

2501-6036

**INSTITUT FÜR BAUSTOFFE, MASSIVBAU UND BRANDSCHUTZ  
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG**

Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Direktoren:

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. K. Kordina

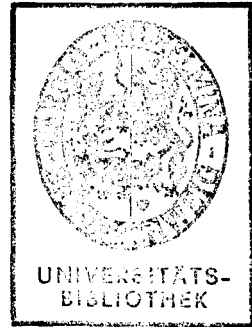
Prof. Dr.-Ing. F. S. Rostásy

**ZUSAMMENSTELLUNG UND ANWENDUNG  
BAYES'SCHER VERFAHREN  
BEI DER STICHPROBENBEURTEILUNG**

von

Volker Henke

(Projekt D 1 des SFB 148)



**HEFT 51**

**BRAUNSCHWEIG**

**1982**

2 TR+

69.81 ; 620.1

699.81 ; 620.193.5

~~X  
BA  
N  
601  
(51)~~

	<u>Seite</u>
I. Allgemeines	
1. Grundlagen	2
1.1 Der Satz von Bayes für stetige Verteilungen	2
1.2 Prediktor-Verteilung	4
2. Anwendungen - Berechnungen der a-posteriori- und Prediktordichten	4
2.1 Bekannte Standardabweichung $\sigma$ der a-posteriori-Verteilung; priori-Verteilung als $N\{\mu', \sigma'\}$	4
2.1.1 Prediktordichte	7
2.2 Bekannte Standardabweichung $\sigma$ der a-posteriori-Verteilung; Gleichverteilung von $\mu$ als a-priori-Verteilung	8
2.2.1 Prediktordichte zu 2.2	13
2.3 Schätzung von $\mu$ und $\sigma$ der a-posteriori-Verteilung bei "geringen Vorinformationen" über $\mu$ und $\sigma$ der a-priori-Verteilung	14
2.3.1 Ableitung der Dichte der Prediktorverteilung	20
3. Beispiele und Anwendungen	23
3.1 Beispiel zu Abschnitt 2.1	
3.1.1 Beispiel zu Abschnitt 2.1.1	26
3.2 Beispiel zu Abschnitt 2.2	26
3.2.1 Beispiel zu Abschnitt 2.2.1 (Anwendung der Prediktordichte)	31
3.3 Anwendung von Abschnitt 2.3	32
3.3.1 Berechnung des unteren Toleranzintervalles für eine Fraktile $x_\epsilon$	33
3.3.2 Berechnung des Toleranzintervalles $x^*$ bei vorgegebenem Sicherheitsindex $\beta$	35
3.4 Beispiele zu Abschnitt 2.3	36
3.4.1 Abschätzen eines Fraktilwertes $x_\epsilon$ für $\mu$ nach (2.81)	36
3.4.2 Abschätzung eines Toleranzintervalles für $x_\epsilon$ nach 3.3.1	38
3.4.3 Abschätzung eines Toleranzintervalles für $x^*$ bei gegebenem Sicherheitsindex $\beta_0$ nach 3.3.2	38
3.4.4 Bestimmung von $x$ mittels der Prediktorverteilung nach 2.3.1	39

	<u>Seite</u>
4. Abnahmekennlinien	41
4.1 Unbekannter Mittelwert und unbekannte Standardabweichung	41
4.2 Bekannte Standardabweichung der Probe	42
4.3 Einstufung in Klassen	44
4.3.1 Unbekannter Mittelwert und unbekannte Standardabweichung	44
4.3.2 Bekannte Standardabweichung	45
5. Unterschreitenswahrscheinlichkeit bei vorgegebenem Abnahmefaktor	48

---

Literaturverzeichnis  
Hilfsprogramme

## I. Allgemeines

Im Zuge der Entwicklung der probabilistischen Betrachtungsweise des Sicherheitsproblems im Bauwesen ergibt sich in verstärktem Maße auch die Frage, wie die Festlegung von Sicherheitselementen aus Versuchsergebnissen in solch einem Rahmen zu betrachten sei. Bei der Festlegung von solchen Sicherheitselementen oder Bemessungswerten liegen z. Z. keine festen und eindeutigen Regeln vor, obwohl sich in der letzten Zeit - bedingt durch die Arbeiten in /13/ und /14/ - eine einheitliche Vorgehensweise abzeichnet. Desweiteren ergibt sich die Schwierigkeit, daß bei zerstörender Prüfung der Stichprobenumfang i. allg. schon aus Kostengründen klein zu sein hat, eine solch kleine Stichprobe jedoch keine zuverlässige Aussage über die zugrunde liegende Grundgesamtheit zuläßt. Dieser Zustand trifft nun in verstärktem Maße auf dem Gebiet des baulichen Brandschutzes zu, da die Prüfvorschriften hier von besonders kleinen Stichprobenumfängen ausgehen.

Andererseits sollte jedoch nicht vergessen werden, daß Prüfergebnisse, welche im Laufe der Jahre gewonnen wurden, ja auch schon einen gewissen Informationsstand darstellen, besonders wenn sie an ähnlichen Prüfkörpern ermittelt wurden. Aus diesem Grunde ist es durchaus wünschenswert, bei der Beurteilung von Bauteilversuchen auch Vorinformationen jeglicher Art mit einbeziehen zu können. Die Möglichkeit hierzu bietet die "Bayes'sche Statistik", nämlich Vorinformationen über einen oder mehrere mögliche Zustände können in der Form von "a priori"-Verteilungen mit in die Beurteilungen eingehen und stellen so den schon bestehenden Informationsstand dar. Nach der Durchführung des Experimentes (Versuches), d. h. einer Vergrößerung des Informationsstandes, können dann unter Berücksichtigung des schon bestehenden Wissensstandes neue Aussagen sozusagen "a posteriori" über die Verteilung des entsprechenden Parameters gemacht werden. Die so gewonnene Verteilung wird die "a posteriori"-Verteilung genannt.

In der Literatur findet man nun die entsprechenden Grundlagen für die jeweilige Fragestellung meist schon dargestellt /1/ - /7/.

Bei Durchsicht dieser Unterlagen hat es sich jedoch gezeigt, daß die meist sehr kurze Darstellung dem noch nicht so mit der Materie vertrauten Leser oft erhebliche Verständnisschwierigkeiten bereitet, so daß bei dem Versuch einer zusammenfassenderen Darstellung auch etwas mehr Wert auf die Ableitung der entsprechenden Größen gelegt wurde. Desweiteren soll auch eine einheitliche Diktion das Verständnis erleichtern helfen.

Diese vorliegende Zusammenstellung soll keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben, sondern stellt nur die Grundlagen dar. Weitergehende Fragestellungen können dann z. B. aus /1/ entnommen und entsprechend behandelt werden.

Weiterhin wird hier von normalverteilten Grundgesamtheiten ausgegangen, deren einzelne Beobachtungen in dem Beobachtungsvektor  $\underline{X}$  zusammengefaßt sein sollen. Da jedoch sehr oft auch von log.-normalverteilten Grundgesamtheiten ausgegangen werden kann, sind die gemachten Angaben bei der Transformation  $\underline{Y} = \ln(\underline{X})$  auch weiterhin unverändert gültig.

## 1. Grundlagen

=====

### 1.1 Der Satz von Bayes für stetige Verteilungen

Mit dem Parameter  $\theta$  werde irgendein Zustand bezeichnet, über dessen Eintreten wir, wie schon zu Anfang erwähnt, Aussagen in der Form der Dichte

$$f'(\theta) \quad \dots \quad (1.1)$$

machen können.

---

' → bezeichnet den "a priori"-Zustand.

" → bezeichnet den "a posteriori"-Zustand.

f ( /... ) → bedeutet: unter der Bedingung, daß ... vorliegt.

Werden nun Experimente durchgeführt mit dem Ziel, zusätzliche Informationen über den zu untersuchenden Parameter  $\theta$  zu gewinnen, werden die Versuchsergebnisse in dem Stichprobenvektor  $\underline{x}$  zusammengefaßt. Als Ergebnis ist nun die neue a-posteriori-Verteilung des betrachteten Parameters  $\theta$  unter Einbeziehung der durch den Versuch zusätzlich gewonnenen Informationen gesucht (1.2).

$$f''(\theta/\underline{x}) \quad \dots (1.2)$$

Nach dem Satz von Bayes gilt nun:

$$f''(\theta/\underline{x}) = \frac{f'(\theta) \cdot f(\underline{x}/\theta)}{f(\underline{x})} \quad \dots (1.3)$$

In (1.3) stellt  $f(\underline{x}/\theta)$  die sogenannte Likelihood-Funktion des oder der unbekanntenen Parameter dar.

$$l(\theta/\underline{x}) = \prod_{i=1}^m f(x_i/\theta) \quad \dots (1.4)$$

Der Ausdruck  $f(\underline{x})$  wird als Randverteilung bezeichnet und ergibt sich aus

$$f(\underline{x}) = \int_{\Theta} f'(\theta) \cdot l(\theta/\underline{x}) d\theta \quad \dots (1.5)$$

Mit diesen Angaben läßt sich der vollständige Satz von Bayes für stetige Verteilungsdichten wie folgt anschreiben:

$$\boxed{f''(\theta/\underline{x}) = \frac{f'(\theta) \cdot l(\theta/\underline{x})}{\int_{\Theta} f'(\theta) \cdot l(\theta/\underline{x}) d\theta}} \quad \dots (1.6)$$

Dabei stellt die Likelihood-Funktion sozusagen die Mutmaßlichkeit dar, eine Stichprobe zu erhalten, die gerade aus den Werten  $\underline{x}$  besteht, und die Randverteilung die Summe aller möglichen Kombinationen von  $f'(\theta)$  und  $l(\theta/\underline{x})$ .

Mit der Dichtefunktion  $f''(\theta/\underline{x})$  können nun die üblichen Operationen zur Bestimmung von oberen oder unteren Grenzwerten (Fraktile) etc. durchgeführt werden. Diese Aussagen beschränken sich jedoch nur auf den gegenwärtigen, d. h. durch die a-priori-Information

schon bekannten und den durch das Experiment hinzugewonnenen Wissensstand.

### 1.2 Prediktor-Verteilung

In vielen Fällen mag es auch von Interesse sein, bei bekanntem Beobachtungsvektor  $\underline{X}$  Aussagen über die zukünftige Größe eines Parameters machen zu können. Natürlich können über den unbekanntem Parameter wiederum nur Wahrscheinlichkeitsaussagen in Form einer Dichte oder Verteilung gemacht werden. Hierzu denkt man sich einen Vektor  $X$  der noch unbeobachteten Werte. Die gemeinsame Dichte der zukünftigen Größe  $x$  und des Parameters  $\theta$  unter der Bedingung, daß der Stichprobenvektor  $\underline{X}$  vorliegt, ist:

$$f(x, \theta / \underline{X}) = f(x / \theta) \cdot f''(\theta / \underline{X}) \quad \dots (1.7)$$

Durch die Bildung der Randverteilungsdichte, d. h. durch Integration über alle  $\theta$  ergibt sich die Dichte der Größe  $x$  unter der Bedingung  $\underline{X}$ : (Die Dichte der daraus resultierenden Prediktorverteilung soll im folgenden mit  $g$  bezeichnet werden.)

$$g(x / \underline{X}) = \int_{\theta} f(x / \theta) \cdot f''(\theta / \underline{X}) d\theta \quad \dots (1.8)$$

Damit liegen eigentlich alle Grundlagen zur Behandlung der Probleme fest. Für die wichtigsten Fälle soll im folgenden die Auflösung der Integrale und Gleichungen (1.6) bzw. (1.8) angegeben werden. Wie schon erwähnt, soll hierbei zum besseren Verständnis auch etwas mehr Wert auf die Herleitung der einzelnen Ausdrücke gelegt werden.

## 2. Anwendungen - Berechnungen der a-posteriori- und Prediktordichten

### 2.1 Bekannte Standardabweichung $\sigma$ der a-posteriori-Verteilung; priori-Verteilung als $N\{\mu', \sigma'\}$

Der wohl günstigste Fall der Schätzung eines Parameters kann darin gesehen werden, wenn die Parameter  $\mu'$  und  $\sigma'$  der priori-Ver-



teilung bekannt sind oder aus einer früheren umfangreichen Stichprobe gewonnen werden können. Desweiteren sei ein Parameter der a-posteriori-Verteilung - hier die Standardabweichung  $\sigma$  - z. B. auch aus früheren Beobachtungen bekannt.

Damit ergeben sich folgende Ausgangsfunktionen: (Parameter  $\theta \hat{=} \mu$ )

a) a-priori-Dichte

$$f'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma'} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \mu'}{\sigma'}\right)^2\right] \dots (2.1)$$

b) Likelihood-Dichte

$$l(\mu/x) = \prod_{i=1}^{m'} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \dots (2.2)$$

Bei dem Umfang  $m'$  der Stichprobe ergibt sich ein Stichprobenmittelwert von:

$$\bar{x} = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} x_i \dots (2.3)$$

und eine Stichprobenvarianz von:

$$s^2 = \frac{1}{(m'-1)} \sum_{i=1}^{m'} (x_i - \bar{x})^2 \dots (2.4)$$

Werden die Beziehungen (2.3) und (2.4) in (2.2) eingesetzt, ergibt sich die Likelihood-Dichte zu:

$$\begin{aligned} l(\mu/x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}\right)^{m'} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m'} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}\right)^{m'} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} [(m'-1)s^2 + m'(\bar{x} - \mu)^2]\right] \dots \end{aligned} (2.5)$$

Aus Gleichung (1.6) ist jedoch ersichtlich, daß die Randverteilung nur einen normierenden Faktor darstellt, zu welchem auch die konstanten Anteile von (2.5) hinzugezogen werden können. Dann ergibt sich, daß die posteriori-Dichte zu

$$f''(\mu/x) \sim \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{m'}}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \mu'}{\sigma'}\right)^2\right] \dots (2.6)$$

proportional ist. Das Produkt zweier Normalverteilungen ergibt

wiederum eine Normalverteilung, und nach Ausmultiplikation des Exponenten ergibt sich:

$$\dots \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - \frac{m' \bar{x} + \frac{\sigma^2 \cdot \mu'}{\sigma'^2}}{m' + \sigma^2 / \sigma'^2}}{\sigma' / \sqrt{m' + \sigma^2 / \sigma'^2}} \right)^2 \right] \dots \quad (2.7)$$

Das heißt, der Mittelwert und die Standardabweichung der a-posteriori-Verteilung von  $\mu$  sind gleich:

$$\mu'' = \frac{m' \bar{x} + \frac{\sigma^2 \cdot \mu'}{\sigma'^2}}{m' + \sigma^2 / \sigma'^2} \dots \quad (2.8)$$

$$\sigma'' = \sigma / \sqrt{m' + \sigma^2 / \sigma'^2} \dots \quad (2.9)$$

Setzt man  $\sigma' = \sigma / \sqrt{m_0}$ , wobei  $m_0$  als Umfang der a-priori-Stichprobe aufzufassen ist, läßt sich der Mittelwert  $\mu''$  zu

$$\boxed{\mu'' = \frac{m' \bar{x} + m_0 \cdot \mu'}{m' + m_0}} \dots \quad (2.10)$$

und die Standardabweichung  $\sigma''$  zu

$$\boxed{\sigma'' = \sigma / \sqrt{m' + m_0}} \dots \quad (2.11)$$

berechnen.

Mit diesen Werten und dem Ausdruck

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} u^2 \right] \dots \quad (2.12)$$

kann die Dichte der a-posteriori-Verteilung von  $\mu$  zu

$$f''(\mu | \underline{x}) = \frac{1}{\sigma''} \cdot \varphi \left( \frac{\mu - \mu''}{\sigma''} \right) \dots \quad (2.13)$$

angegeben werden.

2.1.1 Prediktordichte

Die Prediktordichte ist durch Ausintegration von (1.8) mit

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \dots (2.14)$$

und

$$f''(\mu|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma''} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu''}{\sigma''}\right)^2\right] \dots (2.15)$$

zu ermitteln.

Nach Einsetzen und Ausmultiplizieren der Exponenten ergibt sich:

$$g(x|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma''} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\underbrace{\mu^2 \cdot \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma''^2}\right)}_A - 2\mu \underbrace{\left(\frac{x}{\sigma^2} + \frac{\mu''}{\sigma''^2}\right)}_B + \underbrace{\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\mu''^2}{\sigma''^2}}_C\right\}\right] d\mu \dots (2.16)$$

Bei den auch später folgenden Berechnungen kann das Normalintegral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\eta}{K}\right)^2\right] dx = \sqrt{2\pi} \cdot K \dots (2.17)$$

immer wieder mit herangezogen werden.

Mit den Bezeichnungen A, B und C lässt sich (2.16) auch zu (2.18) umformen.

$$g(x|x) = \frac{1}{2\pi\sigma \cdot \sigma''} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{A\left(\mu - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{A \cdot C - B^2}{A}\right\}\right] d\mu \dots (2.18)$$

Zieht man nun den konstanten Anteil und wendet auf den Rest das Normalintegral an, ergibt sich:

$$g(x|x) = \frac{1 \cdot \sqrt{A/A}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \sigma''} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{A \cdot C - B^2}{A}\right] \dots (2.19)$$

$$g(x|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \sigma'' \cdot \sqrt{A}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu''}{\sigma \cdot \sigma'' \cdot \sqrt{A}}\right)^2\right] \dots (2.20)$$

Dies bedeutet, daß der Mittelwert  $\bar{x}$  der Prediktordichte gleich  $\mu''$  und die Standardabweichung  $\sigma_x$

$$\tilde{\sigma}_x = \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 + m' + \sigma^2/\sigma'^2}{m' + \sigma^2/\sigma'^2}} \quad \text{oder}$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sigma \cdot \sqrt{\frac{m' + m_0 + 1}{m' + m_0}} \quad \text{ist. . . . (2.21)}$$

Dann läßt sich die Prediktordichte analog (2.13) zu

$$g(x/\underline{x}) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_x} \cdot \varphi\left(\frac{x - \mu''}{\tilde{\sigma}_x}\right) \quad \text{. . . (2.22)}$$

angeben.

Damit liegen alle Parameter zur Behandlung des am Beginn skizzierten Problems fest.

2.2 Bekannte Standardabweichung  $\sigma$  der a-posteriori-Verteilung; Gleichverteilung von  $\mu$  als a-priori-Verteilung

In Abschnitt 2.1 wurde angenommen, daß der Kenntnisstand über die a-priori-Verteilung relativ gut ist, nämlich die Form der Verteilung sowie die ersten beiden Momente  $\mu'$  und  $\sigma'$  bekannt sind. Ist nun der Erkenntnisstand über die a-priori-Verteilung nicht mehr so gut, liegt es nahe, einen Bereich zu definieren, der auch aus der Erfahrung heraus bekannt sein kann, in welchem z. B. Versuchsergebnisse (Mittelwerte) aufgetreten sind. Als einfachste Verteilung bietet sich dann eine Rechteckverteilung des entsprechenden Parameters in der Form

$$f(\mu') = 1/(b-a); \quad a < b \quad \text{. . . (2.23)}$$

an.

Für die bedingte Dichte gilt dann nach (1.6) und (2.5)

$$f''(\mu | \underline{x}) = k \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \bar{x}}{\sigma / \sqrt{m'}}\right)^2\right] \dots (2.24)$$

wobei alle konstanten Faktoren der Likelihood-Verteilung, die Randverteilung und die a-priori-Verteilung im Faktor k zusammengefaßt sind. Obwohl aus der Form der Verteilung eine "gestutzte" Normalverteilung zu erwarten ist, sollen die wichtigsten Ableitungen hier noch einmal mit aufgenommen werden /3/.

Der Faktor k ergibt sich aus der Bedingung:

$$\int_a^b f(\mu | \underline{x}) = 1 = \frac{k \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma}{\sqrt{m'}} \int_{v_1}^{v_2} \varphi(v) dv \dots (2.25)$$

Mit

$$\boxed{v_1 = \frac{a - \bar{x}}{\sigma / \sqrt{m'}}} \quad \text{und} \quad \boxed{v_2 = \frac{b - \bar{x}}{\sigma / \sqrt{m'}}} \dots (2.26)$$

Die Dichte der standardisierten Normalverteilung  $\Phi(v)$  ist:

$$\Phi(v) = \int_{-\infty}^v \varphi(v) dv \dots (2.27)$$

Dann läßt sich der Faktor k zu

$$k = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\Phi(v_2) - \Phi(v_1)} \dots (2.28)$$

bestimmen. Zur Vereinfachung wird im folgenden die Bezeichnung  $\Phi(v_2) = \Phi_2$  und  $\varphi(v_2) = \varphi_2$  usw. weiterverwendet.

Damit liegt die Dichte der a-posteriori-Verteilung fest:

---

$$f''(\mu | \underline{x}) = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mu - \bar{x}}{\sigma / \sqrt{m'}}\right)^2\right] \dots (2.29)$$

Der Mittelwert dieser Verteilung ergibt sich allgemein als erstes Moment zu:

$$\mu''(\mu|\underline{x}) = \int_a^b \mu \cdot f''(\mu|\underline{x}) d\mu \quad \dots (2.30)$$

Wird (2.29) in (2.30) eingesetzt, ergibt sich mit den Ausdrücken analog (2.26):

$$\mu''(\mu|\underline{x}) = H \int_{v_1}^{v_2} \exp[-\frac{1}{2}v^2] \cdot (\bar{x} - \frac{v \cdot G}{\sqrt{m'}}) \cdot \frac{G}{\sqrt{m'}} dv \quad \dots (2.31)$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \mu''(\mu|\underline{x}) &= H \cdot \sqrt{2\pi'} \underbrace{\int_{v_1}^{v_2} \varphi(v) \cdot \frac{G}{\sqrt{m'}} \cdot \bar{x} dv}_{= \bar{x} \text{ wegen (2.25)}} \\ &\quad + H \cdot \sqrt{2\pi'} \int_{v_1}^{v_2} \varphi(v) \cdot \frac{v G^2}{m'} \cdot dv \\ &= \bar{x} + \frac{H G^2 \sqrt{2\pi'}}{m'} \int_{v_1}^{v_2} v \varphi(v) dv \quad \dots (2.32) \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2) \\ \rightarrow \varphi'(v) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot v \cdot \exp(-v^2/2) = -v \cdot \varphi(v) = d\varphi/dv \end{aligned}$$

ergibt sich das Integral

$$\int_{v_1}^{v_2} v \varphi(v) dv \stackrel{zu}{=} - \int_{v_1}^{v_2} d\varphi = -[\varphi(v_2) - \varphi(v_1)] \quad \dots (2.33)$$

Der Mittelwert der a-posteriori-Dichte ergibt sich dann zu:

$$\boxed{\mu''(\mu|\underline{x}) = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{m'}} \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Phi_2 - \Phi_1}} \quad \dots (2.34)$$

Die Varianz  $\sigma''^2$  als zweites zentrales Moment der Verteilung ist dann:

$$\begin{aligned} \sigma''^2(\mu|\underline{x}) &= \int_a^b (\mu - \mu'')^2 \cdot f''(\mu|\underline{x}) d\mu && \dots (2.35) \\ &= \int_a^b \mu^2 \cdot f''(\mu|\underline{x}) d\mu \\ &\quad - 2\mu'' \int_a^b \mu \cdot f''(\mu|\underline{x}) d\mu = -2\mu'' && \text{nach (2.32) und (2.34)} \\ &\quad + \mu''^2 \int_a^b f''(\mu|\underline{x}) d\mu = \mu''^2 && \text{nach (2.25)} \end{aligned}$$

Wiederum mit (2.26) und (2.29) wird (2.35) zu

$$\sigma''^2(\mu|\underline{x}) = \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} \cdot \int_{v_1}^{v_2} \left( \bar{x} + \frac{v \cdot \sigma}{\sqrt{m'}} \right)^2 \varphi(v) dv \quad \dots (2.36)$$

umgeformt. Dieses Integral lässt sich wiederum in seine Bestandteile auflösen und auf z. T. schon bekannte Terme zurückführen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} (2.36) &= \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} \cdot \int_{v_1}^{v_2} \bar{x}^2 \varphi(v) dv = \bar{x}^2 && \text{wegen (2.25)} \\ &\quad + \frac{2\bar{x}\sigma}{\sqrt{m'}} \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} \int_{v_1}^{v_2} v \varphi(v) dv = -\frac{2\bar{x}\sigma}{\sqrt{m'}} \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Phi_2 - \Phi_1} && \text{wegen (2.32) und (2.33)} \\ &\quad + \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} \cdot \frac{\sigma^2}{m'} \cdot \int_{v_1}^{v_2} v^2 \varphi(v) dv && \dots (2.37) \end{aligned}$$

Das letzte Integral in (2.37) lässt sich auflösen, wenn man  $\varphi' = -v\varphi(v) = d\varphi/dv$  setzt. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \int_{v_1}^{v_2} v^2 \varphi(v) dv &= - \int_{v_1}^{v_2} v d\varphi = -v\varphi \Big|_{v_1}^{v_2} + \int_{v_1}^{v_2} \varphi dv \quad \dots (2.38) \\ &= -v_2 \cdot \varphi_2 + v_1 \cdot \varphi_1 + \bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1 \end{aligned}$$

Werden die einzelnen entwickelten Terme aus (2.35), (2.37) und (2.38) wieder zusammengesetzt, erhält man als Varianz

$$\sigma''^2(\mu | \underline{x}) = \frac{\sigma^2}{m'} \cdot \left[ 1 - \frac{(v_2 \cdot \varphi_2 - v_1 \cdot \varphi_1)}{\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1} - \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1} \right)^2 \right] \dots (2.39)$$

und daraus die Standardabweichung:

$$\boxed{\sigma''(\mu | \underline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{m'}} \cdot \sqrt{1 - \frac{(v_2 \cdot \varphi_2 - v_1 \cdot \varphi_1)}{\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1} - \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1} \right)^2}} \quad \dots (2.40)$$

Die abgeleiteten Ausdrücke  $\mu''$  und  $\sigma''$  sind, wie schon vermutet, die Mittelwerte sowie die Standardabweichung einer gestutzten Normalverteilung und rechnerisch schon etwas umständlich zu handhaben. Bezüglich eines Beispiels wird hier auf Abschnitt 3.2 verwiesen.



2.2.1 Prediktordichte zu 2.2

Die Prediktordichte ist wiederum durch Ausintegration von (1.8) mit der Dichte der a-posteriori-Verteilung nach (2.29) und (2.41)

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \dots (2.41)$$

zu berechnen. Es ergibt sich:

$$g(x|\underline{x}) = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\mu - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{m'}}\right)^2 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right] d\mu \dots (2.42)$$

Das Integral in Gleichung (2.42) lässt sich nach Ausmultiplikation des Exponenten in folgende Form überführen:

$$g(x|\underline{x}) = \dots \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{m'+1}{m'}}}\right)^2\right] \cdot \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \frac{m' \cdot \bar{x} + x}{m'+1}}{\sigma/\sqrt{m'+1}}\right)^2\right] d\mu \dots (2.43)$$

Mittels der Substitution

$$t = \frac{\mu - \frac{m' \cdot \bar{x} + x}{m'+1}}{\sigma/\sqrt{m'+1}} \quad \text{und} \quad dt = d\mu \cdot \sqrt{m'+1}/\sigma \dots (2.44)$$

und

$$t_a = \frac{a - \frac{m' \cdot \bar{x} + x}{m'+1}}{\sigma/\sqrt{m'+1}} \quad \text{und} \quad t_b = \frac{b - \frac{m' \cdot \bar{x} + x}{m'+1}}{\sigma/\sqrt{m'+1}} \dots (2.45)$$

analog (2.26) ergibt sich Integral in (2.43) zu:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{m'+1}} \int_{t_a}^{t_b} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{\sqrt{m'+1}} \cdot (\Phi(t_b, x) - \Phi(t_a, x)) \dots (2.46)$$

$$= -11 \cdot (\Phi_b(x) - \Phi_a(x)) \dots (2.46)$$

Werden die nach (2.43) und (2.46) ermittelten Terme wieder zusammengesetzt, ergibt sich die Prediktordichte in der Form:

$$g(x|\underline{x}) = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{m' + 1} \cdot \sigma} \cdot \frac{\phi_b(x) - \phi_a(x)}{\phi_2 - \phi_1} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{m'+1}{m'}}}\right)^2\right] \quad (2.47)$$

Wegen der Abhängigkeit von  $\phi_b(x)$  und  $\phi_a(x)$  vom Integrationsparameter  $x$  entzieht sich (2.47) praktisch einer weiteren Integration zur Ermittlung von  $\bar{x}$  und  $\sigma_x$ . Werden diese Parameter gesucht, muß (2.47) numerisch ausintegriert werden. Ein entsprechendes Programm ist am Ende der Zusammenstellung mit angegeben.

### 2.3 Schätzung von $\mu$ und $\sigma$ der a-posteriori-Verteilung bei "geringen Vorinformationen" über $\mu$ und $\sigma$ der a-priori-Verteilung

Bei den vorausgegangenen Anwendungen der Gleichung (1.6) waren bezüglich der a-priori-Verteilung

1. Mittelwert  $\mu'$  und zugehörige Standardabweichung  $\sigma'$  bekannt bzw.
2. der Mittelwert gleichverteilt im Bereich  $a - b$ .

Dies bedeutet, daß der Informationsgehalt bezüglich der a-priori-Verteilung immer mehr abgenommen hat. Die Standardabweichung  $\sigma$  der posteriori-Verteilung war außerdem auch als bekannt vorausgesetzt worden. Bei kleinen Stichproben für Eignungsprüfungen etc. erscheint es nun angebracht, auch von einer unbekanntem Standardabweichung  $\sigma$  für die a-posteriori-Verteilung auszugehen. Dies bedeutet, daß hier der Parametervektor  $\theta = (\mu, \sigma)$  zu schätzen ist. Bezüglich der a-priori-Verteilungen befindet man sich in einer sogenannten "knowing little"-Situation.

Zu solch einem Fall wird der Ansatz:

$$\begin{aligned} f'(\mu) &\sim C = \text{const} \\ f'(\sigma) &\sim 1/\sigma \end{aligned} \quad \sim \frac{C}{\sigma} \quad (2.48)$$

gemacht. Bezüglich der Rechtfertigung dieses Ansatzes muß hier

z. B. auf /5/ verwiesen werden.

In allgemeiner Form ergibt sich dann die Dichte der a-priori-Verteilung nach (1.6): (Auf die Unterscheidung von  $\sigma'$  und  $\sigma''$  kann hier verzichtet werden.)

$$f''(\mu, \sigma | \underline{x}) = \frac{f'(\mu, \sigma) \cdot l(\mu, \sigma | \underline{x})}{\int_{\mu, \sigma} f'(\mu, \sigma) \cdot l(\mu, \sigma | \underline{x}) d\mu d\sigma} \dots (2.49)$$

Wird nun eine erste Stichprobe vom Umfang  $m_0$  gezogen, ergeben sich die Stichprobenstatistiken

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{m_0} x_i \quad \text{und} \dots (2.50)$$

$$s_0^2 = \frac{1}{(m_0-1)} \sum_{i=1}^{m_0} (x_i - \bar{x})^2 \dots (2.51)$$

Die Likelihood-Funktion für die nun unbekanntnen Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  nimmt nach (2.5) folgende Form an:

$$l(\mu, \sigma | \underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}\right)^{m_0} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ (m_0-1) \cdot s_0^2 + m_0 \cdot (\mu - \bar{x}_0)^2 \right] \right] \dots (2.52)$$

Da der Nenner von (2.49) wiederum nur eine normalisierende Konstante darstellt, läßt sich der Ausdruck (2.49) folgendermaßen hinschreiben:

$$f''(\mu, \sigma | \underline{x}) = k \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sigma^{m_0}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (m_0-1) \cdot s_0^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{m_0}{2\sigma^2} (\mu - \bar{x}_0)^2\right] \dots (2.53)$$

Dabei sind alle konstanten Anteile in  $k$  zusammengefaßt. Der Faktor  $k$  ist nun aus der Bedingung

$$\int_{\mu, \sigma} f''(\mu, \sigma | \underline{x}) d\mu d\sigma \stackrel{!}{=} 1 \quad (2.54)$$

zu ermitteln.

Ein nützliches Hilfsintegral bei der Integration von (2.54) wurde mit (2.17) schon angegeben. Ein weiteres Hilfsintegral stellt (2.55) dar. Dabei ist  $\Gamma$  die sogenannte Gammafunktion.

$$\int_0^{\infty} x^{-(p+1)} e^{-ax^{-2}} dx = \frac{1}{2} a^{-p/2} \Gamma(p/2) \quad \dots (2.55)$$

Die Integration ist bezüglich  $\mu$  von  $+\infty$  bis  $-\infty$  und bezüglich  $\sigma$  von 0 bis  $\infty$  zu führen.

Nach der ersten Integration über  $\mu$  erhält man:

$$f''(\mu, \sigma | \underline{x}) = \frac{k \sqrt{2\pi}}{\sqrt{m_0}} \sigma^{-m_0} \cdot \exp\left[-\frac{\Delta_0^2 (m_0 - 1)}{2} \cdot \sigma^{-2}\right] \dots (2.56)$$

und die zweite Integration über  $\sigma$  führt schließlich zu:

$$f''(\mu, \sigma | \underline{x}) = \frac{k \cdot \sqrt{2\pi}}{2 \cdot \sqrt{m_0}} \cdot \left[\frac{\Delta_0^2 (m_0 - 1)}{2}\right]^{-\frac{m_0 - 1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m_0 - 1}{2}\right) \stackrel{!}{=} 1 \quad \dots (2.57)$$

Damit läßt sich der Faktor  $k$  zu

$$k = \left( \sqrt{\frac{2 \cdot m_0}{\pi}} \cdot k \left(\frac{m_0 - 1}{2}\right) \right) / \Gamma\left(\frac{m_0 - 1}{2}\right) \quad \dots (2.58)$$

bestimmen mit der Abkürzung

$$k = \frac{\Delta_0^2}{2} (m_0 - 1) \quad \dots (2.59)$$

Wird (2.58) und (2.59) in (2.53) wieder eingesetzt, ergibt sich die Dichte der a-posteriori-Verteilung zu:

$$f''(\mu, \sigma | \underline{x}) = k \cdot \sigma^{-(m_0 + 1)} \exp\left[-k \sigma^{-2} - \frac{m_0}{2} \left(\frac{\bar{x}_0 - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2.60)$$

Will man nun den Informationsgehalt erhöhen, kann eine zweite Stichprobe vom Umfang  $m'$  gezogen werden. Damit wird (2.60) sozu-

sagen zur Dichte der a-priori-Verteilung, und die a-posteriori-Verteilung (2.64) nimmt dann die gleiche Form wie (2.60) an, jedoch mit den Parametern:

$$m'' = m_0 + m' \quad \dots (2.62)$$

$$\bar{x}'' = (m_0 \cdot \bar{x}_0 + m' \cdot \bar{x}') / m'' \quad \dots (2.63)$$

$$s'^2 = \left[ \frac{((m'-1) \cdot s'^2 + m' \cdot \bar{x}'^2) + ((m_0-1) \cdot s_0^2 + m_0 \cdot \bar{x}_0^2) - m'' \cdot \bar{x}''^2}{(m''-1)} \right] \quad \dots (2.63a)$$

Dabei gilt für  $\bar{x}'$  und  $s'$  (2.50) und (2.51) analog.

$$f''(\mu, \sigma | \underline{x}) = k \cdot \sigma^{-(m''+1)} \cdot \exp\left[-k \sigma^{-2} - \frac{m''}{2} \left(\frac{\mu - \bar{x}''}{\sigma}\right)^2\right] \quad \dots (2.64)$$

mit  $k = (2m''/\pi)^{1/2} \cdot k \left(\frac{m''-1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{m''-1}{2}\right) \quad \dots (2.65)$

und  $k = \frac{s'^2}{2} (m'' - 1) = \varphi / 2 \quad \dots (2.66)$

mit  $\varphi = s'^2 (m'' - 1). \quad \dots (2.67)$

An dieser Stelle soll noch einmal erwähnt werden, daß (2.64) die gemeinsame Dichte der Verteilung von  $\mu$  und  $\sigma$  darstellt. Dies bedeutet, daß von nun an auch für  $\sigma$  nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden können. Für die weitere Nutzung von (2.64) ist es sinnvoll, (2.64) einmal voll auszuschreiben und in die einzelnen Terme aufzulösen.

$$f''(\mu, \sigma | \underline{x}) = \frac{\sigma^{-(m''+1)}}{2^{\frac{(m''-1)}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m''-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{s'^2 (m''-1)}{\sigma^2}\right] \cdot (s'^2 (m''-1))^{\frac{m''-1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{m''}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \bar{x}''}{\sigma / \sqrt{m''}}\right)^2\right] \quad \dots (2.68)$$

Die obige Gleichung sieht wie ein Produkt einer  $\chi^2$ -Verteilung mit einer  $N\{0,1\}$ -Verteilung aus, und es zeigt sich, daß /4/

$$\eta = \frac{s'^2 \cdot (m''-1)}{\sigma^2} = \frac{s'^2 \cdot f}{\sigma^2} \quad \dots (2.69)$$

$\chi^2$ -verteilt mit Freiheitsgrad  $f = m'' - 1$  und

$$f = \frac{(\mu - \bar{x}'')}{\sigma / \sqrt{m''}} = f(0, 1) \text{ - normalverteilt ist. } \dots (2.70)$$

Außerdem kann nachgewiesen werden, daß  $\xi$  und  $\eta$  voneinander unabhängig sind; dies bedeutet, daß die Funktionaldeterminante

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} & \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \xi} & \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

ungleich Null sein muß.

Wegen  $\partial \mu / \partial \eta = 0$  brauchen nur die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} &= \sqrt{f} \cdot s'' \cdot \eta^{-3/2} \cdot (-1/2) && \text{und} \dots (2.71) \\ \frac{\partial \mu}{\partial \xi} &= \sigma / \sqrt{m''} && \text{betrachtet zu werden.} \end{aligned}$$

Die Multiplikation ergibt:

$$D = \frac{f \cdot s''}{2 \cdot \sqrt{m''}} \eta^{-2} \neq 0 \quad (2.73)$$

Damit ist der Nachweis erbracht, daß  $\xi$  und  $\eta$  voneinander unabhängig sind. Diese Tatsache wird bei einer späteren Anwendung von wesentlichem Nutzen sein.

In den bisherigen Anwendungen konnte immer ein Vertrauensbereich für  $\mu$  angegeben werden. In (2.64) liegt jedoch die gemeinsame Verteilung von  $\mu$  und  $\sigma$  vor; d. h., durch Ausintegrieren von  $\sigma$  ist die Randverteilung von  $\mu$  zu bilden. Dazu ist es sinnvoll, (2.64) in etwas veränderter Form auszuschreiben:

$$\begin{aligned} f''(\mu, \sigma | x) &= \frac{\sqrt{2m''} \cdot s''^{(m''-1)} \cdot (m''-1) \left(\frac{m''-1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \cdot 2 \left(\frac{m''-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m''-1}{2}\right)} \cdot \sigma^{-(m''+1)} \\ &\cdot \exp\left[-\frac{s''^2(m''-1) + m''(\mu - \bar{x}'')^2}{2}\right] \sigma^{-2} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Bei der Integration von (2.74) über  $0 - \infty$  kann das Hilfsintegral (2.55) angewandt werden; man erhält:

$$f''(\mu | \underline{x}) = \frac{\sqrt{m''} \cdot s''^{(m''-1)} \cdot (m''-1)^{\left(\frac{m''-1}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{m''}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{\left(\frac{m''-1}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{m''-1}{2}\right)} \cdot \left( \frac{s''^2 \cdot (m''-1) + m'' (\mu - \bar{x}'')^2}{2} \right)^{-m''/2} \quad \dots (2.75)$$

Nach einigen Umrechnungen kann der Ausdruck auf die Form (2.75) gebracht werden.

$$f''(\mu | \underline{x}) = \frac{\sqrt{m''} \cdot \Gamma\left(\frac{m''}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{m''-1} \cdot s'' \cdot \Gamma\left(\frac{m''-1}{2}\right)} \cdot \left( 1 + \frac{1}{(m''-1)} \left( \frac{\mu - \bar{x}''}{s''/\sqrt{m''}} \right)^2 \right)^{-m''/2} \quad \dots (2.76)$$

Dieser Ausdruck sieht wie eine Student'sche t-Verteilung aus (vgl. auch Seite 21) und kann mittels der Substitution

$$t = \frac{\mu - \bar{x}''}{s''/\sqrt{m''}} \quad ; \quad d\mu = \frac{s''}{\sqrt{m''}} \cdot dt \quad \dots (2.77)$$

und  $f = m'' - 1$  auf die standardisierte Form der Student'schen t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $f = m'' - 1$  gebracht werden.

$$f''(t | f) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right) \cdot \sqrt{f} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot \left( 1 + \frac{t^2}{f} \right)^{-\left(\frac{f+1}{2}\right)} \quad \dots (2.78)$$

$$\hat{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Wegen  $E(t)$  (Erwartungswert) = 0 ergibt sich

$$\mu'' = \bar{x}'' \quad \dots (2.79)$$

und

$$\sigma_{\mu''}^2 = \frac{s''^2 \cdot f}{m''(f-2)} \quad \dots (2.80)$$

Durch Bildung der Inversen dieser Verteilung kann nun ein Vertrauensbereich (Fraktilwert) zu einem vorgegebenen  $\epsilon$ -Wert berechnet werden. Es ergibt sich  $x_\epsilon$  aus (2.77) zu:

$$F_T(T \leq t | f) = \int_{-\infty}^t f(u | f) du$$

$$\Rightarrow \boxed{x_\epsilon = t \cdot s'' / \sqrt{m''} + \bar{x}''} \quad (2.81)$$

Inversen der Student'schen t-Verteilung werden in /1.16/ angegeben. Da jedoch sehr oft auch Zwischenwerte gebraucht werden, sind am Ende der Zusammenstellung zwei Programme zur Berechnung der standardisierten t-Verteilung und der Inversion dazu angegeben.

### 2.3.1 Ableitung der Dichte der Prediktorverteilung

Zur Ableitung der Dichte der Prediktorverteilung wird wiederum - wie bei der Ableitung der Dichte der a-posteriori-Verteilung - eine zweifache Integration über  $\mu$  und  $\sigma$  erforderlich. Der Ausdruck (1.8) nimmt dann folgende Form an:

$$g(x | \underline{x}) = \iint_{\mu, \sigma} \frac{\sqrt{m''} \cdot \varphi\left(\frac{m''-1}{2}\right)}{\pi \cdot 2^{\frac{(m''-1)}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m''-1}{2}\right)} \cdot \sigma^{-(m''+2)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\varphi + m''(\mu - \bar{x}'')^2)\right] d\mu d\sigma \dots (2.82)$$

Die beiden Exponenten lassen sich zusammenfassen, so daß das Integral (2.82) folgende Form annimmt:

$$g(x | \underline{x}) = \iint_{\mu, \sigma} C \cdot \sigma^{-(m''+2)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \varphi + (1+m'') \cdot (\mu - \alpha)^2 + \frac{m''}{1+m''} \cdot (x - \bar{x}'')^2 \right\}\right] d\mu d\sigma \dots (2.83)$$

mit  $\alpha = \frac{(\bar{x}'' \cdot m'' + x)}{(1+m'')}$



Die Integration von (2.83) kann wiederum unter Anwendung der beiden schon erwähnten Hilfsintegrale (2.17) und (2.55) durchgeführt werden.

Nach der ersten Integration über  $\mu$  ergibt sich:

$$g(x|\underline{x}) = \int_C \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1+m''}} \cdot \sigma^{-(m''+1)} \cdot \exp\left[-\sigma^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{m''}{m''+1} (x - \bar{x})^2 \right) \right\}\right] d\sigma \quad \dots (2.84)$$

Die zweite Integration über  $\sigma$  liefert schließlich die gesuchte Prediktordichte; der Wert C wurde auch wieder mit eingesetzt.

$$g(x|\underline{x}) = \frac{\sqrt{m''}}{\sqrt{1+m''}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m''}{2})}{\Gamma(\frac{m''-1}{2}) \cdot \sqrt{\pi} \varphi} \cdot \left[ 1 + \frac{m''(x - \bar{x})^2}{(m''+1) \cdot \varphi} \right]^{-m''/2} \quad \dots (2.85)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit /5/, Seite 366 - 367, zeigt sich, daß (2.85) einer Student'schen t-Verteilung mit  $f = m'' - 1$  Freiheitsgraden folgt. Mit der Substitution

$$h = \frac{m''}{(m''+1) \cdot s''^2} \quad \text{und} \quad t = \sqrt{h} (x - \bar{x}'') \quad \dots (2.86)$$

und  $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$  geht (2.85) in die allgemeine Form der standardisierten Student'schen t-Verteilung über (2.87).

$$f(t|f) = \frac{\Gamma[(f+1)/2]}{\sqrt{f} \cdot \Gamma(f/2) \cdot \Gamma(f/2)} \cdot \left( 1 + \frac{t^2}{f} \right)^{-\frac{(f+1)}{2}} \quad \dots (2.87)$$

Die Verteilungsfunktion lautet dann:

$$F_T(T \leq t|f) = \int_{-\infty}^t f(u|f) du \quad \dots (2.88)$$

Um den Wert  $t$  <sup>zu bestimmen,</sup> der bei einer vorgegebenen Fraktile  $\epsilon$  die Bedingung (2.88) erfüllt, ist also Umkehrfunktion der Funktion (2.87) zu bilden. Nach Bestimmung von  $t$  kann der eigentlich gesuchte Wert  $x_\epsilon$

nach (2.89) berechnet werden.

$$x_{\varepsilon} = t / \sqrt{h} + \bar{x}'' \quad (2.89)$$

Wird (2.86) in (2.89) eingesetzt, ergibt sich die bekanntere Form (2.90).

$$x_{\varepsilon} = t \cdot s'' \cdot \sqrt{\frac{m''+1}{m''}} + \bar{x}'' \quad (2.90)$$

### 3. Beispiele und Anwendungen

#### 3.1 Beispiel zu Abschnitt 2.1

Die in dem o. a. Abschnitt dargestellte Situation stellt sozusagen einen Idealfall dar, der eigentlich nur bei laufender Überwachung und Stichprobenentnahme in den Vorbedingungen voll zu erfüllen ist.

- Es müssen a) die augenblicklichen Mittelwerte  $\mu'$  der Stichproben und deren Standardabweichung  $\sigma'$  über längere Zeit beobachtet und damit bekannt sein und
- b) die Standardabweichung  $\sigma$  der Einzelwerte bezüglich des jeweiligen Mittelwertes.

Gerade bei stichprobenartiger Prüfung ist dies in den seltensten Fällen möglich. Aus diesem Grund kommt dem folgenden Beispiel auch mehr ein Demonstrationscharakter zu, um die Wirksamkeit des Verfahrens zu zeigen.

In den Jahren 1975 und 1976 wurden am SFB 148 zahlreiche Stahlbetonstützenversuche unter Brandeinwirkung durchgeführt. Diese Versuche sind mehr oder weniger als Versuche an Einzelbauteilen aufzufassen; drei Stützen hatten jedoch annähernd gleiche Parameter, so daß sie hier zusammen betrachtet werden können. Es ergaben sich für die getesteten Stützen folgende Feuerwiderstandsdauern: 63, 69 und 80 min.

Aus einer M-C-Studie (Monte-Carlo-) mit einem getesteten Stützenprogramm zur Berechnung von Feuerwiderstandsdauern konnten unter Berücksichtigung der wichtigsten Einflußparameter folgende Werte der Verteilung der Feuerwiderstandsdauern - ohne Berücksichtigung einer evtl. streuenden Auflast - ermittelt werden.

$$\begin{aligned}\text{Mittelwert} &= 79' (4,369) \\ \text{Standardabweichung} &= 10' (0,127)\end{aligned}$$

(Klammerwerte ergeben sich bei Annahme einer Log.-Normalverteilung und sind in diesem Abschnitt als Beispiel mit aufgenommen.)

Der so errechnete Mittelwert von 79' soll hier als a-priori-Mittelwert  $\mu'$  gelten und die Standardabweichung von 10' als Standardabweichung  $\sigma$  der Einzelwerte bezüglich des jeweiligen Mittelwertes. Die Schwierigkeit besteht darin,  $\sigma'$  zu bestimmen. Mit dem Ausdruck  $\sigma' = \sigma/\sqrt{m_0}$  läßt sich nun über einen angenommenen Umfang einer a-priori-Stichprobe  $\sigma'$  ermitteln, wobei der angenommene Wert von  $m_0$  sozusagen das Vertrauen in die a-priori-Werte darstellt. In diesem Beispiel soll  $m_0/m' = 9/3$  angenommen werden. Dann ergibt sich:

$$\sigma' = 10/\sqrt{9} = 3,33 (0,042)$$

Der Stichprobenmittelwert und die Stichprobenstandardabweichung nach (2.3) und (2.4) ergeben:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 70,7 (4,253) \\ s &= 8,62 (0,121)\end{aligned}$$

Mit diesen Werten läßt sich nach (2.10) und (2.11) der a-posteriori-Mittelwert  $\mu''$  und dessen Standardabweichung  $\sigma''$  zu

$$\mu'' = \frac{3 \cdot 70,7 + 9 \cdot 79}{3 + 9} = 76,93 (4,34)$$

$$\text{und } \sigma'' = 10/\sqrt{3 + 9} = 2,88 (0,0366)$$

berechnen. Bezüglich des Mittelwertes ergibt dies schon eine Verbesserung von ca. 6'.

Gesucht ist nun der nach unten abgegrenzte a-posteriori-Vertrauensbereich für  $\mu$ , welcher nur mit der Wahrscheinlichkeit  $\epsilon = 5\%$  unterschritten wird. Mit  $u_{1-\epsilon} = 1,645$  ergibt sich:

$$x_{\epsilon} = (76,93 - 1,645 \cdot 2,88) = 72,2 (4,78 \cong 72,24)$$

Dies bedeutet, daß der Mittelwert mit 95-%iger Wahrscheinlichkeit größer als 72,2' ist. Bei klassischer Schätzung mit bekannter Standardabweichung hätte sich für den Vertrauensbereich ergeben:

$$x_{\epsilon} = (70,7 - 1,645 \cdot 10/\sqrt{3}) = 61,2 (4,1323 \cong 62,3)$$

Damit ergibt sich hier eine Verbesserung bei der Abschätzung des Vertrauensbereiches von  $\mu$  von ca. 11' und somit ein nicht unerheblicher wirtschaftlicher Vorteil. Man erkennt jedoch, daß die Verbesserung im wesentlichen durch den größeren Mittelwert der a-priori-Verteilung herbeigeführt wurde.

Im folgenden Bild 1 sind die beiden Dichten der jeweiligen Verteilungen nochmals dargestellt; dabei kommt die durch die Beobachtungen verbesserte "steilere" a-posteriori-Dichte anschaulich besser zur Geltung.

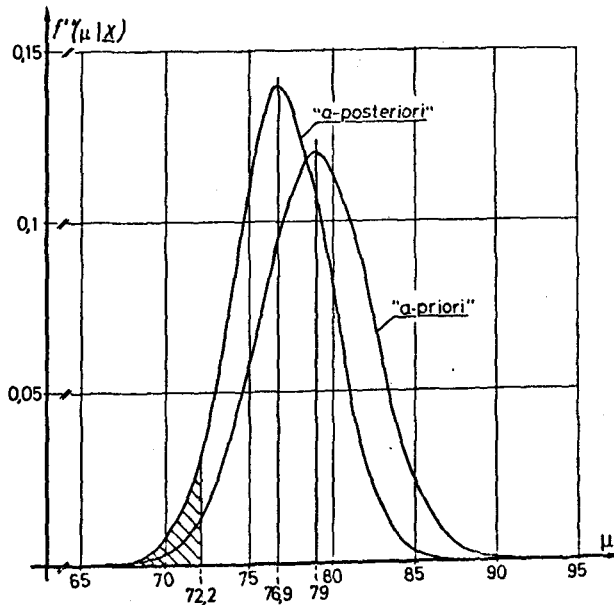


Bild 1

### 3.1.1 Beispiel zu Abschnitt 2.1.1

Die vorgenannten Ergebnisse stellen sozusagen die Schätzung des Mittelwertes dar. Will man jedoch Fraktilewerte  $x^*$  der Verteilung der Feuerwiderstandsdauern bestimmen, z. B. bei Einhaltung einer vorgegebenen Versagenswahrscheinlichkeit, muß an dieser Stelle die Prediktordichte herangezogen werden. Zielt man wiederum auf die 5-%-Fraktile ab, ergibt sich bei

$$\sigma_{\bar{x}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{3 + 9 + 1}{3 + 9}} = 10,4 \quad (0,134)$$

nach (2.21) die 5-%-Fraktile zu:

$$x^* = (76,9 - 1,645 \cdot 10,4) = 59,8 \quad (4,122 \hat{=} 61,7)$$

Ohne jegliche Vorinformationen hätte man, bei jedem Vorbehalt aus solch einer kleinen Stichprobe Aussagen ableiten zu wollen,

$$x^* = (70,7 - 1,645 \cdot 8,62) = 56,5 \quad (4,054 \hat{=} 57,6)$$

geschätzt. Auch hier ergibt sich die Verbesserung im wesentlichen durch den höheren Mittelwert, während sich die etwas höhere Standardabweichung "ungünstig" auswirkt. Trotzdem wird immer noch eine Verbesserung von ca. 3' erreicht, was hier z. B. dazu führen kann, die Probe noch nach F 60 einzuordnen.

### 3.2 Beispiel zu Abschnitt 2.2

Für das folgende Beispiel sollen wiederum die schon im 1. Beispiel herangezogenen drei Versuchswerte an Stahlbetonstützen dienen. Es fehlen aber noch die Bereichsgrenzen der a-priori-Gleichverteilung der Mittelwerte, d. h. die Vorinformation. Um die Auswirkungen der Vorinformation auf die a-posteriori-Verteilung aufzuzeigen, sollen eine günstige und eine ungünstige Einschränkung beispielhaft berücksichtigt werden.

Als Versuchsmittelwert und -standardabweichung ergaben sich:

$$\bar{x} = 70,7$$
$$s = 8,62$$

Außerdem war die Standardabweichung  $\sigma = 10'$  der Einzelwerte bezüglich des jeweiligen Mittelwertes bekannt.

Bei der Festlegung der Werte A und B der a-priori-Verteilung soll von folgenden Überlegungen ausgegangen werden:

1. Die Versuchswerte ähnlicher Bauteile lagen im Bereich von ca. 60' - 90'. Dies ist ein relativ weiter Bereich und damit eine sehr vage Vorinformation.
2. Aus den Berechnungsergebnissen ist ein Mittelwert von ca. 79' bekannt. Die Grenzen der Gleichverteilung sollen ungefähr bei  $\pm 10'$  gezogen werden, d. h. A = 70', B = 90'. Man erkennt, daß damit der untere Bereich in bezug auf die Versuchswerte ziemlich eingeengt wurde.

Berechnung der a-posteriori-Mittelwerte, -standardabweichungen und -vertrauensbereiche

1	2
Nach (2.26) ergibt sich:	
$V_1 = (60-70,7)/(10/\sqrt{3}) = -1,85$	$V_1 = (70-70,7)/(10/\sqrt{3}) = -0,1212$
$V_2 = (90-70,7)/(10/\sqrt{3}) = +3,34$	$V_2 = (90-70,7)/(10/\sqrt{3}) = +3,34$

Die Werte  $\phi_{1,2}$  bzw.  $\varphi_{1,2}$  sind aus einer Tabelle der standardisierten Normalverteilung zu bestimmen. Da zum Teil immer wieder sehr umständlich interpoliert werden muß, sind am Ende der Zusammenstellung kleine Programme in Basic bzw. Fortran angegeben, welche es erlauben, die hier geforderten Verteilungen bzw. deren Inversen sehr bequem auf kleinen Tischcomputern berechnen zu können.

Aus Programm NORMAL ergibt sich:

$(P(x) + \Phi(x);$		$Z(x) + \varphi(x)$
$\Phi_1 = 0,0322$ $\varphi_1 = 0,072$ $\Phi_2 = 0,9996$ $\varphi_2 = 1,51 \cdot 10^{-3}$		$\Phi_1 = 0,4518$ $\varphi_1 = 0,3960$ $\Phi_2 = 0,9996$ $\varphi_2 = 1,51 \cdot 10^{-3}$

Damit lassen sich jeweils die Erwartungswerte der Verteilungen nach (2.34) zu:

$\mu''(\underline{\mu/x}) =$ $70,7 - \frac{10}{\sqrt{3}} \frac{1,15 \cdot 10^{-3} - 0,072}{0,9996 - 0,0322}$ $= 71,14$ <p style="text-align: center;">=====</p>		$\mu''(\underline{\mu/x}) = \dots$ $\dots$ $= 74,86$ <p style="text-align: center;">=====</p>
---	--	---

berechnen. Die Standardabweichungen ergeben sich nach (2.4):  
(ohne Angabe der Zahlenrechnung)

$\sigma''(\underline{\mu/x}) = 5,113$		$\sigma''(\underline{\mu/x}) = 2,47$
(gegenüber $10/\sqrt{3} = 5,77$ )		

Aus diesen Ergebnissen lässt sich folgendes ableiten: Die erste a-priori-Information hat wegen ihres relativ weit gefaßten Bereiches nur eine relativ geringe Verbesserung bezüglich des Stichprobenergebnisses gebracht. Die zweite Annahme bringt wegen der Festlegung des unteren Grenzwertes bei 70' eine wesentliche Verbesserung. Diese Zusammenhänge sind anschaulich in Bild 2 dargestellt. Man erkennt, wie die Gleichverteilungen der a-priori-Information in die gestützten Normalverteilungen umgewandelt werden. Dies ist bei der Annahme 2 besonders extrem.



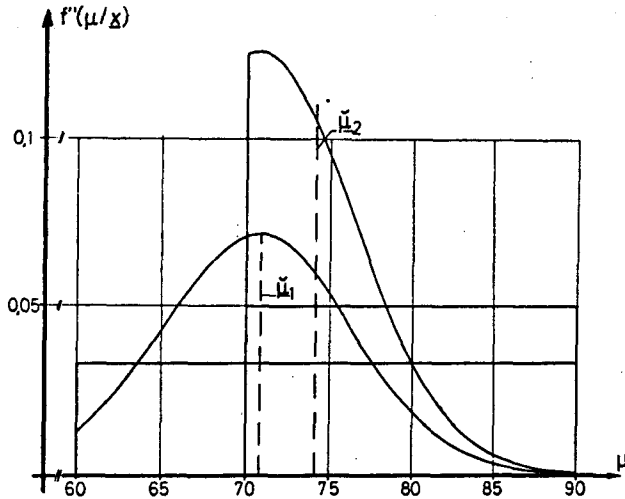


Bild 2

Während die Versuchswerte bei solch einer unsymmetrischen Verteilung den sogenannten mode-Wert (Maximum der Dichte) darstellen, entsprechen die Werte  $\mu''$  ( $\mu/\bar{x}$ ) dem sogenannten mean-Wert (Erwartungswert, Schwerachse). Interessant wäre nun noch, den Wert festzustellen, welcher mit gleicher Wahrscheinlichkeit unter- bzw. überschritten wird (median-Wert). Dazu muß der Zusammenhang ursprünglicher Verteilung  $\Phi$  analog (2.29) (ohne  $1/(\Phi_2 - \Phi_1)$ ) und der gestutzten Verteilung  $\Phi''$  hergestellt werden. Es ergibt sich:

$$\Phi''(\mu) = \frac{\Phi(u_\varepsilon) - \Phi_1}{\Phi_2 - \Phi_1} \quad (3.1)$$

Daraus folgt:

$$\Phi(u_\varepsilon) = \Phi_1 + \Phi''(\mu) \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) \quad (3.2)$$

und

$$u_\varepsilon = \Phi^{-1}(\Phi(u_\varepsilon)) \quad (3.3)$$

Der gesuchte median-Wert ergibt sich dann zu:

$$\check{\mu} = \bar{x} + u_\varepsilon \cdot \sigma/\sqrt{m} \quad (3.4)$$

Zur Invertierung von  $\Phi$  muß entweder wiederum eine Tafel der standardisierten Normalverteilung herangezogen werden, oder es kann das angegebene Programm INVNORMAL benutzt werden.

Bei  $\Phi''(\mu) = 0,5$  ergeben sich folgende Werte:

$\Phi(u_{\epsilon}) =$	0,5159		$\Phi(u_{\epsilon}) =$	0,7257
+ $u_{\epsilon}$	= + 0,03986		+ $u_{\epsilon}$	= 0,59976
$\check{\mu}$	= 70,93		$\check{\mu}$	= 74,16

Die Werte  $\check{\mu}$  wurden mit in Bild 2 aufgenommen. Der o. a. Zusammenhang kann nun wiederum zur Berechnung der eigentlich interessierenden Vertrauensbereiche von  $\mu$  herangezogen werden. Soll die 5-%-Fraktile berechnet werden, gilt  $\Phi''(\mu) = 0,05$ . Dann ergeben sich folgende Werte:

$\Phi(u_{\epsilon}) =$	0,08057		$\Phi(u_{\epsilon}) =$	0,47919
$u_{\epsilon}$	= - 1,401		$u_{\epsilon}$	= - 0,05218
$x_{\epsilon}$	= <u>62,61</u>		$x_{\epsilon}$	= <u>70,4</u>

Gegenüber der Schätzung  $x_{\epsilon} = 61,2'$  (siehe Seite 24) ergibt der erste  $x_{\epsilon}$ -Wert von 62,61 keine wesentliche Verbesserung; dies liegt - wie schon erwähnt - an der relativ schlechten Vorinformation. Der zweite  $x_{\epsilon}$ -Wert von 70,4' stellt eine wesentliche Verbesserung dar, sollte hier jedoch mit einiger Vorsicht behandelt werden, da er durch die enge Abgrenzung des unteren Bereiches der a-priori-Information zustande gekommen ist. Dieses Beispiel zeigt jedoch, daß die a-posteriori-Aussagen durchaus subjektiv beeinflußt werden können und somit auch einen gewissen Grad von "Glauben" beinhalten. Aus diesem Grund sollten derartig günstige Vorinformationen nur nach sehr sorgfältiger vorheriger Abschätzung mit in die Rechnung einbezogen werden.

3.2.1 Beispiel zu Abschnitt 2.2.1 (Anwendung der Prediktordichte)

Im o. a. Abschnitt wurde gezeigt, daß die Berechnung von  $\bar{x}$  und  $\sigma_x$  nach Gleichung (2.47) praktisch nur noch numerisch erfolgen kann. Ein entsprechendes Programm ist am Ende der Zusammenstellung mit angegeben.

Da über die Form der Verteilung keine zusätzlichen Untersuchungen mehr durchgeführt werden sollen und die Invertierung von (2.47) zu in der hier durchgeführten Untersuchung zu aufwendig erscheint, wird zur Berechnung der Bemessungswerte wiederum eine Normalverteilung angenommen. Mit den Werten

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 70,7 \text{ (aus Versuchen)} \\ \sigma &= 10 \\ m &= 3\end{aligned}$$

a)	b)
A = 60; B = 90	A = 70; B = 90

ergeben sich mit Hilfe des angegebenen Programmes folgende Werte für  $\bar{x}$  und  $\sigma_x$ :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 71,1 \\ \sigma_x &= 11,3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 74,9 \\ \sigma_x &= 10,6\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden 5- $\delta$ -Fraktilen:

$$\text{a) } x^* = 71,1 - 1,645 \cdot 11,3 \approx 52,5$$

$$\text{b) } x^* = 74,9 - 1,645 \cdot 10,6 \approx 57,5$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit denen von Abschnitt 2.1.1, zeigt sich, daß die erste a-priori-Information praktisch wertlos war, ja sogar wegen der vergrößerten Standardabweichung - im Vergleich zu dem ohne jegliche Vorinformationen (56,5') - noch einen etwas schlechteren Wert liefert. Erst die Vorinformation b) bringt eine kleine Verbesserung. Hier zeigt sich noch einmal, daß eine

wirksame Verbesserung der Versuchsergebnisse erst bei einem schon sehr weit eingeschränkten a-priori-Bereich erreicht wurde.

### 3.3 Anwendung von Abschnitt 2.3

In Abschnitt 2.3 wurde gezeigt, daß (2.64) die gemeinsame Dichte von  $\mu$  und  $\sigma$  darstellt. Dies bedeutet, daß nun auch für  $\sigma$  nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden können. Im folgenden wird sich das Bestimmungsproblem daher immer in der Form

$$P(X_{\epsilon} > x_{\epsilon}) = w \quad (3.5)$$

stellen; d. h., mit der Wahrscheinlichkeit  $w$  ist der gesuchte Wert  $x_{\epsilon,0}$  ( $X_{\epsilon}$  = Zufallswert) für die  $\epsilon$ -Fraktile größer oder gleich dem Wert  $x_{\epsilon}$  - oder mit anderen Worten: Es wird ein Schätzwert  $x_{\epsilon}$  gesucht, der noch mit großer Wahrscheinlichkeit unter dem Wert  $x_{\epsilon,0}$  liegt (Zitat /4/). Nur bei der im folgenden Abschnitt zu behandelnden Prediktorverteilung ergibt sich die Möglichkeit, den Zielwert  $p^*$  (einzuhaltende Versagenswahrscheinlichkeit) direkt anzusteuern.

Bisher sind immer nur Vertrauensbereiche für  $\mu$  oder bei den Prediktorverteilungen ein bestimmter einzuhaltender, von der vorgegebenen Versagenswahrscheinlichkeit abhängiger Fraktilwert bestimmt worden. Für die Bestimmung von sogenannten Bemessungswerten  $x^*$  soll nun allgemein gelten:

$$x^* = \Phi^{-1} \cdot [\Phi(-\alpha_x \cdot \beta)] = \Phi^{-1}(p^*) \quad (3.6)$$

Dabei stellt  $\Phi$  das Normalverteilungsintegral,  $\beta$  den für erforderlich erachteten Sicherheitsindex  $\beta$  /13,14/ und  $\alpha_x$  den sogenannten Empfindlichkeitsbeiwert dar. Hinweise zur Größenordnung von  $\alpha_x$  ( $\sim 0,9 \div 0,9$ ) gibt /13/; für einige brandbeanspruchte Stahlbetonbauteile finden sich auch  $\alpha$ -Werte in /15/. In diesem Abschnitt sollen mit Hilfe von (3.5) bestimmt werden:

- a) Bei einem  $\mu$ -Wert ist eine vorgegebene  $\epsilon$ -Fraktile mit der Wahrscheinlichkeit  $w$  einzuhalten bzw. analog /4, 6/.

b) Ein vorgegebener  $\beta$ -Wert ist mit der Wahrscheinlichkeit  $w$  einzuhalten bzw. analog /2, 6/.

Hierzu ist jedoch noch folgendes vorzuschicken. In (2.69) - (2.73) war gezeigt worden, daß  $\eta$ ,  $\xi_2$  voneinander unabhängig und  $\chi^2$  bzw.  $N\{0,1\}$  verteilt waren. Nach /8/ ergibt sich nun folgender Zusammenhang; die zufällige Variable

$$T(f, \delta) = \frac{\xi + \delta}{\sqrt{\eta/f}} \quad (3.7)$$

folgt einer nichtzentralen t-Verteilung, wobei  $\delta$  den sogenannten Nichtzentralitätsparameter und  $f$  den Freiheitsgrad darstellt. Bezüglich der Dichte- und der Verteilungsfunktion muß hier auf /8/ verwiesen werden. Im Anhang ist ein entsprechendes Fortranprogramm zur Berechnung dieser Verteilung bzw. der Inversion angegeben; das Programm wurde /12/ entnommen; ausgewählte Werte finden sich in /16/.

### 3.3.1 Berechnung des unteren Toleranzintervalles für eine Fraktile $x_\epsilon$

Bei Annahme einer Normalverteilung geht (3.5) über in:

$$P(\mu + u_\epsilon \cdot \sigma \geq X_\epsilon) = w \quad (3.8)$$

Dies bedeutet nichts anderes als die Festlegung einer  $\epsilon$ -%-Fraktile (z. B. 5 %) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von  $w$  (z. B. 90 %), wobei  $u_\epsilon$  die entsprechende  $\epsilon$ -%-Fraktile der standardisierten Normalverteilung darstellt. Nach (2.69) und (2.70) nahmen  $\xi$  und  $\eta$  die Werte

$$\xi = \frac{(\mu - \bar{x}''') \cdot \sqrt{m''}}{\sigma}$$
$$\eta = \frac{s''^2 \cdot f}{\sigma^2}$$

an.

Aufgelöst nach  $\mu$  und  $\sigma$  <sup>und</sup> eingesetzt findet man:

$$P\left(\frac{\xi \cdot s'' \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{m''} \cdot \sqrt{\eta}} + \bar{x}'' + u_\varepsilon \cdot \frac{s'' \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{\eta}} > x_\varepsilon\right) = w \quad \dots (3.9)$$

$$P\left(\frac{\xi \cdot \sqrt{f} + u_\varepsilon \cdot \sqrt{m''} \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{m''} \cdot \eta} > (x_\varepsilon - \bar{x}'')/s''\right) = w$$

Daraus folgt:

$$P\left(\underbrace{\frac{\xi + u_\varepsilon \cdot \sqrt{m''}}{\sqrt{\eta/f}}}_{>} > \sqrt{m''} \cdot (x_\varepsilon - \bar{x}'')/s''\right) = w \quad \dots (3.10)$$

Dieser Wert entspricht (3.7)!

Da im allgemeinen  $\varepsilon$ -Werte  $< 0,5$  zur Anwendung kommen und bei der Berechnung einer Fraktile der Integralwert bis zur Grenze  $t$  von Interesse ist, gilt:

$$u_\varepsilon = -u_{(1-\varepsilon)}$$

$$\text{und } P(T > t | f, \delta) = 1 - \underbrace{P(T < t | f, \delta)}_{= 1 - P(T < -t | f, \delta)} = w$$

$$\Rightarrow \underline{P(T > t) = P(T < -t | f, -\delta) = w}$$

Dann ergibt sich:

$$\underline{P\left(\frac{\xi + u_{(1-\varepsilon)} \cdot \sqrt{m''}}{\sqrt{\eta/f}} \leq -\sqrt{m''} \cdot (x_\varepsilon - \bar{x}'')/s''\right) = w \quad \dots (3.11)}$$

$$\text{mit } \delta = u_{(1-\varepsilon)} \cdot \sqrt{m''} \quad \dots (3.12)$$

Zur endgültigen Bestimmung von  $x_\varepsilon$  ist also durch Inversion der nichtzentralen  $t$ -Verteilung der Wert  $t$  der  $w$ -&-Fraktile zu be-

stimmen;  $x_e$  folgt dann aus:

$$x_e = \bar{x}'' - \frac{t(f, u_{(1-\varepsilon)} \cdot \sqrt{m''})}{\sqrt{m''}} \cdot s'' \quad \dots (3.13)$$

### 3.3.2 Berechnung des Toleranzintervalles $x^*$ bei vorgegebenem Sicherheitsindex $\beta$

Analog der in 3.3.1 gezeigten Ableitung kann auch für den Sicherheitsindex  $\beta$  geschrieben werden:

$$P\left(\frac{x^* - \mu}{\sigma} < \beta\right) = w \quad \dots (3.14)$$

d. h., es soll mit der Wahrscheinlichkeit  $w$  ein  $\beta$ -Wert bestimmt werden, welcher kleiner als der vorgegebene  $\beta$ -Wert ist. Werden in (3.14) nun wiederum (2.69) und (2.70) für  $\xi$  und  $\eta$  eingesetzt, ergibt sich:

$$P\left(x^* - \frac{\xi \cdot s'' \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{m''} \cdot \sqrt{\eta}} - \bar{x}'' < \beta \frac{s'' \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{\eta}}\right) = w \quad \dots (3.15)$$

$$P\left(\frac{-\xi \sqrt{f} - \beta \cdot \sqrt{m''} \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{\eta}} < (\bar{x}'' - x^*) \frac{\sqrt{m''}}{s''}\right) = w$$

oder

$$P\left(\frac{\xi \cdot \sqrt{f} + \beta \sqrt{m''} \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{\eta}} > \frac{\sqrt{m''}}{s''} (\bar{x}'' - x^*)\right) = w \quad \dots (3.16)$$

und mit der schon in Abschnitt 3.3.1 vorgenommenen Umformung erhält man schließlich:

$$P\left(\frac{\xi - \beta \sqrt{m''}}{\sqrt{\eta/f}} < \frac{\sqrt{m''}}{s''} (\bar{x}'' - x^*)\right) = w \quad \dots (3.17)$$

mit  $\delta = -\beta \cdot \sqrt{m''}$ . (Beachte:  $\beta$  ist im allgemeinen negativ.)

Auch hier ist wiederum die Inverse der nichtzentralen t-Verteilung zur Eintretenswahrscheinlichkeit  $w$  mit dem Nichtzentralitätsparameter  $\delta$  zu bestimmen. Der gesuchte Bemessungswert  $x^*$  läßt sich dann zu

$$t = \frac{\sqrt{m''}}{s''} (\bar{x}'' - x^*) \quad \dots (3.18)$$

$$\Rightarrow \boxed{x^* = \bar{x}'' - \frac{t \cdot s''}{\sqrt{m''}}} \quad (3.19)$$

berechnen.

Man beachte die Übereinstimmung von (3.19) und (3.13); dies ist auch nicht verwunderlich, da es sich formal um dasselbe Problem handelt. Zuverlässigkeitsaussagen sollten jedoch nicht auf der Grundlage dieser Ansätze ermittelt werden; denn hier wird sozusagen "die Wahrscheinlichkeit des Eintretens einer Wahrscheinlichkeit" abgeschätzt. Diese wird naturgemäß besonders bei kleinen Stichproben sehr konservativ ausfallen. Bei größeren Stichproben, d. h., wenn der Informationsgehalt gesteigert wird, nähert sich der so ermittelte Wert immer mehr dem "wahren" Wert an. Bei der Ermittlung von Bemessungswerten aus der Prediktorverteilung wird erwartet, daß der gesuchte Wert "im Mittel" eingehalten wird; der entsprechende englische Ausdruck "Tolerance region of  $\beta$ -expectation" beschreibt das Problem zutreffender.

### 3.4 Beispiele zu Abschnitt 2.3

#### 3.4.1 Abschätzen eines Fraktilwertes $x_{\epsilon}$ für $\mu$ nach (2.81)

Es sollen wie in den vorangegangenen Beispielen die 3 Proben mit 63, 69, 80 min betrachtet werden. Als Vorinformation soll eine fiktive Stichprobe vom Umfang  $m' = 9$  als a-priori-Information



mit  $\bar{x} = m' = 79$   
 und  $\sigma_x = s' = 10$

mit einbezogen werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} m'' &= m_0 = 3 \\ \bar{x}'' &= \bar{x}_0 = 70,7 \\ s'' &= s_0 = 8,62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'' &= m_0 + m' = \underline{12} \\ \bar{x}'' &= (3 \cdot 70,7 + 9 \cdot 79) / 12 \\ &= \underline{76,93} \\ s''^2 &= [(2 \cdot 8,62^2 + 3 \cdot 70,7^2) \\ &\quad + (8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 79^2) \\ &\quad - 12 \cdot 76,93^2] / 11 = \underline{99,49} \\ s'' &= \underline{9,97} \end{aligned}$$

nach (2.62) - (2.63a)

Es ist nun der t-Wert der 5-%-Fraktile der Student'schen t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $f_1 = 2$  und  $f_2 = 11$  zu bestimmen.

Es ergibt sich:

$$t = -2,92$$

$$t = -1,796$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x_E &= \frac{-2,92 \cdot 8,62}{\sqrt{3}} + 70,7 \\ &= \underline{56,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_E &= \frac{-1,796 \cdot 9,97}{\sqrt{12}} + 76,93 \\ &= \underline{71,8} \end{aligned}$$

Aus diesen Werten läßt sich ablesen, daß der Informationsgehalt der ersten Stichprobe sehr gering eingeschätzt wurde und sich damit nur ein geringer Wert für den Vertrauensbereich angeben läßt. Der auf der Grundlage von 12 Werten ermittelte Vertrauensbereich kommt dem in Abschnitt 3.1 ermittelten Wert von 72,2' schon sehr nahe!

### 3.4.2 Abschätzung eines Toleranzintervalles für $x_{\epsilon}$ nach 3.3.1

Mit den vorgenannten Werten soll nun die Grenze des unteren Toleranzintervalles für  $x_{\epsilon}$  berechnet werden. Als Aussagewahrscheinlichkeit wird i. allg. 90 % angesetzt. Für die zwei Stichproben ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned}\delta &= 1,645 \cdot \sqrt{3} = 2,849 \\ t &= 9,2 \quad \text{bei } f = 2 \\ x_{\epsilon} &= 70,7 - 9,2 \cdot 8,62/\sqrt{3} \\ &= \underline{24,9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta &= 1,645 \cdot \sqrt{12} = 5,698 \\ t &= 8,481 \quad \text{bei } f = 11 \\ x_{\epsilon} &= 76,93 - 8,41 \cdot 9,97/\sqrt{12} \\ &= \underline{52,52}\end{aligned}$$

Mit diesen Werten bestätigt sich der zuvor schon festgestellte Tatbestand. Der Informationsgehalt der ersten Stichprobe wird als zu gering eingeschätzt; als Ergebnis bekommt man die Aussage, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % die 5-%-Fraktile größer als ca. 25 min ist - kein sehr positives Ergebnis! Der bei der zweiten Stichprobe ermittelte Wert von 52,5 min liegt immer noch unter dem Wert von 59,8 min; die mangelnde Vorinformation bezüglich der Standardabweichung muß hier noch mit einem etwas geringeren Fraktilwert bezahlt werden.

### 3.4.3 Abschätzung eines Toleranzintervalles für $x^*$ bei gegebenem Sicherheitsindex $\beta_0$ nach 3.3.2

In /15/ wurden die erforderlichen  $\beta_0$ -Werte für Bauteile analog /14/ ermittelt. Für eine mittlere Brandabschnittsfläche und Auftretenswahrscheinlichkeit eines Brandes ergibt sich ein  $\beta$ -Wert von ca. 2,4. Der dazugehörige  $\alpha$ -Wert kann auch in Anlehnung an /15/ abgeschätzt werden; es ergibt sich  $\alpha_x \sim 0,80$  ( $\alpha$ -Wert für die Auflast  $\sim 0,6$  vgl. Seite 79 in /15/ +  $\alpha_x = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,80$ ). Daraus folgt der erforderliche  $\beta$ -Wert von  $0,8 \cdot 2,4 = 1,92$ .

Der Bemessungswert soll wiederum für beide Stichproben bestimmt werden.

$$\delta = 1,92 \cdot \sqrt{3} = 3,325$$

$$+ t = + 10,607 \quad \text{bei } f = 2$$

$$x^* = 70,7 - 10,607 \cdot 8,62/\sqrt{3} \\ = \underline{17,9 \text{ min}}$$

$$\delta = 1,92 \cdot \sqrt{12} = 6,65$$

$$t = 9,762 \quad \text{bei } f = 11$$

$$x^* = 76,93 - 9,762/\sqrt{9,97}/\sqrt{12} = \\ = \underline{48,8 \text{ min}}$$

Auch bei diesen Ergebnissen zeigt sich die gleiche Tendenz, so daß sich ein weiterer Kommentar dazu erübrigt.

#### 3.4.4 Bestimmung von $x^*$ mittels der Prediktorverteilung nach 2.3.1

Um die Bemessungswerte ermitteln zu können, wird zuerst die zu  $\beta = -1,92$  zugehörige Versagenswahrscheinlichkeit bestimmt. Aus NORMAL ergibt sich:  $p_f = 0,02743$ .

Damit läßt sich der zugehörige t-Wert der Student'schen t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $f_1 = 2$  und  $f_2 = 11$  berechnen.

$$t = -4,092$$

$$t = -2,148$$

Daraus folgt mit:

$$h = \frac{3}{4 \cdot 8,62^2} = 0,0100936$$

$$h = \frac{12}{13 \cdot 9,97^2} = 9,28641 \cdot 10^{-3}$$

$$x^* = -4,092/\sqrt{h} + 70,7 \\ = 29,97 \text{ min} \\ \text{=====}$$

$$x^* = -2,148/\sqrt{h} + 76,93 \\ = 54,64 \text{ min} \\ \text{=====}$$

Auch hier ergibt sich durch den als gering eingeschätzten Informationsgehalt der ersten Stichprobe ein sehr geringer Bemessungswert. Erst unter Einbeziehung der fiktiven "a priori"-Information erhält man einen annehmbaren Bemessungswert. Dieser liegt über dem zuvor ermittelten Wert von 48,8' (Abschnitt 3.4.3), da der hier errechnete Wert sozusagen nur "im Mittel" eingehalten wird.

Zum Schluß sollen die Werte der 5-%-Fraktile analog Abschnitt 3.4.2 noch einmal ermittelt werden. Mit den zuvor berechneten

h-Werten und t-Werten nach Abschnitt 3.4.2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}x_e &= - 2,92/\sqrt{h} + 70,7 \\ &= 41,64 \text{ min} \\ & \text{=====}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_e &= - 1,796/\sqrt{h} + 76,93 \\ &= 58,25 \text{ min} \\ & \text{=====}\end{aligned}$$

(gegenüber 24,9 und 52,52 min)

#### 4. Abnahmekennlinien

Bei der Aufstellung von Abnahmekennlinien (oder später Einstufungskennlinien) soll gezeigt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit angebotene oder hergestellte und durch Stichprobenentnahme zu prüfende Grundgesamtheiten richtig eingestuft werden. Als einfachstes Abnahmekriterium gilt i. allg., daß die durch den Abnahmefaktor  $k'$  ermittelte Prüfgröße  $Z$  größer als eine vorgegebene untere Schranke  $T_u$  sein soll; d. h.

$$\bar{x} - k' \cdot s > T_u \quad \dots (4.1)$$

Wie schon erwähnt, stellt  $k'$  den Abnahmefaktor dar (z. B.  $k' = 1,645$  bei einer 5-%-Fraktile),  $\bar{x}$  den Stichprobenmittelwert und  $s$  die Stichprobenstandardabweichung. Die Prüfgröße  $T_u$  kann nun als Fraktile des in der angebotenen Grundgesamtheit vorhandenen Schlechtanteiles  $p$  interpretiert werden (4.2).

$$T_u = \mu - u_{(1-p)} \cdot \sigma \quad \dots (4.2)$$

Die Fragestellung ist nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Grundgesamtheiten mit vorgegebenem Schlechtanteil angenommen, und welches Herstellerrisiko besteht, daß die gesamte Charge bei geringerem Schlechtanteil nicht abgenommen wird, bzw. welches Abnehmerrisiko besteht, daß eine Charge mit hohem Schlechtanteil doch noch angenommen wird.

#### 4.1 Unbekannter Mittelwert und unbekannte Standardabweichung

Sind nun  $\bar{x}$  und  $s$  unbekannt - d. h., sie müssen durch eine Stichprobenentnahme bestimmt werden -, stellt sich das in Abschnitt 4 dargestellte Problem in folgender Form dar. Die Annahmewahrscheinlichkeit  $W_{(p)}$  bei einem in der Probe vorhandenen Schlechtanteil  $p$  ist:

$$W_{(p)} = P(\bar{x} - k' \cdot s > T_u) \text{ oder} \\ W_{(p)} = 1 - P(\bar{x} - k' \cdot s < \mu - u_{(1-p)} \cdot \sigma) \quad \dots (4.3)$$

Diese Fragestellung erinnert sehr an die des Abschnittes 3.3.1 und kann auch ebenso behandelt werden. Es wird wiederum auf die Ausdrücke (2.69) und (2.70) zurückgegriffen, wobei jedoch zu bedenken ist, daß in (2.70) nun  $\bar{x}$  zur Variablen wird. Dann ergibt sich (2.70) zu

$$\xi = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma/\sqrt{m}} \quad \dots (4.4)$$

Nach dem Einsetzen von (2.69) und (4.4) in (4.3) erhält man den folgenden Ausdruck (4.5):

$$W_{(p)} = 1 - P \left( \bar{x} - \bar{x} + \frac{\xi \cdot s \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{n}} + \frac{u_{(1-p)} \cdot s \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{n}} < k' \cdot s \right)$$
$$W_{(p)} = 1 - P \left( \frac{\xi + u_{(1-p)} - \sqrt{m}}{\sqrt{n/f}} < k' \cdot \sqrt{m} \right) \quad \dots (4.5)$$

Dies bedeutet, daß die Berechnung der Annahmewahrscheinlichkeit auf die schon bekannte nichtzentrale t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $f = m - 1$  und dem Nichtzentralitätsfaktor  $\delta = u_{(1-\epsilon)} \cdot \sqrt{m}$  zurückgeführt werden kann. Dabei definiert  $u_{(1-p)}$  den durch die untere Schranke  $T_u$  definierten Schlechtanteil der angebotenen Charge oder Grundgesamtheit.

#### 4.2 Bekannte Standardabweichung der Probe

Für den Fall, daß die Standardabweichung  $\sigma$  aus vorhergehenden Untersuchungen oder anderweitig bekannt sein sollte, vereinfacht sich (4.3) zu:

$$W_{(p)} = 1 - P \left( \bar{x} - k' \cdot \sigma \leq \mu - u_{(1-p)} \cdot \sigma \right) \quad \dots (4.6)$$

Aus (4.4) folgt

$$\mu = \bar{x} - \frac{\xi \cdot \sigma}{\sqrt{m}} \quad \dots (4.7)$$

und eingesetzt in (4.6) ergibt nach kurzer Umrechnung den folgenden Ausdruck (4.8)

$$W_{(p)} = 1 - P(\xi < (k' - u_{(1-p)}) \cdot \sqrt{m}) \quad \dots (4.8)$$

In diesem Fall konnte die Berechnung der Annahmewahrscheinlichkeit auf die Normalverteilung zurückgeführt werden. Soll z. B. noch 10 % Schlechtanteil toleriert werden, müsste  $k'$  zu 1.28 gewählt werden, und  $u_{(1-p)}$  definiert wiederum den in der angebotenen Charge vorhandenen Schlechtanteil.

Die Auswirkungen bzw. der Unterschied zwischen den Abnahmekennlinien soll im folgenden Beispiel verdeutlicht werden. In Bild 3 sind neben der idealen Abnahmekennlinie die Abnahmekennlinien für je 3 und 12 Proben bei bekannter und unbekannter Standardabweichung aufgetragen.

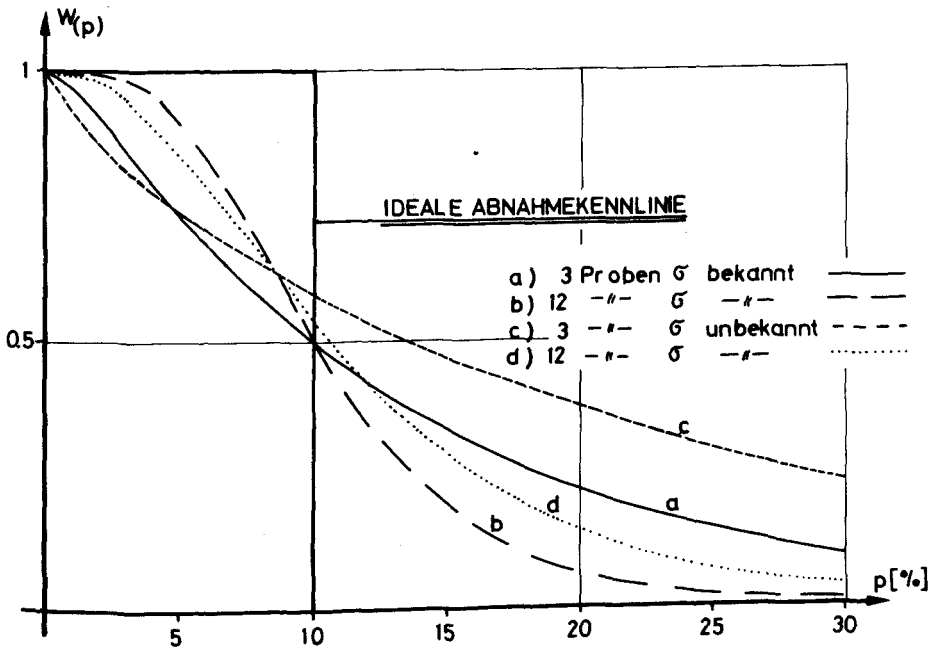


Bild 3

Aus den Vorläufen der Abnahmekennlinien ist ersichtlich, daß bei kleiner Probenanzahl mit geringem Schlechtanteil ein hohes Herstellerrisiko besteht, während bei größerem Schlechtanteil das Abnehmerrisiko steigt; d. h., es werden noch Chargen mit einer großen Wahrscheinlichkeit angenommen, die eigentlich zurückgewiesen werden müßten. Ist eine Vorinformation vorhanden, verringert sich das Herstellerrisiko - wie nicht anders zu erwarten - bei guten Chargen, und das Abnehmerrisiko kann auch bei steigendem Schlechtanteil erheblich verringert werden. Dieses Beispiel sollte kurz dazu dienen, den durchaus nicht unbeträchtlichen wirtschaftlichen Vorteil, der sich bei der Berücksichtigung von Vorinformationen ergeben kann, einmal bildlich darzustellen.

#### 4.3 Einstufung in Klassen

##### 4.3.1 Unbekannter Mittelwert und unbekannte Standardabweichung

Bei der Beurteilung von Stichproben besteht oft die Notwendigkeit, diese nicht nur anzunehmen oder abzulehnen, sondern auch in eine bestimmte Klasse K (z. B. Feuerwiderstandsdauern) mit der unteren Grenze  $T_u$  und der oberen Grenze  $T_o$  einzuordnen. Diese Fragestellung kann analog den in den Abschnitten 4.1 und 4.2 aufgezeigten Lösungswegen behandelt werden.

Es gilt

$$\begin{aligned} W_{(K)} &= P(\bar{x} - k' \cdot s > T_u) \text{ und} \\ &P(\bar{x} - k' \cdot s < T_o) \end{aligned} \quad \dots (4.9)$$

Zusammengefaßt:

$$W_{(K)} = P(T_u < \bar{x} - k' \cdot s < T_o) \quad \dots (4.10)$$


Aus (4.7) mit (2.69) folgt

$$\bar{x} = \mu + \frac{\xi \cdot s \cdot \sqrt{F}}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{n}}, \quad \dots (4.11)$$


sodaß sich nach dem Einsetzen von (4.11) in (4.10) folgender Ausdruck anschreiben läßt.



$$\begin{aligned}
 W(k) &= P(T_u < \mu + \frac{\xi \cdot s \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{\eta}} - k' \cdot s < T_0) \\
 &\vdots \\
 W(k) &= P\left(\frac{\xi - \frac{\sqrt{m}}{\sigma}(T_u - \mu)}{\sqrt{\eta/f'}} > k' \cdot \sqrt{m} > \frac{\xi - \frac{\sqrt{m}}{\sigma}(T_0 - \mu)}{\sqrt{\eta/f'}}\right) \\
 &\vdots \\
 W(k) &= P\left(\frac{\xi + \frac{\sqrt{m}}{\sigma}(\mu - T_u)}{\sqrt{\eta/f'}} > k' \cdot \sqrt{m} > \frac{\xi + \frac{\sqrt{m}}{\sigma}(\mu - T_0)}{\sqrt{\eta/f'}}\right) \dots (4.12)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 1 - P(T_1 < t | d_1) = F_1(t) \\
 &= F_2(t)
 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \underline{W(k) = F_2(t | f, d_2) - F_1(t | f, d_1)} \dots (4.13)$$

Auch in diesem Fall konnte das gestellte Problem auf die nichtzentrale t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $f = m - 1$  und dem Nichtzentralitätsfaktor  $\delta = \sqrt{m} (\mu - T_{u,0}) / \sigma$  zurückgeführt werden. Die Aussage besteht nun darin, daß festgestellt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Charge mit vorhandener Standardabweichung  $\sigma$  in die vorgegebene Klasse K eingeordnet wird, wenn der durch die Stichprobenprüfung ermittelte Wert z. B. mit  $k' = 1.28$  eine 10-%-Fraktile darstellen soll. Dies bedeutet jedoch, daß der Variationskoeffizient konstant bleibt und die Standardabweichung mit wachsendem Mittelwert ständig zunimmt, was bei großen Mittelwerten etwas auf der sicheren Seite liegende Werte ergeben kann.

#### 4.3.2 Bekannte Standardabweichung

Der Ansatz (4.10) kann hier analog verwendet werden, und zwar gilt nun bei bekannter Standardabweichung  $\sigma$ :

$$W_{(K)} = P(T_u < \bar{x} - k \cdot \sigma < T_o) \quad \dots (4.14)$$

Aus (4.7) folgt

$$\bar{x} = \mu + \frac{\xi \cdot \sigma}{\sqrt{m}} \quad (4.15)$$

Wird (4.15) in (4.14) eingesetzt, ergeben sich:

$$W_{(K)} = P(T_u < \mu + \frac{\xi \cdot \sigma}{\sqrt{m}} - k' \cdot \sigma < T_o) \quad \dots (4.16)$$

$$= P(\underbrace{\sqrt{m}(\frac{T_u}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} + k')}_{= \Phi_1} < \xi < \underbrace{\sqrt{m}(\frac{T_o}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} + k')}_{= \Phi_2}) \dots (4.17)$$

$$\underline{W_{(K)} = \Phi_2 - \Phi_1} \quad \dots (4.18)$$

In Bild 4 sind die Abnahmekennlinien für den folgenden Fall dargestellt:

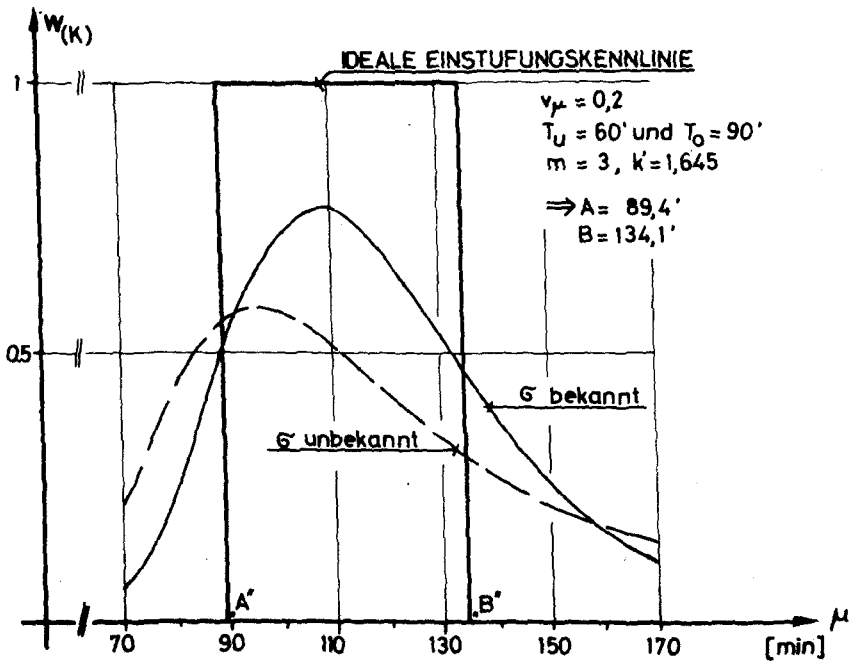


Bild 4

Aus den Kurvenverläufen des Bildes 4 zeigt sich ganz deutlich, daß durch die Berücksichtigung einer Vorinformation bei kleiner Probenanzahl die Einstufungswahrscheinlichkeit wesentlich verbessert werden kann. Die Diskrepanz wird im mittleren Kurvenbereich besonders deutlich, wo einer Einstufungswahrscheinlichkeit von ca. 0,77 bei Berücksichtigung einer Vorinformation eine Einstufungswahrscheinlichkeit von nur ca. 0,57 ohne Berücksichtigung einer Vorinformation gegenübersteht.

Im Vergleich dazu soll einmal der Einfluß einer "großen" Stichprobenanzahl ( $m = 30$ ) in Bild 5 dargestellt werden.

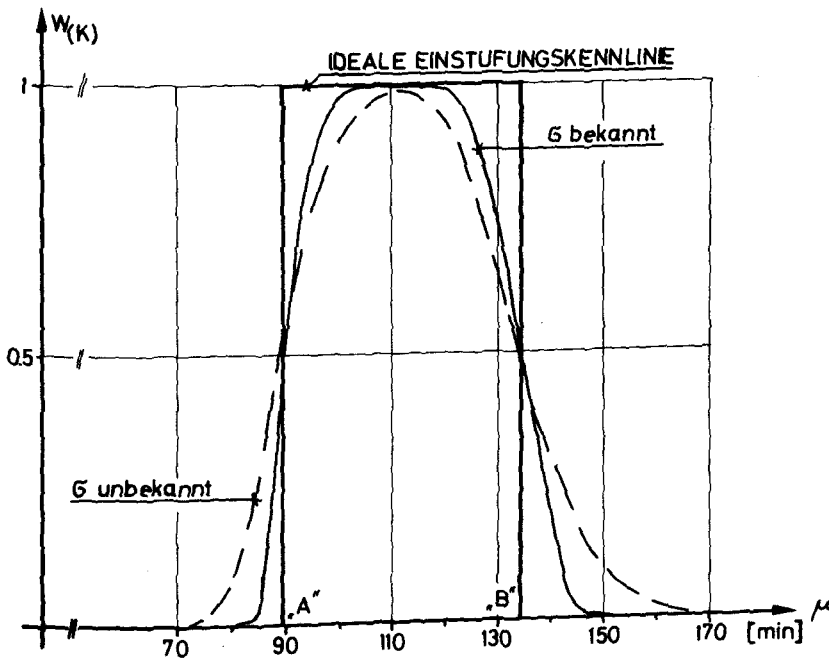


Bild 5

Aus Bild 5 läßt sich ablesen, daß sich die Kurvenverläufe schon sehr dem der idealen Einstufungskennlinie nähern. Dies ist bei bekannter Standardabweichung noch mehr der Fall. Es muß jedoch

bemerkt werden, daß trotz der relativ großen Probenanzahl immer noch ein beträchtlicher Unterschied zwischen den beiden Einstufungslinien besteht, so daß auch bei einer großen Stichprobenanzahl die Mitnahme einer Vorinformation durchaus noch erhebliche Vorteile einbringen kann.

### 5. Unterschreitenswahrscheinlichkeit bei vorgegebenem Abnahmefaktor

Im vorangegangenen Abschnitt wurde auf der Basis von Abnahmekennlinien gezeigt, mit welcher Wahrscheinlichkeit im allgemeinen bei der Abnahme von Chargen oder deren Einstufung die auf der Basis von Abnahmefaktoren  $k'$  ermittelten Fraktilwerte einen der Einstufung entsprechenden zutreffenden Wert wiedergeben. Bei vielen Bauteilversuchen werden nun die "nominellen" Bemessungswerte auf der Basis der Gleichung (5.1) ermittelt,

$$x_N = \bar{x} - k' \cdot \frac{s}{\sigma} \quad \dots (5.1)$$

je nachdem, ob  $s$  aus der Stichprobe ermittelt wurde oder als  $\sigma$  aus Vorinformationen bekannt ist.

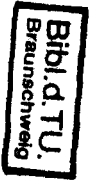
Nach (2.22) oder (2.90) ergab sich für die jeweilige Verteilung von  $x$  als Normalverteilung

$$a) \quad g(x|\underline{x}) = N\left(\mu'', \sigma_x \cdot \sqrt{\frac{m''+1}{m''}}\right) \quad \dots (5.2)$$

oder

$$b) \quad g(x|\underline{x}) = F\left(\mu'', s'' \cdot \sqrt{\frac{m''+1}{m''}}\right) \quad \dots (5.3)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß Werte kleiner als der ermittelte nominelle Bemessungswert  $x_N$  sind, ist dann wiederum auf die standardisierte Form gebracht:



$$P(X \leq x_N | \bar{x}, s, f) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}^n}{\sigma_x} \cdot \sqrt{\frac{m'' + 1}{m''}}\right) \dots (5.4)$$

oder

$$F\left(\frac{x - \bar{x}^n}{s^*} \cdot \sqrt{\frac{m'' + 1}{m''}}\right) \dots (5.5)$$

Wird der nominelle Wert eingesetzt, ergibt sich:

$$p_N = \Phi\left(-k' \cdot \sqrt{\frac{m'' + 1}{m''}}\right) \dots (5.6)$$

oder

$$p_N = F\left(-k' \cdot \sqrt{\frac{m'' + 1}{m''}}\right) \dots (5.7)$$

Im konkreten Beispiel bedeutet dies folgendes: Im Beispiel 3.4.4 wurden folgende Werte ermittelt:

$$\begin{aligned} \bar{x}^n &= 76,93 \\ s^* &= 9,97 \end{aligned}$$

5-%-Fraktile aufgrund eines Annahmefaktors von  $k' = 1.645 =$

$$x_e = 76,93 - 1,645 \cdot 9,97 = 60,53$$

gegenüber  $x_e = 58,25$

Damit ergibt sich mit dem so ermittelten Wert eine Unterschreitungswahrscheinlichkeit von

$$F(-1.645 \cdot \sqrt{12/13}) = \underline{0,071}$$

d. h. 7,1 %.

- /1/ Rackwitz, R.: Theoretische Grundlagen für die Bestimmung des Bemessungswertes von Bauteilwiderständen aus Versuchen.  
Heft 38, SFB 96 - München, 1979.
- /2/ Breitung, K.: Zwei Anwendungen der Bayes'schen Statistik.  
Heft 55, SFB 96 - München, 1981.
- /3/ Stange, K.: Bayes-Verfahren.  
Springer-Verlag 1977.
- /4/ Struck, W.: Zur Berechnung von einseitigen, unteren Grenzwerten bei der statistischen Auswertung von Meßergebnissen unter Berücksichtigung von Vorinformationen mittels der Bayes'schen Methode.  
Die Bautechnik 2/1978, Seite 49 - 53.
- /5/ Zellner, A.: An Introduction to Bayesian Interference in Econometrics.  
Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1971.
- /6/ Guttman, I.: Statistical Tolerance Regions: Classical and Bayesian.  
Griffius Statistical Monographs and Courses Nr. 26, 1970.
- /7/ Box, E.P., and Tiao, C.: Bayesian Inference in Statistical Analysis.  
Addition - Wesley Publishing Company, 1973.
- /8/ Köhlmeyer, M.: Die nichtzentrale t-Verteilung.  
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems 31. Springer-Verlag 1970.
- /9/ Owen, D.B.: A Survey of Properties and Applications of the Noncentral t-Distribution.  
Technometrics, Vol. 10, No. 3, Seite 445 - 478.
- /10/ Aitchison, J., Sculthorpe, D.: Some problems of statistical prediction.  
Biometrika (1965), 52, Seite 469 - 483.

- /11/ Owen, D.B.: A special case of a bivariate non-central t-distribution.  
Biometrika (1965), 52, Seite 437 - 446.
- /12/ Cooper, B.E.: The Integral of the Non-central t-distribution.  
I.R. Statistical Soc. (1968) Vol. 17, No. 2, Seite 193 - 194  
mit Seite 186 - 192.
- /13/ Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für  
bauliche Anlagen.  
DIN, Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth-Verlag.
- /14/ Bub, H., Schneider, U., Ehm, H., et al.: Entwurf eines Model-  
codes für den baulichen Brandschutz.  
Institut für Bautechnik, Berlin. 2. Fassung Juli 1979.
- /15/ Henke, V.: Ein Beitrag zur Zuverlässigkeit frei gelagerter  
Stahlbetonstützen unter genormter Brandeinwirkung.  
Dissertation, TU - Braunschweig, 1980.
- /16/ Struck, W.: Bemessungswerte und charakteristische Werte von  
Bauteilwiderständen unter Einbeziehung von Versuchsergebnissen.  
Amts- und Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Material-  
prüfung (BAM), 11 (1981), Nr. 4, Seite 3, 6, 325.





**HILFSPROGRAMME**  
=====

PROGRAMM: NORMAL

```
20 CLS: INPUT "FUNKTIONSWERT X="; X
30 IX=1
40 ZX=EXP(-X*X/2)/SQR(8*ATN(1))
50 IFX=0 THEN QX=0.5: GOTO 210
60 IFX<0 THEN XN=X: X=ABS(X): IX=0
70 A1=1: A0=0: B1=0: B0=1: F=0
80 FORN=1 TO 100
90 IFX>=2 THEN B=X ELSE B=(2*N-1)
100 IFX>=2 THEN GOTO 110 ELSE GOTO 120
110 IFN>1 THEN A=N-1: GOTO 130 ELSE A=1: GOTO 130
120 IFN>1 THEN A=((N-1)*X*X)*(-1)^(N+1) ELSE A=X
130 AN=B*A0+A*A1
140 BN=B*B0+A*B1
150 FM=AN/BN
160 IFABS(F-FM)<1E-11 THEN 200
170 A1=A0: B1=B0
180 A0=AN: B0=BN: F=FM
190 NEXTN
200 IFX>=2 THEN QX=ZX*FM ELSE QX=0.5-ZX*FM
210 PX=1-QX
220 IFIX=0 THEN A=PX: PX=QX: QX=A: X=XN
230 CLS: PRINT "----NORMALVERTEILUNG----": PRINT
240 PRINT "ERGEBNISSE FUER X="; X
250 PRINT "P(X) .....="; PX
260 PRINT "Q(X) .....="; QX
270 PRINT "Z(X) .....="; ZX
```

PROGRAMM: INVNORMAL  
=====

```
10 CLS: INPUT "VERSAGENSWAHRSCHEINLICHKEIT="; PF
20 IFFP > 0.5 THEN DX = 0.5 ELSE DX = -0.5
30 X = 0
40 GOSUB 1000: YA = FX - PF
50 X = X + DX
60 GOSUB 1000: YN = FX - PF
70 IF YA * YN <= 0 THEN GOTO 90
80 YA = YN: GOTO 50
90 REM NULLDURCHGANG GEFUNDEN!
100 X1 = X - DX
110 Y1 = YA
120 X2 = X
130 Y2 = YN: CLS
135 REM- F E G A S U S -ALGORITHMUS-
140 XN = X1 - Y1 * (X2 - X1) / (Y2 - Y1)
150 PRINT "NAEHERUNGSWERT F. BETA-"; XN: X = XN: GOSUB 1000: YN = FX - PF
155 PRINT "DIFFERENZ="; YN: IF ABS(YN) < 1E-4 * PF THEN BT = X: GOTO 230
160 IF Y2 * YN < 0 THEN X1 = X2
170 IF Y2 * YN < 0 THEN Y1 = Y2 ELSE Y1 = Y1 * Y2 / (Y2 + YN)
180 X2 = XN
190 Y2 = YN
200 GOTO 140
230 CLS: PRINT "---INVERSE DER NORMALVERTEILUNG---": PRINT
240 PRINT "DER INVERSIONSWERT X="; BT
250 PRINT "BEI PF VORGEGEBEN   =" ; PF
260 PRINT "UND PF BEI X       =" ; PX
270 END
1000 REM EINGANGSWERT X=BETA WERT --> PF IN PX
1010 IX = 1
1020 ZX = EXP(-X * X / 2) / SQR(8 * ATN(1))
1030 IF X = 0 THEN QX = 0.5: GOTO 1190
1040 IF X < 0 THEN XN = X: X = ABS(X): IX = 0
1050 A1 = 1: A0 = 0: B1 = 0: B0 = 1: F = 0
1060 FOR N = 1 TO 100
1070 IF X >= 2 THEN B = X ELSE B = (2 * N - 1)
1080 IF X >= 2 THEN GOTO 1090 ELSE GOTO 1100
1090 IF N > 1 THEN A = N - 1: GOTO 1110 ELSE A = 1: GOTO 1110
1100 IF N > 1 THEN A = ((N - 1) * X * X) * (-1) ^ (N + 1) ELSE A = X
1110 AN = B * A0 + A * A1
1120 BN = B * B0 + A * B1
1130 FM = AN / BN
1140 IF ABS(F - FM) < 1E-11 THEN 1180
1150 A1 = A0: B1 = B0
1160 A0 = AN: B0 = BN: F = FM
1170 NEXT N
1180 IF X >= 2 THEN QX = ZX * FM ELSE QX = 0.5 - ZX * FM
1190 PX = 1 - QX
1200 IF IX = 0 THEN A = PX: PX = QX: QX = A: X = XN
1210 RETURN
```

PROGRAMM: STUDENT

=====

```
10 DEFDBLA-Z:DEFINT I,K
20 CLS:INPUT"FREIHEITSGRADE-";F
30 INPUT"OBERE GRENZE T-";T
40 Z=1#:GOSUB10000:G1=1#/(4#*Z2)
50 Z=F;GOSUB10140:A=T/Z3:B=F/(F+T*K)
60 I1=F-2:IE=F-2*INT(F/2)
70 S=1:C=1:KS=2+IE:FK=KS
80 IF(I1-2)<0THEN120
90 FORK=KSTOIISTEP2
100 C=C*B*(FK-1#)/FK
110 S=S+C:FK=FK+2#:NEXTK
120 IFIE<=0THENZ=B:GOSUB10140:PR=.5#+.5#*A*Z3*S:GOTO150
130 IF(F-1)<=0THENS=0
140 Z=A:GOSUB10000:PR=.5#+(A*B*S+Z2)*G1
150 CLS:PRINT"---STUDENTS T-VERTEILUNG---":PRINT
160 PRINT"ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=";F
170 PRINT"FUNKTIONSWERT T .....=";T
180 PRINT"INTEGRALWERT F(T) .....=";PR
190 END
10000 REM ARCUSTANGENS
10010 GOSUB 10170
10020 I0=0:I1=0:I2=SGN(Z)
10030 Z=ABS(Z):IF Z>1 Z=1/Z:I1=1
10040 IF Z<.077 THEN 10070
10050 Z2=Z:Z=Z*K+1:GOSUB 10150:Z=Z2/(Z3+1)
10060 I0=I0+1:GOTO 10040
10070 Z3=Z:I3=-11:GOSUB 10200
10080 IF I0=0 GOTO 10100
10090 FOR I=1 TO I0:Z=Z+Z:NEXT
10100 Z2=Z
10110 IF I1=1 Z2=Z9-Z2
10120 Z2=Z2*I2
10130 RETURN
10140 REM WURZELBERECHNUNG
10150 Z3=SQR(Z):Z3=(Z3+Z/Z3)/2:Z3=(Z3+Z/Z3)/2:RETURN
10160 REM *** Z9 = PI/2 ***
10170 IF Z9<>0 RETURN
10180 Z4=Z:Z=1:GOSUB 10020:Z9=Z2+Z2:Z=Z4:RETURN
10190 REM *** POWER EXPANSION SUBROUTINE ***
10200 Z2=Z*K:FOR I=3 TO ABS(I3) STEP 2:Z3=SGN(I3)*Z3*Z2
10210 Z=2+Z3/I:NEXT:RETURN
```

```
10 DEFDBLA-Z:DEFINTI,K
20 CLS:INPUT"VERSAGENSWAHRSCHEINLICHKEIT-";PF
30 INPUT"ANZAHL DER FREIHEITSGRADE .....";F
40 IF PF>.5#THENDT=.5#ELSEDT=-.5#
50 T=0
60 GOSUB1000 :YA=PR-PF
70 T=T+DT
80 GOSUB1000 :YN=PR-PF
90 IFYA*YN<=0THENGOTO110
100 YA=YN:GOTO70
110 REM NULLDURCHGANG GEFUNDEN!
120 T1=T-DT
130 Y1=YA
140 T2=T
150 Y2=YN:CLS
160 REM --- P E G A S U S ALGORITHMUS ---
170 TN=T1-Y1*(T2-T1)/(Y2-Y1)
180 PRINT"NAEHERUNGSWERT FUER T=";TN:T=TN:GOSUB1000 :YN=PR-PF
190 PRINT"DIFFERENZ ..... =" ;YN:IFABS(YN)<1.E-4*PFTHENBT=T:GOTO250
200 IFY2*YN<0THENY1=T2
210 IFY2*YN<0THENY1=Y2ELSEY1=Y1*Y2/(Y2+YN)
220 T2=TN
230 Y2=YN
240 GOTO170
250 CLS:PRINT"--- INVERSE DER STUDENT T-VERTEILUNG---":PRINT
260 PRINT"DER INVERSIONSWERT T      =" ;BT
270 PRINT"BEI PF VORGEGEBEN        =" ;PF
280 PRINT"UND PF BEI T              =" ;PR
290 PRINT"ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=" ;F
300 END
1000 REM EINGANGSWERTE T UND ANZHL DER FREIHEITSGRADE F
1010 Z=1#:GOSUB10000:G1=1#/(4#*Z2)
1020 Z=F:GOSUB10140:A=T/Z3:B=F/(F+T*K)
1030 I1=F-2:IE=F-2*INT(F/2)
1040 S=1:C=1:KS=2+IE:FK=KS
1050 IF(I1-2)<0THEN1090
1060 FORK=KSTOIISTEP2
1070 C=C*B*(FK-1#)/FK
1080 S=S+C:FK=FK+2#:NEXTK
1090 IFIE<=0THENZ=B:GOSUB10140:PR=.5#+.5#*A*Z3*S:GOTO1120
1100 IF(F-1)<=0THENS=0
1110 Z=A:GOSUB10000:PR=.5#+(A*B*S+Z2)*G1
1120 RETURN
10000 REM ARCUSTANGENS
10010 GOSUB 10170
10020 I0=0:I1=0:I2=SGN(Z)
10030 Z=ABS(Z):IF Z>1 Z=1/Z:I1=1
10040 IF Z<.077 THEN 10070
10050 Z2=Z:Z=Z*Z+1:GOSUB 10150:Z=Z2/(Z3+1)
10060 I0=I0+1:GOTO 10040
10070 Z3=Z:I3=-11:GOSUB 10200
10080 IF I0=0 GOTO 10100
10090 FOR I=1 TO I0:Z=Z+Z:NEXT
10100 Z2=Z
10110 IF I1=1 Z2=Z9-Z2
10120 Z2=Z2*I2
10130 RETURN
10140 REM WURZELBERECHNUNG
10150 Z3=SQR(Z):Z3=(Z3+Z/Z3)/2:Z3=(Z3+Z/Z3)/2:RETURN
10160 REM *** Z9 = PI/2 ***
10170 IF Z9<>0 RETURN
10180 Z4=Z:Z=1:GOSUB 10020:Z9=Z2+Z2:Z=Z4:RETURN
10190 REM *** POWER EXPANSION SUBROUTINE ***
10200 Z2=Z*Z:FOR I=3 TO ABS(I3) STEP 2:Z3=SGN(I3)*Z3*Z2
10210 Z=Z+Z3/I:NEXT:RETURN
```

PROGRAMM: INVSTUDENT

=====

PROGRAMM ZUR BERECHNUNG DER  
PARAMETER DER PREDIKTORVER-

```
10 INPUT "A,B"; A5,B5
15 INPUT "M"; M%
20 INPUT "X-QUER,SIGMA"; XM,SI
22 INPUT "ANZAHL DER STUETZPUNKTE (EMPF. 5-9)"; N TEILUNG NACH ABSCHNITT 2.2.1
25 DIM T(N)
30 INPUT "DRUCKER(J/N)"; F$
40 IF NOT F$="J" THEN 100
60 LPRINT"EINGABEWERTE:"
70 LPRINT USING "A = ####.#, B = ####.#, M = ####"; A5,B5,M%
80 LPRINT USING "X-QUER = ####.##, SIGMA = ####.###"; XM,SI
90 LPRINT " "
100 PRINT:PRINT "EINGABEWERTE:"
110 PRINT USING "A = ####.#, B = ####.#, M = ####"; A5,B5,M%
120 PRINT USING "X-QUER = ####.##, SIGMA = ####.###"; XM,SI:PRINT
130 ZP = 6.28319
140 X = (B5-XM)*SQR(M%)/SI: GOSUB 5000 : NN = PX
150 X = (A5-XM)*SQR(M%)/SI: GOSUB 5000 : NN = NN-PX
160 M1% = M%+1
180 INPUT "INTEGRATIONSGRENZE ANFANG"; A
190 INPUT "INTEGRATIONSGRENZE ENDE"; B
200 REM INTEGRATION NACH ROMBERG -ERWARTUNGSWERT-
210 H=B-A:L=0:XX=A:GOSUB2000 :F1=F:XX=B:GOSUB2000 :F2=F
220 T(1)=(F1+F2)*H/2
230 FORI=2TON
240 H=H/2:L=L*2+1:T(I)=0
250 FORJ=1TOLSTEP2
260 XX=A+H*J:GOSUB2000 :T(I)=T(I)+F
270 NEXTJ
280 T(I)=T(I-1)/2+H*T(I):NEXTI
290 H=1
300 FORI=2TON:H=4*H:L=N-I+1
310 FORJ=1TOL:T(J)=(H*T(J+1)-T(J))/(H-1):NEXTJ
320 T(L+1)=T(1):NEXTI
330 EG=T(1)
340 CLS:PRINT"*****ERGEBNIS*****":PRINT
350 PRINT"ANZAHL DER STUETZPUNKTE N=";N:PRINT
360 PRINT"INTEGRATIONSANFANG A=";A:PRINT
370 PRINT"INTEGRATIONSENDE B=";B:PRINT
380 PRINT"DAS INTEGRAL HAT DEN NAEHERUNGSWERT ->";EG
382 EX = EG
384 IF F$="J" THEN LPRINT USING "ERWARTUNGSWERT : ####.#"; EX
540 REM INTEGRATION NACH ROMBERG -STANDARDABWEICHUNG-
550 H=B-A:L=0:XX=A:GOSUB 3000:F1=F:XX=B:GOSUB 3000:F2=F
560 T(1)=(F1+F2)*H/2
570 FORI=2TON
580 H=H/2:L=L*2+1:T(I)=0
590 FORJ=1TOLSTEP2
600 XX=A+H*J:GOSUB 3000:T(I)=T(I)+F
610 NEXTJ
620 T(I)=T(I-1)/2+H*T(I):NEXTI
630 H=1
640 FORI=2TON:H=4*H:L=N-I+1
650 FORJ=1TOL:T(J)=(H*T(J+1)-T(J))/(H-1):NEXTJ
660 T(L+1)=T(1):NEXTI
670 EG=T(1)
680 CLS:PRINT"*****ERGEBNIS*****":PRINT
690 PRINT"ANZAHL DER STUETZPUNKTE N=";N:PRINT
700 PRINT"INTEGRATIONSANFANG A=";A:PRINT
710 PRINT"INTEGRATIONSENDE B=";B:PRINT
720 PRINT"DAS INTEGRAL HAT DEN NAEHERUNGSWERT ->";EG
740 IF F$="J" THEN LPRINT USING "STANDARDABWEICHUNG : ####.#"; SQR(EG)
770 END
2000 X = (B5-(M%*XM+XX))/M1%*SQR(M1%)/SI
2010 GOSUB 5000 : Z = PX
```

```
2020 X = (A5-(M%*XM+XX)/M1Z)*SQR(M1Z)/SI
2030 GOSUB 5000 : Z = Z-PX
2040 HX = Z/NN
2050 Y1 = SQR(MZ/M1Z)
2060 F = EXP(-.5*((XX-XM)*Y1/SI)A2)
2070 F = F*Y1/(SI*SQR(ZP))
2080 F = XX*HX*F
2090 RETURN
3000 X = (B5-(M%*XM+XX)/M1Z)*SQR(M1Z)/SI
3010 GOSUB 5000 : Z = FX
3020 X = (A5-(M%*XM+XX)/M1Z)*SQR(M1Z)/SI
3030 GOSUB 5000 : Z = Z-FX
3040 HX = Z/NN
3050 Y1 = SQR(MZ/M1Z)
3060 F = EXP(-.5*((XX-XM)*Y1/SI)A2)
3070 F = F*Y1/(SI*SQR(ZP))
3080 F = (XX-EX)A2*HX*F
3090 RETURN
5000 IX=1:REM INTEGRAL DER NORMALVERTEILUNG
5010 ZX=EXP(-X*X/2)/SQR(B*ATN(1))
5020 IFX=0THENQX=0.5:GOTO5180
5030 IFX<0THENXN=X:X=ABS(X):IX=0
5040 A1=1:A0=0:E1=0:B0=1:F9=0
5050 FORN1=1TO100
5060 IFX>=2THENB9=XELSEB9=(2*N1-1)
5070 IFX>=2THENGOTO5080 ELSEGOTO5090
5080 IFN1>1THENA9=N1-1:GOTO5100 ELSEA9=1:GOTO5100
5090 IFN1>1THENA9=(N1-1)*X*X*(-1)A(N1+1)ELSEA9=X
5100 AN=B9*A0+A9*A1
5110 BN=B9*B0+A9*B1
5120 FM=AN/BN
5130 IFABS(F9-FM)<1E-11THEN5170
5140 A1=A0: B1=B0
5150 A0=AN: B0=BN: F9=FM
5160 NEXTN1
5170 IFX>=2THENQX=ZX*FMELSEQX=0.5-ZX*FM
5180 PX=1-QX
5190 IFIX=0THENA9=PX:PX=QX:QX=A9:X=XN
5200 RETURN
```

MASTER HENK  
IE = 2  
IF = 3

Berechnung der nicht zentralen  
t-Verteilung.

```
C
C      T - THE VALUE OF T0
C      IDF - THE DEGREES OF FREEDOM
C      D - THE NON-CENTRALITY PARAMETER
C
111 CONTINUE
   READ(IE,99) N, IDF, D
99  FORMAT(2I5, F10.4)
   IF(N.LT.D) GOTO 112
   DO 1 I= 1, N
   READ(IE,100) T
100 FORMAT(F10.4)
   WRITE(IA,101) T, IDF, D
101 FORMAT(1H0, 12H VARIABLE T=, F10.4, /,
12H ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=, I5, /,
223H NICHTZENT. PARAMETER=, F10.4)
C
      P=PRNCST(T, IDF, D)
C
   WRITE(IA,102) P
102 FORMAT(1H0, 3H P=, F15.5, /)
C
1 CONTINUE
GOTO 111
112 CONTINUE
STOP
END
```

SEGMENT, LENGTH 90, NAME HENK



MASTER HENK  
IE = 2  
IA = 3

Inversion der nicht zentralen  
t-Verteilung.

```
C  
C T - THE VALUE OF T0  
C IDF - THE DEGREES OF FREEDOM  
C D - THE NON-CENTRALITY PARAMETER  
C  
111 CONTINUE  
  READ(IE,95) N, IDF, D  
  99 FORMAT(215, F10.4)  
  IF(N.LT.0) GOTO 112  
  DO 1 I= 1, N  
  READ(IE,100) PF  
100 FORMAT(F10.4)  
  WRITE(IA,101) PF, IDF, D  
101 FORMAT(1H0,13H VORGEGEBE PF=,F10.4,/,  
128H ANZAHL DER FREIHEITSGRADE=,15,/,  
222H NICHTZENT. PARAMETER=,F10.4)  
C  
  IF(PF.GT.0.5) GOTO2  
  DT=-.5  
  GOTO3  
  2 DT=0.5  
  3 CONTINUE  
  T=0  
  PR=PRNCST(T, IDF, D)  
  YI=PR-PF  
  5 T=T+DT  
  PR=PRNCST(T, IDF, D)  
  YA=PR-PF  
  IF(YA*YN.LE.(1.0)) GOTO4  
  YA=YN  
  GOTO5  
  4 CONTINUE  
  C  
  NULLDUPCHEANG GEFUNDE!!!  
  Y1=YA  
  T1=T-DT  
  T2=T  
  Y2=YN  
C  
  P E G A S U S ALGORITHMUS  
13 TN=T1-Y1*(T2-T1)/(Y2-Y1)  
  T=TN  
  PR=PRNCST(T, IDF, D)  
  YN=PR-PF  
  IF(ABS(YN).LT.1.E-4*PF) GOTO10  
  IF(Y2*YN.LT.0.0) T1=T2  
  IF(Y2*YN.LT.0.0) GOTO11  
  Y1=Y1+Y2/(Y2+YN)  
  GOTO12  
11 Y1=Y2  
12 CONTINUE  
  T2=TN  
  Y2=YN  
  GOTO13  
C  
  KONVERGENZ GEFUNDEN  
10 WRITE(IA,102) T, PR  
102 FORMAT(1H0,4H T0=,F10.3,5H BEI PF=,F10.4,///)  
C  
  1 CONTINUE  
  GOTO 111  
112 CONTINUE  
  STOP  
  END
```

FUNCTION PNCST(ST,IF,D)  
 C ALGORITHM #5 COMPUTES LOWER TAIL AREA  
 C OF STUDENTS NON-CENTRAL T-DISTRIBUTION.  
 DATA G1/D.7979422804), G2/D.1591549431), G3/D.55.6282746/  
 DATA FFS/D.000001/

```

C
F=IF
ICE= IF - 2*(IF/2)
F= ST/SQRT(F)
F = F / (F+ST**2)
RE = SQRT(F)
DA = D*A
DRP = D*RE
DARB = A*DRP
CALL NORMAL(DARB,P,G,Z)
FMK2 = A * RE * EXP(-0.5*DRP*DRP) * P * G1
FMK1 = B * (DA*FMK2 + A*G2*EXP(-0.5*D*D))
SUM = 0.0
IF(IF.LE.1) GOTO 9
IF(ICE)11,11,2
11 SUM = FMK2
GOTO 3
2 SUM = FMK1
3 IF(IF.LT.4) GOTO 1
4 IF2 = IF - 2
AK = 1.0
FK = 2.0
DO 104 K=2,IF2,2
FK1 = FK - 1.0
FMK2 = E * (DA*AK*FMK1 + FMK2) * FK1 / FK
AK = 1.0/(AK*FK)
FMK1 = E * (DA*AK*FMK2 + FMK1) * FK / (FK+1.0)
IF(ICE)5,5,6
5 SUM = SUM + FMK2
GOTO 7
6 SUM = SUM + FMK1
7 AK = 1.0/(AK*FK)
FK = FK + 2.0
104 CONTINUE
1 IF (ICE) E,B,C
9 CALL NORMAL(-DRP,P,G,Z)
PNCST = P + 2.0 * (FUNCT(DRL,A,FFS) + SUM)
GOTO 10
8 CALL NORMAL(-D,P,G,Z)
PNCST = F + SUM * G3
10 RETURN
END

```

SEGMENT, LENGTH 288, NAME PNCST

```
C SUBROUTINE NORMAL(X,P,G,Z)
C
C ALGORITHM AS2 COMPUTES NORMAL AREAS AND
C ORDINATES FOR AN ARRAY OF X VALUES
C
C DIMENSION A(5)
C
C DIMENSION CONNOR(17)
C DATA CONNOR
1/ 5.0327350124E-17, 1.4483264044E-15, 2.4608270103E-14,
2 3.9554295164E-13, 5.9477940136E-12, 8.3507027951E-11,
3 1.0892221037E-9, 1.3122532964E-8, 1.4508852223E-7,
4 1.4589169001E-6, 1.3227513228E-5, 1.0687760684E-4,
5 7.5757575758E-4, 4.6296296296E-3, 2.380952381E-2, 0.1,
6 5.3333333333E-1/

C DATA PRT2PI /0.3989422804/
C
C S = X
C Y = S*S
C IF (S) 10,11,12
11 Z = RKT2PI
C P = 0.5
C G = 0.5
C GOTO 31

C
C SERIES APPROXIMATION
C
10 S = -S
12 Z = RKT2PI*EXP(-0.5*Y)
C IF(S-2.5) 13,14,14
13 Y = -0.5*Y
C F = CONNOR(1)
C DO 15 L=2,17
15 F = P*Y + CONNOR(L)
C F = (P*Y + 1.0) * X * RKT2PI + 0.5
C G = 1.0 - F
C GOTO 31

C
C CONTINUED FRACTION APPROXIMATION
C
14 A(2) = 1.0
C A(5) = 1.0
C A(3) = 1.0
C Y = 1.0/Y
C A(4) = 1.0 + Y
C R = 2.0
19 DO 17 L = 1,3,2
C DO 18 J = 1,2
C K = L + J
C KA = 7 - K
18 A(K) = A(KA) + A(K)*F*Y
17 F = R + 1.0
C IF(A(2)/A(3) - A(5)/A(4)) 19,20,19
20 F = (A(5)/A(4)) * Z/X
C IF(X) 21,11,22
21 P = -P
C Q = 1.0 - P
C GOTO 31
22 Q = P
C P = 1.0 - F
31 CONTINUE
C RETURN
C END
```

FUNCTION FUNCT(H,A,EPS)

```

C
C ALGCRITERIA 4 - COMPUTATION OF T(H,A) AS DEFINED BY
C D.L. OWEN (1956). USES BIVARIATE NORMAL VALUES AND
C NON-CENTRAL T AREAS.
C
C DATA (1/0.1591549431/
C
C FUNCT = 0.0
C IF(A) 100,100,10
10 ATA = ATAN(A)
C
C THIS SECTION OF CODE IS NOT NECESSARY IF VALUES OF H AND A
C SATISFYING H*A GREATER THAN 4.0 ARE NOT ALLOWED.
C
9 IF(H*A.LE.4.0) GOTO 7
CALL NORMAL(H,P,FJ,FJ)
FUNCT = G1*(ATA+ATAN(1.0/P)) - 0.5*(P-0.5)
GOTO 100
C
7 HSG2=0.5*H**2
EXPH2 = EXP(-HSG2)
ASG = A*A
A4 = ASG*ASG
H4 = HSG2*HSG2
A4H4 = A4*H4
BFJ = A*HSG2
EJ = A*H4*0.5
FJ = 1.0
SUM = 0.0
DJ = FJ + 2.0
11 FJ = DJ
SER = 0.0
TERM = FJ
12 SER = SER + TERM
IF(TERM.LE.SER*EPS) GOTO 14
TERM = TERM*HSG2/EJ
EJ = EJ + 1.0
GOTO 12
14 CONTR1 = (SER+BFJ)/FJ
CONTR2 = SER*ASG/(FJ+2.0)
CONTR = CONTR1 - CONTR2
SUM = SUM + CONTR
FUNCT = ATA - SUM*EXPH2
EPSA = EPS*FUNCT
BFJ = BFJ*A4H4/((DJ-1.0)*DJ)
EJ = FJ*A4H4/(DJ*(DJ+1.0))
FJ = FJ + 4.0
DJ = DJ + 2.0
IF(CONTR2*EXPH2.GE.EPSA) GOTO 11
FUNCT = FUNCT * G1
100 RETURN
END

```

SEGMENT, LENGTH 260, NAME FUNCT