahmen in Silovorschriften für Zellen aus Stahlbeton und Spannbeton. (Diss.)(1984).  
von Franz Blume ISBN 3-89288-013-1
- Heft 62: Das Durchstanzen von Platten aus Stahlbeton - Tragverhalten, Berechnung, Bemessung - (Diss.). (1984)  
von Diedrich Nölting ISBN 3-89288-012-3
- Heft 63: Tragverhalten von Stahlbetonplatten im baupraktischen Einbauzustand bei Brandbeanspruchung (Diss.). (1985)  
von Jürgen Wesche ISBN 3-89288-009-3
- Heft 64: Untersuchungen zur Technologie des Gleitschalungsbau (Diss.). (1985)  
von Siegfried Droese ISBN 3-89288-000-X

- Heft 65: Forschungsarbeiten 1978 -1983. (1984)  
Hrsg.: Inst. für Baustoffe ISBN 3-89288-001-8
- Heft 66: Einfluß der Verbundart auf die Grenztragfähigkeit  
von Spannbetonbalken. (Diss.)(1985).  
von Josef Hegger ISBN 3-89288-002-6
- Heft 67: Zum Tragverhalten von Verankerungen für hochfeste  
Stäbe aus Glasfaserverbundwerkstoff als Bewehrung  
im Spannbetonbau (Diss.). (1985)  
von Bernhard Kepp ISBN 3-89288-003-4
- Heft 68: Zum Einfluß hoher Temperaturen auf das Verbund-  
verhalten von einbetonierten Bewehrungsstäben  
(Diss.). (1985)  
von Helmut Sager ISBN 3-89288-004-2
- Heft 69: Zur praxisiertechen brandschutztechnischen Beur-  
teilung von Stützen aus Stahl und Beton (Diss.).  
(1986)  
von Rüdiger Haß ISBN 3-89288-005-0
- Heft 70: 17. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschus-  
ses für Stahlbeton. März 1986. Kurzfassungen  
der Beiträge. (1986) ISBN 3-89288-006-9
- Heft 71: Versuche zur Festigkeit und Verformung von Beton  
unter zweiachsender Beanspruchung und hohen Tempe-  
raturen. (Diss.) (1986).  
von Christian Ehm ISBN 3-89288-007-7
- Heft 72: Zum Reiß- und Verformungsverhalten von stahlfaser-  
verstärkten Stahlbetonstäben unter Langzug.  
(Diss.). (1986).  
von Kurt Hartwich ISBN 3-89288-008-5
- Heft 73: Zum Einfluß tiefer Temperaturen auf Verbund und  
Reißbildung von Stahlbetonbauteilen. (Diss.).  
(1987).  
von Jochen Scheuermann ISBN 3-89288-011-5
- Heft 74: Strukturorientierte Analyse und Modellbeschrei-  
bung der thermischen Schädigung von Beton.  
(Diss.). (1987).  
von Konrad Hinrichsmeyer ISBN 3-89288-015-8
- Heft 75: Fachseminar Neue Bemessungsregeln durch Änderung  
der Stahlbeton- und Spannbetonvorschriften DIN  
1045, DIN 4227. Kurzfassungen der Beiträge.  
(1986). ISBN 3-89288-022-9
- Heft 76: Zum Einfluß erhöhter Temperatur auf Festigkeit  
und Verformung von Beton mit unterschiedlichen  
Feuchtegehalten. (Diss.). (1987).  
von Harald Budelmann ISBN 3-89288-016-6

Heft 77: Spannungen und bruchmechanische Vorgänge im Normalbeton unter Zugbeanspruchung. (Diss.). (1987).  
von Fritz Großmann ISBN 3-89288-023-9