

**INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU  
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG**

Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen  
Prof. Dr.-Ing. Kordina

**Beitrag zur rechnerischen Ermittlung  
von Zwangsschnittgrößen  
unter Berücksichtigung des wirklichen  
Verformungsverhalten des Stahlbetons**

von

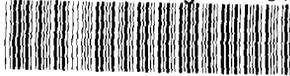
Eckhard Tennstedt

**HEFT 26**

**BRAUNSCHWEIG**

**MAI 1974**

UB Braunschweig 84



2444-205-5

2446-905 S

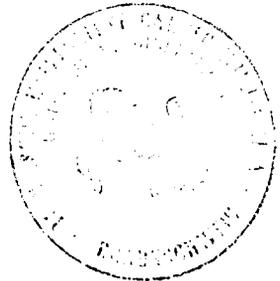
**INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU  
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG**

Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen  
Prof. Dr.-Ing. Kordina

**Beitrag zur rechnerischen Ermittlung  
von Zwangsschnittgrößen  
unter Berücksichtigung des wirklichen  
Verformungsverhalten des Stahlbetons**

von

Eckhard Tennstedt



**HEFT 26**

**BRAUNSCHWEIG**

**MAI 1974**

## Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Stahlbeton- und Masivbau an der Technischen Universität Braunschweig. Die Anregung zu dieser Arbeit erhielt ich aus der Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Kordina an Näherungslösungen zur vereinfachten Ermittlung von Zwangsschnittgrößen für die Neufassung von DIN 4224. Für die in jeder Hinsicht gewährte Unterstützung dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Kordina herzlich.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Diettrich bin ich zu großem Dank verpflichtet für die Übernahme der Berichterstattung und seine wertvollen Anregungen bei der endgültigen Fassung dieser Arbeit.

Der Deutsche Ausschuß für Stahlbeton hat diese Arbeit finanziell unterstützt.

Braunschweig, im Januar 1974

E. Tennstedt

100 629.012 45  
629.012 45

Inhaltsverzeichnis

	Seite
A. Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen	8
B. Textteil	
1. Einleitung und Problemstellung	11
2. Grundlagen für die Ermittlung der Zwangsschnittgrößen	15
2.1 Übersicht über die untersuchten Lastfälle	15
2.2 Grundlagen zur Berechnung der Schnittgrößen	16
2.3 Grundlagen zur Ermittlung der Momentkrümmungsbeziehungen	23
2.3.1 Rechenannahmen und Werkstoffeigenschaften	23
2.3.2 Bestimmung der Schnittgrößen zu einem vorgegebenen Dehnungszustand	25
2.3.3 Mittlere Krümmungen	29
2.3.4 Berechnung der Momentkrümmungsbeziehungen	33
2.4 Bestimmung der Biegesteifigkeiten	37
2.5 Ermittlung der Balkenendverformungen aus den Krümmungen	40
2.6 Genauigkeit der numerischen Verformungsberechnungen	41
3. Beanspruchung durch reinen Zwang	46
3.1 Ermittlung der Zwangmomente bei reinem Zwang	46
3.2 Einfluß der Ribildung auf den Verlauf der Zwangmomente und den Abfall der Biegesteifigkeit	50
3.3 Diskussion der Ergebnisse	54
3.4 Folgerungen aus den für reinen Zwang gewonnenen Ergebnisse für die Berechnung von Zwangmomenten bei kombinierter Belastung aus Last und Zwang	55
4. Einfluß der Belastungsgeschichte auf die Berechnung von Zwangmomenten	58

	Seite
4.1 Überblick	58
4.2 Darstellung einfacher Ansätze für die Belastungsfolge	59
4.3 Ergebnisse der nach den Belastungsfolgen A und B berechneten Beispiele	64
5. Zwangbeanspruchung infolge eines Temperaturgradienten am beiderseits starr eingespannten, in Längsrichtung verschieblichen Träger	74
5.1 Darstellung des Berechnungsvorgangs	74
5.2 Darstellung der Zwängungsmomente	76
5.3 Definition des Gebrauchszustandes	77
5.4 Vereinfachungen zur Ermittlung der Momentenfläche aus äußerer Belastung	79
5.5 Bewehrungsführung	82
5.6 Auswertung der Rechenergebnisse	84
5.6.1 Übersicht über die untersuchten Parameter	84
5.6.2 Zwangmomente infolge $\Delta T$	85
5.6.3 Vorschlag für pauschale Abminderungsfaktoren der Biegesteifigkeiten	101
5.6.4 Variation der Parameter	103
5.6.5 Zwangmomente infolge $\Delta T$ bei gleichzeitiger Belastung mit Gleichlast $q$ und Normalkraft $n$	107
5.6.6 Bei Zwangbeanspruchungen auftretende Stahlspannungen und deren Auswirkung auf die Begrenzung der Rißbreiten	114
5.6.7 Bei Zwangbeanspruchung erforderliche Mindestbewehrung	122
5.6.8 Variation des Einspanngrades	124
6. Der beiderseits starr eingespannte Träger unter Zwangbeanspruchung aus ungleichmäßiger Setzung	125

	Seite
7. Der einseitig eingespannte, am anderen Ende frei aufliegende Träger unter Zwangsbeanspruchung	130
8. Zusammenfassung	136
C. Literaturverzeichnis	139

Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen

$E_b$	Rechenwert für den Elastizitätsmodul des Betons
$E_e$	Elastizitätsmodul des Stahls
$I_b$	Trägheitsmoment des unbewehrten, ungerissenen Betonquerschnitts
$E_b I_b$	Biegesteifigkeit des Betonquerschnitts im Stadium I
$B_o$	bezogene Biegesteifigkeit (s. Abschn. 2.2)
$EI$	Biegesteifigkeit eines Querschnitts unter Berücksichtigung der Stahleinlagen und der Belastung
$(EI)_w$	wirksame Biegesteifigkeit am Ersatzbalken
$\mathcal{K}$	Balkenkrümmung
$\varepsilon$	Dehnung
$w$	Verschiebung
$\varphi$	Verdrehungswinkel
$l$	Balkenstützweite
$M$	Biegemoment aus der Biegesteifigkeit $EI$
$m$	$M/b \cdot h^2 \cdot \beta_{wN}$ bzw. $M/b_o \cdot h^2 \cdot \beta_{wN}$ , bezogenes Biegemoment
$M^o$	Biegemoment aus der Biegesteifigkeit $E_b I_b$
$m_o$	auf die Nulllinie bezogenes Moment $m$
$N$	Normalkraft
$n$	$N/b \cdot h \cdot \beta_{wN}$ bzw. $N/b_o \cdot h \cdot \beta_{wN}$ , bezogene Normalkraft
$Q$	Querkraft
$q$	Gleichlast
$\Delta T$	Temperaturgradient, linear verlaufend angenommen

s	Setzung
$\Delta s$	Setzungsdifferenz
$a_m$	mittlerer Rißabstand
$w_{95}$	wahrscheinliche Rißbreite
$d_e$	Stahldurchmesser
Fe	Stahlquerschnitt
$\mu$	Fe/b·h bzw. Fe/b <sub>0</sub> ·h, Bewehrungsgehalt
Fe'	Stahlquerschnitt am geringer beanspruchten Querschnittsrand
b	Querschnittsbreite
h	statische Höhe
d	Querschnittshöhe bzw. Plattendicke
b <sub>0</sub>	Stegbreite beim Plattenbalkenquerschnitt
d <sub>0</sub>	Steghöhe beim Plattenbalken
y	Abstand eines Querschnittspunktes von der Nulllinie
y*	Abstand eines Querschnittspunktes von der Unterkante des Querschnitts
i <sub>e</sub>	Anzahl der Stahleinzelflächen
i <sub>b</sub>	Anzahl der Betonteilflächen
B <sub>n</sub>	Betongüte
$\beta_R$	Rechenwert der Betonfestigkeit
$\beta_{wN}$	Nennfestigkeit des Betons (s. DIN 1045)
$\beta_{wM}$	Mittelwert für die Druckfestigkeit einer Würfelserie
$\beta_{bZ}$	Biegezugfestigkeit des Betons
$\sigma$	Spannung
$\beta_p$	Prismenfestigkeit des Betons
c <sub>F</sub>	Federsteifigkeit

$k_F$	$c_F \cdot l / E_b I_b$ [1], bezogene Federsteifigkeit
$R_\varphi$	Restglied bei der Reihenentwicklung für $\varphi$
$R_w$	Restglied bei der Reihenentwicklung für $w$

Indizes:

I	Stadium I
II	Stadium II
G	Gebrauchszustand
U	Bruchzustand
M	Biegemoment
F	Feldbereich
St	Stützenbereich
e	Stahl
b	Beton
R	RiB
S	Streckgrenze
q	Streckgleichlast
T	Lastfall $\Delta T$
s	Lastfall $\Delta s$

Alle übrigen Größen, die in der nachfolgenden Arbeit vorkommen, werden bei ihrer Einführung erläutert. Einige Zeichen werden zugleich für die Bezeichnung verschiedener Größen angewendet, soweit dies nicht sinnstörend ist. Unter "Indizes" aufgeführte Zeichen werden z.T. nicht nur als Indizes verwendet.

## 1. Einleitung und Problemstellung

Unterliegt ein Tragwerk Verformungseinflüssen und führen die damit einhergehenden Verformungen bei statisch äußerlicher oder innerlicher Unbestimmtheit zu Zwängungen, so bezeichnet man die hierdurch hervorgerufenen Beanspruchungen als Zwangsschnittgrößen. Sie unterscheiden sich von Lastschnittgrößen dadurch, daß sie nicht zur Erfüllung von Gleichgewichtsbedingungen notwendig sind, sondern sich aus einzuhaltenden Verträglichkeitsbedingungen ergeben. Während sich Lastschnittgrößen bei Steifigkeitsänderungen lediglich umlagern, der Betrag der umgelagerten Schnittkräfte aber unveränderlich bleibt, ist bei Zwangsschnittgrößen auch der Betrag der Schnittkräfte von den Tragwerkssteifigkeiten abhängig, d.h. von dem Widerstand, den ein Tragwerk einer Zwangseinwirkung entgegensetzt.

Bei Stahlbetonbauten nehmen die Steifigkeiten ab, wenn nach Überschreiten der Betonzugfestigkeit durch Aufreißen der Querschnitte Übergang zu Stadium II erfolgt: Es muß daher unterschieden werden zwischen rissefreien Bauteilen, in denen unter Gebrauchslast Stadium I erhalten bleibt und kein Abbau der Zwangsschnittgrößen eintritt, und Bauteilen, bei denen fein verteilte Risse mit begrenzter Rißbreite im Gebrauchszustand zulässig sind und infolgedessen eine Reduktion der Schnittkräfte erfolgt.

Im Hoch- und Industriebau wurden Zwangsschnittgrößen bisher vielfach bei der Bemessung vernachlässigt. Bei

einer Berücksichtigung wurden ihrer Ermittlung in der Regel die Steifigkeiten des ungerissenen Betonquerschnitts zugrunde gelegt. Dagegen wird in der Neufassung von DIN 1045 in stärkerem Maße gefordert, Zwangsschnittgrößen bei der Bemessung in Ansatz zu bringen, wobei die Steifigkeitsabnahme durch Rißbildung berücksichtigt werden darf.

Auf die Möglichkeit einer wirtschaftlichen Bemessung für die Zwangsmomente durch Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Steifigkeiten im Zustand II hat bereits 1925 Mörsch [1] am Beispiel eines durch ungleichmäßige Erwärmung beanspruchten Schornsteinschaftes hingewiesen. Erst in neuerer Zeit hat Rüsck [2] das Problem wieder aufgegriffen. Er behandelt Bauteile unter reiner Zwangbeanspruchung, d.h. daß der Lastfall Zwang allein auftritt und daß hierdurch ein über die Systemlänge des Bauteils konstanter Beanspruchungszustand hervorgerufen wird. Die zugehörigen Schnittkräfte lassen sich in diesem Fall direkt aus Interaktionsdiagrammen bestimmen. Dies gilt auch für die Schnittkräfte des durch reinen zentrischen Zwang beanspruchten Stahlbetonprismas, das von Eibl [3] und Falkner [4] unter besonderem Hinblick auf die Rißbildung untersucht wurde. Ebenfalls auf der Grundlage der für reinen Zwang gültigen Steifigkeiten wurden von Leonhardt, Frühauf und Netzel [5] die Zwangsschnittkräfte bei der Bemessung eines Wasserturms ohne Wärmedämmung abgemindert.

Häufig treten Zwangeinwirkungen nicht allein auf. Wirken neben ihnen noch äußere Belastungen auf ein Bauwerk ein, so werden die Steifigkeiten von der Gesamtheit der auftretenden Schnittgrößen beeinflusst und weisen i.a. auch bei konstanten Querschnittsabmessungen von Punkt zu Punkt verschiedene Größen auf, im Gegensatz zur Be-

anspruchung durch reinen Zwang. Die Ermittlung der Zwangsschnittgrößen kann dann wegen des nichtlinearen Verformungsverhaltens des Stahlbetons nur noch auf iterativem Wege erfolgen, wobei jedem Iterationsschritt eine erneute punktweise Bestimmung der belastungsabhängigen Steifigkeiten vorausgeht. Der dabei erforderliche Rechenaufwand kann dem in der Praxis tätigen Ingenieur nicht zugemutet werden. Ein Ziel dieser Arbeit ist es daher, einfache Näherungsansätze zur Berechnung von Zwangsschnittkräften zu entwickeln. Hierzu sollen aus systematisch durchgeführten Berechnungen pauschale Abminderungsfaktoren für einzelne, durch äußere Belastung und Zwang beanspruchte Tragwerksabschnitte gewonnen werden, die eine direkte Ermittlung der Zwangsschnittgrößen ermöglichen; dabei beschränkt sich die Arbeit auf äußerlich statisch unbestimmt gelagerte Tragwerke. Erste Vorschläge für derartige pauschale Abminderungsfaktoren liegen bereits von Kordina [6], [7] vor.

Die Untersuchungen zu der vorliegenden Arbeit werden an statisch unbestimmten Einfeldträgern (vgl. Bild 1.1) durchgeführt, deren achsiale Verschieblichkeit nicht

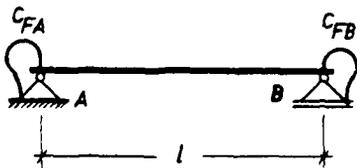


Bild 1.1: System

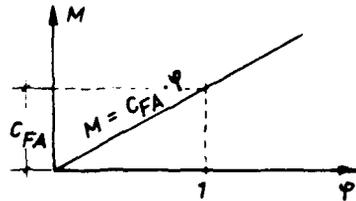


Bild 1.2: Kennlinie der Drehfeder A

behindert ist. Sie sind an ihren Auflagern elastisch eingespannt, wobei die elastische Einspannung durch Drehfedern mit den Drehfederkonstanten  $c_{FA}$  und  $c_{FB}$  [Mpm] beschrieben wird. Durch Variation der Federkonstanten lassen sich neben dem beiderseits starr eingespannten und dem einseitig starr eingespannten, am anderen Auflager frei drehbar gelagerten Träger auch solche mit beliebigem Einspanngrad darstellen. Bei zutreffend gewählten Drehfederkonstanten kann am Träger nach Bild 1.1 das Tragverhalten eines Abschnitts aus einem größeren Gesamttragwerk für eine vorgegebene Belastungskombination untersucht werden. Vereinfachend wird für die Federkennlinien ein linearer Verlauf (vgl. Bild 1.2) angenommen. Diese Arbeit beschränkt sich auf Zwangeinwirkungen, die nur Biegemomente erzeugen. Um die Ausführung von Längsverschiebungen zwangungsfrei zu ermöglichen, wird der Träger in Längsrichtung verschieblich gelagert. Der Einfluß von Normalkräften kann über von außen in den Träger eingeleitete Längskräfte studiert werden. Es werden Rechteck- und Plattenbalkenquerschnitte mit über die Trägerlänge konstanten Abmessungen zu den Untersuchungen herangezogen.

Weiterhin sollen in dieser Arbeit neben der Erforschung der Einflüsse einzelner Parameter und neben der Auffindung sinnvoller Vereinfachungen für die Durchführung systematischer Berechnungen die Größe der unter äußerer Last und Zwang auftretenden Beanspruchungen mit Schnittkraftumlagerungen und Schnittkraftabbau ermittelt werden. Ferner soll geklärt werden, welche Ribbreiten zu erwarten sind, wenn bei der Bemessung für rechnerische Bruchlast nach DIN 1045 Zwangsschnittgrößen mit dem Sicherheitsbeiwert  $\nu = 1,0$  berücksich-

tigt werden, was im Gebrauchszustand zu einer Überschreitung der bislang im Stahlbetonbau hierfür üblichen Spannungen führt.

Die Grundlagen für die rechnerische Ermittlung der Verformungen von Stahlbetonquerschnitten unter Biegung mit und ohne Längskraft sind durch Versuche hinreichend belegt, so daß eine rein theoretische Behandlung des vorliegenden Problems möglich ist.

Die zu dieser Arbeit erforderlichen numerischen Berechnungen wurden auf der institutseigenen EDV-Anlage IBM 1130 durchgeführt.

## 2. Grundlagen für die Ermittlung der Zwangsschnittgrößen

### 2.1 Übersicht über die untersuchten Lastfälle

Entsprechend den im üblichen Hoch- und Industriebau am häufigsten vorkommenden Lasteinwirkungen werden am Träger nach Bild 1.1 als äußere Belastungen auf der ganzen Trägerlänge angreifende, konstante Streckenlasten  $q$  untersucht, die sich aus Eigengewicht  $g$  und Verkehrslast  $p$  zusammensetzen. Außerdem können an den Trägerenden eingeleitete Längskräfte berücksichtigt werden.

Als Zwangeinwirkungen können Temperaturdifferenzen zwischen Trägerober- und -unterkante oder auch unterschiedliche Setzungen an den Auflagern auftreten.

Die Temperaturverteilung wird sowohl für Zustand I als auch für Zustand II linear über der Querschnittshöhe angenommen. Unberücksichtigt bleiben Eigenspannungen,

die z.B. bei instationären Wärmeleitvorgängen oder beim Schwindprozeß entstehen.

Die zwischen Ober- und Unterkante des Trägers auftretende lineare Temperaturverteilung kann zerlegt werden in einen konstanten Anteil  $T$  und einen Temperaturgradienten  $\Delta T$  (vgl. Bild 2.1). Am System nach Bild 1.1 werden nur durch den Anteil  $\Delta T$  Schnittkräfte erzeugt. Ebenfalls in diese Anteile zerlegt werden kann die Temperaturverteilung in einem Plattenbalkenquerschnitt, bei dem nur die Platte einer Temperaturänderung ausgesetzt ist. Dabei muß allerdings zusätzlich ein Eigenzustand berücksichtigt werden.

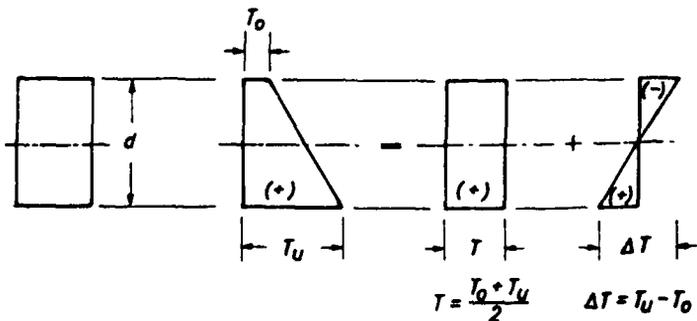


Bild 2.1: Zerlegung einer linearen Temperaturverteilung in einen konstanten Anteil und einen Temperaturgradienten

## 2.2 Grundlagen zur Berechnung der Schnittgrößen

Die zur Schnittkraftermittlung erforderlichen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen werden für ein statisch bestimmtes Grundsystem formuliert, das durch Entfernen des Auflagers B am System nach Bild 1.1

gewonnen wird. Der Verformungszustand für Vollbelastung aus äußerer Last, Temperaturänderung und Setzung setzt sich zusammen aus den von außen dem System aufgezwungenen Verformungen, aus der Verformung des Trägers durch die gesamte Biegemomentenbeanspruchung und der Verformung der Drehfedern durch die Momente an den Einspannstellen. Die einzelnen Verformungsanteile werden getrennt behandelt. Alle Verformungsberechnungen werden am unverformten System durchgeführt (Theorie 1. Ordnung).

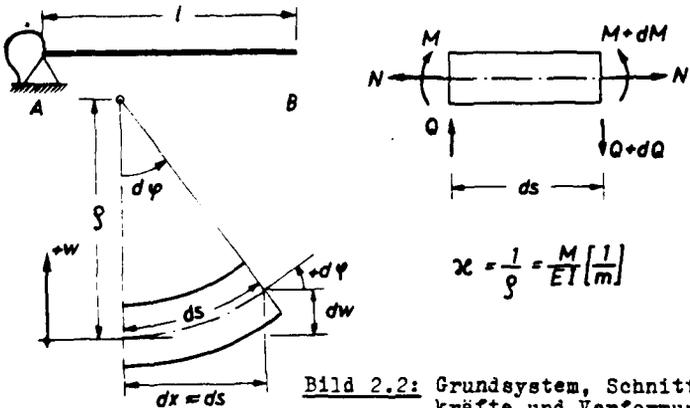


Bild 2.2: Grundsystem, Schnittkräfte und Verformungen am Element ds

Durch den Temperaturgradienten  $\Delta T$  wird eine konstante Krümmung des Balkens hervorgerufen:

$$\chi_T(x) = \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{d} = \text{const.} \quad (2.1)$$

Der Wärmeausdehnungskoeffizient wird für die Baustoffe Beton und Stahl einheitlich mit  $\alpha_T = 1,0 \cdot 10^{-5} [\text{grad}^{-1}]$

angesetzt. Infolge der Krümmung  $\kappa_T$  entsteht eine Endverdrehung  $\varphi_T(l)$  und eine Verschiebung  $w_T(l)$  nach Bild 2.3.

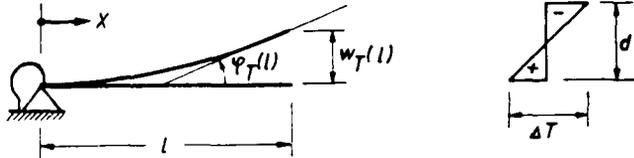


Bild 2.3: Verformungen infolge  $\Delta T$

$$\varphi_T(l) = \int_0^l \kappa_T(x) \cdot dx = \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{d} \cdot l \quad (2.2)$$

$$w_T(l) = \int_0^l \varphi_T(x) \cdot dx = \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{2d} \cdot l^2 \quad (2.3)$$

Die bei Setzungen entstehenden Verformungen lassen sich in vertikale Stützenverschiebungen  $s_A$  und  $s_B$  sowie in Setzungsverdrehungen  $\varphi_{sA}$  und  $\varphi_{sB}$  (vgl. Bild 2.4) zerlegen. In der vorliegenden Arbeit

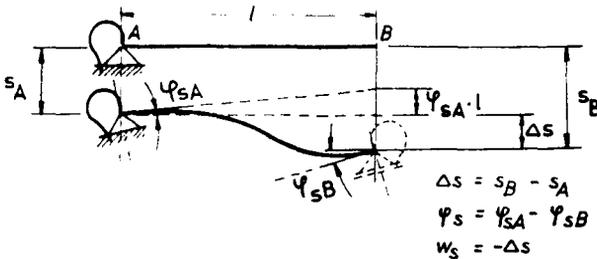


Bild 2.4: Verformungen infolge von Setzungen

werden nur Setzungen unter Beibehaltung der ursprünglichen Neigung der Stabendtangentialen untersucht, da hierdurch i.a. die ungünstigsten Beanspruchungen hervorgerufen werden. Zwangsschnittgrößen werden dabei nur durch Differenzen  $\Delta s$  der Stützenverschiebungen geweckt;  $\Delta s$  ist positiv, wenn am Auflager B der größere Wert für die Setzung auftritt.

Die aus der Summe der jeweils betrachteten Lastfälle gebildeten Randmomente  $M_A$  und  $M_B$  des statisch unbestimmten Systems rufen elastische Verdrehungen  $\varphi_{FA}$  und  $\varphi_{FB}$  der Drehfedern hervor.

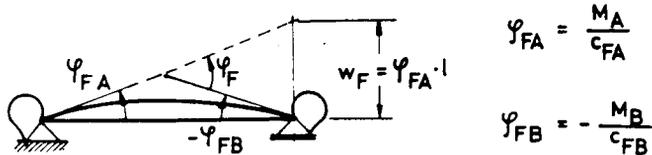


Bild 2.5: Elastische Verdrehungen an den Einspannstellen

$$\varphi_F = \varphi_{FA} - \varphi_{FB} = \frac{M_A}{c_{FA}} + \frac{M_B}{c_{FB}} \quad (2.4)$$

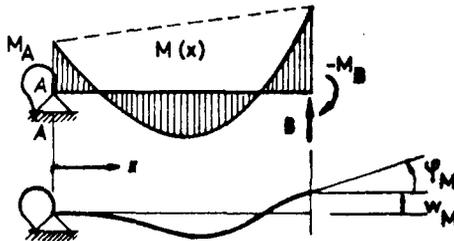
Die Drehfedersteifigkeiten  $c_{FA}$  und  $c_{FB}$  werden zweckmäßigerweise durch die auf die Biegesteifigkeit  $E_b I_b$  des unbewehrten Betonquerschnitts bezogenen Federkonstanten  $k_{FA}$  und  $k_{FB}$  ausgedrückt. So gilt z.B. für  $c_{FA}$ :

$$c_{FA} = k_{FA} \frac{E_b I_b}{l} \quad [\text{Mpm}] \quad (2.5)$$

Die Drehfedersteifigkeiten  $c$  entsprechen den Beträgen der  $k$ -fachen Biegesteifigkeiten  $E_b I_b$  eines Einfeldträgers, bezogen auf die Trägerlänge  $\ell$ . Dieser Träger erfährt unter einem konstanten Moment  $M$  eine gegenseitige Verdrehung der Endtangenten, die gleich der Federverdrehung  $\varphi_F$  ist. Aus Gl. (2.4) folgt dann:

$$\varphi_F = \frac{M_A \cdot \ell}{k_{FA} \cdot E_b I_b} + \frac{M_B \cdot \ell}{k_{FB} \cdot E_b I_b} \quad (2.6)$$

Am statisch bestimmten Grundsystem nach Bild 2.3 müssen stellvertretend für die Auflagerwirkung bei B eine Randkraft und ein Randmoment angesetzt werden. Die aus der äußeren Belastung, den Zwangeinwirkungen und den Randschnittgrößen resultierende Momentenfläche  $M(x)$  erzeugt die Balkenkrümmung  $\mathcal{K}_M(x)$  und die Stabendverformungen  $w_M$  und  $\varphi_M$ . Verformungen aus Querkraft werden vernachlässigt.



**Bild 2.6:** Verformungen unter Momentenbeanspruchung  $M(x)$

$$\varphi_M = \int_0^{\ell} \mathcal{K}_M(x) \cdot dx \quad (2.7)$$

$$w_M = \int_0^{\ell} \int_0^x \mathcal{K}_M(x) \cdot dx \cdot dx \quad (2.8)$$

Am Trägerende B müssen folgende Verformungsbedingungen eingehalten werden:

$$\varphi_{\text{ges}} \Big|_{x=l} = \varphi_{\text{SB}} \quad (2.9)$$

$$w_{\text{ges}} \Big|_{x=l} = w_{\text{S}} \quad (2.10)$$

Nach Einsetzen der einzelnen Verformungsanteile erhält man:

$$\varphi_{\text{ges}} = \varphi_{\text{M}} + \varphi_{\text{T}} + \varphi_{\text{F}} + \varphi_{\text{S}} = 0 \quad (2.11)$$

$$w_{\text{ges}} = w_{\text{M}} + w_{\text{T}} + \Delta s + \varphi_{\text{SA}} \cdot l + w_{\text{F}} = 0 \quad (2.12)$$

Hieraus folgt nach Einsetzen der oben ermittelten Ausdrücke für die Verformungsanteile:

$$\int_0^l \mathcal{K}_{\text{M}}(x) \cdot dx + \frac{\alpha_{\text{T}} \cdot \Delta T}{d} l + \frac{M_{\text{A}} \cdot l}{k_{\text{FA}} E_{\text{b}} I_{\text{b}}} + \frac{M_{\text{B}} \cdot l}{k_{\text{FB}} E_{\text{b}} I_{\text{b}}} + \varphi_{\text{S}} = 0 \quad (2.13)$$

$$\int_0^l \int_0^x \mathcal{K}_{\text{M}}(x) \cdot dx \cdot dx + \frac{\alpha_{\text{T}} \cdot \Delta T}{2d} l^2 + \Delta s + \varphi_{\text{SA}} l + \frac{M_{\text{A}} \cdot l^2}{k_{\text{FA}} E_{\text{b}} I_{\text{b}}} = 0 \quad (2.14)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Größen

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad m = \frac{M}{b \cdot h^2 \cdot \beta_{\text{WN}}} \quad \text{und} \quad B_0 = \frac{E_{\text{b}} I_{\text{b}}}{b \cdot h^3 \cdot \beta_{\text{WN}}}$$

ergibt sich aus Gl.(2.13) und Gl.(2.14) nach kurzer Umformung:

$$\int_0^1 \chi_M(\xi) \cdot h \cdot d\xi + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{d/h} + \frac{m_A}{k_{FA} \cdot B_0} + \frac{m_B}{k_{FB} \cdot B_0} + \varphi_s \cdot \frac{d}{l} \cdot \frac{h}{d} = 0 \quad (2.15)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\xi} \chi_{M'}(\xi') \cdot h \cdot d\xi' \cdot d\xi + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{2 \cdot d/h} + \frac{\Delta s}{l} \cdot \frac{h}{d} \cdot \frac{d}{l} + \frac{m_A}{k_{FA} \cdot B_0} + \varphi_{sA} \cdot \frac{d}{l} \cdot \frac{h}{d} = 0 \quad (2.16)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist eine Weiterbehandlung des Problems unabhängig von festen Querschnittsabmessungen und Stützweiten möglich. Es brauchen nur die Parameter  $d/h$ ,  $d/l$  und  $\Delta s/l$  bekannt zu sein, die beiden letzten nur bei der Behandlung von Setzungsdifferenzen.

Zur Berechnung der Zwangsschnittgrößen ist es zunächst erforderlich, deren Größe zu schätzen. Die geschätzten Zwängungsmomente werden den Momenten aus der äußeren Belastung überlagert; nach der Ermittlung der zugehörigen Krümmungen aus vorgegebenen Moment - Krümmungsbeziehungen können die Endverformungen des Balkens berechnet werden. Wenn die Gl. (2.15) und (2.16) erfüllt sind, war die Schätzung der Zwangsmomente richtig; andernfalls muß der Rechengang mit neu zu schätzenden Werten wiederholt werden.

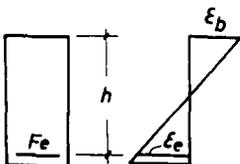
## 2.3 Grundlagen zur Ermittlung der Moment-Krümmungs-Beziehungen

### 2.3.1 Rechenannahmen und Werkstoffeigenschaften

Die Verformungsberechnungen gehen von der Voraussetzung aus, daß die Verformungen klein im Verhältnis zur Trägerlänge sind. Dann gilt für die Krümmung:

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \approx w'' \quad (2.17)$$

Bei der Ermittlung der Moment-Krümmungsbeziehungen wird von der Bernoullischen Hypothese (Ebenbleiben der Querschnitte) ausgegangen. Diese Annahme ist bei Stahlbetonquerschnitten zutreffend, solange Stähle mit guten Verbundeigenschaften verwendet werden. Die Krümmung läßt sich dann aus der Betonranddehnung  $\epsilon_b$  und der Stahldehnung  $\epsilon_e$  berechnen:


$$\kappa = \frac{\epsilon_e - \epsilon_b}{h} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (2.18)$$

$$\kappa \cdot h = \epsilon_e - \epsilon_b \quad [1] \quad (2.19)$$

Die Berechnung der Spannungsverteilung in der Betondruckzone und bis zum Erreichen der Betonzugfestigkeit in der Zugzone erfolgt nach den in DIN 1045 E [8] zur Berechnung von Formänderungen dargestellten Spannungsdehnungslinien (vgl. Bild 2.7a). Das Parabel-Rechteckdiagramm für den Beton nach DIN 1045 neu [9] (vgl. Bild 2.7b) wird vergleichsweise zur Berechnung von

Schnittgrößen im Bruchzustand herangezogen. Diese Spannungsdehnungslinien für den Beton könnten für Kurzzeitbeanspruchung gelten. Dauerlasteinflüsse werden nicht berücksichtigt. Für den Stahl werden bilineare Verformungsgesetze nach DIN 1045 neu verwendet (vgl. Bild 2.7c).

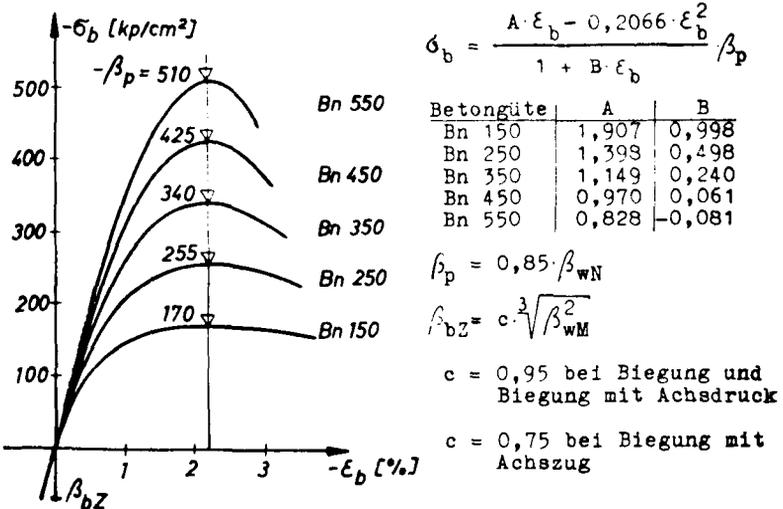


Bild 2.7a: Spannungsdehnungslinien des Betons für Verformungsberechnungen

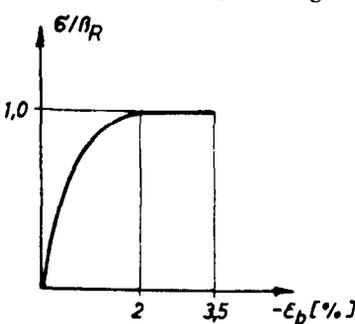


Bild 2.7b: Spannungsdehnungslinien für Beton (Bruchzustand)

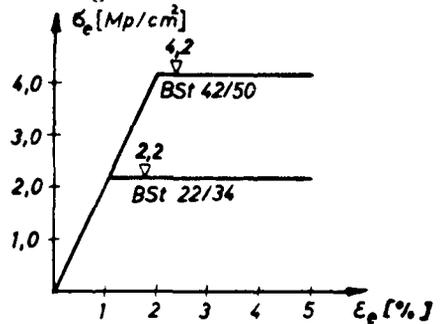


Bild 2.7c: Spannungsdehnungslinien für Betonstahl

Die Zugfestigkeit  $\beta_{bZ}$  des Betons wurde nach [10] aus der Beziehung ermittelt:

$$\beta_{bZ} = c \cdot \sqrt[3]{\beta_{wM}^2} \quad (2.20)$$

Der Faktor  $c$  für die Berechnung der Zugfestigkeit nach 28 Tagen liegt je nach der Belastungsgeschwindigkeit bei Biegung und Biegung mit Längsdruck zwischen 0,83 und 0,97, bei exzentrischem Zug zwischen 0,63 und 0,75. Für die Zwangsschnittgrößen ergeben sich die größten Werte, wenn die Betonzugfestigkeit wegen der damit verbundenen größeren Steifigkeiten möglichst hoch angesetzt wird. Der vorliegenden Arbeit liegen folgende Werte für den Faktor  $c$  zugrunde:

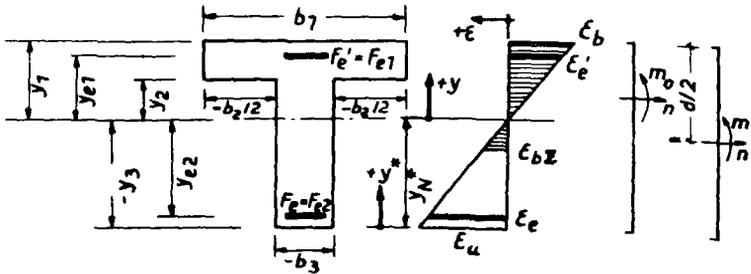
- $c = 0,95$  bei Biegung und Biegung mit Längsdruck,
- $c = 0,75$  bei exzentrischem Zug.

### 2.3.2 Bestimmung der Schnittgrößen zu einem vorgegebenen Dehnungszustand

Der Dehnungszustand der hier behandelten Rechteck- und Plattenbalkenquerschnitte unter einachsiger Biegung mit und ohne Normalkraft ist durch die Angabe der Dehnungen zweier Punkte eindeutig bestimmt, da ebene Querschnitte vorausgesetzt sind und die Richtung der Nulllinie bekannt ist.

Der Betonquerschnitt wird zur Schnittkraftermittlung für rechen-technische Zwecke in bis zur Nulllinie reichende rechteckige Teilflächen zerlegt, die durch Angabe der Breite  $b$  und des Abstandes  $y$  ihrer zur neutralen Faser parallelen Kanten beschrieben werden. Die

Breite  $b$  ist positiv, wenn durch sie, bezogen auf die unmittelbar über ihr liegende Querschnittsfläche eine Zunahme der Querschnittsbreite erfolgt.



$$\epsilon_i = -y_i \cdot \chi; \quad y_N^* = d + \frac{\epsilon_b}{\chi}; \quad y_i = y_i^* - y_N^*$$

**Bild 2.8:** Bewehrter Plattenbalkenquerschnitt mit Dehnungszustand und Schnittkräften

Die bezogenen Schnittgrößen  $n$  und  $m_0$  werden zunächst in bezug auf die Nulllinie berechnet. Sie ergeben sich durch Aufsummierung der Schnittkraftanteile  $n_i$  und  $m_{i,0}$  der  $i_b$  Betonteilflächen und  $i_e$  Stahleinzelflächen. Als Bezugsbreite für die dimensionslos angegebenen Schnittgrößen wird bei Plattenbalkenquerschnitten die Stegbreite gewählt. Es gelten die folgenden Gleichungen:

$$n = \frac{N}{b_0 \cdot h \cdot \beta_{wN}} = \frac{-1}{\chi \cdot h \cdot \beta_{wN}} \sum_{i=1}^{i_b} \frac{b_i}{b_0} \cdot \int_0^{\epsilon_{bi}} \sigma_b(\epsilon) \cdot d\epsilon + \frac{1}{\beta_{wN}} \sum_{i=1}^{i_e} \mu_i [\sigma_e(\epsilon_{ei}) - \sigma_b(\epsilon_{ei})] \quad (2.21)$$

$$m_o = \frac{M_o}{b_o \cdot h^2 \cdot \beta_{wN}} = \frac{-1}{\alpha^2 \cdot h^2 \cdot \beta_{wN}} \sum_{i=1}^{i_b} \frac{b_i}{b_o} \int_0^{\xi_{bi}} \sigma_b(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi + \frac{1}{\alpha \cdot h \cdot \beta_{wN}} \sum_{i=1}^{i_e} \mu_i \cdot \xi_{ei} \cdot [\sigma_e(\xi_{ei}) - \sigma_b(\xi_{ei})] \quad (2.22)$$

Auf die Querschnittsmittellinie bezogen ergibt sich das Biegemoment zu:

$$m = m_o + n \cdot \left( 0,5 \frac{d}{h} - \frac{y_N^*}{h} \right) \quad (2.23)$$

Das Integral über die Spannungen in Gl.(2.21) läßt sich deuten als  $\xi_{bi}$ -fache mittlere Spannung  $\sigma_m$  (vgl. Bild 2.9):

$$\sigma_m = \frac{1}{\xi_{bi}} \int_0^{\xi_{bi}} \sigma_b(\xi) \cdot d\xi \quad (2.24)$$

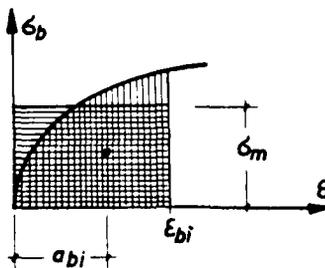


Bild 2.9: Betondruckspannungsfläche

Für das Integral in Gl.(2.22) kann man schreiben:

$$\int_0^{\xi_{bi}} \sigma_b(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi = a_{bi} \int_0^{\xi_{bi}} \sigma_b(\xi) \cdot d\xi \quad (2.25)$$

Dabei stellt  $a_{b_i}$  den auf  $\varepsilon_{b_i}$  bezogenen Schwerpunktabstand der Spannungsdehnungsfläche dar.

Die Gleichungen (2.21) bis (2.23) lassen sich auf beliebige Querschnitte mit zur Nulllinie parallelen und senkrechten Kanten anwenden. Sie werden in dieser Form nur für die Spannungsdehnungslinien nach Bild 2.7b benutzt. Bei Verwendung der Verformungslinie nach Bild 2.7a für den Beton ist es zweckmäßiger, numerisch nach Simpson zu integrieren, weil bei Verwendung geschlossener Lösungen zur Erzielung einer ausreichenden Genauigkeit im Bereich kleiner Dehnungen und kleiner Krümmungen besondere rechentechnische Maßnahmen erforderlich wären. Dazu werden die Gleichungen (2.21) und (2.22) umgeformt:

$$n = \frac{-1}{\alpha \cdot h \cdot \beta_{wN}} \sum_{i=1}^{i_b-1} \frac{\Delta b_i}{b_0} \int_{\varepsilon_{b_{i+1}}}^{\varepsilon_{b_i}} \sigma_b(\varepsilon) \cdot d\varepsilon + \frac{1}{\beta_{wN}} \sum_{i=1}^{i_e} \mu_i [\sigma_e(\varepsilon_{ei}) - \sigma_b(\varepsilon_{ei})] \quad (2.26)$$

$$m_0 = \frac{-1}{\alpha^2 \cdot h^2 \cdot \beta_{wN}} \sum_{i=1}^{i_b-1} \frac{\Delta b_i}{b_0} \int_{\varepsilon_{b_{i+1}}}^{\varepsilon_{b_i}} \sigma_b(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon + \frac{1}{\alpha \cdot h \cdot \beta_{wN}} \sum_{i=1}^{i_e} \mu_i \cdot \varepsilon_{ei} \cdot [\sigma_e(\varepsilon_{ei}) - \sigma_b(\varepsilon_{ei})] \quad (2.27)$$

Dabei bedeuten:

$$\Delta b_1 = b_1 \quad \text{für } i = 1; \quad \Delta b_i = b_i + b_{i-1} \quad \text{für } i > 1$$

### 2.3.3 Mittlere Krümmungen

Mit den im vorigen Abschnitt angegebenen Gleichungen lassen sich die Schnittgrößen in einem Querschnitt mit vorgegebenem Dehnungszustand und daraus die Krümmungen ermitteln. Für einen im Zustand II befindlichen Querschnitt gelten diese Beziehungen jedoch nur im Rißbereich. Zwischen zwei Rissen werden durch die Stahleinlagen Verbundspannungen hervorgerufen, durch die der Beton zum Mittragen auf Zug zwischen den Rissen herangezogen wird. Die dadurch reduzierte Stahlspannung führt dazu, daß die mittlere Dehnung des Stahls kleiner ist als die nach Stadium II ermittelte. Rao [11] gibt in seiner Arbeit ein einfaches Verfahren an, nach dem die mittleren Stahldehnungen berechnet werden können. Ausgehend vom Dehnungszustand am Rißquerschnitt, für den die Schnittkräfte unter Vernachlässigung des Betonzugkeils ermittelt werden, wird die mittlere Stahldehnung  $\xi_{em}$  aus der Gleichung bestimmt:

$$\xi_{em} = \xi_{eII} - k \cdot \frac{\beta_{bz}}{E_e \cdot \mu} \quad (2.28)$$

Hierin bedeuten:

$$k = 0,18 \frac{\xi_{eII}^R}{\xi_{eII}}$$

$\xi_{eII}$  = Stahldehnung am Riß für Stadium II für die gegebene Beanspruchung

$\xi_{eII}^R$  = Stahldehnung am Riß für Stadium II beim Auftreten des Rißmomentes

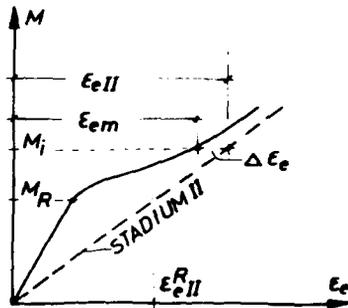


Bild 2.10: Mittlere Stahldehnung

Die Ermittlung der mittleren Betondehnung  $\epsilon_{bm}$  erfolgt nach dem von Rao angegebenen Näherungsverfahren unter der Annahme, daß die resultierende Zugkraft zwischen den Rissen in der gleichen Höhe angreift wie die resultierende Stahlzugkraft im Rißquerschnitt. Die Betondehnung wird iterativ so bestimmt, daß die Betondruckkraft bezogen auf die Stahleinlagen das gleiche Moment wie am Rißquerschnitt liefert. Durch Einsetzen der mittleren Dehnungen in Gl.(2.18) erhält man die mittlere Krümmung  $\kappa_m$ :

$$\kappa_m = \frac{\epsilon_{em} - \epsilon_{bm}}{h} \quad [m^{-1}] \quad (2.29)$$

Darin bedeuten:

$\epsilon_{bm}$  = mittlere Betondehnung

$\epsilon_{em}$  = mittlere Stahldehnung

Die Arbeit von Rao beschränkt sich auf querkraftfreie Biegung. Rao gibt an, daß die so gewonnenen mittleren Krümmungen auch auf Bereiche mit Querkraftbiegung an-

wendbar sind, wenn die Streckgrenze des Stahls nicht überschritten wird und die auf den Nettoquerschnitt bezogene Querkraft klein bleibt. Als Grenze wird für einen Beton B 300 der Wert  $Q/b \cdot h \cong 10 \text{ kp/cm}^2$  angegeben, ein Wert, der im Hochbau bei Biegegliedern nicht wesentlich überschritten werden dürfte. Bei größeren bezogenen Querkraften ist mit dem Auftreten von Schrägrissen zu rechnen, die zusätzliche Querschnittsverdrehungen zur Folge haben. Dadurch würde eine zusätzliche Abnahme der Zwangsschnittgrößen eintreten, so daß die unter Vernachlässigung der Querkraftverformungen ermittelten Zwängungsmomente auf der sicheren Seite liegen.

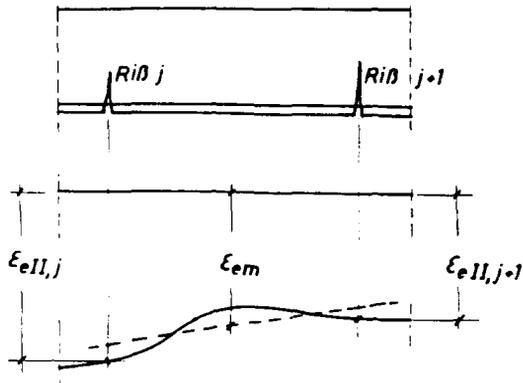
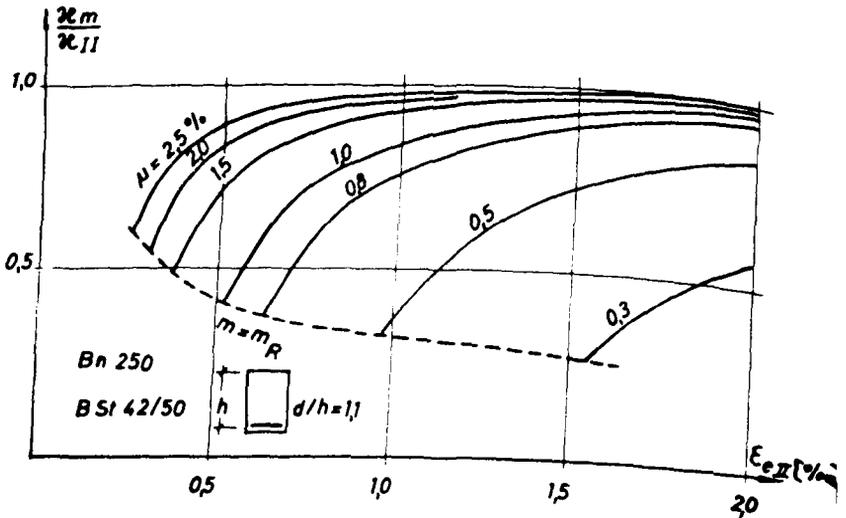


Bild 2.11: Mittlere Stahldehnung bei Querkraftbiegung

Bei Querkraftbiegung ist für die Stahldehnung  $\epsilon_{eII}$  die mittlere Dehnung in dem betrachteten Balkenabschnitt einzusetzen (vgl. Bild 2.11):

$$\epsilon_{eII} = \frac{\epsilon_{eII,i} + \epsilon_{eII,i+1}}{2} \quad (2.30)$$

Der Einfluß des auf Zug mittragenden Betons zwischen den Rissen ist aus den in Bild 2.12 wiedergegebenen Ergebnissen einer rechnerischen Auswertung von Gl.(2.29) für einen Rechteckquerschnitt unter querkraftfreier Biegung zu ersehen. Dargestellt ist das Verhältnis der mittleren Krümmung zur Krümmung am Rißquerschnitt in Abhängigkeit von der Stahldehnung  $\epsilon_{eII}$ . Der Einfluß ist bei geringen Bewehrungsgehalten am stärksten und nimmt mit steigender Stahlspannung ab.



**Bild 2.12:** Einfluß des Mitwirkens des Betons auf Zug zwischen den Rissen auf die Krümmung

#### 2.3.4 Berechnung der Moment-Krümmungsbeziehungen

Der Dehnungszustand zu vorgegebenen Schnittgrößen  $N$  und  $M$  ist wegen des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes für den Beton und des Aufreißens der Querschnitte beim Übergang zum Zustand II nicht mehr gezielt bestimmbar. Ein geeignetes Verfahren zur Lösung des durch die Gleichungen

$$N_i = f_N(\varepsilon_b, \varepsilon_e) \quad (2.31)$$

$$M_i = f_M(\varepsilon_b, \varepsilon_e) \quad (2.32)$$

ausgedrückten Problems wird von Cranston [12] angegeben:

In einem ersten Iterationsschritt werden zu einem geschätzten Dehnungszustand  $\varepsilon_{b1}$  und  $\varepsilon_{e1}$  die zugehörigen Schnittkräfte  $N_{i1}$  und  $M_{i1}$  bestimmt, die in der Regel von den Sollwerten  $N_i$  und  $M_i$  abweichen. Bildet man nun das totale Differential der Gleichungen (2.31) und (2.32), so erhält man nach Einsetzen der  $\varepsilon_{b1}$  und  $\varepsilon_{e1}$  zugeordneten Größen:

$$dN_{i1} = \frac{\partial N_{i1}}{\partial \varepsilon_{b1}} \cdot d\varepsilon_{b1} + \frac{\partial N_{i1}}{\partial \varepsilon_{e1}} \cdot d\varepsilon_{e1} \quad (2.33)$$

$$dM_{i1} = \frac{\partial M_{i1}}{\partial \varepsilon_{b1}} \cdot d\varepsilon_{b1} + \frac{\partial M_{i1}}{\partial \varepsilon_{e1}} \cdot d\varepsilon_{e1} \quad (2.34)$$

Ersetzt man hierin die partiellen Differentiale der Schnittkräfte nach den Dehnungen durch die Differenzenquotienten  $\Delta N_{i1}/\Delta \varepsilon_{b1}$  und  $\Delta N_{i1}/\Delta \varepsilon_{e1}$  sowie  $\Delta M_{i1}/\Delta \varepsilon_{b1}$  und  $\Delta M_{i1}/\Delta \varepsilon_{e1}$ , so lassen sich die erforderlichen An-

derungen  $d\epsilon_{b1}$  und  $d\epsilon_{e1}$  der Dehnungen bestimmen, durch welche die Abweichungen  $dN_{i1}$  und  $dM_{i1}$  von den Sollschnittgrößen aufgehoben werden. Zur Ermittlung der Differenzenquotienten ist es notwendig, zu den variierten Dehnungszuständen  $(\epsilon_{b1} + \Delta\epsilon_{b1}, \epsilon_{e1})$  und  $(\epsilon_{b1}, \epsilon_{e1} + \Delta\epsilon_{e1})$  die zugehörigen Schnittgrößen zu ermitteln. Das Verfahren muß so lange wiederholt werden, bis die vorgegebene Genauigkeit der Schnittgrößen erreicht ist.

Den Voraussetzungen des Verfahrens von Rao zu Bestimmung der mittleren Krümmungen entsprechend, wird im Risßquerschnitt nach der Überschreitung der Risßlast ein Aufreißen des Querschnitts bis zur Nulllinie angenommen.

Konvergenzschwierigkeiten ergeben sich im Bereich des Risßmomentes, wo beim Überschreiten der Betonzugfestigkeit bei weit aufreißender Zugzone die Krümmung sprunghaft ohne Momentensteigerung zunimmt. Durch eine fiktive Verringerung oder Erhöhung der Betonzugfestigkeit werden die für Zustand I bzw. II geltenden Bereiche der Momentkrümmungskurven über das Risßmoment hinaus verlängert (gestrichelter Verlauf in Bild 2.13), wodurch eine gute Konvergenz des Verfahrens in diesem Bereich gewährleistet wird.

Das hier beschriebene Verfahren ist vor allem zur direkten Bestimmung der Krümmung zu vorgegebenen Schnittkräften geeignet. Zur Ermittlung von Momentkrümmungslinien bei konstanter Normalkraft wird vom Verfasser ein zweites Verfahren benutzt, wie es in ähnlicher Form z.B. von Rao [11], Kasperek [13] und Beck [14] beschrieben wird:

Ausgehend von einer Stahldehnung  $\xi_e$ , die zur Bestimmung einzelner Punkte der Momentkrümmungslinie stufenweise erhöht wird, variiert man eine für jede Stufe von  $\xi_e$  zunächst geschätzte Betondehnung  $\xi_b$  in einzelnen Iterationsschritten solange, bis die berechnete Normalkraft mit der vorgegebenen hinreichend genau übereinstimmt. Für charakteristische Punkte mit den Ordinaten  $M = 0$ ,  $M = M_R$ ,  $M = \Sigma(\beta_S)$  und  $M = M_U$  werden die Krümmungen gesondert berechnet.

Die Betondehnung für die einzelnen Iterationsschritte wird aus denen der vorangegangenen durch lineare Interpolation gewonnen oder in der Umgebung von Knicken im Kurvenverlauf durch Eingrenzen eines Bereiches, der den gesuchten Wert einschließt. Dieses Verfahren führt schneller zum Ziel als ein aus Gl. (2.35) und (2.36) ableitbares, dem Newtonschen Verfahren entsprechendes eindimensionales Iterationsverfahren, da bei diesem zu jedem Iterationsschritt zur Bestimmung der Differentialquotienten die Schnittkraftermittlung zu zwei Dehnungszuständen erforderlich ist. Das zweite Verfahren wird angewendet, wenn auf Grund der Bewehrungsführung eine Bestimmung der Krümmungen des behandelten Trägers aus einer geringen Anzahl vorweg ermittelter Momentkrümmungslinien erfolgen kann. Dies bietet vor allem dann Vorteile, wenn am gleichen Träger eine größere Anzahl von Lastfällen untersucht wird.

Zur Behebung der Mehrdeutigkeit infolge eines horizontalen Verlaufs der Momentkrümmungslinie im Bereich des Rispmomentes wird in Anlehnung an einen Vorschlag von Quast [15] dieser Bereich durch einen hinreichend flachen Verlauf zwischen  $M_i = M_R$  und  $M_{i+1}$  ersetzt.

Die so ermittelten Momentkrümmungsbeziehungen werden für Be- und Entlastungsvorgänge verwendet. Nach Erreichen des Zustands II ist eine Rückkehr in den Zustand I nicht möglich. Für Entlastung wird daher im Bereich  $M_i = M_R$  bis  $M_{i+1}$  von der jeweiligen Beanspruchung ausgehend ein linearer Verlauf der Momentkrümmungslinie zum Nullpunkt hin angenommen (vgl. Bild 2.14). Vergleichsrechnungen, bei denen die Entlastung in dieser Form von jedem Punkt der Momentkrümmungslinie aus erfolgte, zeigten keine wesentlichen Abweichungen von den mit den obigen Annahmen gewonnenen Ergebnissen.

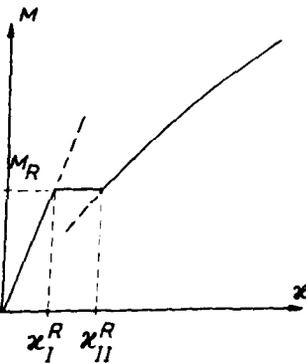


Bild 2.13: Momentkrümmungsverlauf

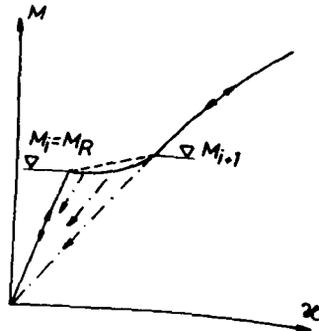


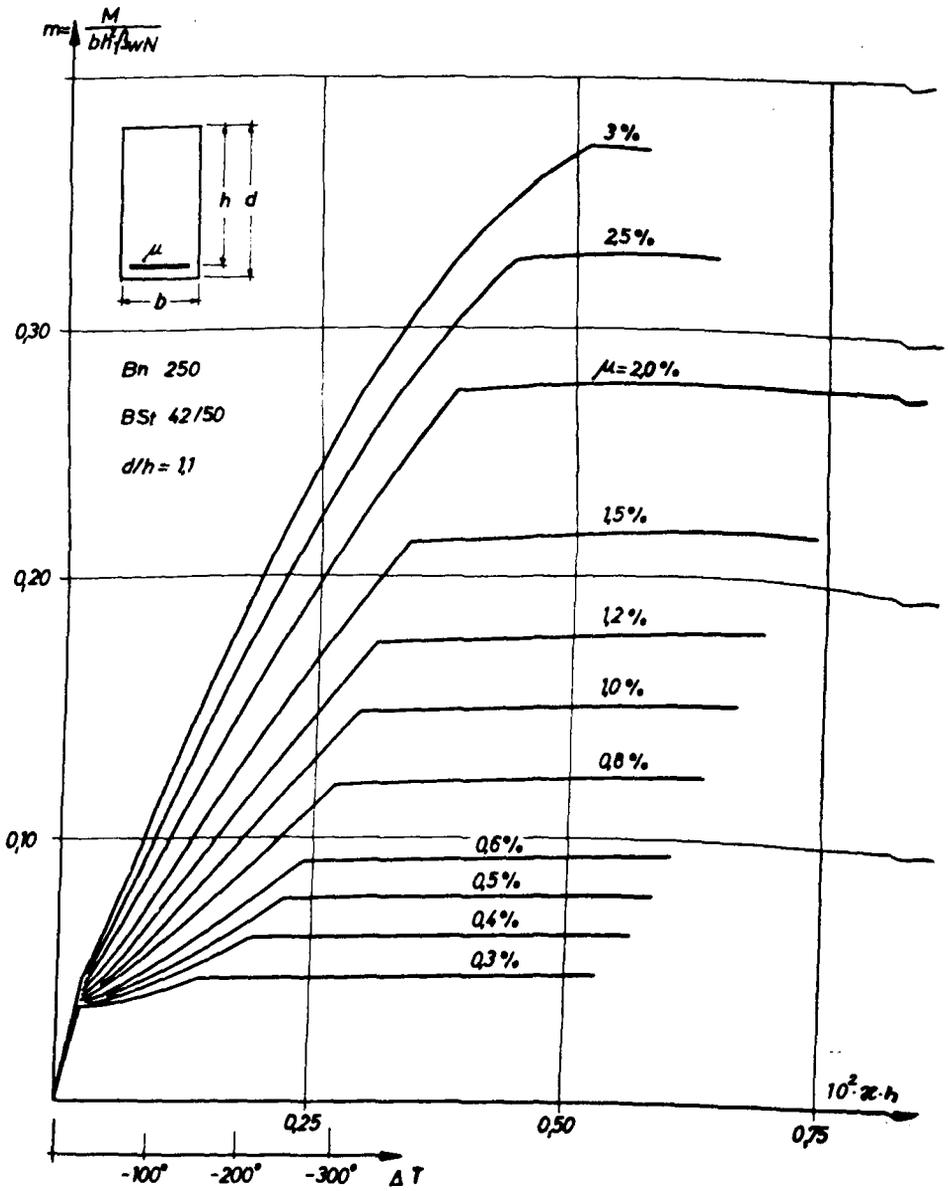
Bild 2.14: Momentkrümmungsverlauf bei Entlastung

## 2.4 Bestimmung der Biegesteifigkeiten

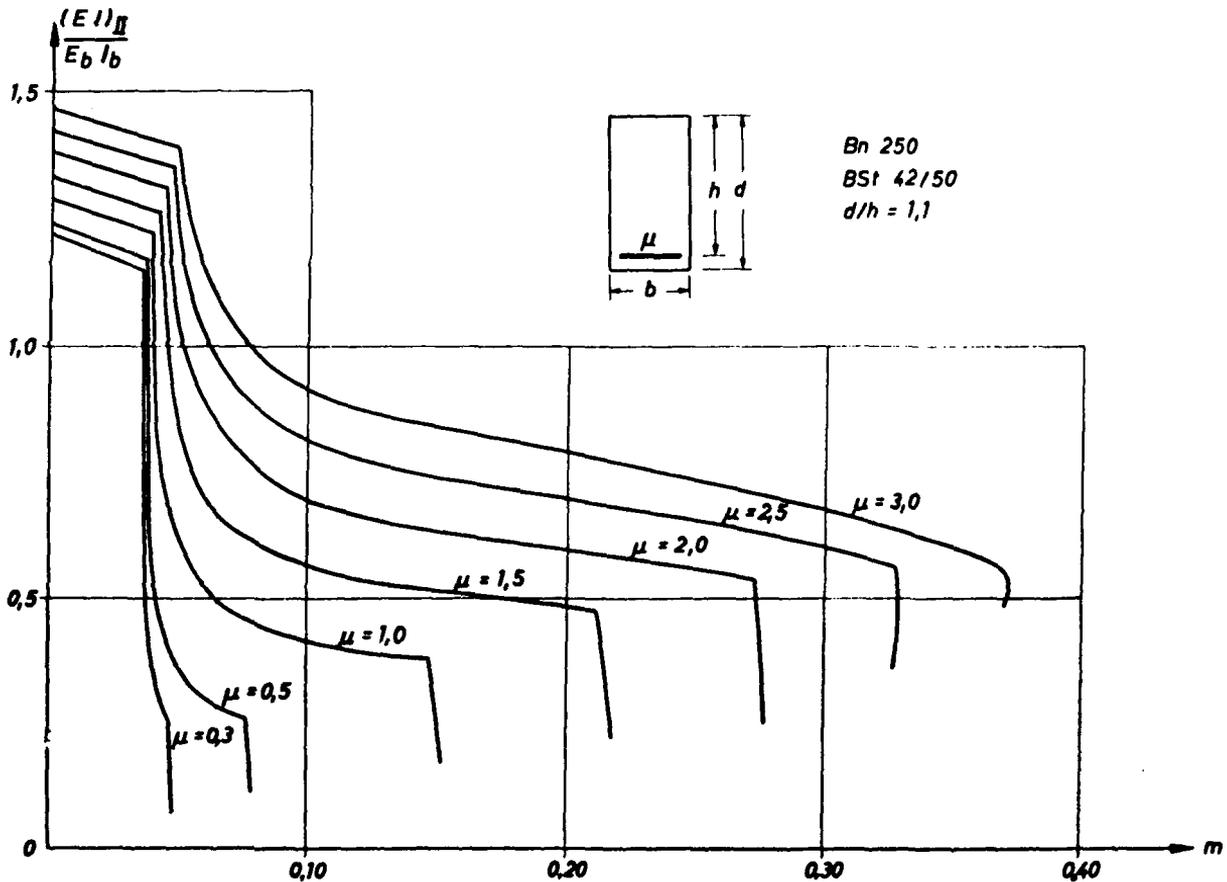
Für Vergleichsrechnungen werden die Steifigkeiten  $E_b I_b$  angesetzt. Dabei ist  $I_b$  das Trägheitsmoment des ungewehrten und ungerissenen Betonquerschnitts,  $E_b$  ist der Rechenwert des Elastizitätsmoduls für den Beton nach DIN 1045 neu. Diese Rechenwerte ergeben sich näherungsweise als Sekantenmoduli für  $\beta_p/3$  der Spannungsdehnungslinien nach Bild 2.7a. Die wirklichen Biegesteifigkeiten werden aus den Momentkrümmungsbeziehungen ermittelt:

$$EI = \frac{M}{\kappa} \quad (2.37)$$

Die Darstellungen in Bild 2.15 und 2.16 zeigen den Verlauf der mittleren Krümmungen und der daraus ermittelten wirklichen Biegesteifigkeiten für einen Rechteckquerschnitt mit den Baustoffen Bn 250 und BSt 42/50. Die wirklichen Steifigkeiten nehmen für den ungerissenen Bereich größere Werte als  $E_b I_b$  an, da in ihnen der Einfluß der Stahleinlagen enthalten ist und ferner zum Ausdruck kommt, daß der Elastizitätsmodul des Betons bei geringen Spannungen größer ist als der zugehörige Rechenwert. So beträgt beispielsweise der aus der Neigung der Spannungsdehnungslinie nach Bild 2.7a im Ursprung gewonnene E-Modul für einen Beton Bn 250  $356\,400 \text{ kp/cm}^2$  gegenüber einem Rechenwert von  $300\,000 \text{ kp/cm}^2$ .



**Bild 2.15:** Zusammenhang zwischen Biegemoment und mittlerer Krümmung bzw. Temperaturgradient  $\Delta T$  (Abschn.3.1)



**Bild 2.16:** Mittlere Biegesteifigkeiten

2.5 Ermittlung der Balkenendverformungen aus den Krümmungen

Die Integration der Gleichungen (2.7) und (2.8) zur Bestimmung der Balkenendverformungen  $\varphi_M$  und  $w_M$  erfolgt numerisch. Dazu wird der Balken in  $n$  Einzelabschnitte unterteilt, in denen der Krümmungsverlauf linear angenommen wird. Für einen Balkenabschnitt  $\Delta s_i$  lassen sich die Verdrehung  $\varphi_{i+1}$  und die Vertikalverschiebung  $w_{i+1}$  im Punkte  $i+1$  aus den Verformungen im Punkt  $i$  berechnen.

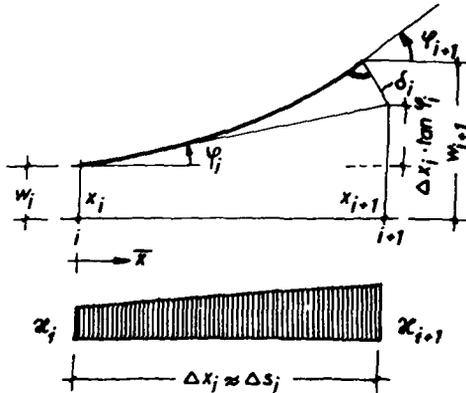


Bild 2.17: Verformungen am Element  $\Delta s$

Für die Verformungen des Punktes  $i+1$  folgt bei linearer Krümmungsverteilung:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\Delta x_i}{2} (\kappa_i + \kappa_{i+1}) \quad (2.38)$$

$$w_{i+1} = w_i + \Delta x_i \cdot \tan \varphi_i + \delta_i \cdot \cos \varphi_{i+1} \quad (2.39)$$

$$\text{Mit } \delta_i = \frac{\Delta x_i^2}{6} \cdot (2 \kappa_i + \kappa_{i+1}) \quad (2.40)$$

folgt aus Gl.(2.39) für kleine Winkel:

$$w_{i+1} = w_i + \Delta x_i \cdot \varphi_i + \frac{\Delta x_i^2}{6} \cdot (2 \kappa_i + \kappa_{i+1}) \quad (2.41)$$

## 2.6 Genauigkeit der numerischen Verformungsberechnungen

Zur Bestimmung der Genauigkeit der Ergebnisse der numerischen Integration nach den Gleichungen (2.38) und (2.41) wird die Krümmung an der Stelle  $\bar{x}$  in einer Taylorreihe entwickelt. Durch zweimaliges Integrieren dieser Reihe lassen sich daraus die Reihenausdrücke für  $\varphi_{i+1}$  und  $w_{i+1}$  herleiten.

$$\kappa(\bar{x}) = \kappa_i + \kappa_i' \cdot \bar{x} + \kappa_i'' \cdot \frac{\bar{x}^2}{2} + \kappa_i''' \cdot \frac{\bar{x}^3}{6} + \dots \quad (2.42)$$

$$\varphi(\bar{x}) = \int \kappa(\bar{x}) \cdot d\bar{x} + C_1 \quad (2.43)$$

$$w(\bar{x}) = \int \varphi(\bar{x}) \cdot d\bar{x} + C_2 \quad (2.44)$$

$$\varphi(\bar{x}) = \kappa_i \cdot \bar{x} + \kappa_i' \cdot \frac{\bar{x}^2}{2} + \kappa_i'' \cdot \frac{\bar{x}^3}{6} + \dots + C_1$$

$$w(\bar{x}) = \kappa_i \cdot \frac{\bar{x}^2}{2} + \kappa_i' \cdot \frac{\bar{x}^3}{6} + \kappa_i'' \cdot \frac{\bar{x}^4}{24} + \dots + C_1 \cdot \bar{x} + C_2 \quad (2.45)$$

Aus den Bedingungen  $\varphi(\bar{x}) = \varphi_i$  und  $w(\bar{x}) = w_i$  an der Stelle  $\bar{x} = 0$  folgt für die Integrationskonstanten:

$$C_1 = \varphi_i \quad \text{und} \quad C_2 = w_i$$

Damit ergibt sich aus den Gleichungen (2.45) und (2.46) für  $\bar{x} = \Delta x_i$ :

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \mathcal{K}_i \cdot \Delta x_i + \mathcal{K}'_i \cdot \frac{\Delta x_i^2}{2} + \mathcal{K}''_i \cdot \frac{\Delta x_i^3}{6} + \dots \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} w_{i+1} = w_i + \varphi_i \cdot \Delta x_i + \mathcal{K}_i \cdot \frac{\Delta x_i^2}{2} + \mathcal{K}'_i \cdot \frac{\Delta x_i^3}{6} \\ + \mathcal{K}''_i \cdot \frac{\Delta x_i^4}{24} + \dots \end{aligned} \quad (2.48)$$

Um die Näherungslösungen nach den Gleichungen (2.38) und (2.41) mit diesen Reihen vergleichen zu können, wird in ihnen  $\mathcal{K}_{i+1}$  durch eine Taylorreihe ausgedrückt. Nach einer kurzen Umformung folgt:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \mathcal{K}_i \cdot \Delta x_i + \mathcal{K}'_i \cdot \frac{\Delta x_i^2}{2} + \mathcal{K}''_i \cdot \frac{\Delta x_i^3}{4} + \dots \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} w_{i+1} = w_i + \varphi_i \cdot \Delta x_i + \mathcal{K}_i \cdot \frac{\Delta x_i^2}{2} + \mathcal{K}'_i \cdot \frac{\Delta x_i^3}{6} \\ + \mathcal{K}''_i \cdot \frac{\Delta x_i^4}{12} + \dots \end{aligned} \quad (2.50)$$

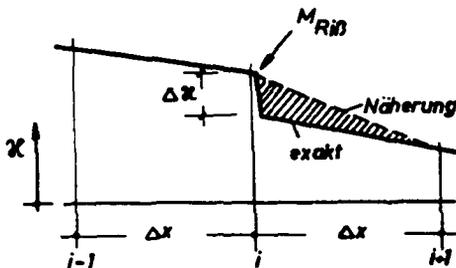
Ein Vergleich der genauen Lösungen mit den Näherungslösungen liefert die bei der numerischen Integration begangenen Fehler als Reihenausdrücke, die sich nach Zurmühl [16] durch die Restglieder  $R_\varphi$  und  $R_w$  mit der unbestimmten Stelle  $x_j$ , die innerhalb des Integrationsintervalls  $x_i \dots x_{i+1}$  liegt, darstellen:

$$R_\varphi = - \frac{\Delta x_i^3}{12} \mathcal{K}'''(x_j) \quad (2.51)$$

$$R_w = - \frac{\Delta x_i^4}{24} \mathcal{K}''''(x_j) \quad (2.52)$$

Die Fehler, die sich aus der Linearisierung des Krümmungsverlaufs innerhalb der Integrationsabschnitte ergeben, sind proportional der 3. bzw. 4. Potenz der Länge des Integrationsintervalls.

Wenn die Krümmung des Balkens einen Sprung bzw. Knick aufweist, wie dies beim Erreichen des RiBmomentes der Fall ist, werden i.a. zur Erzielung genauer Ergebnisse besondere rechentechnische Maßnahmen erforderlich. Bei Berücksichtigung des Einflusses mehrerer aufeinander folgender Belastungszustände auf die Steifigkeiten des Balkens ist es jedoch vorteilhaft, wenn eine Unterteilung des Trägers in gleichmäßige Teilabschnitte  $\Delta x$  vorgenommen wird. Dabei wird  $\Delta x$  so klein gewählt, daß mit genügender Genauigkeit auch in den Abschnitten, in denen ein Sprung in der Krümmungsverteilung auftritt, eine konstante Änderung der Krümmung angenommen werden kann. Der an einer solchen Stelle begangene Fehler ist am größten, wenn das RiBmoment unmittelbar am Anfang oder Ende eines Integrationsabschnitts auftritt (vgl. Bild 2.18).



**Bild 2.18:** Krümmungsverlauf im Bereich des RiBmomentes

Der bei der Berechnung der Verdrehung begangene Fehler entspricht dem Inhalt der in Bild 2.18 schraffiert dargestellten Fläche:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\kappa \Delta x}{2} \quad (2.53)$$

Bei der in Bild 2.19 dargestellten Krümmungsfläche eines beiderseits starr eingespannten Trägers addieren sich im ungünstigsten Fall die Fehler, die im Stützen- und Feldbereich je zweimal auftreten können, so daß man als maximalen Fehler bei der Integration über die Krümmung erhält:

$$\max \Delta\varphi = (|\Delta\kappa_{\text{Stütze}}| + |\Delta\kappa_{\text{Feld}}|) \cdot \Delta x \quad (2.54)$$

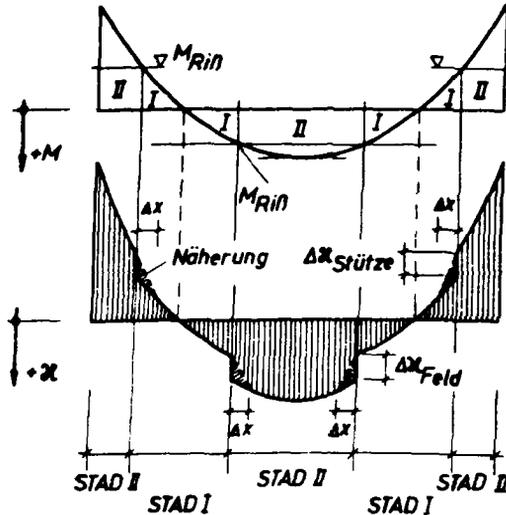
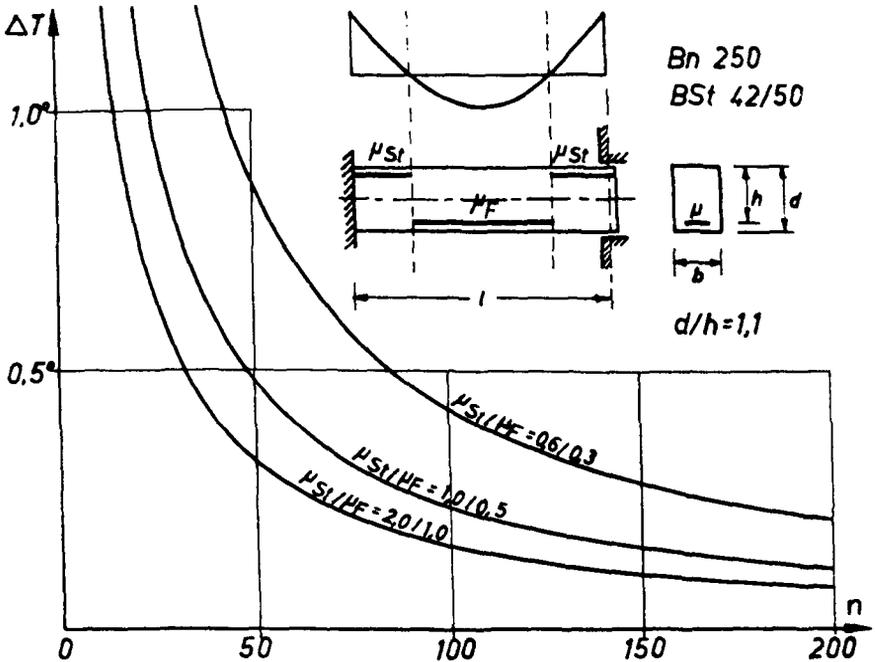


Bild 2.19: Exakter und genäherter Krümmungsverlauf

Zur Fehlerabschätzung wird der Fehler in der Stabendverdrehung  $\max \Delta\varphi$  mit Hilfe von Gleichung (2.2) in einen Temperaturgradienten  $\Delta T$  umgerechnet, der am Trägerende B des in A eingespannten Kragträgers nach Bild 2.2 die Endverdrehung  $\max \Delta\varphi$  erzeugt:

$$\Delta T = \frac{\max \Delta\varphi}{l} \cdot \frac{d}{\alpha_T} \quad (2.55)$$



**Bild 2.20:** Genauigkeit der Stabendverdrehung in Abhängigkeit von der Zahl der Integrationsabschnitte

In Bild 2.20 ist der Zusammenhang zwischen diesem den Fehler darstellenden Temperaturgradienten  $\Delta T$  und der Anzahl der Integrationsabschnitte  $n$  für verschiedene Bewehrungsgehalte dargestellt. Diese Darstellung bietet einen guten Anhalt für eine zweckmäßige Aufteilung des zu untersuchenden Balkens in Teilabschnitte.

### 3. Beanspruchung durch reinen Zwang

#### 3.1 Ermittlung der Zwangsmomente bei reinem Zwang

Die in diesem Kapitel vorgenommenen Berechnungen sollen einen Anhalt für das Rißverhalten von Bauteilen liefern, welche durch reinen Zwang beansprucht werden, und ferner Aussagen über den Einfluß der Rißbildung auf Zwängungsmomente bei kombinierter Beanspruchung ermöglichen. Wie bereits gesagt, wird reiner Zwang als eine Zwangbeanspruchung definiert, bei der über die Trägerlänge konstante Zwängungsmomente hervorgerufen werden. Um die Möglichkeit geeigneter Vereinfachungen für die Durchführung praktischer Berechnungen zu untersuchen, soll die Frage geklärt werden, ob die Berechnung der Stabverformungen mit mittleren Steifigkeiten statthaft ist oder ob der Einfluß der Rißentwicklung in jedem Einzelfall genauer verfolgt werden muß.

Betrachtet wird in allen Beispielen dieses Abschnittes 3 ein beiderseits unverdrehbar eingespannter Träger nach Bild 1.1, der durch einen Temperaturgradienten  $\Delta T$  beansprucht wird. Hierdurch wird ein über die Trägerlänge konstantes Zwangsmoment erzeugt, dessen zugehörige Krümmung  $\kappa$  entgegengesetzt gleich der Krümmung aus der Temperaturverformung sein muß; aus Glei-

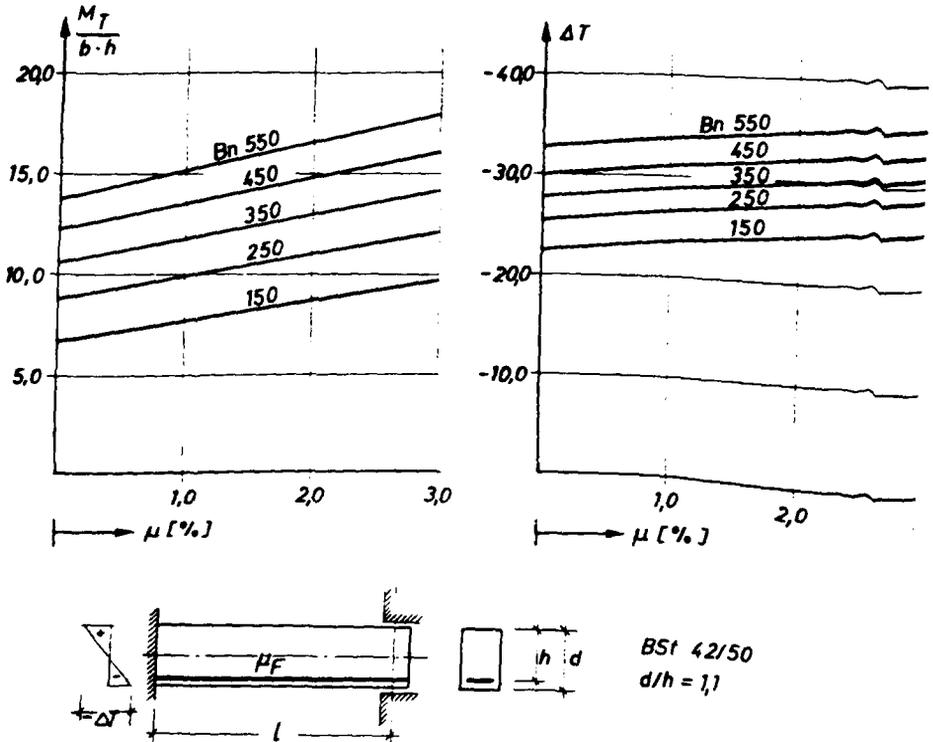
chung (2.1) folgt:

$$\alpha \cdot h = - \frac{\Delta T \cdot d_T}{d/h} \quad (3.1)$$

Das zugehörige Zwangsmoment kann man in Abhängigkeit vom Bewehrungsgehalt direkt aus Momentkrümmungsdiagrammen entnehmen, in denen anstelle der Krümmung der Temperaturgradient  $\Delta T$  nach Gleichung (3.1) auf der Abszisse abgetragen wird (vgl. Bild 2.15 untere Leiter). Zu einem vorgegebenen Temperaturgradienten gibt es je nach dem eingelegten Bewehrungsprozentsatz eine Vielzahl von Lösungen für das Zwängungsmoment. Auf Grund einer Ermittlung der Rißbreiten kann ein wirtschaftlicher Bewehrungsgehalt bestimmt werden, der eine ausreichende Sicherheit gegen das Auftreten unerwünscht großer Risse liefert.

Wird ein Bewehrungsgehalt vorgegeben und  $\Delta T$  bei Null beginnend gesteigert, so wächst das Zwangsmoment entsprechend dem steilen Verlauf der Momentkrümmungslinie im Zustand I verhältnismäßig schnell an, bis das Rißmoment erreicht wird. Die dem Rißmoment entsprechenden Temperaturgradienten  $\Delta T_{\text{RiB}}$  und die zugehörigen Schnittkräfte sind entsprechend Gleichung (3.1) und Bild 2.15 in Bild 3.1 als Funktion vom Bewehrungsgehalt für unterschiedliche Betongüten dargestellt. Im Gegensatz zum nur wenig veränderlichen Temperaturgradienten zeigt das zugehörige Zwängungsmoment eine stärkere Abhängigkeit vom Bewehrungsgehalt.

Beim Erreichen des Rißmomentes verläuft die Momentkrümmungslinie bei konstant gehaltener Momentenbeanspruchung nahezu horizontal (vgl. Bild 3.2), bis die zum Rißmoment im Stadium II gehörende mittlere Krümmung erreicht ist. Die hier ohne eine Steigerung der



**Bild 3.1:** Im Zustand I maximal aufnehmbare Temperaturgradienten und zugehörige Zwangsmomente

Beanspruchung auftretende Zunahme der Krümmung ist einem Fließvorgang vergleichbar. Dem Risßmoment ist keine bestimmte Temperaturverformung  $\Delta T$  zuzuordnen. Kann sich dagegen das Moment in Abhängigkeit von der Krümmung einstellen, so nimmt das Moment im Risßquerschnitt beim Einsetzen der Risßbildung infolge des Ausfallens der Betonzugzone zunächst ab und erreicht erst

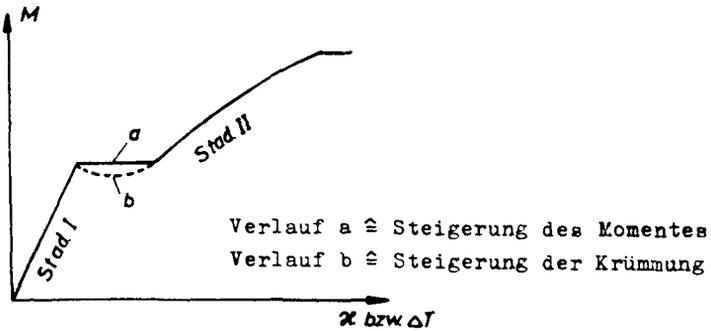


Bild 3.2: Momentenkrümmungsverlauf bei Steigerung der Momentenbeanspruchung bzw. Steigerung der Krümmung

bei weiterer Steigerung der Krümmung das Rißmoment (vgl. Bild 3.2). Dabei ist vorausgesetzt, daß die Bewehrung bei gerissener Zugzone das Rißmoment aufnehmen kann, ohne daß Fließen auftritt. Das einer vorgegebenen Temperaturverformung zugehörige Moment kann daher bei einer Verfolgung der Rißbildung eindeutig bestimmt werden.

Am durch  $\Delta T$  beanspruchten Träger tritt der erste Riß beim Erreichen des Rißmomentes auf und hat eine Abnahme des Zwangmomentes zur Folge. Ein zweiter Riß kann sich erst bilden, wenn die Zwangbeanspruchung  $\Delta T$  weiter ansteigt und das Rißmoment erneut erreicht wird. Dieser Vorgang wiederholt sich so lange, bis die Rißbildung des gesamten Trägers abgeschlossen ist. Erst dann wird - eine ausreichende Bewehrung vorausgesetzt - eine Überschreitung des Rißmomentes durch das Zwangmoment möglich.

3.2 Einfluß der Rißbildung auf den Verlauf der Zwangmomente und den Abfall der Biegesteifigkeit

Am statisch bestimmten Grundsystem nach Bild 2.2, belastet durch das Rißmoment  $L_R$ , beträgt die Statverdre-  
hung beim Auftreten des i-ten Risses:

$$\varphi_i = \kappa_i^R \left( l - \sum^i a_m \right) + \kappa_{II m}^R \sum^i a_m \quad (3.2)$$

Dabei bedeuten:

$a_m$  = mittlerer Rißabstand

$\kappa_i^R$  = Krümmung unter dem Rißmoment bei Stadium I

$\kappa_{II m}^R$  = mittlere Krümmung unter dem Rißmoment im Einflußbereich eines Risses

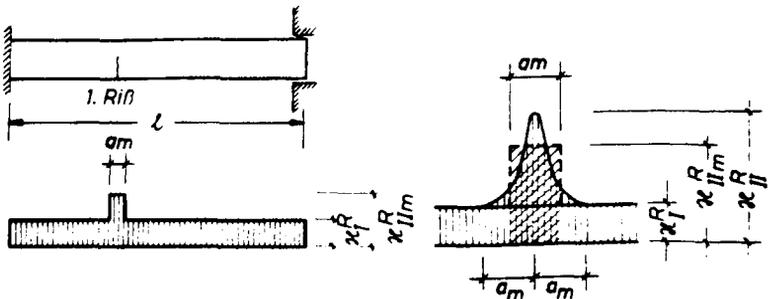


Bild 3.3: Mittlere Krümmung im Rißbereich

Für den mittleren Rißabstand gilt nach Rehm/Martin [17] bei Biegebeanspruchung:

$$a_m = k_1 \cdot \ddot{u}_b + k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{d_e}{\mu} \quad [cm] \quad (3.3)$$

Für die Faktoren  $k$  gibt Rehm folgende Werte an:

$$k_1 \cdot \bar{u}_b = 4 \text{ cm}$$

$$k_2 \cdot k_3 = 0,025 \text{ bei Betonrippenstahl}$$

Aus der Stabendverdrehung kann eine wirksame mittlere Steifigkeit  $(EI)_w$  ermittelt werden, die sich als mit dem Abminderungsfaktor  $c_i$  reduzierte Steifigkeit des ungerissenen Betonquerschnittes ausdrücken läßt:

$$(EI)_w = c_i \cdot E_b I_b = \frac{M_R}{\varphi_i} \cdot l \quad (3.4)$$

Der Faktor  $c_i$  ist auch als Abminderungsfaktor auffaßbar, mit dem das für Zustand I berechnete Zwangmoment multipliziert werden kann, um das Zwangmoment für Zustand II zu erhalten. Seine Größe hängt von der Zahl  $i$  der eingetretenen Risse ab. Für  $i=0$  (ungerissener Balken) ist  $c_i = 1,0$ . Die Größe von  $c_i$  erhält man nach Einsetzen des Wertes  $\varphi_i$  nach Gleichung (3.2) in Gleichung (3.5) mit

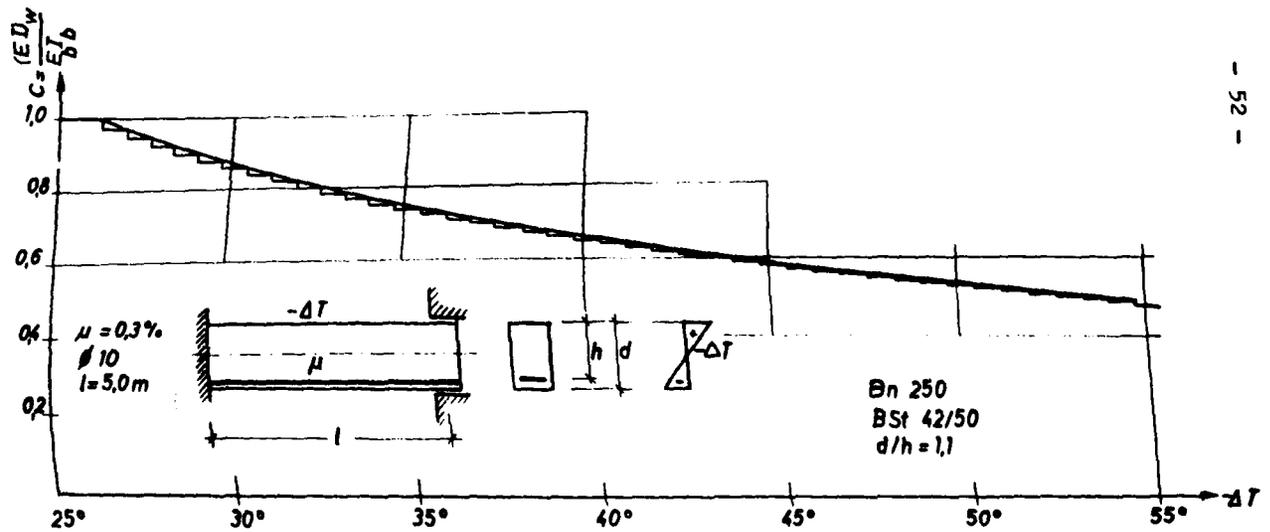
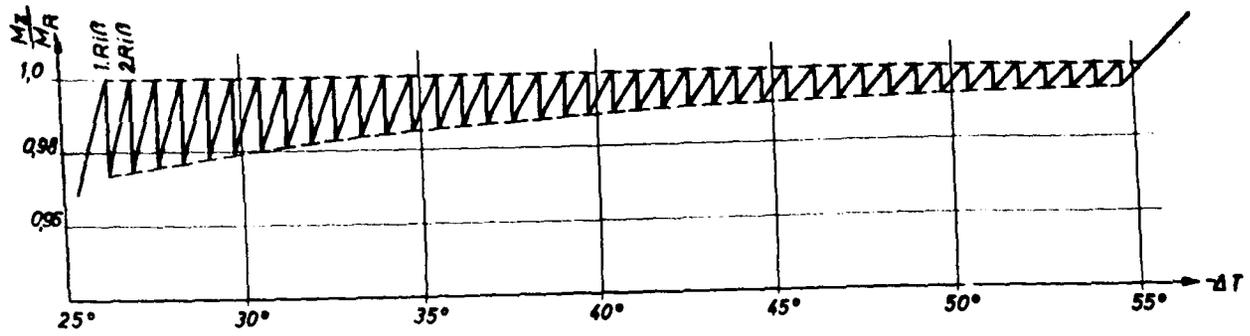
$$\chi_I^R = M_R / E_b I_b$$

nach kurzer Umformung zu:

$$c_i = \frac{1}{1 + \sum \frac{a_m}{l} \left( \frac{\chi_{IIIm}^R}{\chi_I^R} - 1 \right)} \quad (3.5)$$

Einem Zwangmoment von der Größe des Rissmomentes nach dem  $i$ -ten Riß entspricht nach Gl.(3.1) mit Gl.(3.4) ein Temperaturgradient von:

$$\Delta T_i = \frac{\chi_I^R \cdot h}{c_i \cdot \alpha_T} \cdot d/h \quad (3.6)$$

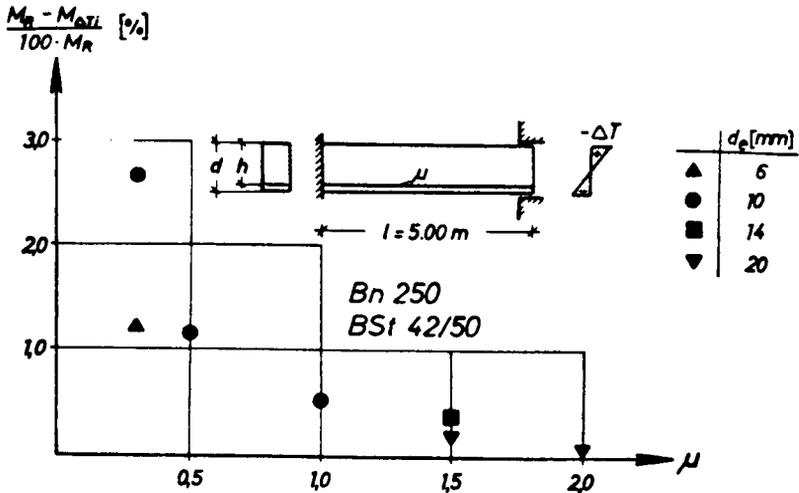


**Bild 34:** Verlauf des Zwangmomentes und der Biegesteifigkeit während des Vorganges der Rißbildung

Das Zwangsmoment bei fest vorgegebener Verformung ( $\Delta T$ ) fällt beim Eintreten des  $i$ -ten Risses von  $M_R$  ab auf:

$$M_{\Delta T i} = M_R \cdot \frac{c_i}{c_{i-1}} \quad (3.7)$$

In Bild 3.4 ist der Verlauf des Zwängungsmomentes unter Berücksichtigung der Ribbildung dargestellt. Dabei wurde der Anstieg des Zwängungsmomentes bei wachsender Temperaturbeanspruchung  $\Delta T$  linear angenommen.



**Bild 3.5:** Prozentualer Abfall des Zwangsmomentes beim Auftreten des ersten Risses

Gewählt wurde ein sehr niedriger Bewehrungsgehalt, weil hier bei einer Ribbildung ein großer Krümmungszuwachs und damit ein großer Abfall des Zwängungsmomentes erfolgt. Bei dem verhältnismäßig großen Stahldurchmesser ergibt sich auch ein großer Ribabstand, der ebenfalls beim Auftreten eines jeden Risses eine

große Abnahme des Zwangmomentes zur Folge hat. Der Abfall des Zwangmomentes ist beim ersten Riß am größten, er beträgt ca. 3 %, beim 10. Riß beträgt er weniger als 2 %. Aus Bild 3.4 ist außerdem der Abfall der Biegesteifigkeit bei fortschreitender Rißbildung ersichtlich. Für verschiedene Bewehrungsgehalte und Stahldurchmesser ist in Bild 3.5 der prozentuale Abfall des Zwangmomentes beim Auftreten des ersten Risses dargestellt. Er ist bei allen dargestellten Fällen wesentlich kleiner als bei dem in Bild 3.4 gezeigten Beispiel.

### 3.3 Diskussion der Ergebnisse

Die Größe des über die Trägerlänge konstant verlaufenden Zwangungsmomentes bei reinem Zwang infolge eines Temperaturgradienten  $\Delta T$  ist proportional der zum gewählten Bewehrungsgehalt gehörenden Momentkrümmungslinie (vgl. Bild 3.6), wobei der horizontale Bereich bei einer genaueren Betrachtung durch einen sägezahnförmigen Verlauf gemäß Bild 3.4 zu ersetzen ist. Wie an einigen Beispielen gezeigt wurde, ist die Reduktion des Zwangmomentes durch die beim Auftreten der einzelnen Risse bewirkte Krümmungszunahme so gering, daß der Verlauf mit genügender Genauigkeit durch eine Gerade in Höhe des Rißmomentes ersetzt werden kann (vgl. Bild 3.6). Wählt man statt der horizontalen Geraden eine hinreichend flach geneigte Gerade (vgl. Bild 2.14), so ist eine eindeutige Zuordnung zwischen Moment und Temperaturgradient gegeben, ohne daß ein nennenswerter Fehler begangen wird. Desgleichen kann bei der Darstellung des Steifigkeitsabfalls der "genaue" treppenförmige Verlauf durch eine einhüllende durchgehende Kurve ersetzt werden.

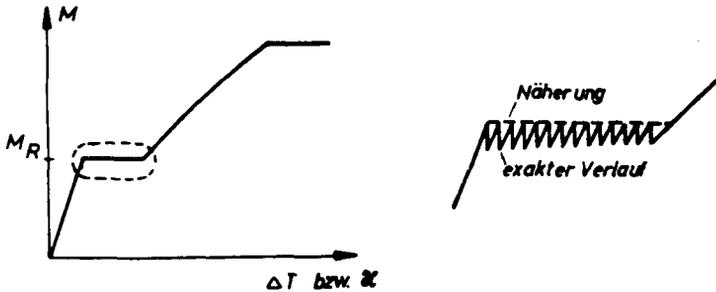


Bild 3.6: Zusammenhang zwischen Temperaturgradient und Zwangmoment bei reinem Zwang

Es sei noch auf den Unterschied zwischen den hier für Biegezwang gewonnenen und den für zentrischen Zwang von Falkner [4] ermittelten Ergebnissen hingewiesen. Bei zentrischem Zwang ist der beim Auftreten des ersten Risses eintretende Abfall der Zugkraft wesentlich stärker, so daß auf eine eingehende Untersuchung der Ribbildung in vielen Fällen nicht verzichtet werden kann. Der Abfall kann z.B. bei einem mit  $\mu = 0,5\%$  bewehrten 6m langen Balken über 35% betragen. Die Erklärung hierfür liegt sowohl in dem prozentual höheren Steifigkeitsabfall, bedingt durch das Aufreißen des ganzen Querschnitts, als auch in den bei zentrischem Zug auftretenden wesentlich größeren Ribabständen.

#### 3.4 Folgerungen aus den für reinen Zwang gewonnenen Ergebnissen für die Berechnung von Zwangmomenten bei kombinierter Beanspruchung aus Last und Zwang

Bei kombinierter Beanspruchung aus äußerer Belastung und Zwang ist der Momentenverlauf i.a. nicht mehr kon-

stant. Ein einzelner Punkt einer Momentkrümmungslinie beschreibt den Verformungszustand eines oder mehrerer unendlich kleiner Abschnitte des Trägers und nicht mehr den Verformungszustand des gesamten Trägers wie bei reinem Zwang. Wird bei einer kombinierten Belastung des Trägers an einer Stelle gerade das Rißmoment erreicht, so kommt es auch hier, ähnlich wie reiner Zwangbeanspruchung, zur Rißbildung und zu einem Abfall der Biegesteifigkeit. Eine weitere Rißbildung ist aber nur bei einer Erhöhung der Momentenbelastung möglich, weil erst dann wieder in einem bis dahin im Zustand I verbliebenen Bereich das Rißmoment erreicht wird. Dabei muß aber an der Stelle des ersten Risses das Moment größer werden können als das Rißmoment selbst, sonst gibt es einen klaffenden Riß. Es besteht hierbei kein wesentlicher Unterschied, ob die Momentensteigerung durch Zunahme der äußeren Belastung  $q$  oder der Zwangbeanspruchung  $\Delta T$  erfolgt.

Die Frage nach der Bedeutung der zeitlichen Folge der Belastung wird eingehend im 4. Kapitel der vorliegenden Arbeit behandelt. Es erscheint gerechtfertigt, auch bei kombinierter Belastung den treppenförmigen Verlauf des Zusammenhangs zwischen Zwangmoment und zugehöriger Verformung durch einen ausgleichenden Kurvenzug zu ersetzen, da in den meisten hier behandelten Fällen bereits größere Bereiche des Trägers unter äußeren Lasten den Zustand II erreichen. Die beim Hinzukommen der Zwangbeanspruchung auftretenden Risse haben im Verhältnis zur Gesamtverformung nur einen sehr kleinen Krümmungszuwachs zur Folge. Im Gegensatz zur reinen Zwangbeanspruchung, wo durch den horizontalen Ast der Momentkrümmungslinie bedingt ein mehrdeutiger Bereich entsteht, ist bei kombinierter Beanspruchung

der Zusammenhang zwischen Zwangsmoment und der zugehörigen Zwangverformung eindeutig.

Der Verzicht auf eine Verfolgung des Einflusses der einzelnen Risse und die stattdessen durchgeführte Berechnung mit kontinuierlichen Übergängen vom Stadium I zum Stadium II bedeutet für die Berechnungen eine wesentliche Vereinfachung, da so eine Behandlung des Problems unabhängig von fest vorgegebenen Stützweiten und Durchmessern der eingelegten Bewehrung möglich ist.

#### 4. Einfluß der Belastungsgeschichte auf die Berechnung von Zwangsmomenten

##### 4.1 Überblick

Die Größe einer Zwangskraft wird unmittelbar von der Steifigkeitsverteilung in einem Bauteil bestimmt. Diese wiederum hängt ab von den maximalen Beanspruchungen in den einzelnen Punkten des Tragwerks, wobei es sich auch um Beanspruchungen aus Lastfällen handeln kann, die zu einem früheren Zeitpunkt auf das System eingewirkt haben. Während sich ungerissene Querschnitte annähernd elastisch verhalten, kehren gerissene Querschnitte bei Entlastung nicht wieder in den Zustand I zurück und verformen sich bei erneuter Belastung, auch wenn diese unter der Rißlast bleibt, entsprechend den durch Rißbildung reduzierten Steifigkeiten des Zustandes II.

Am Beispiel des beiderseits starr eingespannten Trägers nach Bild 1.1, der durch eine Gleichlast  $q$  und eine Zwangeinwirkung  $z$  beansprucht wird, soll hier der Einfluß der Belastungsgeschichte auf die Berechnung von Zwangsmomenten untersucht werden. Als Zwangbeanspruchungen werden Temperaturgradienten  $\Delta T$  gewählt, wobei  $\Delta T$  sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann. Da das Superpositionsgesetz nicht mehr gültig ist, können die Schnittkräfte für die einzelnen Lastfälle getrennt ermittelt und zur ungünstigsten Beanspruchung überlagert werden. So ist für die Schnittkräfte aus der kombinierten Beanspruchung  $q + z$  ein gesonderter Rechengang erforderlich. Die Ermittlung des Zwangmomentes als Differenz der Momente aus den Lastfällen  $q + z$  und  $q$  stellt nur eine Näherung dar, weil in dem so berechneten Zwangmoment die Umlagerung

enthalten ist, die die Momentenbelastung aus der äußeren Last  $q$  erfährt, wenn die Zwangbeanspruchung  $z$  hinzukommt. Die Momentenumlagerungen werden in den folgenden Ausführungen eingehend untersucht.

Weiterhin werden verschiedene Möglichkeiten für die zeitliche Folge der Belastung diskutiert, um einfache Ansätze für die Belastungsgeschichte zu finden, die für systematische Berechnungen geeignet sind. Diese sollen die wirklichen Verhältnisse möglichst gut wiedergeben, die Berechnung der ungünstigsten Beanspruchungen aus der kombinierten Belastung  $q + z$  ermöglichen, sowie einen guten Einblick in die Umlagerungen der Schnittkräfte aus äußerer Belastung sowie den Abbau der Zwängungsmomente gewähren.

#### 4.2 Darstellung einfacher Ansätze für die Belastungsfolge

Belastungsfolge A: Die Beanspruchung aus äußerer Last  $q$  und Zwang  $z$  wird als Erstbelastung gleichzeitig auf den Träger aufgebracht (vgl. Bild 4.1). Unabhängig

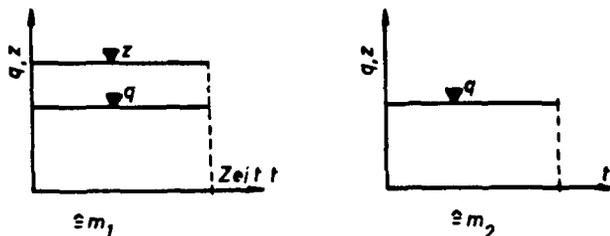


Bild 4.1: Belastungsfolge A

von ihr wird die zur Bestimmung des Zwangmomentes benötigte Schnittkraftverteilung für den Lastfall  $q$  aus einer weiteren gedachten Erstbelastung des Trägers gewonnen. Die zu den Lastfällen  $q$  und  $q + z$  gehörende Steifigkeitsverteilung stellt an jeder Stelle des Trägers die maximal mögliche zu dem jeweiligen Lastfall dar, da es sich in beiden Fällen um Erstbelastungen handelt. Die Belastungsfolge A erscheint infolgedessen besonders geeignet, um extreme Schnittkraftverteilungen unter der Gesamtbelastung  $q + z$  zu bestimmen.

Unter dem Lastfall  $q + z$  werden je nach Vorzeichen des Zwängungsmomentes im Feld- oder Stützenbereich des Trägers geringere Momente erzeugt als unter dem Lastfall  $q$  allein. Da die beiden Lastfälle unabhängig voneinander untersucht werden, kann z.B. der Fall eintreten, daß in weiten Trägerbereichen unter dem Lastfall  $q$  Stadium II auftritt, während unter dem Lastfall  $q + z$  noch Stadium I herrscht; der Einfluß der Schnittkraftumlagerungen dürfte daher hier besonders groß sein.

Belastungsfolge B: Die Zwangbeanspruchung wird als zweite Laststufe auf den in einer ersten Stufe mit  $q$  belasteten Träger aufgebracht (vgl. Bild 4.2). Dadurch kommt im Gegensatz zur Belastungsfolge A die unter dem Lastfall  $q$  allein aufgetretene Schnittkraftverteilung bei der Berechnung der Zwangmomente voll zur Geltung. Um den Einfluß von Schnittkraftumlagerungen zu erfassen, die z.B. verstärkt in Erscheinung treten, wenn größere Trägerbereiche erst unter dem Lastfall  $q + z$  den Zustand I verlassen, wird in einer dritten Laststufe eine Entlastung der Zwangbeanspruchung vorgenommen. Die damit gewonnene zweite Schnittkraftverteilung  $m_2$  für den Lastfall  $q$  berücksichtigt die unter

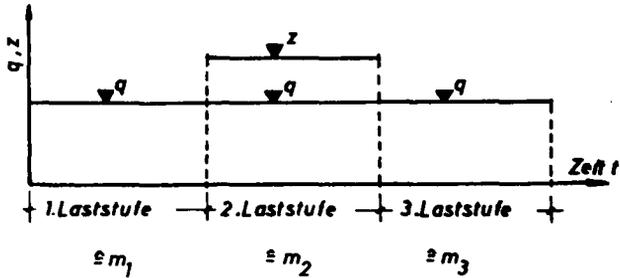


Bild 4.2: Belastungsfolge B

der Gesamtlast  $q + z$  aufgetretene Ribbildung auch in den Bereichen, wo bei der ersten Laststufe noch Zustand I herrschte.

Belastungsfolge C: Der Zwang wirkt als Erstbelastung, dann erst folgt die äußere Belastung (vgl. Bild 4.3). Dabei können die Momentenbereiche aus äußerer Last, die ein dem Zwangmoment entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen, sich nicht voll auf die Steifigkeitsverteilung auswirken. Wenn unter der Zwangbeanspruchung allein noch Zustand I erhalten bleibt, dürfte der Schnittkraftzustand für den Lastfall  $q + z$  weitgehend mit dem nach der Lastfolge A ermittelten übereinstimmen. Wird dagegen bereits unter der Zwangbeanspruchung

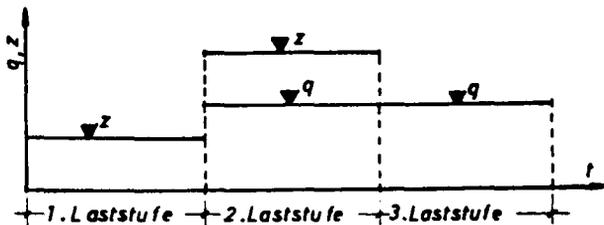


Bild 4.3: Belastungsfolge C

Zustand II erreicht, so tritt im ganzen Lastmomentenbereich, der das gleiche Vorzeichen wie das Zwangsmoment aufweist, Zustand II auf; in den übrigen Bereichen werden die Risse, die nun in der Druckzone des Querschnitts liegen, überdrückt. Je nach Beanspruchung können hier Zustand I oder Zustand II auftreten. Durch die ausgeprägte Rißbildung über den ganzen Bereich, in dem das Zwangsmoment entlastend wirkt, stellt sich eine verstärkte Momentenumlagerung zu dem Bereich hin ein, wo das Zwangsmoment entlastend wirkt. Dies hat zur Folge, daß die maximale Gesamtbeanspruchung aus dem Lastfall  $q + z$  kleiner bleibt als bei einer Belastung nach der Belastungsfolge A.

In bezug auf die mit den Belastungsansätzen A und B berechneten Schnittkraftverteilungen läßt die Belastungsfolge C keine wesentlichen Überschreitungen erwarten. Die Schnittkräfte für die bei der ersten Laststufe vorhandene reine Zwangbeanspruchung können auch mit den Belastungsfolgen A und B für den Sonderfall  $q = 0$  bestimmt werden. Ferner dürfte eine Belastung in der hier geschilderten zeitlichen Folge in der Wirklichkeit nur selten mit der vollen äußeren Belastung auftreten. Aus diesen Gründen wird auf eine Berücksichtigung der Belastungsfolge C bei den folgenden Ausführungen verzichtet.

Belastungsfolge D: Die bisher beschriebenen Belastungsfolgen stellen Grenzfälle dar, die nur in Ausnahmefällen wirklich auftreten dürften. Es soll nun überprüft werden, ob mit diesen Ansätzen bereits wirklichkeitsnahe Ergebnisse erzielt werden oder ob mit einer Belastungsfolge gerechnet werden muß, welche die wirklichen Verhältnisse zutreffender beschreibt. Während bei den Ansätzen A bis C die Lastfälle  $q$  bzw.  $z$

in voller Größe auftraten und nur ihre zeitliche Folge variiert wurde, soll nun einmal der Fall untersucht werden, daß der Träger bei einer ersten Laststufe nur mit einem Teil  $q_1$  der äußeren Belastung  $q$  belastet wird. Nach der dann bei der zweiten Laststufe auftretenden Zwangsbeanspruchung wird in einer dritten Laststufe die äußere Last auf ihre volle Größe  $q$  gesteigert (vgl. Bild 4.4).

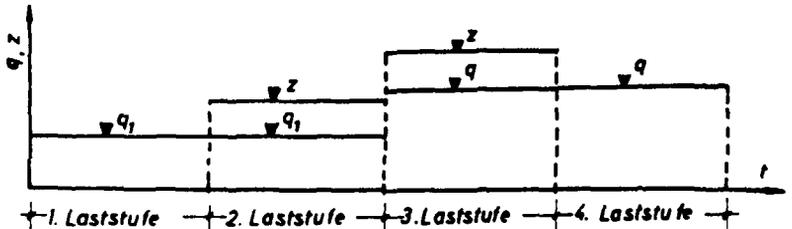


Bild 4.4: Belastungsfolge D

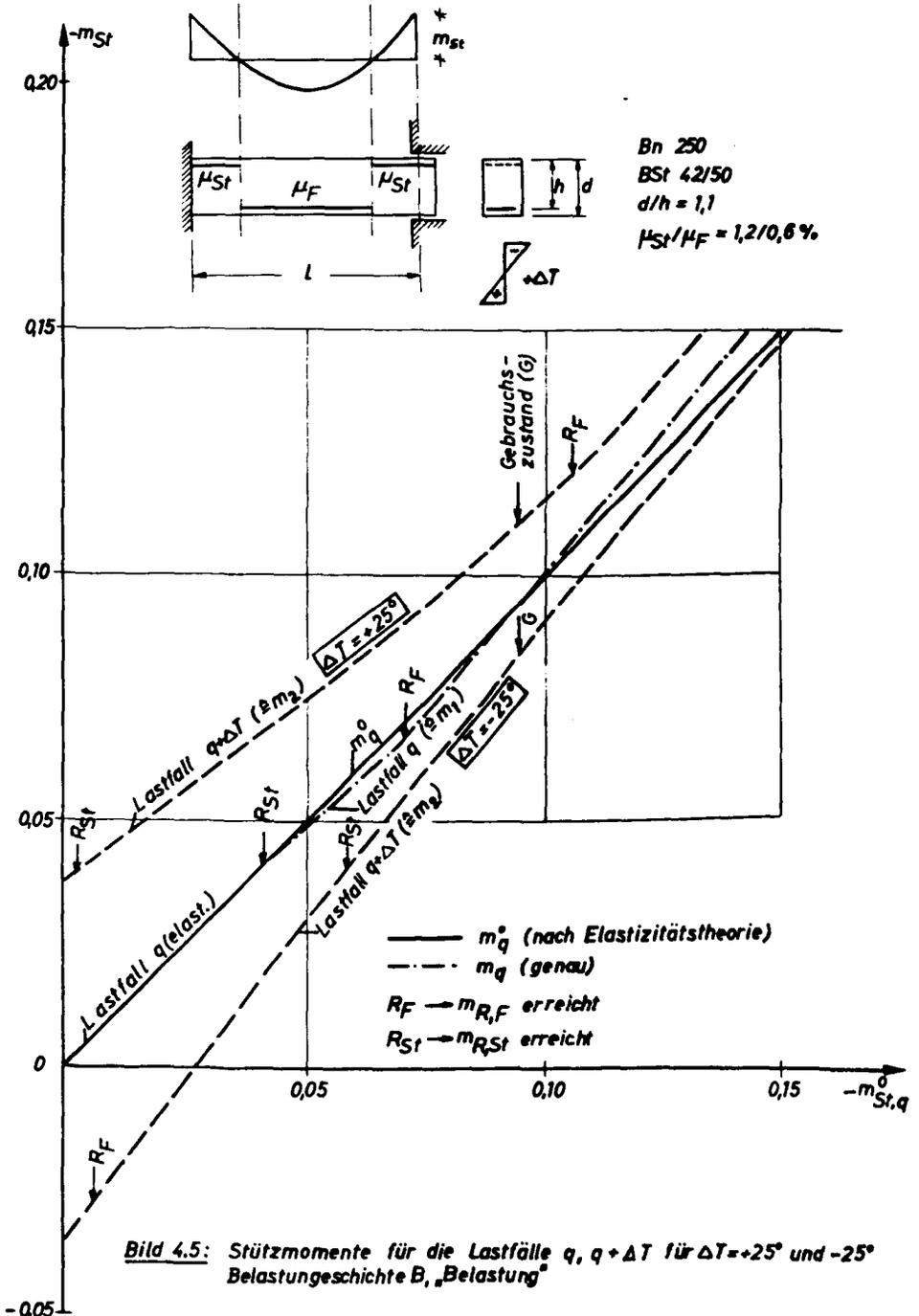
Die Schnittkräfte für die Teilbelastung  $q_1 + z$  sind identisch mit den nach dem Belastungsansatz B für diesen Lastfall berechneten Werten. Für die Gesamtbelastung  $q + z$  ist kennzeichnend, daß die gesamte äußere Last  $q$  noch nicht in voller Größe auf den Träger eingewirkt hat, wie dies beim Belastungsansatz B der Fall gewesen wäre. Andererseits können in den einzelnen Laststufen im Gegensatz zur Belastungsfolge A örtlich größere Belastungen auftreten als im Endzustand. Die Steifigkeitsverteilung des Trägers liegt somit zwischen denen der nach den Belastungsansätzen A und B berechneten Träger. Zur Bestimmung der Schnittkräfte aus voller äußerer Last  $q$  ist ausgehend von der Gesamtbelastung eine Entlastung der Zwangsbeanspruchung oder aber eine erneute Belastung mit  $q$  allein notwendig. Der Rechenaufwand ist für diesen Lastfall wesent-

lich höher, da bei jedem Belastungsvorgang ein zusätzlicher Lastfall berücksichtigt werden muß. Daher soll zunächst geprüft werden, zu welchen Ergebnissen die Ansätze A und B führen. Nur wenn diese stark voneinander abweichen, wird eine Berücksichtigung des Ansatzes D notwendig.

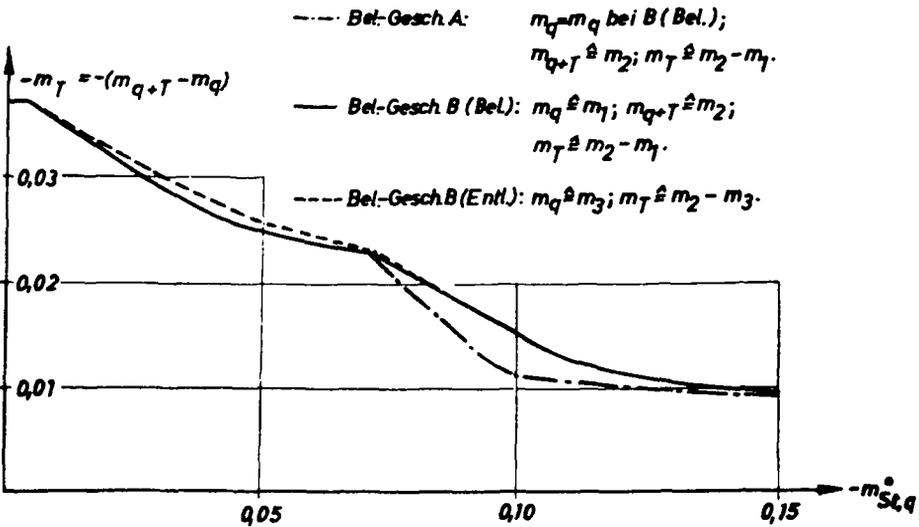
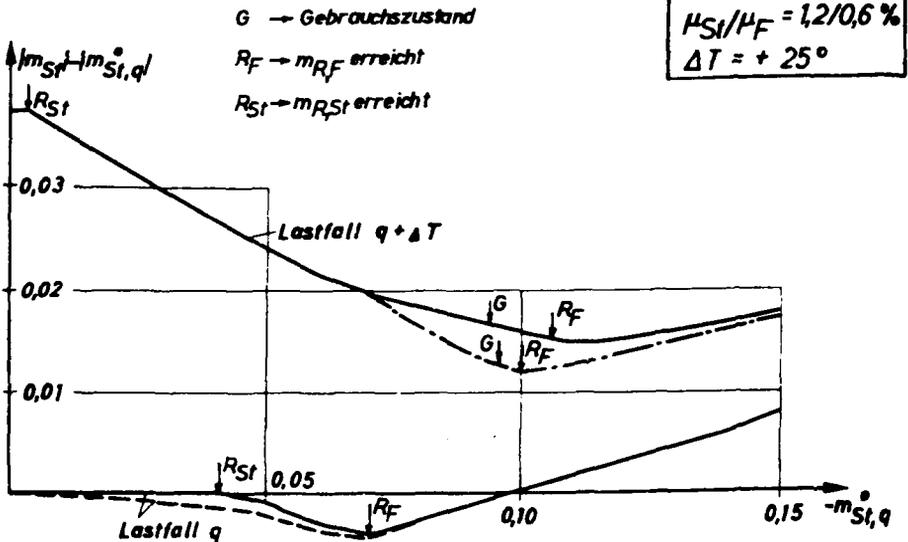
#### 4.3 Ergebnisse der nach den Belastungsfolgen A und B berechneten Beispiele

Um den Einfluß der Belastungsgeschichte näher zu untersuchen, wurden beiderseits eingespannte Träger mit unterschiedlichen Bewehrungsgehalten berechnet. Die Bewehrung wurde im Feld- und Stützenbereich der nach der Elastizitätstheorie sich ergebenden Momentenverteilung entsprechend durchgehend konstant im Verhältnis  $M_{St}/M_F = 2/1$  verteilt angeordnet. Zu jeder untersuchten Zwangbeanspruchung wurden die Schnittgrößenverteilungen für verschiedene äußere Lasten, die bei Null beginnend stufenweise erhöht wurden, ermittelt. Der Träger wurde zu jeder Laststufe von  $q$  nach den Belastungsansätzen A und B be- bzw. entlastet, wobei eine gegenseitige Beeinflussung der Schnittgrößen aus den einzelnen Laststufen von  $q$  nicht berücksichtigt wurde.

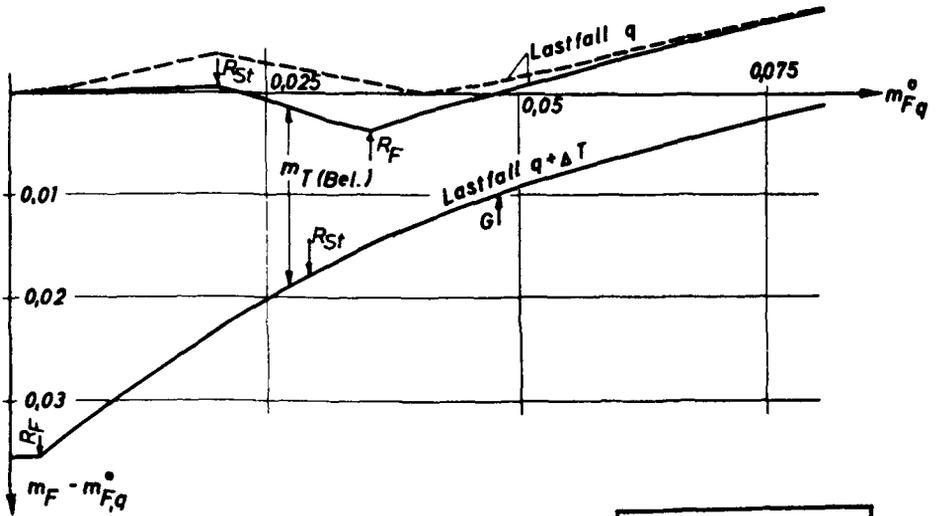
Die Stützmomente für die Lastfälle  $q$  und  $q + \Delta T$  für  $\Delta T = +25^\circ$  und  $-25^\circ$  eines ausgewählten nach der Belastungsfolge B belasteten Balkens sind in Bild 4.5 über dem elastisch ermittelten Stützmoment  $m_{St,q}^0$  aus der äußeren Belastung  $q$  aufgetragen. Um die Unterschiede der einzelnen Belastungsansätze deutlicher hervorzuheben, sind in Bild 4.6 und 4.7 die Differenzen aus den Stütz- bzw. Feldmomenten des jeweils betrachteten



Bn 250  
 BS1 42/50  
 d/h = 1,1  
 $\mu_{SI}/\mu_F = 1,2/0,6\%$   
 $\Delta T = +25^\circ$

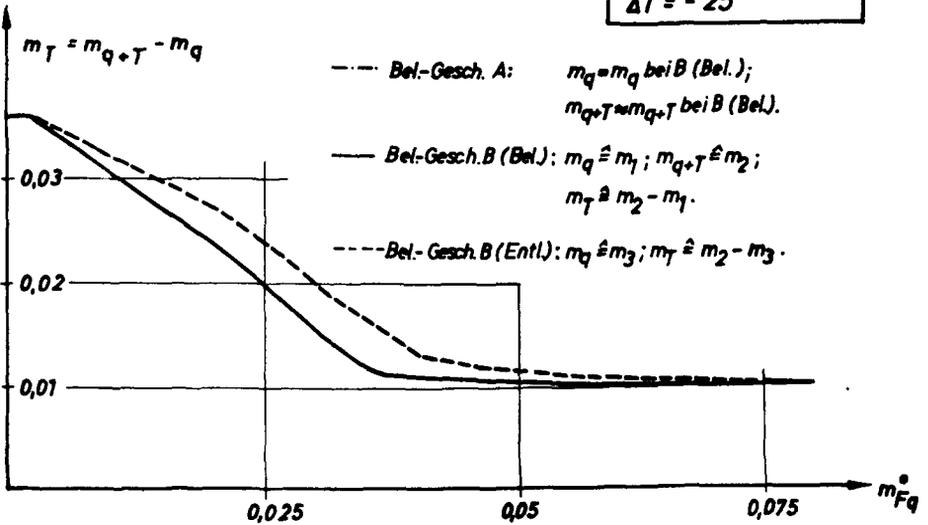


**Bild 4.6:** Einfluß der Belastungsgeschichten A und B auf die Stützmomente aus q und q + ΔT bei ΔT = +25°



G → Gebrauchszustand  
 $R_F \rightarrow m_{R,F}$  erreicht  
 $R_{St} \rightarrow m_{R,St}$  erreicht

Bn 250  
 BS1 42/50  
 $d/h = 1,1$   
 $\mu_{St}/\mu_F = 1,2/0,6 \%$   
 $\Delta T = -25^\circ$



--- Bel-Gesch. A:  $m_q = m_q$  bei B (Bel.);  
 $m_{q+\Delta T} = m_{q+\Delta T}$  bei B (Bel.).  
 — Bel-Gesch. B (Bel.):  $m_q \hat{=} m_1$ ;  $m_{q+\Delta T} \hat{=} m_2$ ;  
 $m_T \hat{=} m_2 - m_1$ .  
 --- Bel-Gesch. B (Entl.):  $m_q \hat{=} m_3$ ;  $m_T \hat{=} m_2 - m_3$ .

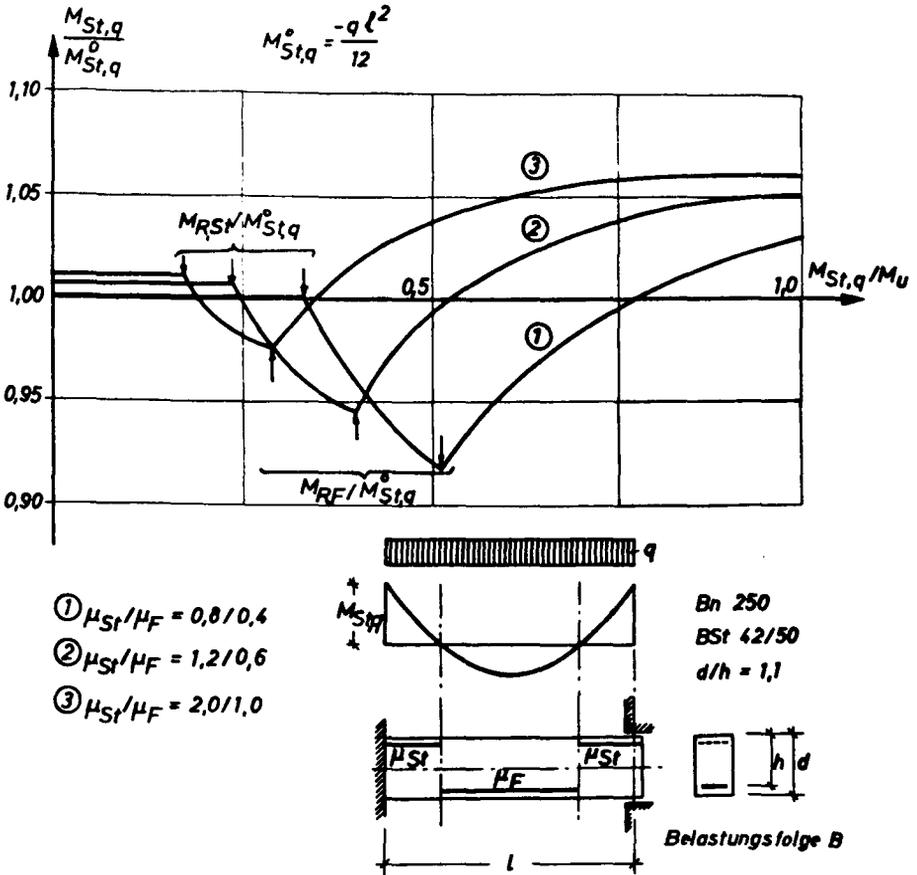
**Bild 4.7:** Einfluß der Belastungsgeschichten A und B auf die Feldmomente aus  $q$  und  $q + \Delta T$  bei  $\Delta T = -25^\circ$

Lastfalls und zugehörigen elastisch ermittelten Momenten aus dem Lastfall  $q$  wiedergegeben, was einer Darstellung der aus Bild 4.5 ersichtlichen Zusammenhänge in einem schiefwinkligen Koordinatensystem entspricht. Der Berechnungsvorgang wird in Abschnitt 5 genauer beschrieben.

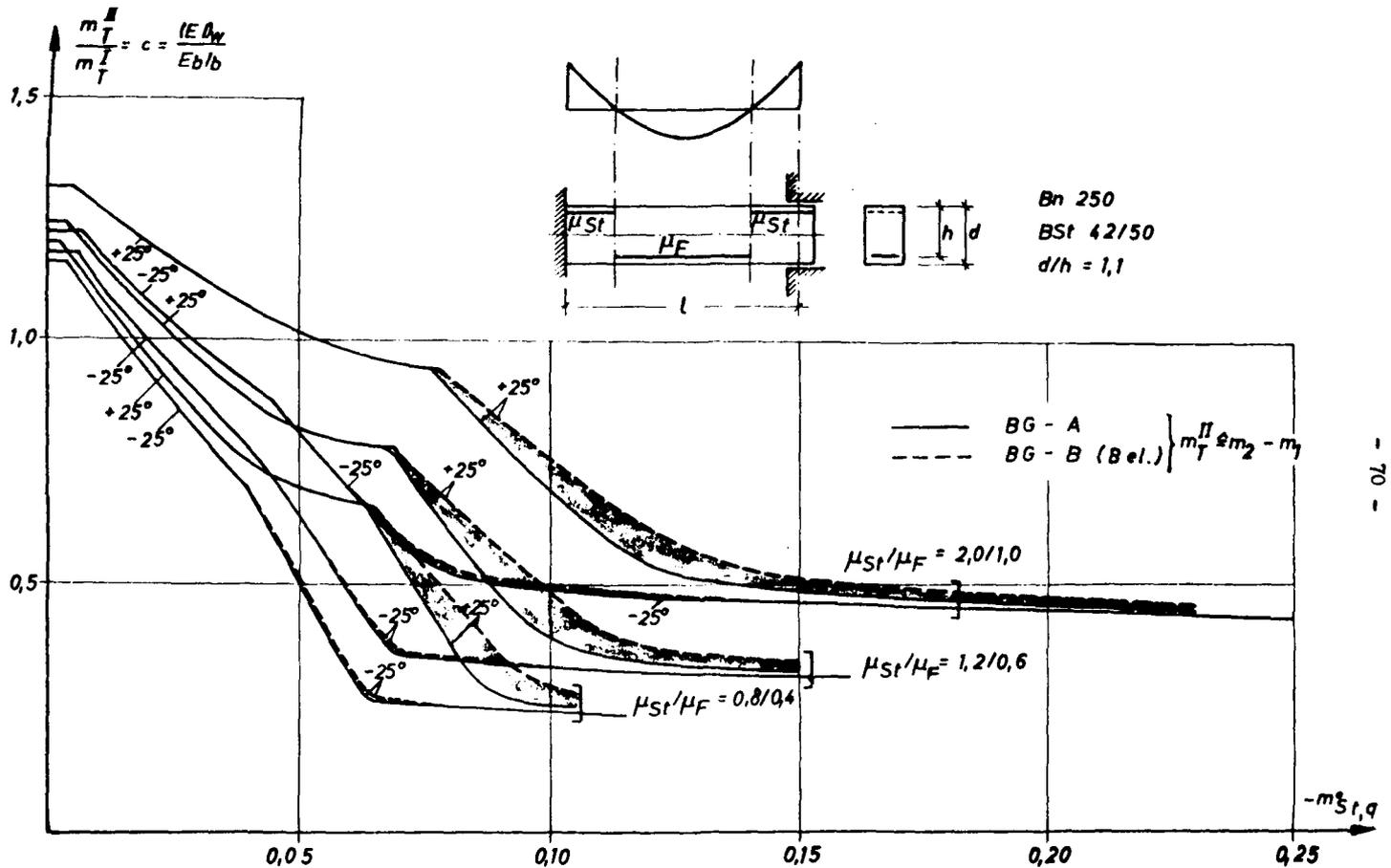
Bei einer Belastung dieses Trägers allein durch äußere Last  $q$  ist bis zum Erreichen des Rißmomentes im Stützenbereich kein Unterschied zum elastisch ermittelten Momentenverlauf zu erkennen. Erst bei stärker bewehrten Balken wird das Stützmoment infolge des höheren Bewehrungsgehaltes geringfügig vergrößert, wie aus Bild 4.8 ersichtlich ist. Nach dem Überschreiten des Rißmomentes im Stützenbereich erfolgt ein Abbau des Stützmomentes und damit eine Vergrößerung des Feldmomentes gegenüber der elastisch ermittelten Momentenverteilung, bis auch im Feld Stadium II erreicht wird. Durch die infolge höheren Bewehrungsgehaltes größeren Steifigkeiten im Stützenbereich für Zustand II findet eine Rückumlagerung zur Stütze hin statt. Die in Bild 4.8 wiedergegebenen prozentualen Abweichungen der genauen Einspannmomente aus Lastfall  $q$  von den elastisch ermittelten Werten zeigt, daß die Umlagerungen vor dem Auftreten des Zustandes II im Feld mit wachsendem Bewehrungsgehalt abnehmen. Dagegen zeigen die Umlagerungen zum Stützmoment hin eine mit höherem Bewehrungsgehalt zunehmende Tendenz.

Bei einer Zwangbeanspruchung durch einen positiven Temperaturgradienten  $\Delta T = +25^{\circ}$ , die nach der Belastungsfolge A einwirkt, tritt infolge ihrer entlastenden Wirkung im Feld das Rißmoment hier erst bei einer höheren Belastung  $q$  auf als unter dem Lastfall  $q$  allein (vgl. Bild 4.6). Da die Rißbildung aus dem Last-

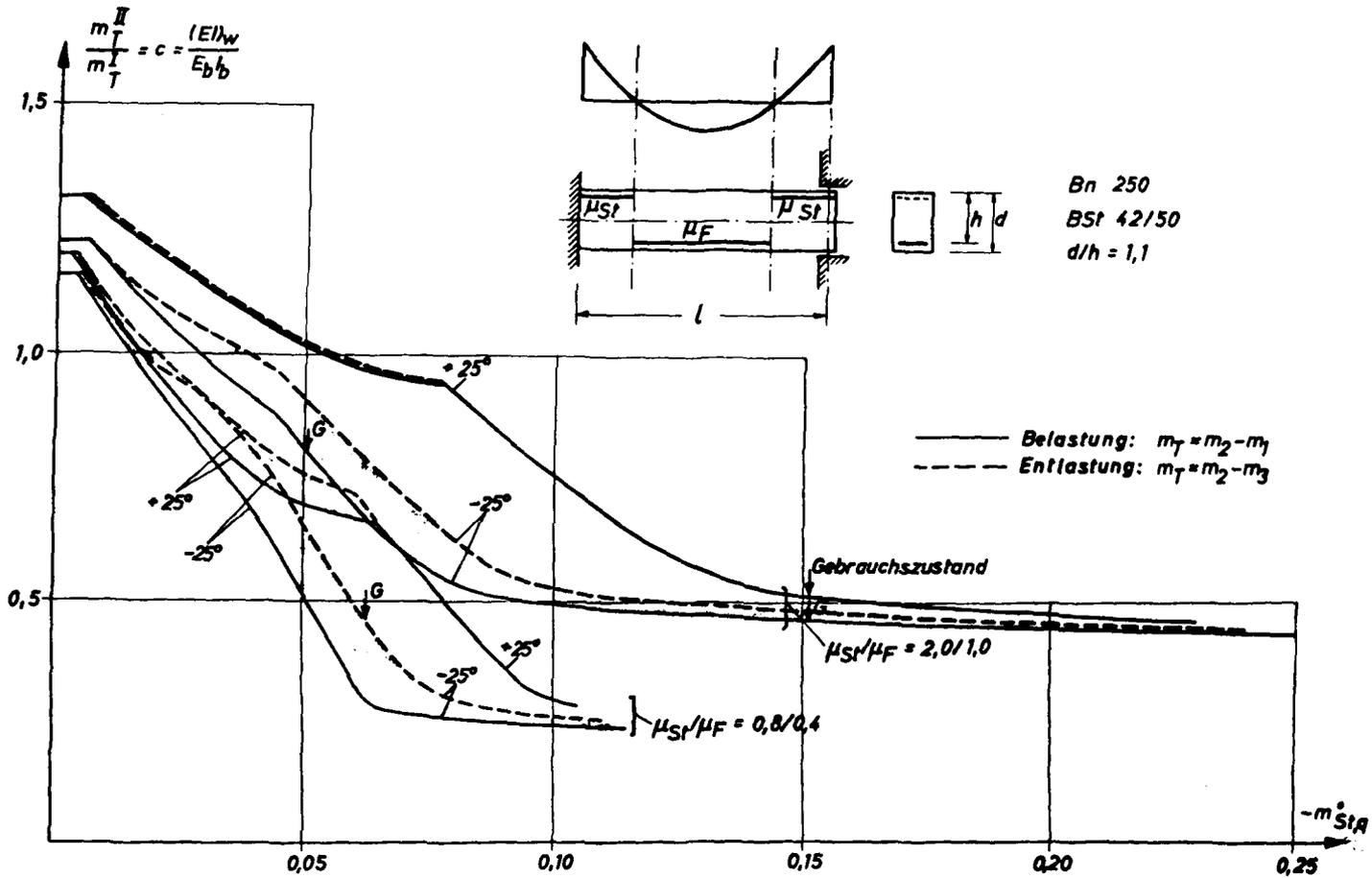
fall  $q$  im Feldbereich beim Lastfall  $q + \Delta T$  nicht berücksichtigt wird, findet eine Umlagerung der Momentenfläche zum noch ungerissenen und damit steiferen



**Bild 4.8:** Vergleich der genau ermittelten Momente aus Lastfall  $q$  mit den nach der Elastizitätstheorie berechneten Werten



**Bild 4.9:** Zwangmomente infolge  $\Delta T$  nach Belastungsgeschichte A und B



**Bild 4.10:** Verlauf der aus Be- und Entlastung gewonnenen Zwangmomente infolge  $\Delta T$  (Bel-Gesch.B)

Feldbereich hin statt. In diesem Bereich sind die Stützmente aus Lastfall  $q + \Delta T$  deutlich kleiner als die entsprechenden nach der Belastungsfolge B berechneten Momente, die unter Berücksichtigung der Ribbildung aus dem Lastfall  $q$  im Feldbereich ermittelt wurden. Dies widerspricht den ursprünglichen Erwartungen, nach denen hier auf Grund der größeren Steifigkeiten im Feldbereich unter der Gesamtbeanspruchung  $q + \Delta T$  mit dem Auftreten von Maximalwerten für die Schnittgrößen gerechnet wurde. Bei allen behandelten Beispielen zeigte sich aber, daß sich die durch die z.T. extremen Steifigkeitsverteilungen bedingten Schnittkraftumlagerungen so stark auswirken, daß die Beanspruchung unter den nach Belastungsfolge B errechneten Werten bleibt, was auch aus der Zusammenstellung der nach Lastfolge A und B ermittelten Zwangsmomente nach Bild 4.9 hervorgeht. Nach Erreichen des Ribmomentes im Feld gleicht sich der Verlauf der beiden nach A und B berechneten Kurven für die Stützmente wieder weitgehend an. Eine Entlastung der Zwangeinwirkung des nach dem Belastungsansatz B belasteten Balkens führt nur in dem Bereich zu geringen Umlagerungen, wo unter positivem Moment bei der Erstbelastung aus  $q$  noch Stadium I herrschte (vgl. Bild 4.10).

Bei einem negativen Temperaturgradienten  $\Delta T = -25^{\circ}$  (vgl. Bild 4.7) ergeben sich bei Belastung für die nach den Belastungsansätzen A und B gewonnenen Schnittkräfte keine merklichen Unterschiede. Bei der Entlastung wird das Feldmoment aus dem Lastfall  $q$  kleiner als bei Erstbelastung, da sich infolge der Ribbildung im Feldbereich unter dem Lastfall  $q + \Delta T$  die Momentenfläche zum Stützmoment hin umlagert. Diese Umlagerung ist dann besonders groß, wenn unter dem Lastfall  $q$  im Feldbereich noch Stadium I herrscht, un-

ter der Gesamtbelastung  $q + \Delta T$  aber Stadium II erreicht wird. Bei Entlastung der Zwangbeanspruchung treten keine wesentlichen Verschiebungen der gerissenen und ungerissenen Bereiche auf. Demzufolge liefert die Differenz der Momente aus dem Lastfall  $q + \Delta T$  und dem durch Entlastung um  $\Delta T$  gewonnenen Lastfall  $q$  einen Wert für das Zwangmoment, der weitgehend frei von Einflüssen aus den Umlagerungen ist. Die Unterschiede der durch Be- und Entlastung gewonnenen Ergebnisse für die Zwangmomente nehmen mit steigender Lastbeanspruchung  $q$  ab. Bei höheren Bewehrungsprozentansätzen sind unter Gebrauchslast keine nennenswerten Unterschiede mehr festzustellen (vgl. Bild 4.10).

Für die durchzuführenden Berechnungen wurde die Belastungsfolge B gewählt. Mit ihr erhält man die größten Beanspruchungen, und der Einfluß der Schnittkraftumlagerungen kann gut erfaßt werden. Wegen der geringen Abweichungen der nach den Belastungsansätzen A und B gewonnenen Ergebnisse erscheint es nicht notwendig, den mit größerem Rechenaufwand verbundenen Ansatz D zu berücksichtigen.

5. Zwangbeanspruchung infolge eines Temperaturgradienten am beiderseits starr eingespannten, in Längsrichtung verschieblichen Träger

5.1 Darstellung des Berechnungsvorgangs

Beim beiderseits starr eingespannten Träger unter symmetrischer Belastung können die Schnittgrößen allein mit Gl. (2.15) aus der Bedingung  $\varphi_{ges} = 0$  bestimmt werden. Aus dieser folgt für starre Einspannung:

$$\int_0^1 \mathcal{E}_K(\xi) \cdot h \cdot d\xi + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{d/h} = 0 \quad (5.1)$$

Das Problem kann somit unabhängig von der Stützweite behandelt werden. Bei Rechteckquerschnitte geht nur das Verhältnis der Querschnittshöhe zur Nutzhöhe in die Rechnung ein; es wird mit  $d/h = 1,1$  angenommen. Anstelle der äußeren Belastung  $q$  wird das zugehörige Größtmoment am statisch bestimmten Träger als bezogene Größe  $m_{F,0}$  eingeführt. Die zugehörige Gleichlast beträgt bei einer vorgegebenen Stützweite:

$$q = m_{F,0} \cdot b \cdot h^2 \cdot \beta_{wN} \frac{8}{\ell^2} \quad (5.2)$$

Das Zwangmoment wird als Differenz der Momente aus den Lastfällen  $q + \Delta T$  und  $q$  (vgl. Bild 5.1) bestimmt (vgl. Abschnitt 4.1):

$$m_T = m_{q+\Delta T} - m_q \quad (5.3)$$

Zur Berechnung der Momentenfläche aus einer vorgegebenen Belastung wird zunächst der Momentenverlauf des statisch unbestimmten Systems geschätzt. Nach Ermittlung der zugehörigen Krümmungen wird am statisch be-

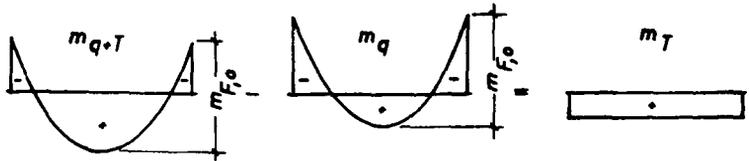


Bild 5.1: Ermittlung des Zwangmomentes

stimmten Grundsystem die Endverdrehung des Trägers berechnet. Dieser läßt sich ein Temperaturgradient  $\Delta T_1$  zuordnen, bei dessen Auftreten Gl.(5.1) erfüllt wäre:

$$\Delta T_1 = \frac{d/h}{\alpha_T} \cdot \int_0^1 \mathcal{K}_M(\xi) \cdot h \cdot d \xi \quad (5.4)$$

Weicht  $\Delta T_1$  vom Sollwert  $\Delta T$  ab, so muß der Rechengang mit einem erneut zu schätzenden Momentenverlauf wiederholt werden, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Der Momentenfläche für den Lastfall  $q$  ist der Sollwert  $\Delta T = 0$  zugeordnet. Die Schätzwerte für die Momentenfläche werden durch Interpolation aus den Daten vorangegangener Iterationsschritte gewonnen. Wenn dieses Verfahren nicht konvergiert, wird ein Bereich, der den Sollwert  $\Delta T$  einschließt, durch Halbieren solange eingengt, bis das Ergebnis innerhalb der vorgegebenen Genauigkeitsgrenzen liegt.

Für Zustand I läßt sich das Zwangmoment unter der Voraussetzung einer konstanten Biegesteifigkeit  $E_b I_b$  über die ganze Trägerlänge direkt ergeben:

$$m_T^I = - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{d/h} \cdot B_0 \quad (5.5)$$

Das unter Berücksichtigung des wirklichen Verformungsverhaltens ermittelte Zwangsmoment  $m_T^{II}$  kann bei Verwendung einer mittleren wirksamen Biegesteifigkeit  $(EI)_w$  in analoger Form wie für Stadium I ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 m_T^{II} &= - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{d/h} \cdot \frac{(EI)_w}{b \cdot h^3 \cdot \beta_{wN}} \\
 &= - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{d/h} \cdot \frac{(EI)_w}{\underbrace{E_b I_b}_c} \cdot \frac{E_b I_b}{\underbrace{b \cdot h^3 \cdot \beta_{wN}}_{B_o}} \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Die wirksame Steifigkeit  $(EI)_w$  ist damit so definiert, daß an einem Träger mit konstanter Biegesteifigkeit  $(EI)_w$  das gleiche Zwangsmoment  $m_T^{II}$  auftritt wie unter den wirklichen Verhältnissen. Sie ergibt sich demnach zu:

$$(EI)_w = - m_T^{II} \cdot \frac{d/h}{\alpha_T \cdot \Delta T} \cdot \frac{E_b I_b}{B_o} \quad (5.7)$$

Bezeichnet man das Verhältnis der wirksamen Steifigkeit zur Biegesteifigkeit für Zustand I mit  $c$ , so gilt nach Gl. (5.5) mit Gl. (5.6):

$$c = \frac{(EI)_w}{E_b I_b} = \frac{m_T^{II}}{m_T^I} \quad (5.8)$$

## 5.2 Darstellung der Zwangsmomente

Die Zwängungsmomente werden für Balken mit vorgegebener Bewehrung als Funktion von der äußeren Belastung  $q$  und der Zwangbeanspruchung  $\Delta T$  als Scharparameter dargestellt. Dabei wird die Last  $q$  durch Angabe des nach

der Elastizitätstheorie berechneten Stützmomentes  $m_{St,q}^0$  beschrieben. Mit

$$m_{St,q}^0 = -\frac{2}{3} \cdot m_F^0 \quad (5.9)$$

läßt sich der Zusammenhang wie folgt darstellen:

$$m_T^{II} = f(m_{St,q}^0) \quad (5.10)$$

Zur Berechnung der Zwangmomente wird die Belastung  $q$  stufenweise erhöht, wobei zu jeder Laststufe die Zwangbeanspruchung nach der Belastungsfolge B (vgl. Abschnitt 4) aufgebracht und wieder abgebaut wird. Die Laststeigerung wird solange fortgesetzt, bis eine oder mehrere Stellen des Trägers einen Dehnungszustand erreichen, durch den plastische Verformungen eingeleitet werden. Dabei können die Zwangmomente ausschlaggebend dafür sein, wo die plastischen Bereiche entstehen, vgl. auch [18]. Im Erschöpfungszustand spielen die Zwangmomente keine Rolle mehr, da sie durch die plastischen Verformungen stark abgebaut werden. Dagegen können sie das Verhalten im Gebrauchszustand spürbar beeinflussen.

### 5.3 Definition des Gebrauchszustandes

Der Gebrauchszustand wird gemäß DIN 1045 so definiert, daß die Summe aus den  $\nu_q$ -fachen Lastschnittgrößen und den  $\nu_z$ -fachen Zwangschnittgrößen die Bruchschnittgröße ergibt. Die Bruchschnittgrößen werden durch die in DIN 1045 angegebenen Grenzdehnungen festgelegt. Es werden bei allen Berechnungen  $\nu_q = 1,75$  und  $\nu_z = 1,0$  angesetzt. Auf eine Erhöhung des Sicherheitsbeiwertes

bei Stahldehnungen unter 3% wird verzichtet, da diese nur bei hohen Bewehrungsgehalten sowie bei größeren Druckkräften unterschritten werden. In diesen Fällen zeigt sich aber nur eine geringe Abhängigkeit der Zwangmomente von den Momenten infolge äußerer Belastung, so daß man bezogen auf den mit  $\nu_q = 1,75$  ermittelten Gebrauchszustand genügend genaue Ergebnisse für die Zwangmomente erhält.

Bei reiner Lastbeanspruchung kann die zum Gebrauchszustand gehörende Belastung ausgehend von den Bruchschnittgrößen direkt angegeben werden; anders dagegen bei kombinierter Beanspruchung, da die Zwangschnittgröße hier eine Funktion von der äußeren Last ist. Es gilt

$$m_G = m_{z,G}(m_G) + \frac{m_U - m_{z,G}(m_G)}{1,75}, \quad (5.11)$$

$$\text{bzw.} \quad m_G = \frac{m_U}{1,75}, \quad (5.12)$$

wenn die Zwangbeanspruchung entlastend wirkt.

Wegen der unterschiedlichen Sicherheitsbeiwerte, mit denen Schnittgrößen aus Last und Zwang bei der Bemessung berücksichtigt werden, können diese im Gebrauchszustand bei kombinierter Belastung höhere Werte annehmen als bei reiner Lastbeanspruchung. Dies hat zur Folge, daß die bisher im Gebrauchszustand üblichen Stahlspannungen regelmäßig überschritten werden. Die Begrenzung der Rißbreiten bedarf daher besonderer Sorgfalt.

Steigert man die Schnittkraft aus Gebrauchslast  $q$  auf ihren 1,75-fachen Wert, so nimmt das zugehörige Zwang-

moment weiter ab. Die wirkliche Beanspruchung ist kleiner als  $1,75 \cdot m_q + 1,0 \cdot m_{z,G}$ . Die Differenz der für den Gebrauchs- und Erschöpfungszustand ermittelten Zwangsschnittgrößen bedeutet eine zusätzliche Sicherheit, da das der Bemessung zugrunde gelegte Bruchmoment um diesen Differenzbetrag zu groß ist (vgl. Bild 5.2).

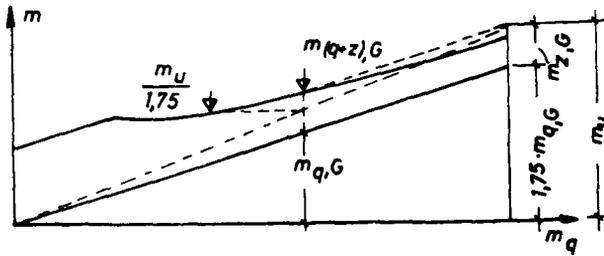


Bild 5.2: Schematischer Verlauf der Last- und Zwangsschnittgrößen bei Steigerung der Gebrauchslast  $q$  auf das 1,75-fache

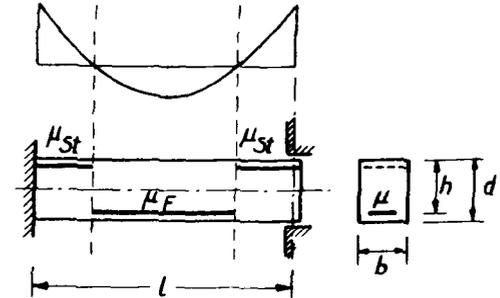
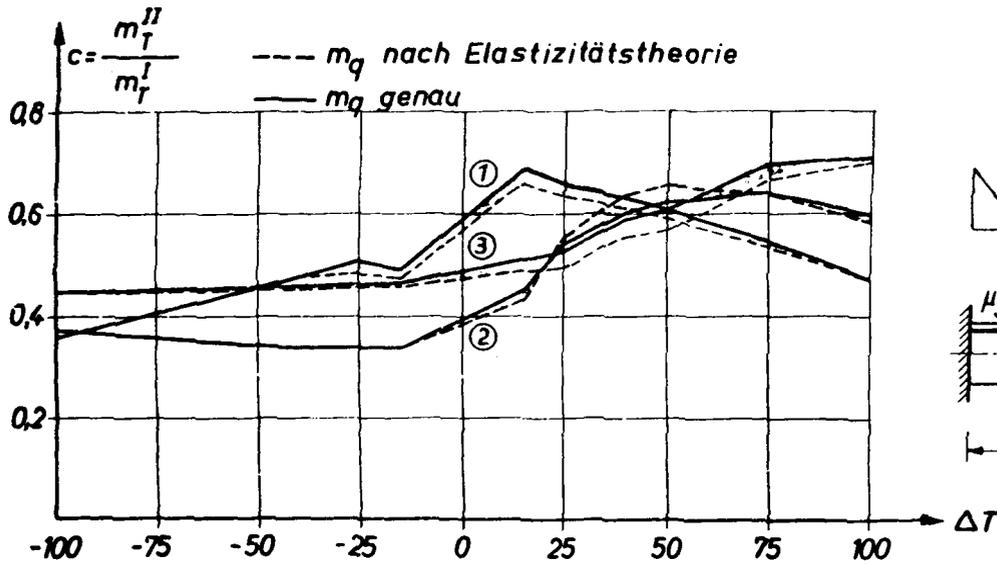
Zur Bestimmung der für den Gebrauchszustand maßgebenden Belastung werden die maximalen Momente im Feld- und Stützenbereich aus den Lastfällen  $q$  und  $q + \Delta T$  ermittelt. Der Lastfall, zu dem die kleinere äußere Last  $q$  gehört, ist maßgebend für die Festlegung des Gebrauchszustandes.

#### 5.4 Vereinfachungen zur Ermittlung der Momentenfläche aus äußerer Belastung

Zur Ermittlung der Zwangsmomente bei kombinierter Beanspruchung ist eine genaue Bestimmung des Momentenverlaufs aus dem Lastfall  $q$  erforderlich, die nur auf

iterativem Wege möglich ist. Da jedoch die Abweichungen der mit den wirklichen Steifigkeiten ermittelten Momente  $m_q$  aus Lastfall  $q$  von den nach der Elastizitätstheorie berechneten Werten i.a. kleiner als 5% ist (vgl. Bild 4.5), liegt es nahe, bei der Ermittlung von Zwangsschnittgrößen auf eine genaue Ermittlung der Lastschnittgrößen zu verzichten. Am mit  $m_q^0$  belasteten Träger nach Bild 2.2 sind unter Berücksichtigung der wirklichen Steifigkeiten die Randbedingungen zumeist nicht erfüllt. Sie sind jedoch eingehalten, wenn man fiktive Zwangbeanspruchungen  $\Delta T_0$  und  $\Delta s_0$  einführt, durch die von den Sollwerten abweichende Verformungen ausgeglichen werden. Diese fiktiven Werte sind beim Lastfall Zwang zusätzlich zu berücksichtigen, so daß die Berechnung dann für die Zwangeinwirkungen  $\Delta T + \Delta T_0$  und  $\Delta s + \Delta s_0$  erfolgt. In Bild 5.3 sind die bezogenen Zwangsschnittgrößen  $c$  infolge  $\Delta T$  für den Gebrauchszustand dargestellt. Der Träger wurde nach der Belastungsfolge B, 1. und 2. Laststufe belastet. Die Momente für den Lastfall  $q$  wurden dabei sowohl unter der Berücksichtigung der wirklichen Steifigkeiten als auch nach der Elastizitätstheorie ermittelt. Die Ergebnisse stimmen für negative  $\Delta T$  bei höheren Bewehrungsgehalten nahezu vollständig überein, während sich bei positivem  $\Delta T$  geringe Abweichungen zeigen. Diese sind auf die unterschiedliche Ausdehnung der gerissenen Feldbereiche der beiden Momentenflächen aus  $q$  zurückzuführen.

Das oben beschriebene Berechnungsverfahren läßt sich auch so deuten, daß die Momentenfläche  $m_q^0$  auf das statisch bestimmte Grundsystem nach Bild 2.2 aufgebracht wird. Der Balken kann sich dann am Auflager B frei verformen. Erst dann wird die Einspannung in B vorgenommen. Die in B "eingefrorenen" Verformungen sind bei der Formulierung der Randbedingungen zu berücksichti-



- ①  $\mu_{St}/\mu_F = 0,8/0,4\%$
- ②  $\mu_{St}/\mu_F = 1,2/0,6\%$
- ③  $\mu_{St}/\mu_F = 2,0/1,0\%$

Gebrauchszustand:

$$m_{q3} = \frac{m_U - 10 \cdot m_{T,G}}{1,75}$$

Bn 250

BSt 42/50

$d/h = 1,1$

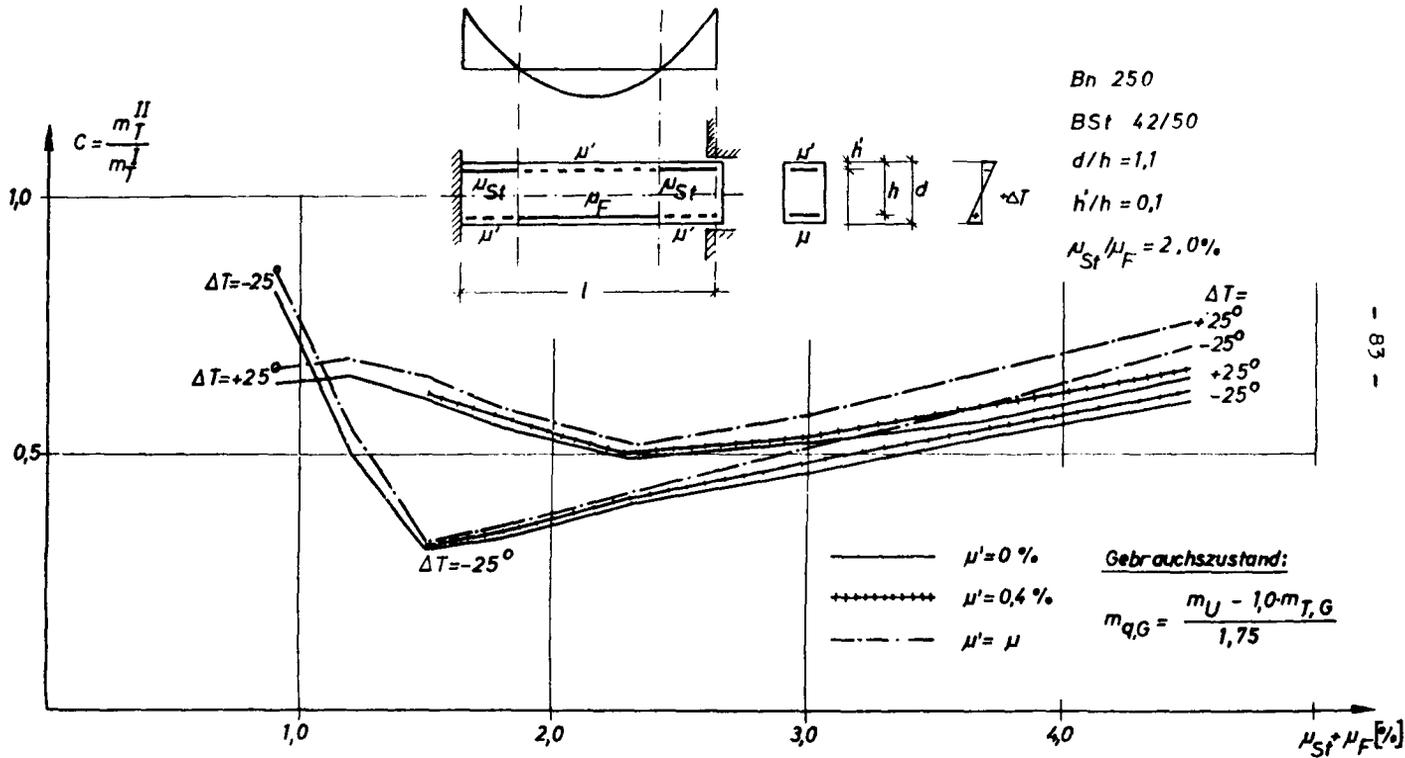
**Bild 5.3:** Zwangmomente im Gebrauchszustand bei genauer und vereinfachter Berechnung von  $m_q$

gen. Damit wird es möglich, den Einfluß von Zwangseinwirkungen bei beliebigen Momentenverteilungen aus äußerer Last zu untersuchen.

### 5.5 Bewehrungsführung

Die maximale Bewehrung im Feld- bzw. Stützenbereich wird bis zum Nullpunkt der jeweils betrachteten Momentenfläche konstant durchgeführt. Um den Einfluß der in den Nachbarbereich weitergeführten, dort als Druckbewehrung wirkenden Bewehrungsstäbe zu erfassen, wurden die Zwängungsmomente von Balken mit den Bewehrungsgehalten  $\mu' = 0,4\%$  und  $\mu' = \mu$  in der Druckzone für den Gebrauchszustand ermittelt und den Werten der entsprechenden Balken mit  $\mu' = 0$  gegenübergestellt. Die Darstellung der Ergebnisse in Bild 5.4 zeigt, daß bei geringen und mittleren Bewehrungsgehalten eine Druckbewehrung praktisch ohne Bedeutung für die Größe der Zwängungsmomente ist. Bei hohen Bewehrungsgehalten ( $\mu > 2\%$ ) wächst der Einfluß bei sehr starker Druckbewehrung, wie sie aber in der Praxis vor allem in Hinblick auf die mit DIN 1045 (neu) gesteigerte Leistungsfähigkeit der Betonbiegedruckzone künftig kaum mehr ausgeführt werden dürfte. Bei der Berechnung der Zwangsschnittgrößen wird daher bei Biegung ohne Achskraft keine Bewehrung in der Druckzone berücksichtigt.

Die Annahme konstanter Bewehrungsgehalte in den einzelnen Bereichen bedeutet eine gute Anpassung an die wirklichen Verhältnisse, wenn auch häufig eine Staffelung der Stahleinlagen entsprechend dem Zugkraftverlauf vorgenommen wird. Diese Staffelung wirkt sich nämlich meist nur in geringem Maße auf die Steifigkeit des im Zustand II befindlichen Teils des jeweiligen



**Bild 5.4:** Einfluß der Druckbewehrung auf die Zwangsmomente infolge  $\Delta T$  im Gebrauchszustand

Bereiches aus. Wegen des zunächst sehr fälligen Verlaufs der Momentenlinie im Feldbereich und des dann relativ steilen Abfalls zum Stützmoment hin, ist es praktisch kaum möglich, eine dementsprechend extreme Staffelung vorzunehmen, wie sie z.B. in [19] bei einem Balken mit linear auf Null abnehmenden Momentenverlauf mit einer durchgehenden Bewehrung zum Vergleich herangezogen wird. Die Staffelung kommt häufig erst im ungerissenen Bereich zur Geltung, wo der Einfluß der Bewehrung von untergeordneter Bedeutung ist. Die mit einer durchgehenden Bewehrung berechneten Größen der Zwangmomente liegen auf der sicheren Seite, da sich bei geringerer Bewehrung wegen der größeren Verformbarkeit kleinere Werte ergeben.

## 5.6 Auswertung der Rechenergebnisse

### 5.6.1 Übersicht über die untersuchten Parameter

#### Geometrie des Balkens

Wegen des Einflusses der Bewehrung auf die Biegesteifigkeit der gerissenen Querschnitte werden die Zwangschnittgrößen für den Gebrauchszustand in Abhängigkeit vom Bewehrungsgehalt dargestellt. Eine doppelte Bewehrung wird nur in den Fällen vorgesehen, wo eine Beanspruchung durch Normalkräfte vorliegt. Das Verhältnis  $\mu_{St}/\mu_F$  wird dem Verhältnis Stütz- zu Feldmoment aus Lastfall q angepaßt. Bei einigen ausgewählten Beispielen werden hiervon abweichende Verhältnisse untersucht. Dies gilt auch für den Wert  $d/h$ , der mit 1,1 angenommen wird.

### Werkstoffeigenschaften

Die Berechnungen werden für die Betongüten Bn 150 bis Bn 550 sowie die Baustähle BSt 42/50 und BSt 22/34 durchgeführt. Der Einfluß einer geringeren Betonzugfestigkeit wird an Balken aus Bn 250 ermittelt.

### Größe und Art der Belastung

Die Zwängungsmomente werden als Funktion von  $q$  für die Temperaturdifferenzen  $\Delta T = \pm 15^\circ, \pm 25^\circ, \pm 40^\circ$  ermittelt. Es soll sich dabei um Werte handeln, die bei normalen Verhältnissen auftreten. Der Wert  $\pm 25^\circ$  dürfte dabei kaum überschritten werden, da diese Temperaturen in voller Größe im Beton auftreten. Die umgebende Luft weist dann je nach vorhandener Isolierung eine größere Temperaturdifferenz auf. Vereinzelt werden höhere Beanspruchungen bis  $\Delta T = \pm 100^\circ$  untersucht. Normalkräfte werden als von außen einwirkende Zug- oder Druckkräfte berücksichtigt. Diese können sowohl aus Last als auch aus Zwang herrühren. Die zu einer Normalkraft gehörende Zwangeiwirkung läßt sich aus der Längsdehnung des Trägers bestimmen. Bei den berechneten Beispielen ist der Träger in der Regel starr eingespannt. Der Einfluß elastischer Einspanngrade wird in einem besonderen Abschnitt behandelt.

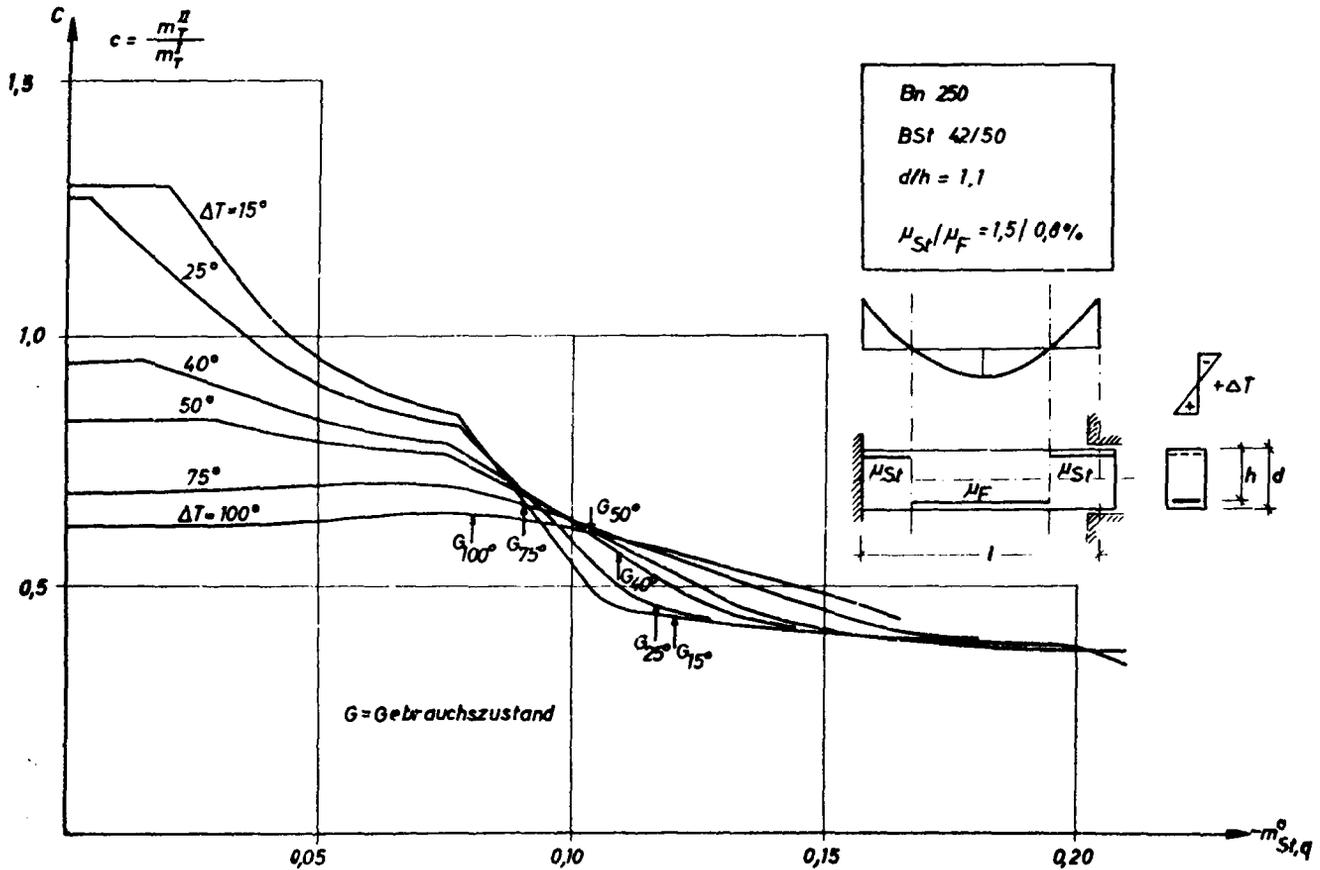
### 5.6.2 Zwangmomente infolge $\Delta T$

In Bild 5.5 und 5.6 sind die Zwängungsmomente eines Balkens mit vorgegebener Bewehrung für verschiedene Temperaturgradienten als bezogene Größe  $\sigma$  in Abhängigkeit von der äußeren Belastung dargestellt. Bei  $\Delta T = +15^\circ$  und  $+25^\circ$  befindet sich der Träger unter geringer äußerer Last noch im Stadium I. Nach der Über-

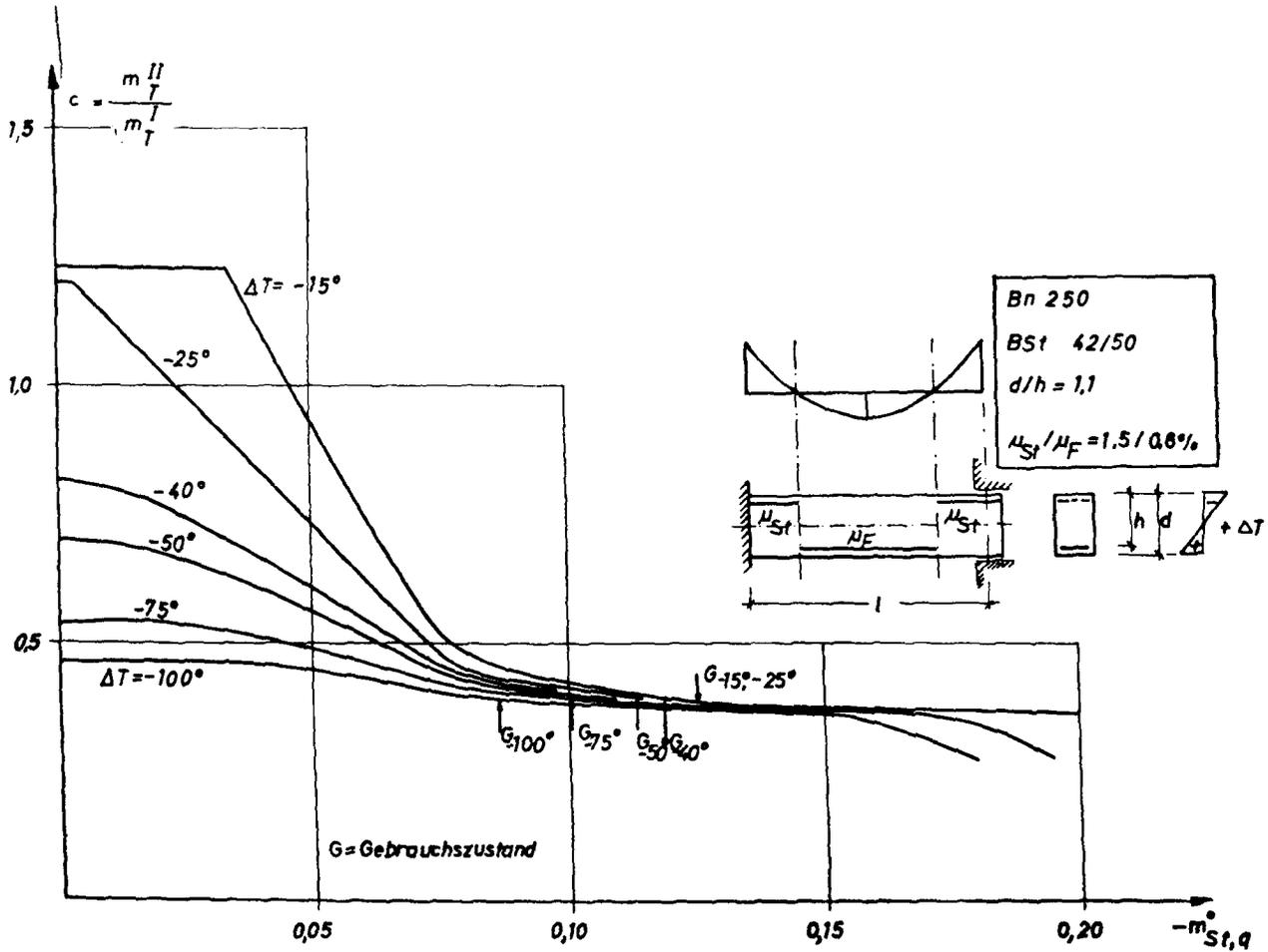
schreitung des Rißmomentes im Stützenbereich nimmt das Zwangsmoment merklich ab. Der Übergang zum Zustand II im Feldbereich führt zu einem weiteren deutlichen Abfall. Dieser wirkt sich aber erst nach Überschreitung des Gebrauchszustandes in vollem Maße aus. Bei größeren Temperaturbeanspruchungen ist unter Zwang allein das Rißmoment bereits überschritten. Der Einfluß der äußeren Last auf die Größe des Zwangsmomentes wird mit steigendem  $\Delta T$  immer geringer. Der zunächst auftretende Anstieg des Zwangsmomentes bei  $\Delta T = 75^\circ$  und  $100^\circ$  bei wachsender Last ist darauf zurückzuführen, daß bei größeren Lastmomenten noch Teile des Trägers im ungerissenen Zustand verbleiben, während sich bei Zwang allein der ganze Träger im Stadium II befindet. Je nach der Größe der Temperaturbeanspruchung nimmt das Zwangsmoment unter Gebrauchslast auf 45 bis 65 % des für Stadium I berechneten Wertes  $m_T^I$  ab.

Bei negativem  $\Delta T$  tritt ein steilerer Abfall des Zwangsmomentes ein als bei positiven Temperaturgradienten, da hier schon bei kleinen Lasten auch im Feldbereich die Rißbildung einsetzt. Bereits im Gebrauchszustand erfolgt nahezu unabhängig von  $\Delta T$  ein Abbau des Zwangsmomentes auf ca. 40 % von  $m_T^I$ . Die Rißbildung ist weitgehend abgeschlossen, da eine weitere Lasterhöhung zu keiner merklichen Abminderung der Zwangsschnittkraft mehr führt.

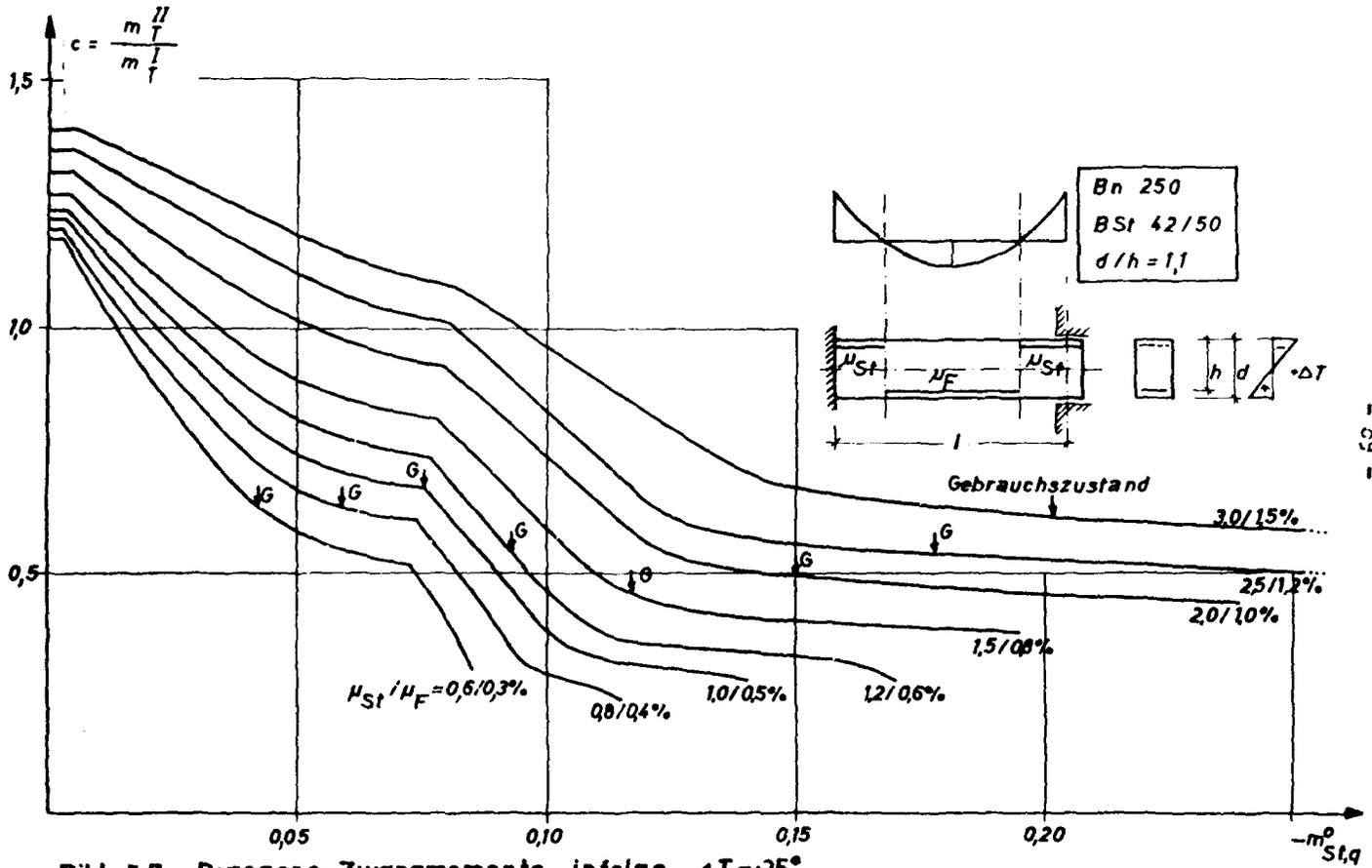
Die Darstellungen in Bild 5.7 und 5.8 zeigen die Abhängigkeit der Zwangsmomente infolge eines Temperaturgradienten von  $+25^\circ$  bzw.  $-25^\circ$  vom Bewehrungsgehalt. Diese werden umso weniger abgebaut, je höher der Bewehrungsgehalt ist. Bei schwacher Bewehrung kommt es zwar zur stärksten Abnahme der Zwangsmomente; im Gebrauchszustand dagegen macht sich die Abminderung nur



**Bild 5.5:** Bezogene Zwangmomente infolge  $\Delta T$



**Bild 56: Bezogene Zwangmomente infolge  $\Delta T$**



**Bild 5.7:** Bezogene Zwangmomente infolge  $\Delta T = -25^\circ$

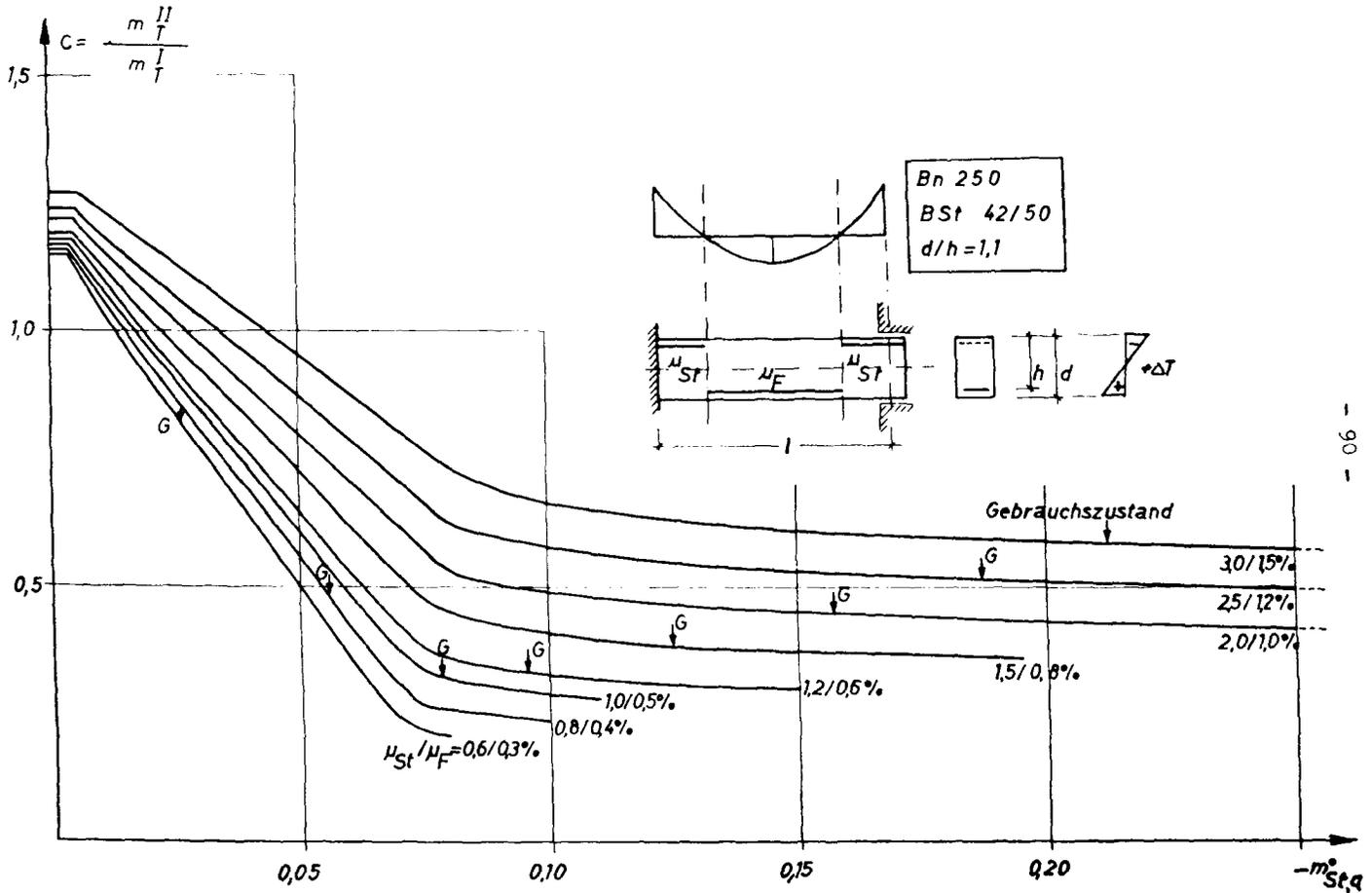


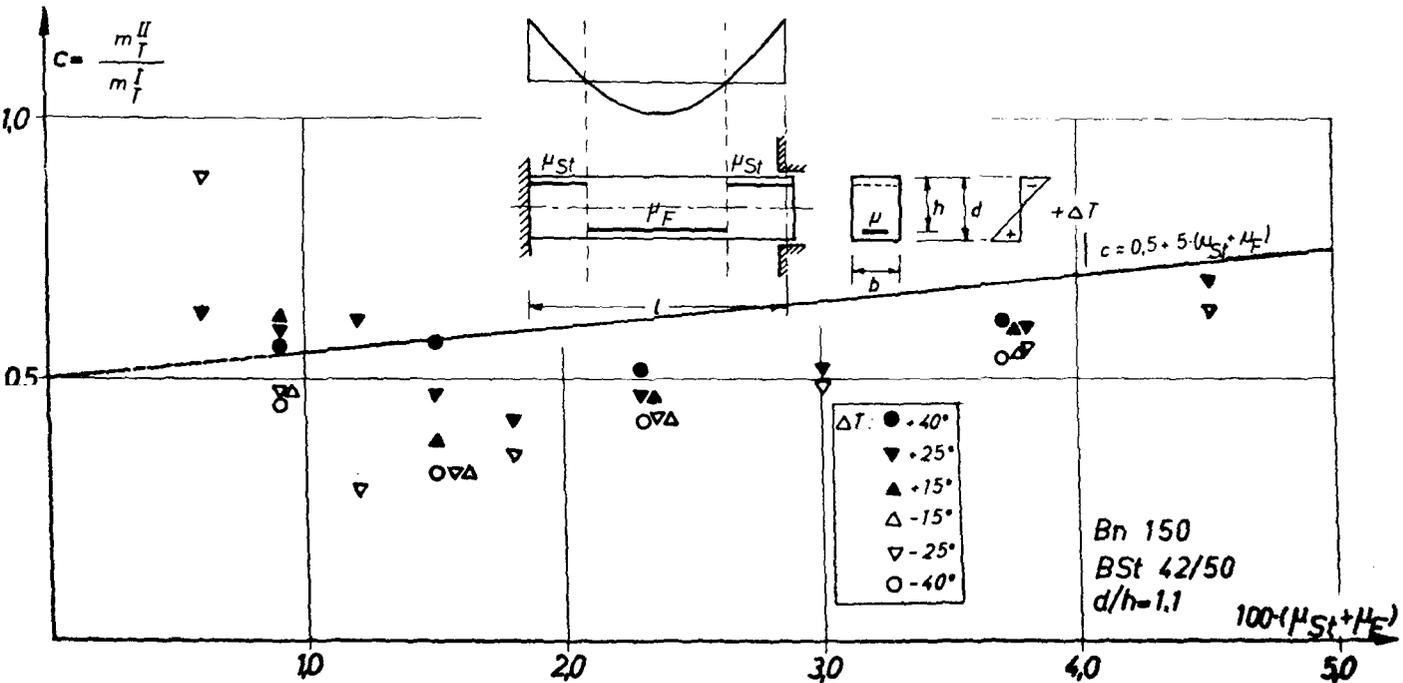
Bild 5.8: Bezogene Zwangmomente infolge  $\Delta T = -25^\circ$

wenig bemerkbar, da durch die geringen äußeren Lasten die Ribbildung noch nicht so weite Trägerbereiche erfaßt wie bei höherem Stahlgehalt.

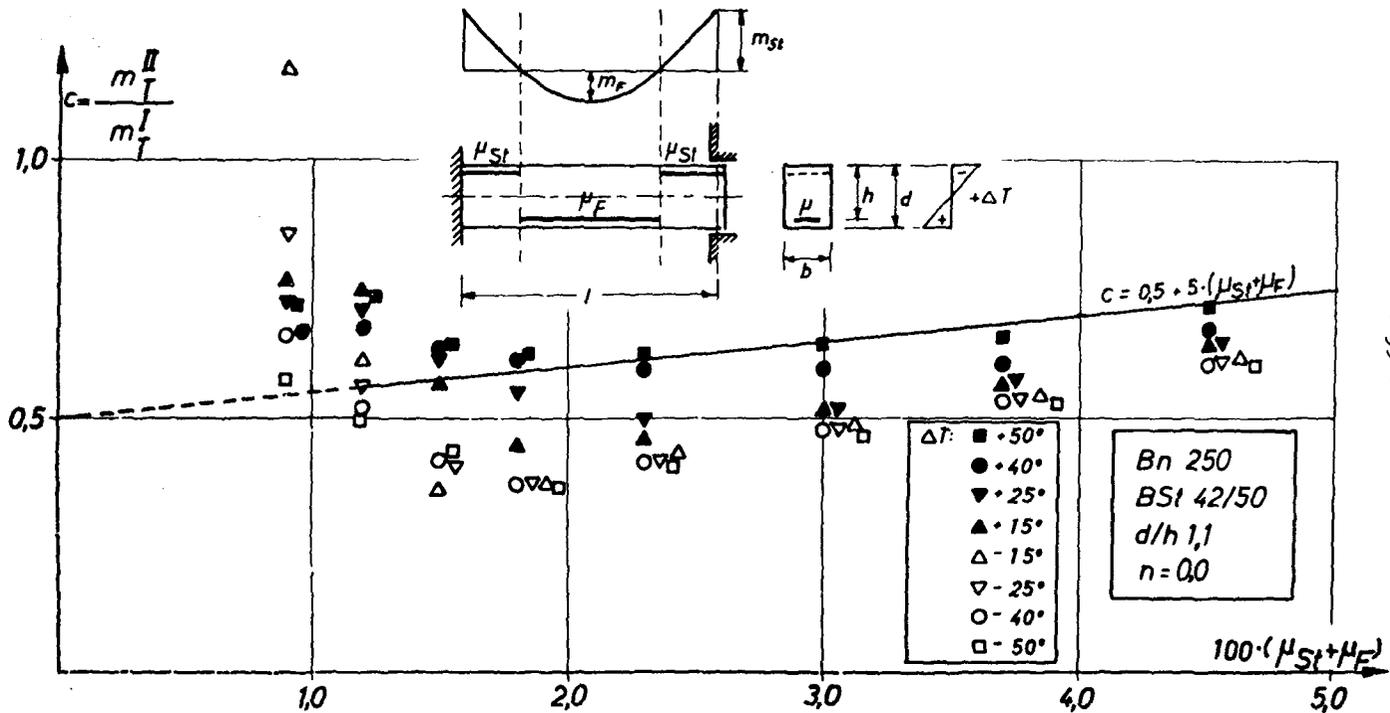
Eine Betrachtung der maximalen Schnittgrößen aus dem Lastfall  $q + \Delta T$  zeigt, daß bei geringem  $q$  zwar größere Zwangmomente auftreten können, die gesamten Schnittgrößen aber kleiner sind (vgl. z.B. Bild 4.5). Letztere nehmen mit wachsender äußerer Belastung stetig zu. Es genügt somit zur Darstellung der Zwangmomente, ihre Größe für den Gebrauchszustand anzugeben. In Bild 5.9 bis 5.13 sind die Zwangmomente im Gebrauchszustand für verschiedene Betongüten als Funktion vom Bewehrungsgehalt dargestellt. Dabei sind die Größtwerte der nach der Belastungsfolge B be- und entlasteten Träger aufgetragen. Bei allen Betongüten zeigt sich, daß bei niedrigen Bewehrungsgehalten die Zwangmomente teilweise nur eine geringe Abminderung erfahren, da hier noch weite Bereiche des Trägers im Stadium I verbleiben (s. Lage der gerechneten Punkte). Mit wachsendem Bewehrungsgehalt weisen die Zwangmomente eine zunehmende Tendenz auf.

Die mit BSt 22/34 bewehrten Träger (vgl. Bild 5.14) zeigen das gleiche Verhalten wie bei BSt 42/50. Der Gebrauchszustand wird allerdings wegen der geringen Bruchmomente schon bei kleinerer Last  $q$  erreicht. Die gerissenen Bereiche bleiben vor allem bei positiven Temperaturgradienten eng begrenzt, so daß auch bei hohen Bewehrungsgehalten in vielen Fällen keine wesentliche Abnahme der Zwangmomente erfolgt.

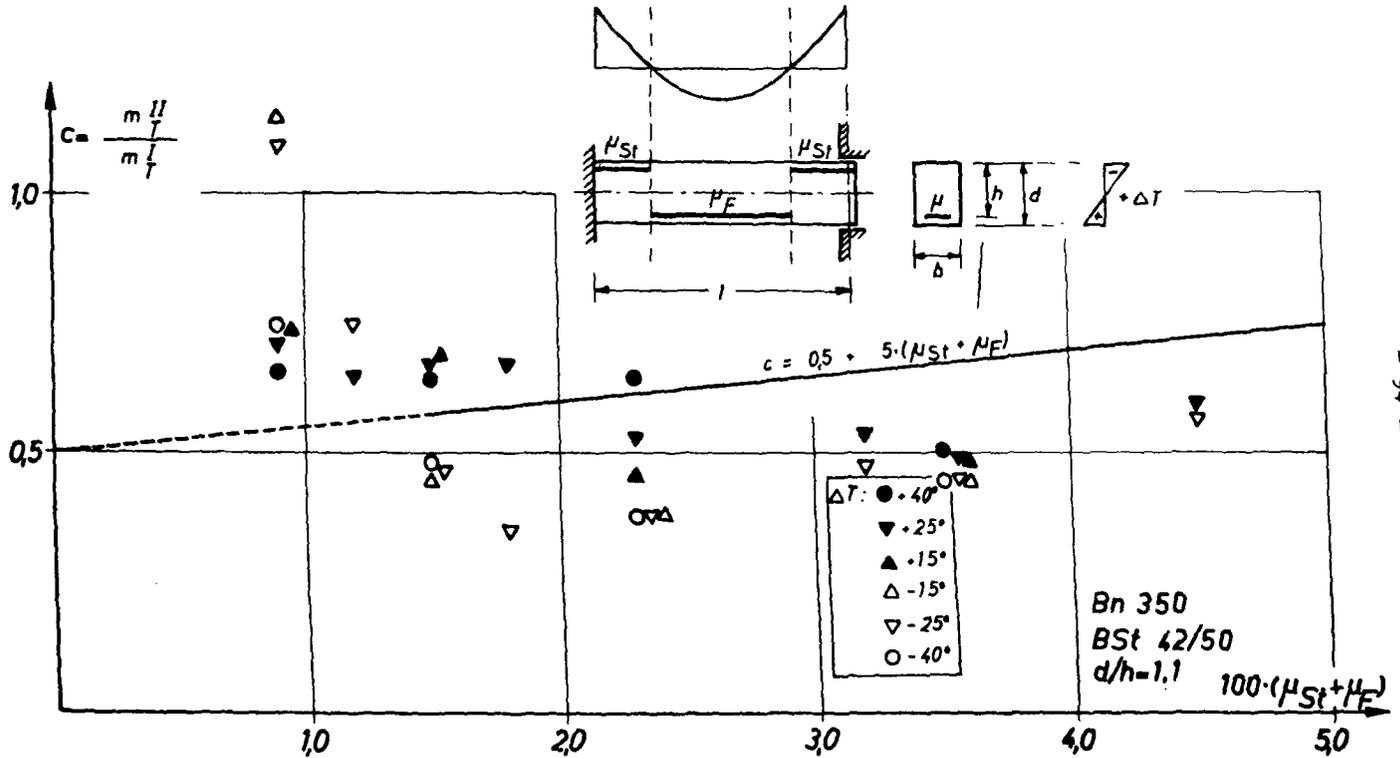
Die gedrungenen Plattenbalken nach Bild 5.15 und 5.16 verhalten sich ähnlich wie Balken mit Rechteckquerschnitt, jedoch ist das Anwachsen der Zwangmomente mit



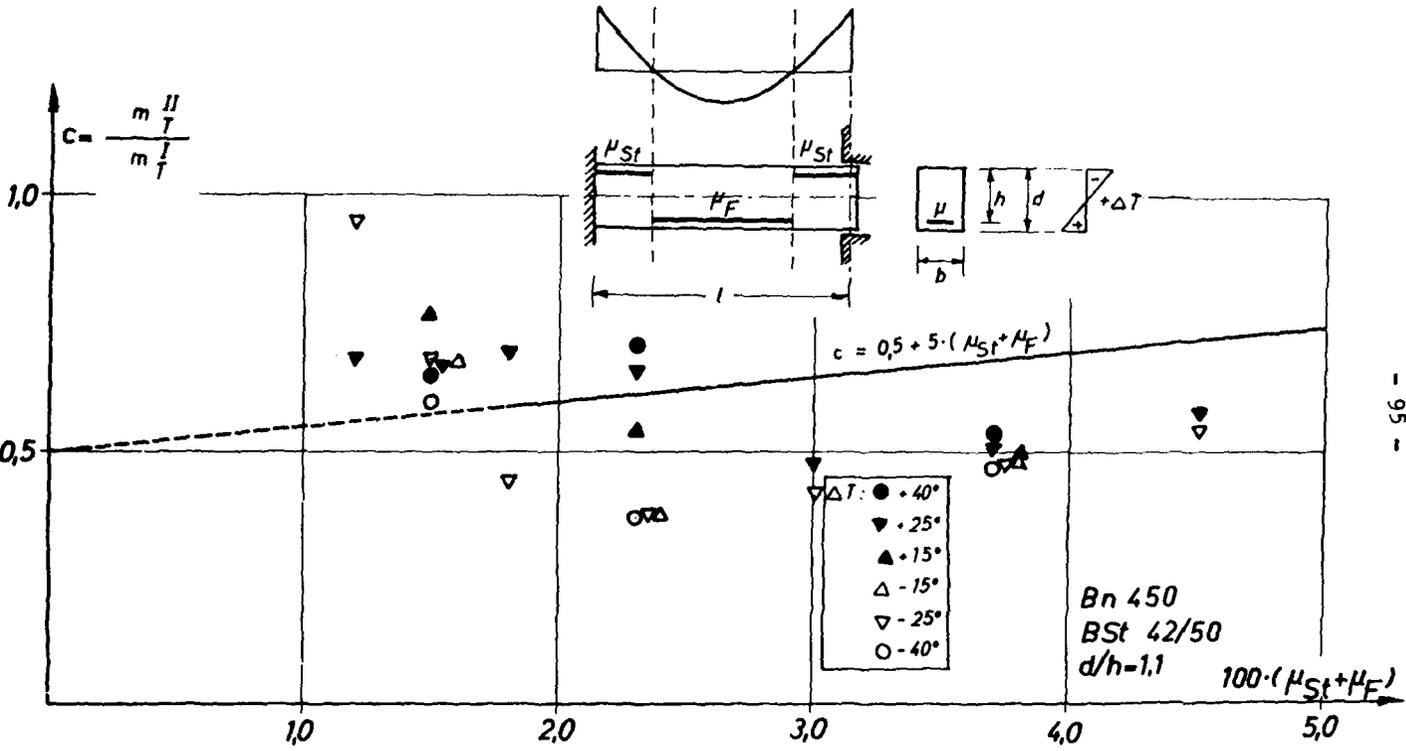
**Bild 5.9: Bezogene Zwangmomente im Gebrauchzustand**



**Bild 5.10: Bezogene Zwangmomente im Gebrauchzustand**



**Bild 5.11: Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand**



**Bild 5.12: Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand**

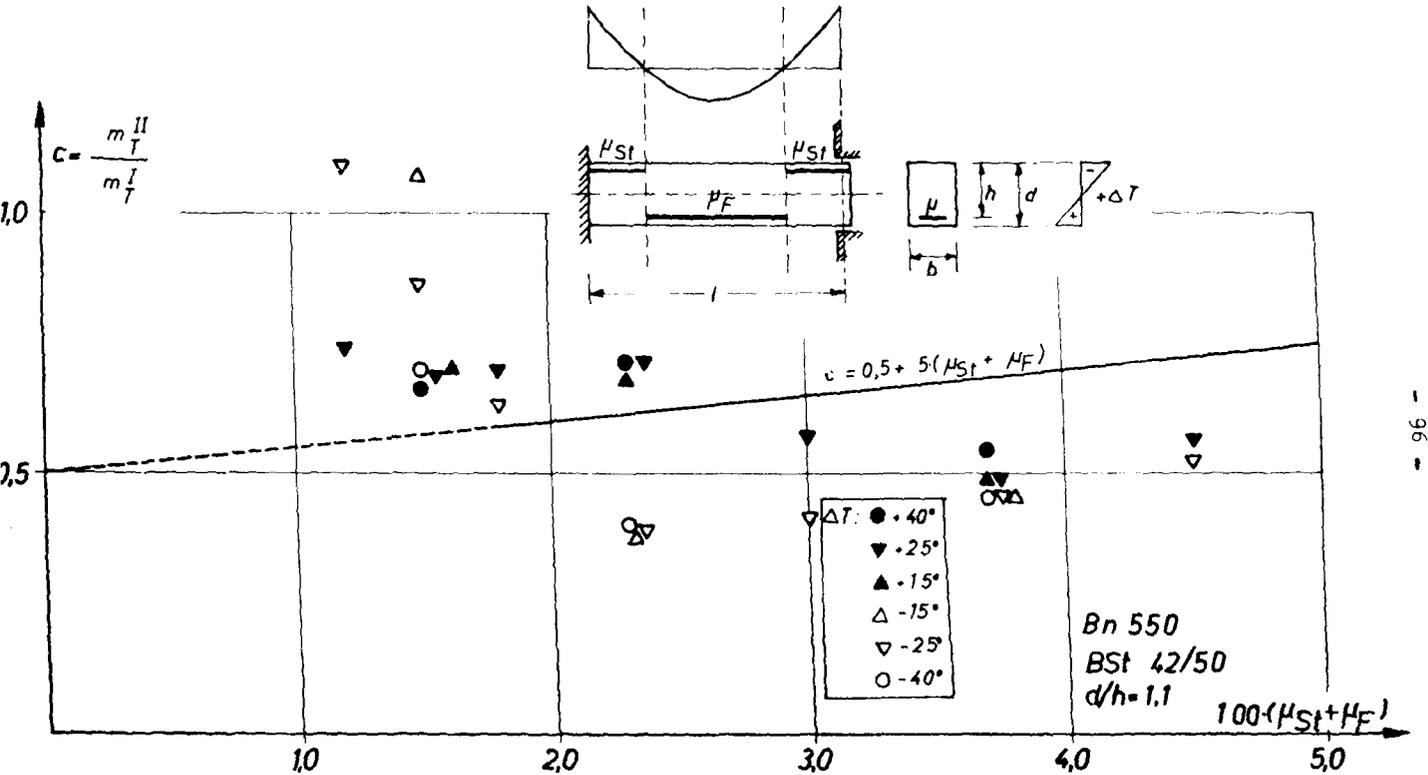
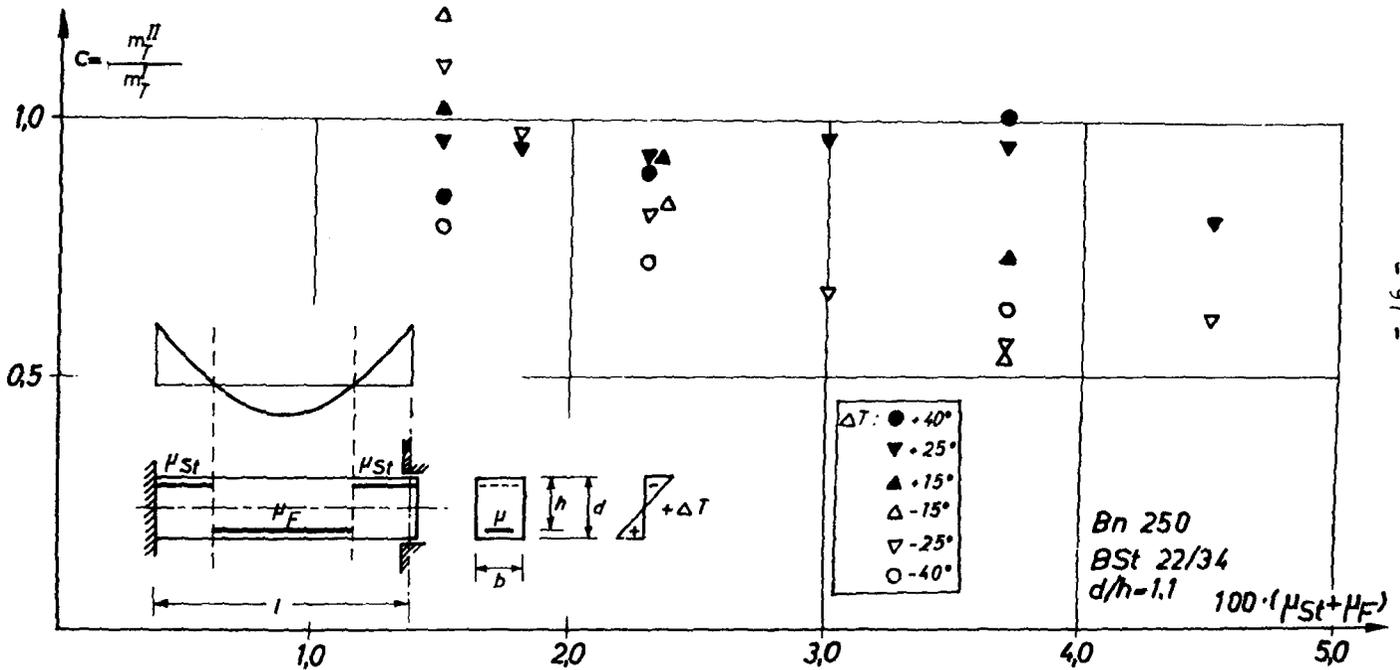
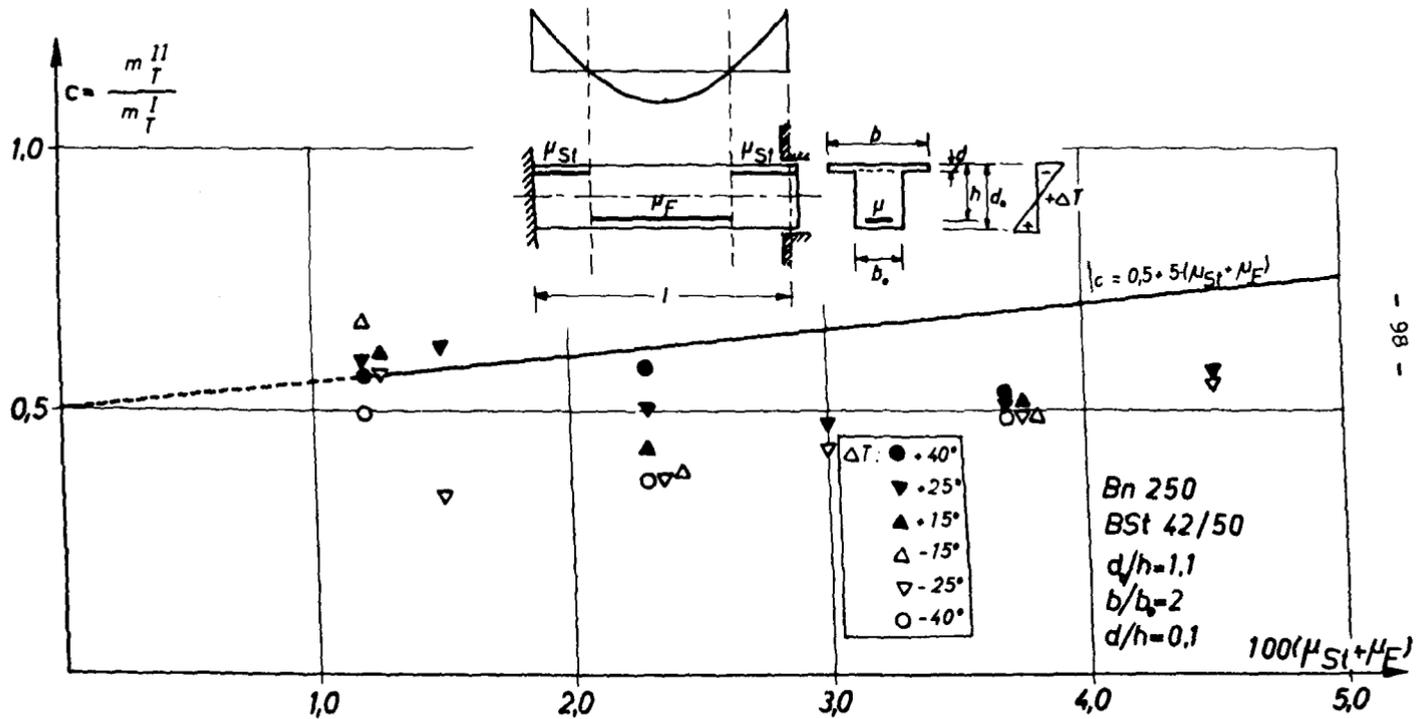


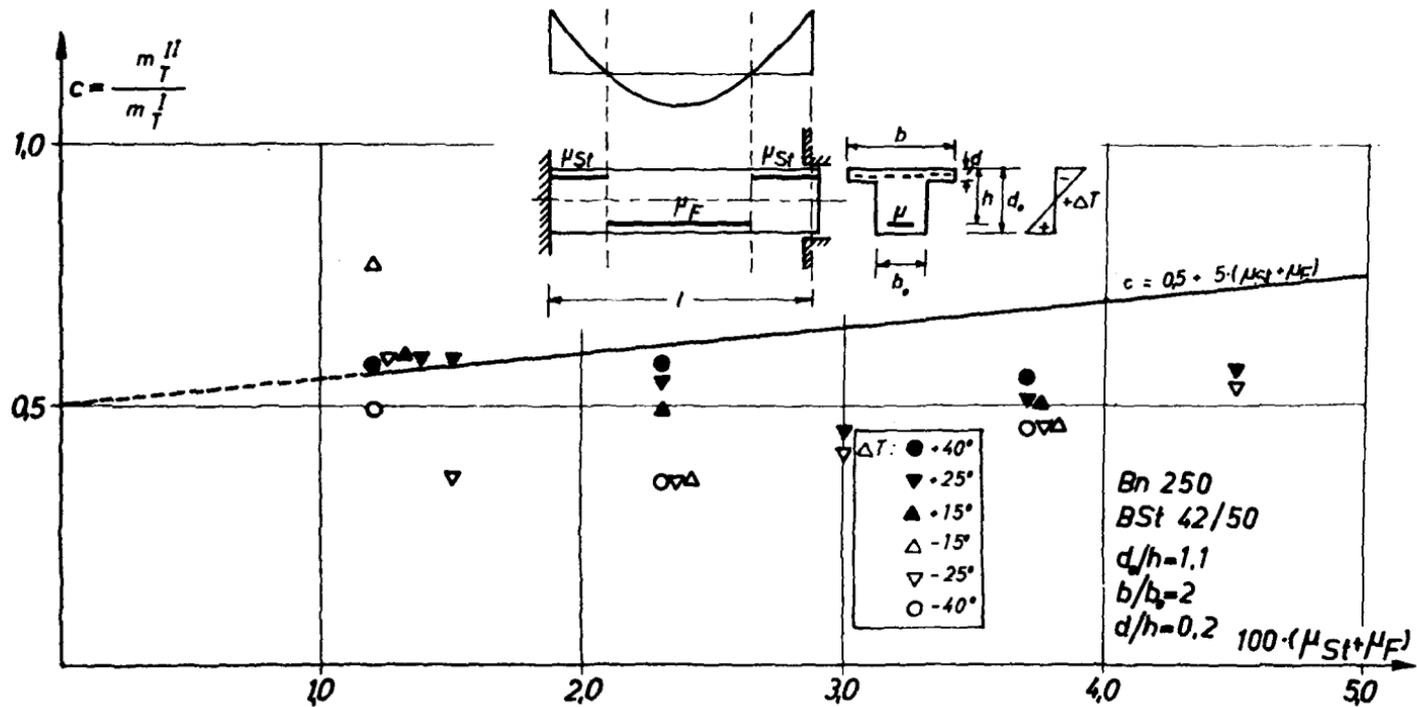
Bild 5.13 Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand



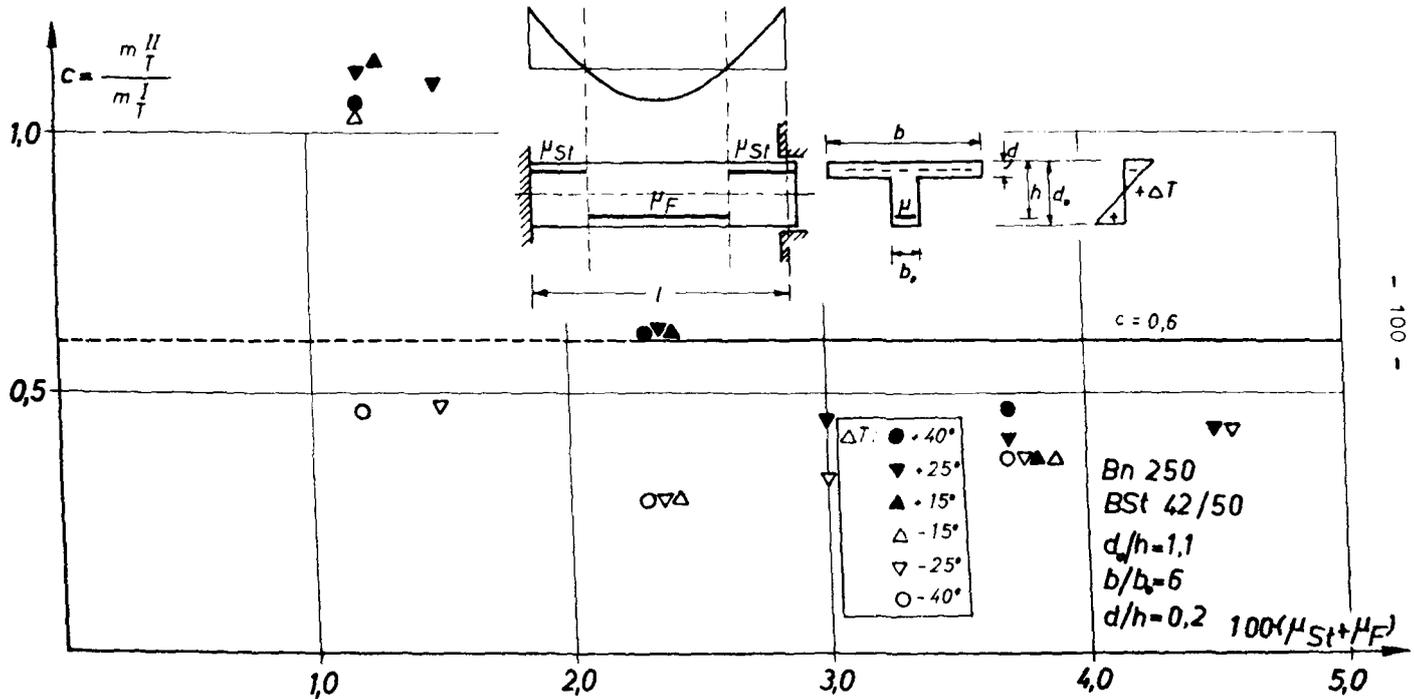
**Bild 5.14:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand



**Bild 5.15: Bezogene Zwangmomente im Gebrauchzustand**



**Bild 5.16: Bezogene Zwangmomente im Gebrauchzustand**



**Bild 5.17:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchzustand

steigendem Bewehrungsgehalt nicht so ausgeprägt. Wegen des großen Rißmomentes am Einspannquerschnitt ist bei schlanken Plattenbalken (vgl. Bild 5.17) eine Abminderung bei positivem  $\Delta T$  erst bei Belastungen zu erwarten, die Bewehrungsgehalte im Feldbereich von  $\geq 0,8 \%$  zu verzeichnen haben.

### 5.6.3 Vorschläge für pauschale Abminderungsfaktoren der Biegesteifigkeiten

Durch pauschale Abminderung der Biegesteifigkeit  $E_b I_b$  soll eine vereinfachte Ermittlung der Zwangsmomente mit der über die Trägerlänge konstanten Biegesteifigkeit  $c \cdot E_b I_b$  ermöglicht werden. Das bei Rechteckquerschnitten auftretende Anwachsen der Zwangsmomente für den Gebrauchszustand mit dem Bewehrungsgehalt wird berücksichtigt, indem ein Ansatz der Form  $c = a + b \cdot \mu$  gewählt wird. Der Tatsache, daß bei geringen Bewehrungsgehalten vielfach keine Abminderung erfolgt, wird dadurch Rechnung getragen, daß eine untere Schranke für die Feldbewehrung angegeben wird, bei deren Unterschreitung eine pauschale Abminderung nicht möglich ist.

Die Ansätze sollen Ergebnisse für die Zwangsschnittgrößen liefern, die normalerweise nicht überschritten werden. Dementsprechend wurden auch die Rechenannahmen gewählt; so wurde die Betonzugfestigkeit relativ hoch angesetzt und das Schwinden nicht berücksichtigt. Unter den gleichen Gesichtspunkten wurde die Belastungsfolge festgelegt. Die empfohlenen Abminderungen für die Biegesteifigkeit beziehen sich auf BSt 42/50, da bei BSt 22/34 keine pauschale Abminderung erfolgen

kann. Als Ansatz für die Abminderungsfaktoren wird bei Zwangsbeanspruchung durch Temperaturgradienten bis zu  $\Delta T = \pm 40^\circ$  bei Biegung ohne Achskraft vorgeschlagen:

Rechteckquerschnitt:

$$c = 0,5 + 5 \cdot (\mu_{St} + \mu_F) \quad (5.13)$$

Dieser Ansatz darf angewendet werden, wenn folgende Bewehrungsgehalte im Feld nicht unterschritten werden:

Bn 150	$\mu_F = 0,3\%$
Bn 250	$\mu_F = 0,4\%$
Bn 350	$\mu_F = 0,5\%$
Bn 450	$\mu_F = 0,6\%$
Bn 550	$\mu_F = 0,6\%$

Diese Ansätze können auch auf gedrungene Plattenbalkenquerschnitte angewandt werden, wobei die Bewehrung auf die Breite des rechteckigen Ersatzquerschnitts zu beziehen ist.

Für schlanke Plattenbalken kann bei Bn 250 der Wert

$$c = 0,6 \quad \text{für } \mu_F \geq 0,8\%$$

angesetzt werden.

Eine Gegenüberstellung der genau ermittelten Zwangsmomente mit den Näherungslösungen wird im Abschnitt 5.6.6 vorgenommen.

#### 5.6.4 Variation der Parameter $d/h$ , $\beta_{bZ}$ , $\mu_{St}/\mu_F$

Um den Einfluß des Verhältnisses  $d/h$  auf die Zwangsmomente zu ermitteln, wurden die Zwängungsmomente infolge  $\Delta T$  für Balken mit Rechteckquerschnitt und einem Verhältnis  $d/h_1 = 1,10$  sowie  $d/h_2 = 1,05$  berechnet. Es wurde angenommen, daß alle Träger die gleiche Querschnittshöhe  $d$  haben.

Nach Erreichen des Zustandes II verhalten sich bei reiner Zwangbeanspruchung die den Verhältnissen  $d/h_1$  und  $d/h_2$  zugeordneten Verhältniswerte  $c_1$  und  $c_2$  wie die zugehörigen Zwängungsmomente, da die mit  $E_b I_b$  ermittelten Zwängungsmomente  $M_T^I$  unabhängig von der Nutzhöhe  $h$  sind:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{M_{T,1}^{II}}{M_{T,2}^{II}} \quad (5.14)$$

Bei gleicher Temperaturbeanspruchung  $\Delta T$  und somit gleicher aufgezwungener Krümmung  $\kappa_1 = \kappa_2$  verhalten sich die zugehörigen Momente unter Voraussetzung affiner Spannungsverteilungen wie die dritten Potenzen der Nutzhöhen:

$$\frac{M_{T,1}^{II}}{M_{T,2}^{II}} = \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^3 \quad (5.15)$$

Damit ergibt sich für das Verhältnis der  $c$  - Werte:

$$\frac{c_1}{c_2} = \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^3 = \left( \frac{d/h_2}{d/h_1} \right)^3 \quad (5.16)$$

Um zu überprüfen, ob die Beziehung nach Gl.(5.16) auch bei kombinierter Beanspruchung zutreffende Ergebnisse liefert, wurden aus den mit  $d/h_2 = 1,05$  gewonnenen Verhältniswerten  $c_2$  mit Hilfe von Gl.(5.16) die Werte  $c_1'$  für  $d/h_1 = 1,10$  bestimmt und den direkt für  $d/h_1$  berechneten Werten  $c_1$  gegenübergestellt (vgl. Bild 5.18). Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung

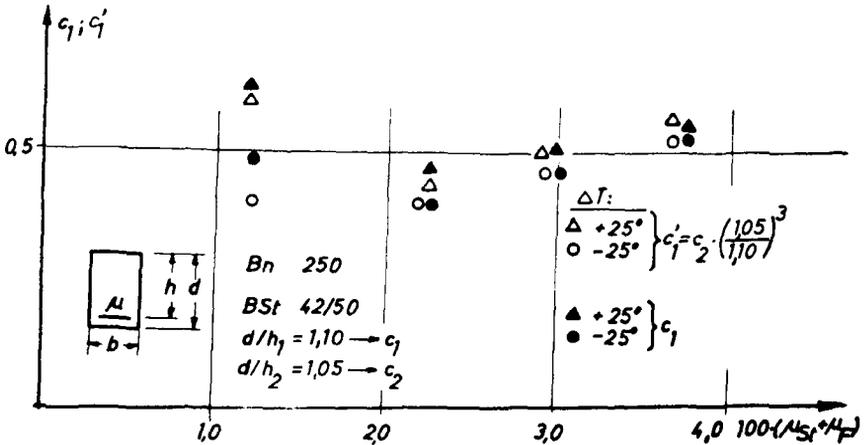


Bild 5.18: Vergleich der am beiderseits starr eingespannten Träger für  $d/h = 1,05$  und  $1,10$  gewonnenen bezogenen Zwangsmomente für den Gebrauchszustand

von  $c_1$  und  $c_1'$ ; nur bei geringem Bewehrungsgehalt treten etwas größere Abweichungen auf, die durch die ausgedehnteren im Zustand I verbleibenden Bereiche der Träger mit  $d/h_1 = 1,10$  bedingt sind.

Eine verringerte Zugfestigkeit wird bei Balken aus Bn 250 untersucht. Anstelle des Wertes  $\beta_{bZ} = 0,95 \sqrt[3]{\frac{\beta_{WM}^2}{\beta_{WM}}}$

wird mit  $0,7 \cdot \sqrt[3]{\beta_{WM}^2}$  gerechnet. Die Darstellung der Ergebnisse in Bild 5.19 zeigt, daß sich eine verringerte Zugfestigkeit bei höheren Bewehrungsgehalten nicht auswirkt. Bei schwächer bewehrten Balken stellt sich

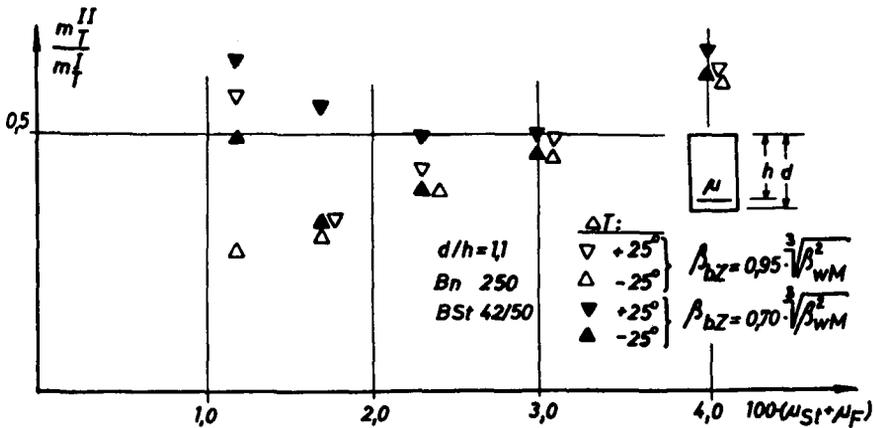
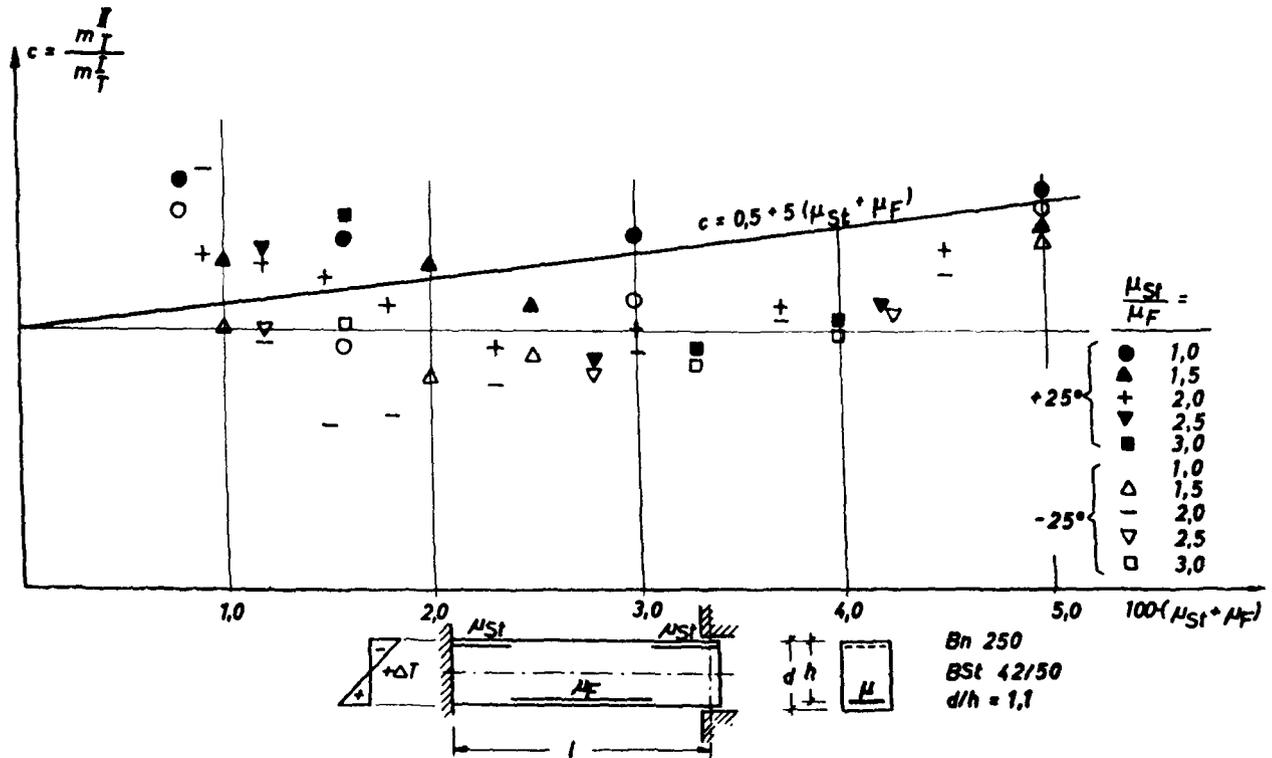


Bild 5.19: Einfluß der Betonzugfestigkeit auf die am beiderseits starr eingespannten Träger im Gebrauchszustand auftretenden Zwangsmomente.

ein stärkerer Abfall der Zwangsmomente bei den Beanspruchungen ein, unter denen bei einer höheren Zugfestigkeit die Ribbildung nur einen relativ kleinen Bereich des Trägers erfaßt.

Eine Variation des Verhältnisses  $\mu_{St}/\mu_F$  liefert für die Werte 1,5 und 2,5 Zwängungsmomente, die nicht wesentlich von denen für den Wert 2,0 abweichen (vgl. Bild 5.20). Die Abminderung wird durch den Näherungsansatz nach Abschnitt 5.6.3 gut wiedergegeben. Vergleicht man die Ergebnisse nur in Hinblick auf  $\mu_F$



**Bild 5.20:** Zwangmomente bei Variation des Verhältnisses  $\mu_{St}/\mu_F$

oder  $\mu_{St}$ , je nachdem welche Bewehrung durch das Zwangsmoment vergrößert wird, so zeigen sich noch geringere Abweichungen bei verschiedenen Verhältnissen von Feld- zu Stützbewehrung.

#### 5.6.5 Zwangsmomente infolge $\Delta T$ bei gleichzeitiger Belastung durch Gleichlast $q$ und Normalkraft $n$

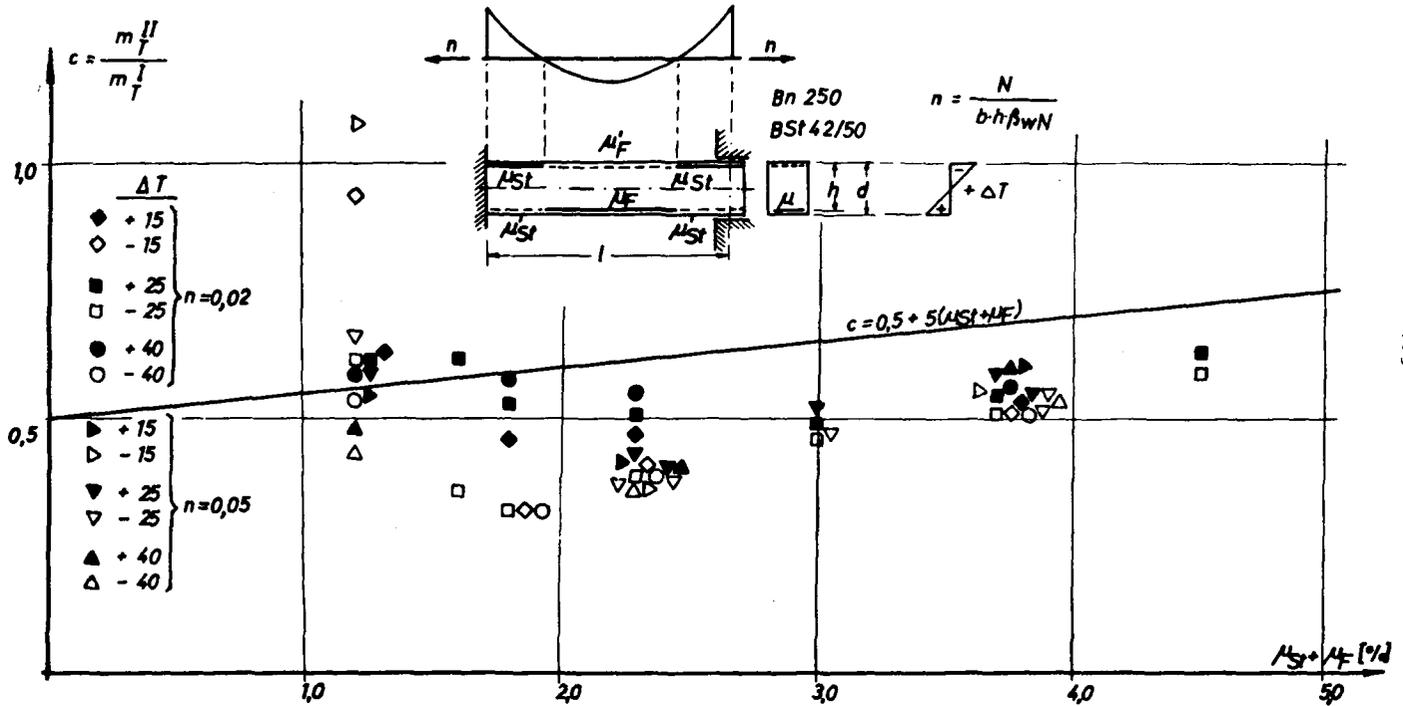
Bei der Ermittlung der Moment-Krümmungsbeziehungen für Biegung mit Längskraft wird das Mittragen des Betons auf Zug nur bei kleinen Normalkräften berücksichtigt. Dieser Einfluß verliert bei großen Zugkräften wegen der erforderlichen hohen Bewehrungsgehalte und der Größe der auftretenden Stahldehnungen an Bedeutung (vgl. auch Bild 2.12). Die Ergebnisse für die Zwangsmomente, die mit und ohne Mitwirkung der Betonzugzone im Stadium II gerechnet wurden, weisen bereits bei  $n = 0,1$  keine merklichen Unterschiede mehr auf; dabei gilt für die bezogene Normalkraft:  $n = N/b \cdot h \cdot \beta_{wII}$ .

Der unter dem Rißmoment beim Übergang vom Stadium I zum Stadium II auftretende Dehnungszuwachs bei den Stahleinlagen wird bei großen Druckkräften  $n \leq -0,1$  infolge der geringen Höhe der Betonzugzone so klein, daß auf eine Korrektur der nach Zustand II berechneten Stahldehnungen verzichtet werden kann. Die von Rao [11] angegebene Gleichung zur Bestimmung der mittleren Stahldehnung liefert hier keine zutreffenden Ergebnisse mehr, da die mittleren Stahldehnungen für das Rißmoment in vielen Fällen kleiner werden als im ungerissenen Zustand.

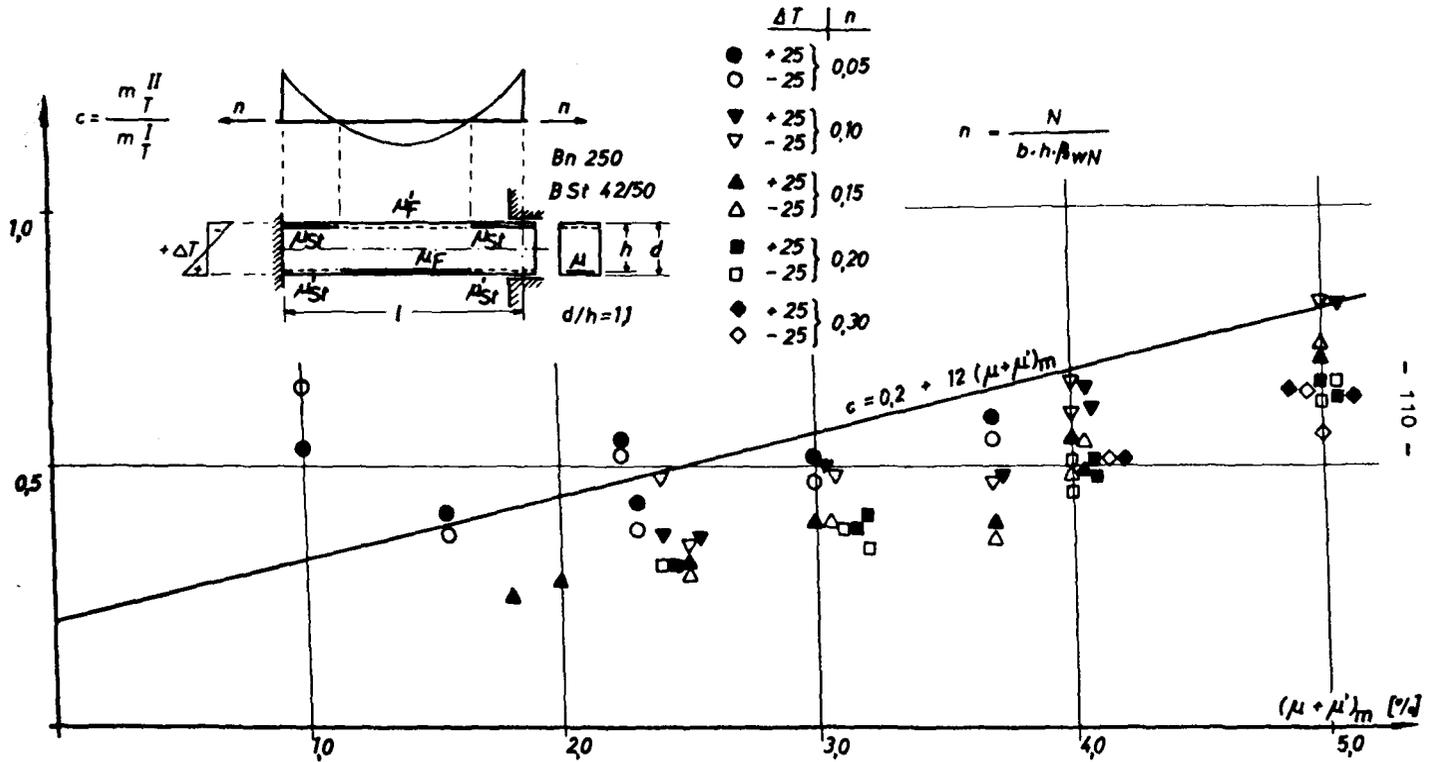
Bei einem Träger mit vorgegebener Bewehrung nehmen die Zwangsmomente umso größere Werte an, je niedriger die unter Gebrauchslast  $q$  auftretenden Biegemomente sind. Diese ergeben sich bei Beanspruchung durch Biegung mit Längskraft aus einem Bruchzustand, der unter Ansatz der  $\nu_q$ -fachen Normalkräfte ermittelt wird, wenn die Normalkräfte durch äußere Lasten hervorgerufen werden. Werden dagegen aus Zwangeinwirkungen resultierende Normalkräfte mit dem Sicherheitsbeiwert  $\nu_z = 1,0$  der Bemessung zugeführt, ergeben sich für den zugeordneten Gebrauchszustand in der Regel größere Biegemomente infolge  $q$  und damit kleinere Zwangsmomente. Lediglich bei kleinen Druckkräften und niedrigen Bewehrungsgehalten liegen die Verhältnisse umgekehrt. Der Auswertung der Ergebnisse wurden Bruchzustände zugrunde gelegt, bei denen die Normalkraft mit  $\nu_q$  bzw.  $\nu_z$  angesetzt wurde, je nachdem welcher Wert zu dem Gebrauchszustand mit dem größeren Zwangsmoment führte.

Die Normalkräfte werden von außen in den Träger eingeleitet und während der Steigerung der Last  $q$  konstant gehalten, so daß sich der einer vorgegebenen Normalkraft zugeordnete Gebrauchszustand einfach ermitteln läßt.

Beim Auftreten von Zugkräften werden die Zwangsmomente stärker abgemindert als bei Biegung ohne Längskraft. Zur Ermittlung der in Bild 5.21 und 5.22 wiedergegebenen Ergebnisse für die Zwangsmomente bei gleichzeitiger Einwirkung einer Zugkraft wurde sowohl das Verhältnis  $\mu_{St}/\mu_F$  als auch das Verhältnis  $\mu/\mu'$  variiert. Bei  $n < 0,1$  ist die in der Druckzone eingelegte Bewehrung von untergeordnetem Einfluß. Die Ergebnisse werden zweckmäßigerweise wie bei Biegung ohne Längskraft als Funktion von  $\mu_{St} + \mu_F$  dargestellt. Der für Biegung



**BRd 5.21: Bezogene Zwangmomente für den Gebrauchszustand bei Beanspruchung durch  $\Delta T$ ,  $q$  und  $n \leq 0,05$**



- 110 -

**Bild 5.22:** Bezogene Zwangmomente für den Gebrauchszustand bei Beanspruchung durch  $\Delta T$ ,  $q$  und  $n \geq 0,05$

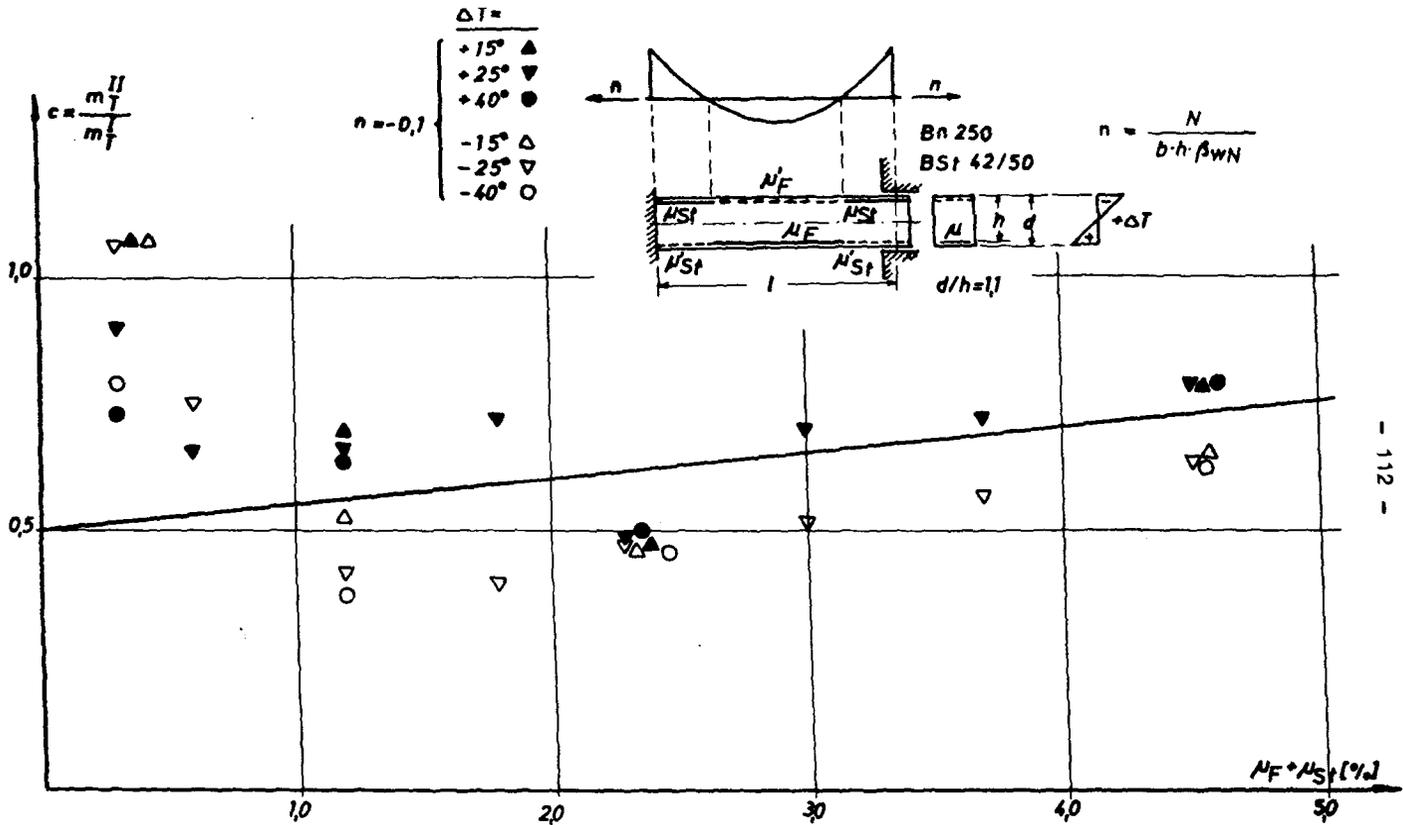
angegebene Näherungsansatz nach Gl. (5.13) liefert hier gute Ergebnisse. Die relativ hoch erscheinenden Abweichungen von der Näherungslösung bei  $\mu_{St} + \mu_P = 1,2\%$  (vgl. Bild 5.21) für  $\Delta T = -15^\circ$  ergeben auf die gleichen Bewehrungsverhältnisse bezogen für die maximale Stahlspannung unter Gebrauchslast einen Fehler von weniger als 8 %. Die Druckbewehrung gewinnt an Bedeutung bei  $n \geq 0,05$ . Aus den als Funktion vom Mittelwert der Summe aus der erforderlichen Zug- und Druckbewehrung  $(\mu + \mu')_m$  in Bild 5.22 dargestellten Ergebnisse ergibt sich für  $n \geq 0,1$  folgender Ansatz für eine pauschale Abminderung der Biegesteifigkeiten:

$$c = 0,2 + 12 \cdot (\mu + \mu')_m \quad (5.17)$$

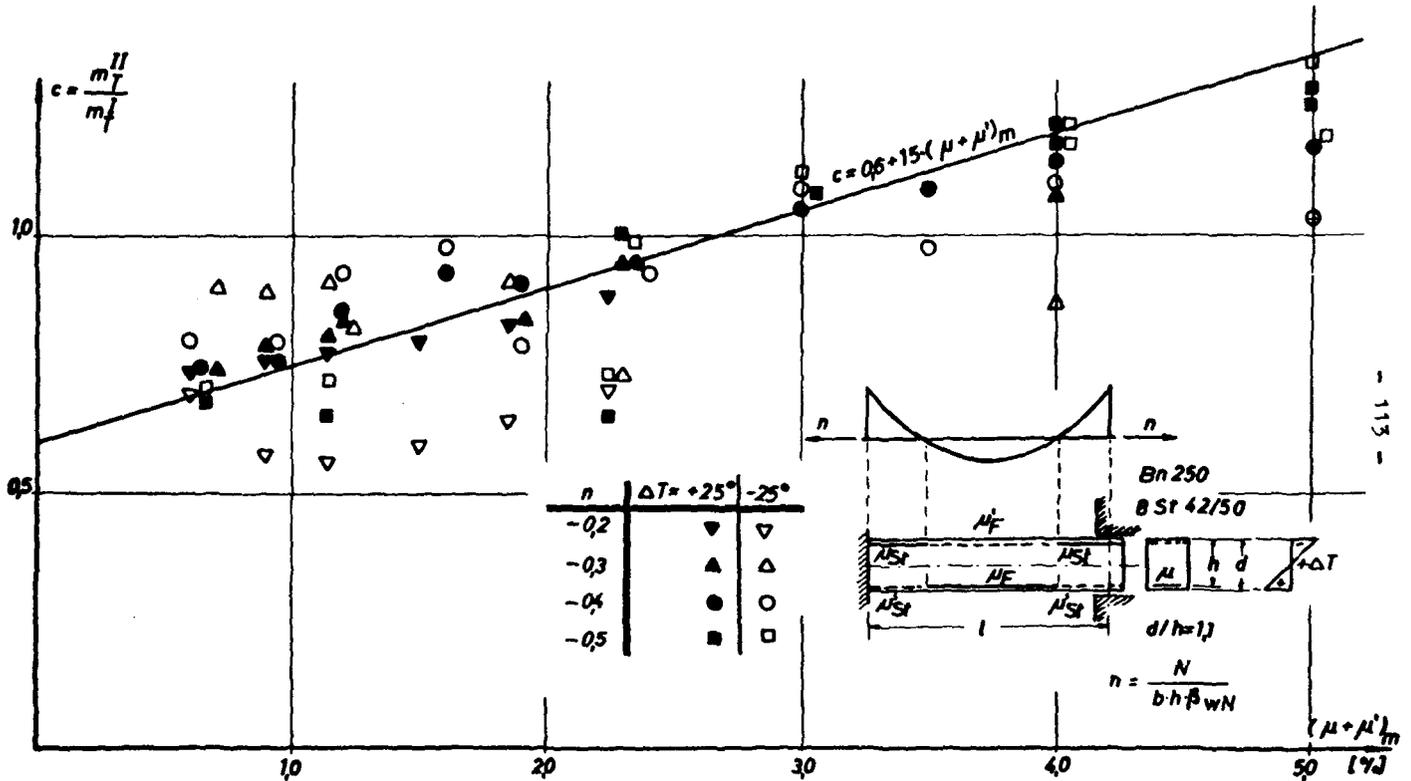
Zwangbeanspruchungen mit gleichzeitigem Auftreten von Druckkräften  $n \geq -0,1$  können wie bei Biegung behandelt werden (vgl. Bild 5.23). Bei größeren Druckkräften  $n < -0,1$  nehmen die Zwangsmomente nur unbedeutend ab, so daß sich für die untersuchten Lastfälle (vgl. Bild 5.24) folgende pauschale Abminderung ergibt:

$$c = 0,6 + 15 \cdot (\mu + \mu')_m \quad (5.18)$$

Die sich hiermit ergebenden Überschreitungen der Stahlspannungen betragen auf die genau ermittelten Werte bezogen weniger als 3 %.



**Bild 5.23:** Bezogene Zwangmomente für den Gebrauchszustand bei Beanspruchung durch  $\Delta T$ ,  $q$  und  $n = -0,1$



**Bild 524:** Bezogene Zwangmomente für den Gebrauchszustand bei Beanspruchung durch  $\Delta T$ ,  $q$  und  $n \leq -0.2$

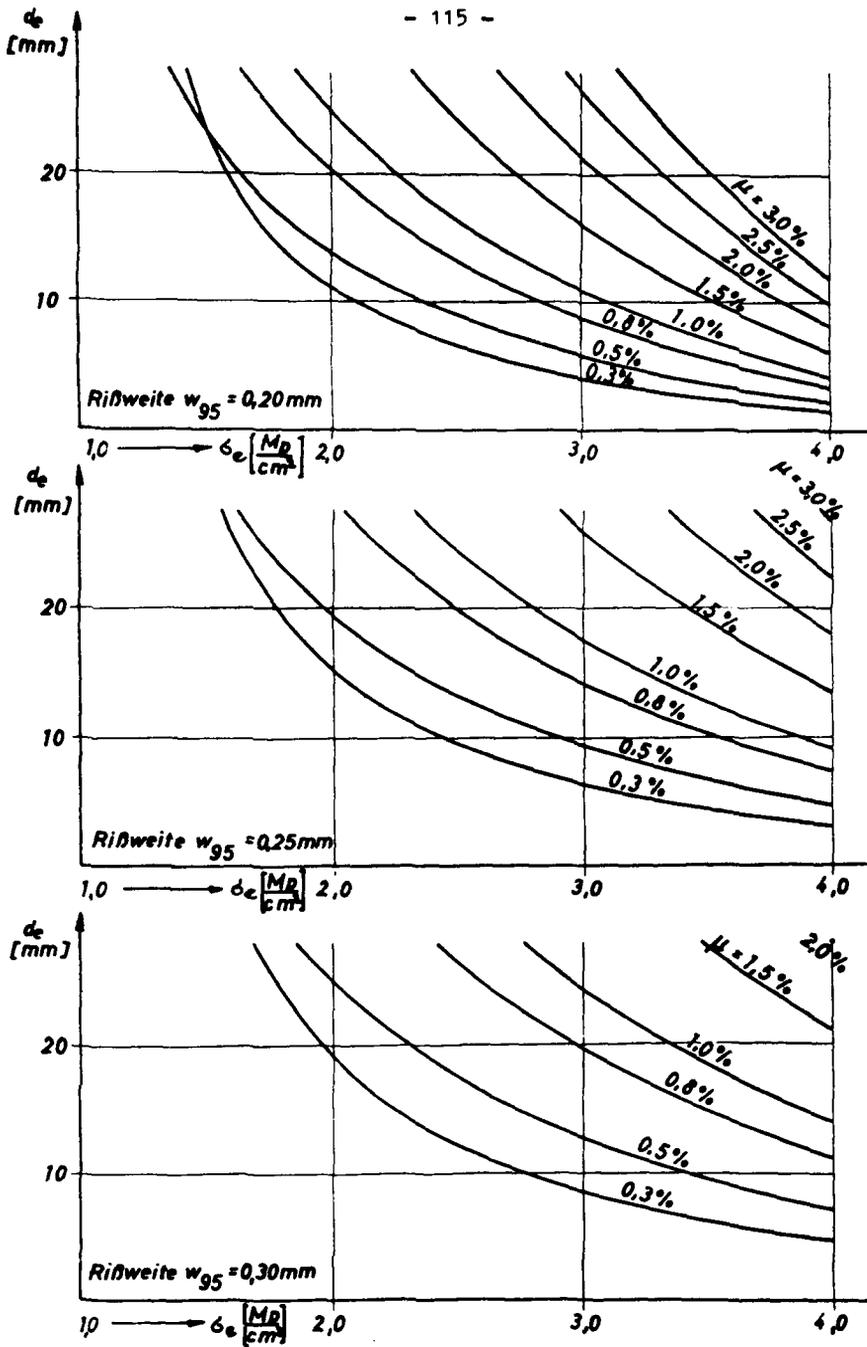
5.6.6 Bei Zwangbeanspruchungen auftretende Stahlspannungen und deren Auswirkung auf die Begrenzung der Rißbreiten

Die Berücksichtigung der Zwangmomente bei der Bemessung mit dem Sicherheitsbeiwert  $\nu_2 = 1,0$  führt zur Überschreitung der unter Lastschnittgrößen üblichen Stahlspannungen im Gebrauchszustand. Aus diesem Grunde werden besondere Anforderungen an die Begrenzung der Rißbreiten gestellt. Für Betonrippenstahl beträgt die kritische Rißbreite  $w_{95}$ , die in 95 % aller Fälle nicht überschritten wird, bei Biegebeanspruchung nach Rehm/Martin [17] :

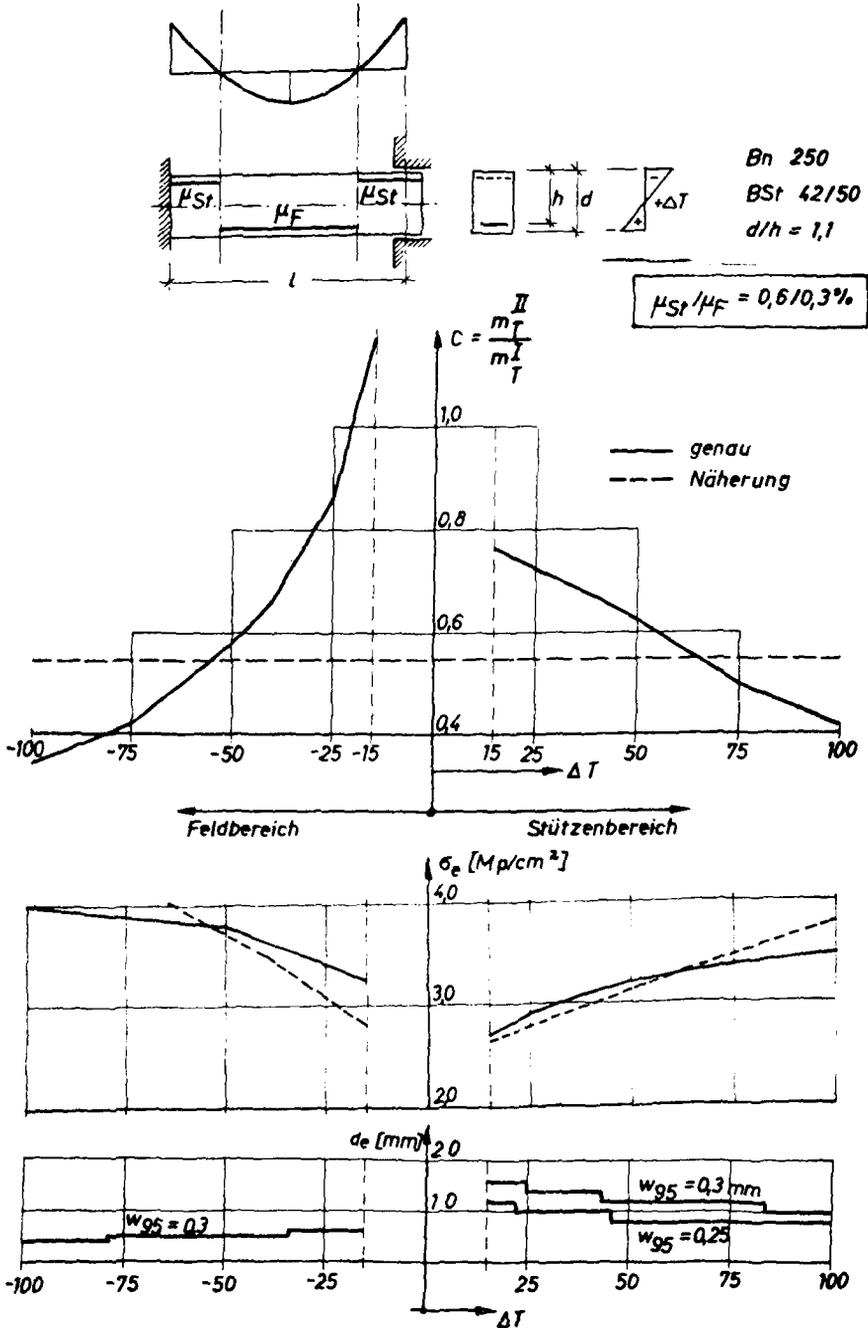
$$w_{95} = (4 + 0,0025 \frac{d_e}{\mu}) \cdot \sigma_{eII} \left[ 1 - \left( \frac{3}{\mu \cdot \sigma_{eII}} \right)^2 \right] \quad (5.19)$$

Eine Auswertung dieser Gleichung für geringe, mittlere und normale Rißbreiten von 0,2, 0,25 und 0,3 mm ist in Bild 5.25 dargestellt. Aus diesen Diagrammen kann zu einem bestimmten Bewehrungsgehalt in Abhängigkeit von der Stahlspannung der erforderliche Stahldurchmesser entnommen werden.

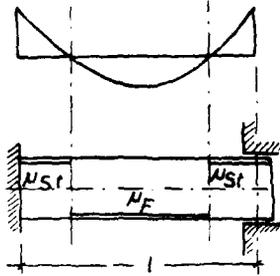
In der grafischen Darstellung der Ergebnisse für die maximalen Stahlspannungen unter kombinierter Beanspruchung sind die hierfür erforderlichen Stahldurchmesser wiedergegeben (vgl. Bild 5.26, 26a-d). Die Ergebnisse zeigen, daß lediglich bei  $\mu_p < 0,4$  % Schwierigkeiten bei der Rißbegrenzung auftreten. Bei Bewehrungsgehalten über  $\mu_{St} / \mu_p = 2,0 / 1,0$  bedeutet die Rißbegrenzung keine Einschränkung in der Wahl der Stahldurchmesser mehr. Neben den genauen bezogenen Zwangmomenten sind in Bild 5.26 und 5.26a-d die Näherungsergebnisse und



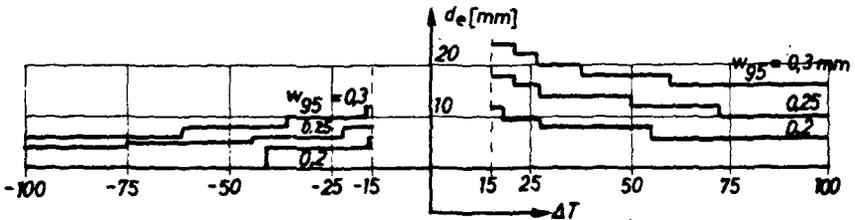
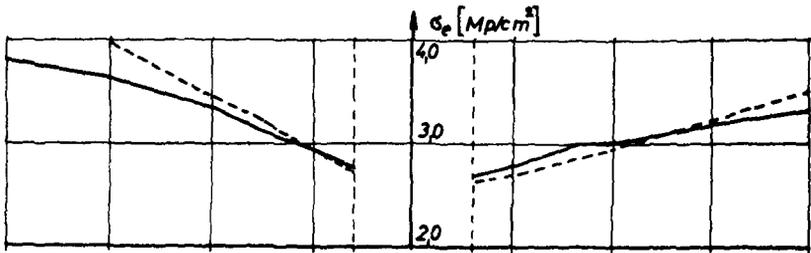
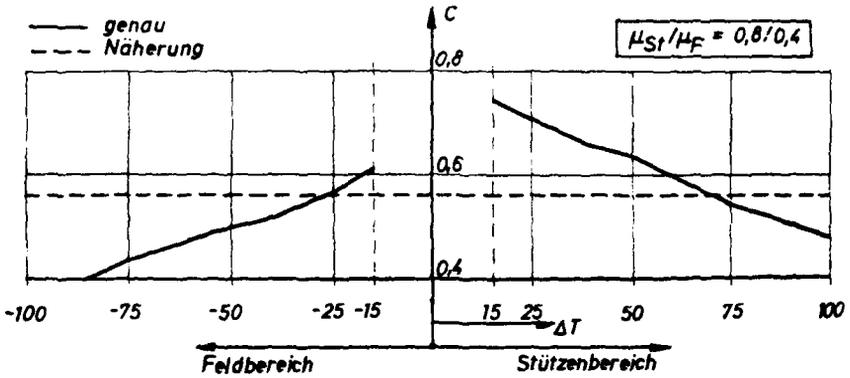
**Bild 525:** Stahldurchmesser in Abhängigkeit von Stahlspannung und Rißweite



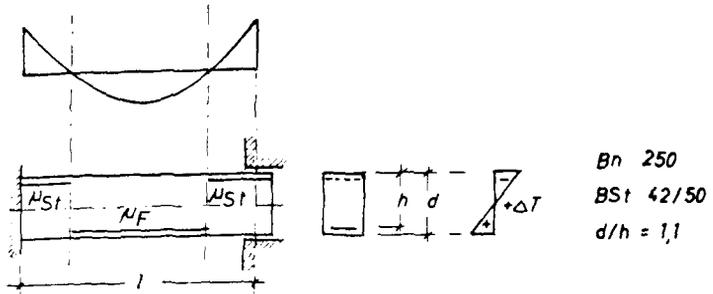
**Bild 5.26:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand, maximale Stahlspannungen u. zugehörige Stahldurchmesser zur Rißbegrenzung



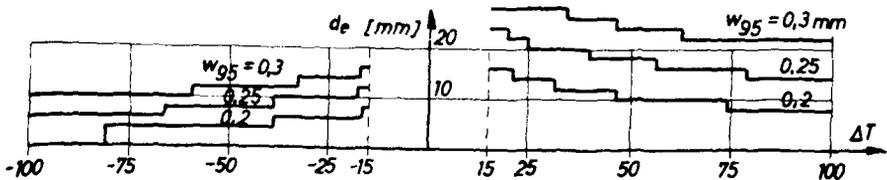
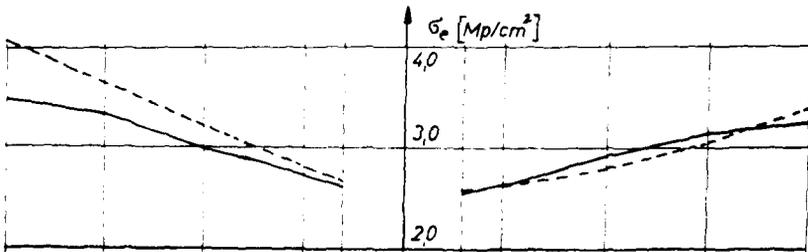
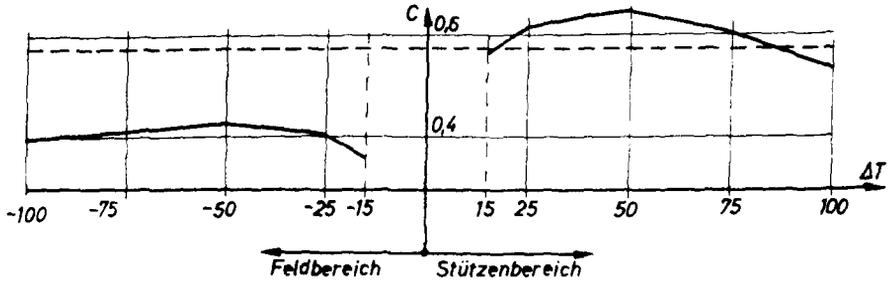
Bh 250  
 BSt 42/50  
 $d/h = 1,1$



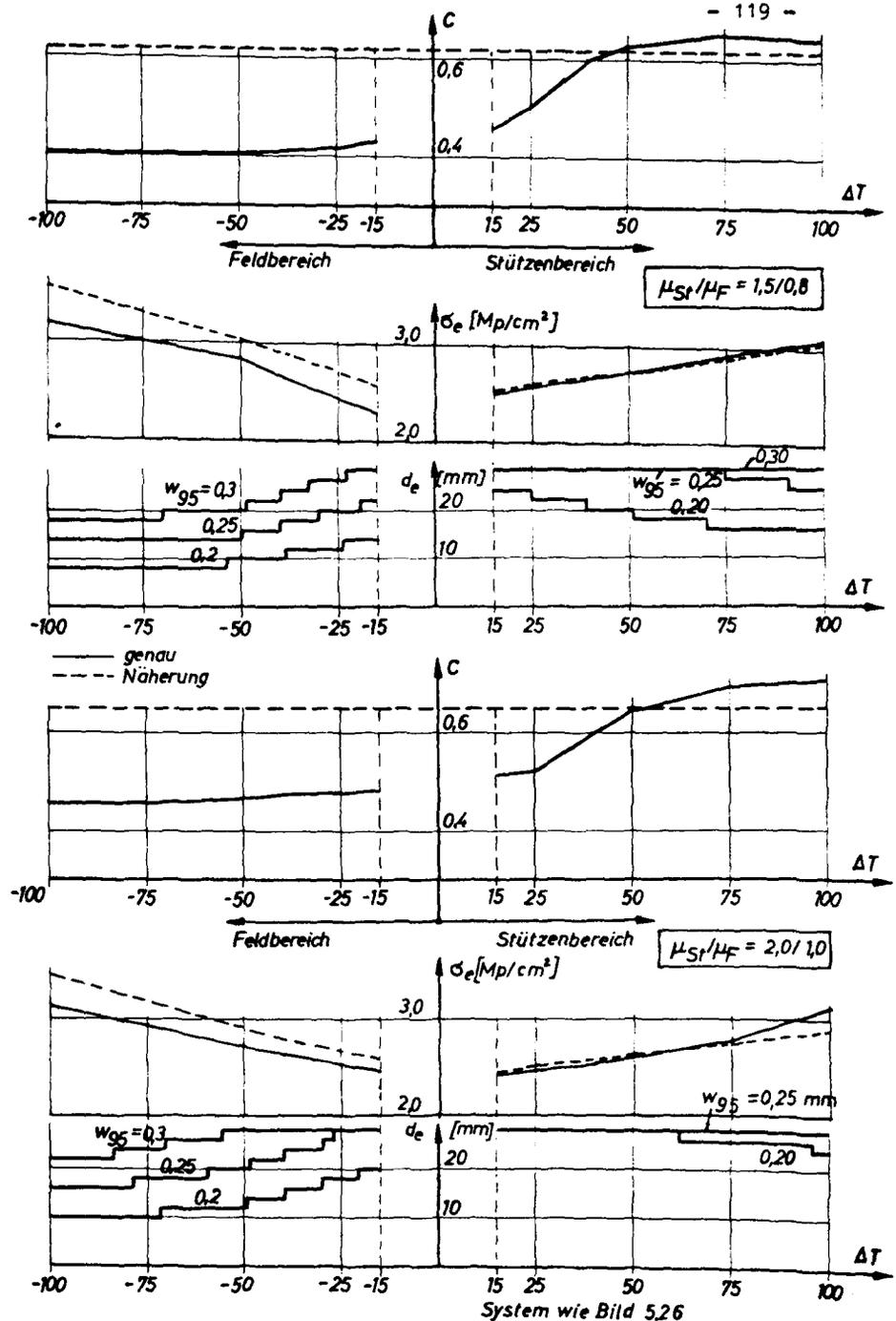
**Bild 5.25a:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand, maximale Stahlspannungen und zugehörige Stahldurchmesser zur Rißbegrenzung



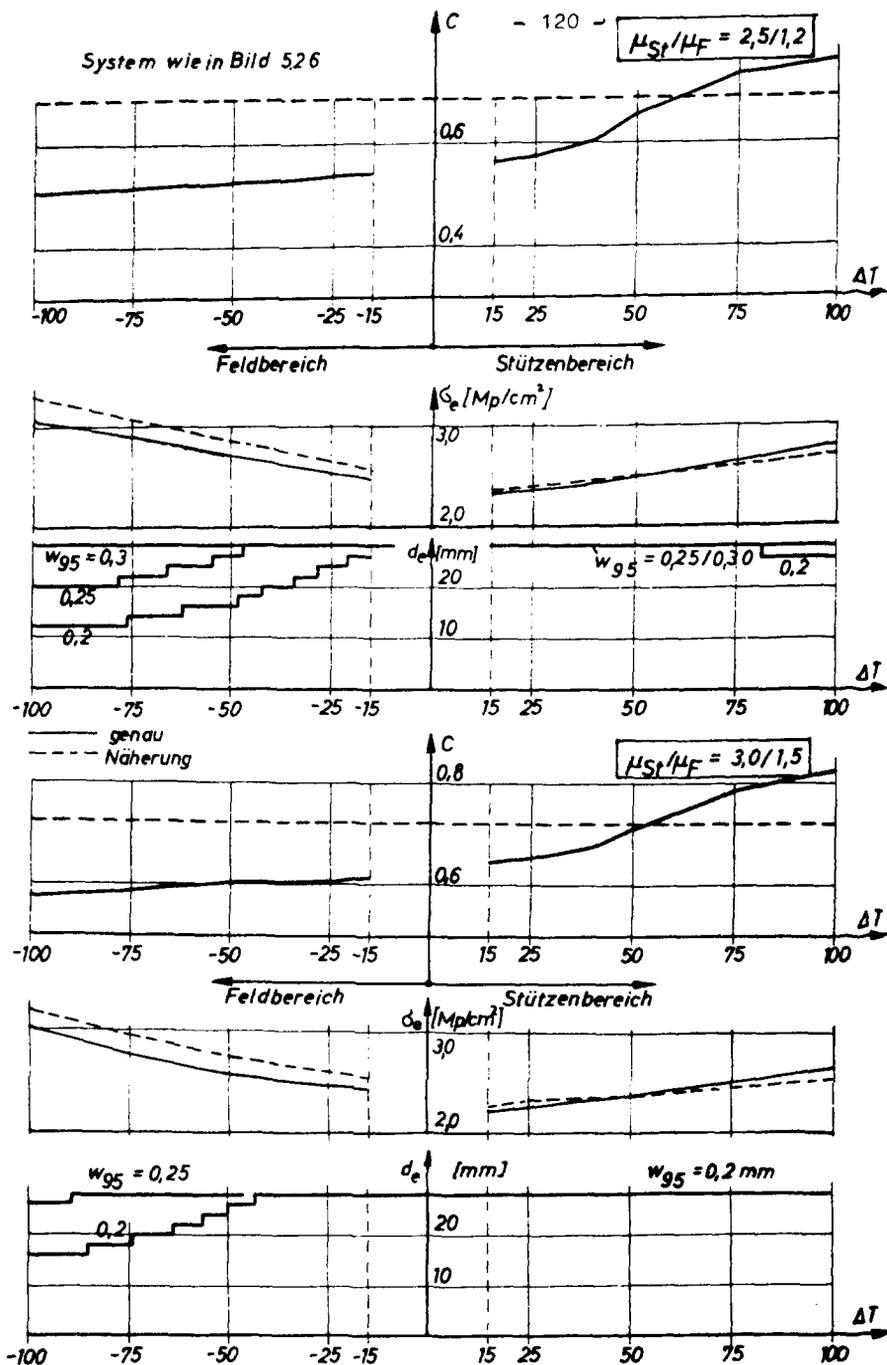
$\mu_{St}/\mu_F = 1,0/0,5$



**Bild 5.26b:** *Betogene Zwangmomente im Gebrauchszustand, maximale Stahlspannungen u. zugehörige Stahldurchmesser zur Rißbegrenzung*



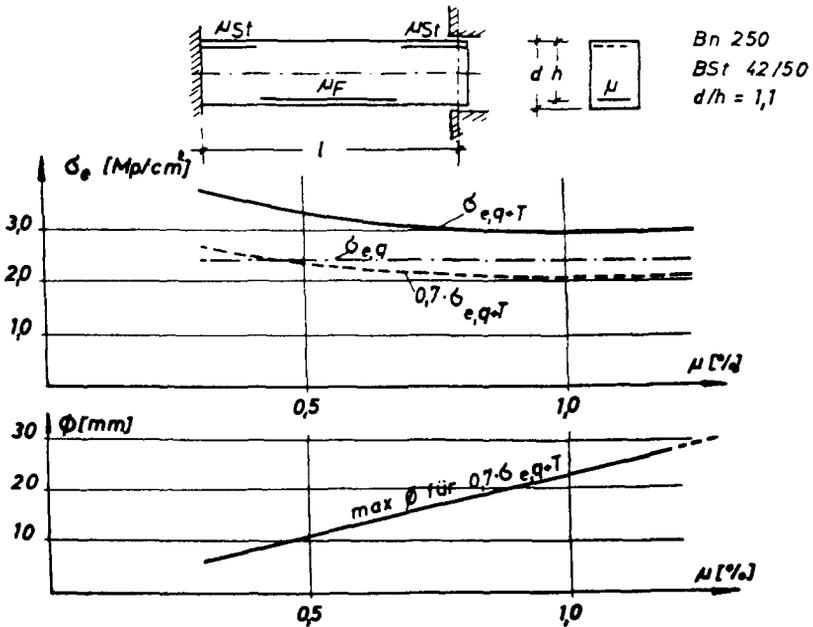
**Bild 5.26c:** Bezogene Zwangsmomente im Gebrauchszustand, maximale Stahlspannungen und zugehörige Stahldurchmesser zur Rißbegrenzung



**Bild 5.26d:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand, maximale Stahlspannungen und zugehörige Stahldurchmesser zur Rißbegrenzung

die hierzu gehörenden Stahlspannungen angegeben. Diese wurden unter Voraussetzung gleicher Bewehrungsverhältnisse aus dem zugeordneten Gebrauchszustand ermittelt. Die Überschreitung der genauen Stahlspannungen ist bei  $\mu_F \geq 0,4$  % kleiner als 5 %.

An einem Beispiel soll noch untersucht werden, welche Folgen auftreten, wenn eine Zwangbeanspruchung von  $\Delta T = \pm 25^\circ$  bei der Bemessung nicht berücksichtigt



**Bild 5.27:** Maximale Stahlspannungen im Gebrauchszustand unter  $q$  und  $q + \Delta T$ , wegn Temperaturgradienten von  $\Delta T = +25^\circ$  bei der Bemessung nicht berücksichtigt wurden, und zur Rißbreitenbegrenzung auf 0,2 mm unter  $0,7 \cdot \sigma_e$  erforderliche Stahldurchmesser.

wurde und dann zur vollen Gebrauchslast  $q$  hinzukommt. Die dabei maximal vorkommenden Stahlspannungen unter der äußeren Last  $\sigma_{e,q}$  und unter Last plus Zwang  $\sigma_{e,q+T}$  sind in Bild 5.27 aufgetragen. Für die Rißbreitenbegrenzung ist die Stahlspannung  $\sigma_{e,d}$  unter Dauerlast maßgebend; wird diese zu  $\sigma_{e,d} = 0,7 \cdot \sigma_{e,q+T}$  (vgl. DIN 1045, Abschn. 17.6.2) angenommen, so wird hierunter eine Rißweite von  $w_{95} = 0,2$  mm nicht überschritten, wenn die in Bild 5.27 angegebenen Stahldurchmesser eingehalten werden. Da unter der maximalen Stahlspannung  $\sigma_{e,q+T}$  keine größeren Rißweiten als 0,3 mm auftreten (vgl. Bild 5.25), sind bei Wahl der Durchmesser nach Bild 5.27 bei einem Verzicht auf eine Berücksichtigung von Zwangmomenten infolge  $\Delta T$  bis zu  $\pm 25^\circ$  keine negativen Auswirkungen zu erwarten.

#### 5.6.7 Bei Zwangbeanspruchung erforderliche Mindestbewehrung

Bei unterbewehrten Querschnitten, bei denen das Bruchmoment kleiner als das Rißmoment ist, erfolgt nach dem Auftreten eines Risses bei Zwangbeanspruchung ein Abbau des Zwangmomentes auf  $m_{II}$  (vgl. Bild 5.28). Das Rißmoment kann nicht wieder erreicht werden, da jede

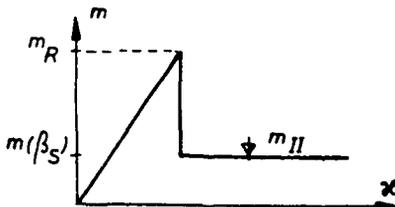


Bild 5.28: Schematischer Moment-Krümmungsverlauf bei unterbewehrtem Querschnitt

weitere Steigerung der Zwangverformung durch Fließen der Bewehrung in diesem RiB ausgeglichen wird. Eine geringe Lasterhöhung könnte zu einem plötzlichen Versagen führen. Daher muß bei Zwangbeanspruchung eine Mindestbewehrung vorgesehen werden, die das RiBmoment mit genügender Sicherheit aufnehmen kann. Da dann das Zwangmoment durch RiBbildung abgebaut werden kann, erscheint der von Rabich [20] für diesen Fall vorgeschlagene Sicherheitsbeiwert (vgl. auch Kordina [21]) von  $\nu = 1,50$  als zu hoch. Ein Wert von  $\nu = 1,15$  wird als ausreichend angesehen.

In Bild 5.29 sind für verschiedene Betongüteklassen die RiBmomente und Bruchmomente als  $f(\mu)$  dargestellt. Mit Hilfe der eingetragenen Linie für  $m_U = 1,15 \cdot m_R$  kann zu jeder Betongüte die für Biegung erforderliche Mindestbewehrung abgelesen werden.

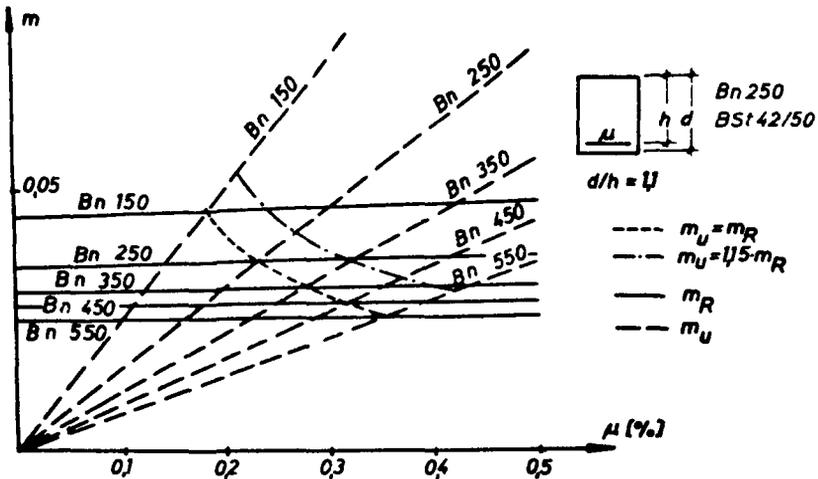


Bild 5.29: RiBmomente und Bruchmomente für verschiedene Betongüteklassen bei Biegung

5.6.8 Variation des Einspanngrades

Eine elastische Einspannung wirkt sich in doppelter Weise günstig auf die Zwangsmomente aus. Die elastische Auflagerverdrehung wirkt verringernd auf die Größe der Zwangschnittgrößen. Hinzu kommt, daß durch die entsprechende Umlagerung der Momentenfläche aus  $q$  die Momente im Feld und damit auch der gerissene Bereich vergrößert werden. Damit ist es zu erklären, daß bei elastischer Einspannung bezogen auf die unter Berücksichtigung des Einspanngrades ermittelten Zwangsmomente im Stadium I ein größerer Abfall erfolgt als bei starrer Einspannung (vgl. Bild 5.30). Man liegt also auf der sicheren Seite, wenn man die für starre Einspannung ermittelten Zwangsmomente entsprechend dem Einspanngrad reduziert.

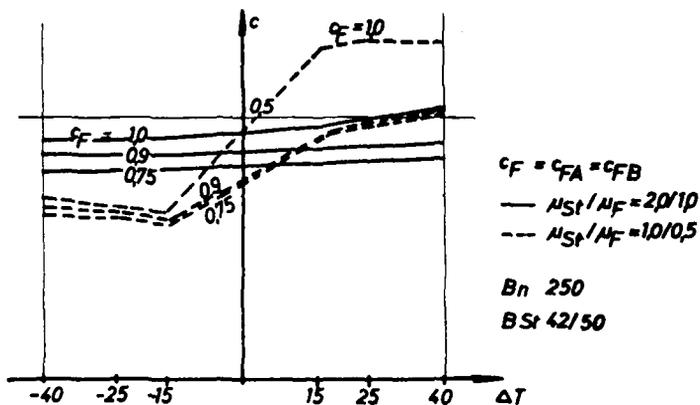


Bild 5.30: Zwangsmomente für den Gebrauchszustand am beidseitig elastisch eingespannten Träger

6. Der beiderseits starr eingespannte Träger unter Zwangbeanspruchung aus ungleichmäßiger Setzung

Bei starrer Einspannung folgt aus den Gleichungen (2.15) und (2.16):

$$\int_0^1 \chi(\xi) \cdot h \cdot d\xi = 0 \quad (6.1)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\xi} \chi(\xi) \cdot h \cdot d\xi \cdot d\xi + \frac{\Delta s}{l} \cdot \frac{h}{d} \cdot \frac{d}{l} = 0 \quad (6.2)$$

Für das Zwangsmoment infolge  $\Delta s$  im Stadium I gilt:

$$m_{s,A}^I = - \frac{6 \cdot \Delta s / l}{l / d \cdot d / h} \cdot B_0; \quad m_{s,B}^I = - m_{s,A}^I \quad (6.3)$$

Da die Momentenfläche unter Last plus Zwang nicht mehr symmetrisch ist, erhält man aus den Zwangsmomenten  $m_{s,A}^{II}$  und  $m_{s,B}^{II}$  zwei verschiedene pauschale Abminderungsfaktoren. Von Interesse ist i.a. nur der Wert, der demjenigen Zwangsmoment zugeordnet ist, das vergrößernd auf das Stützmoment wirkt.

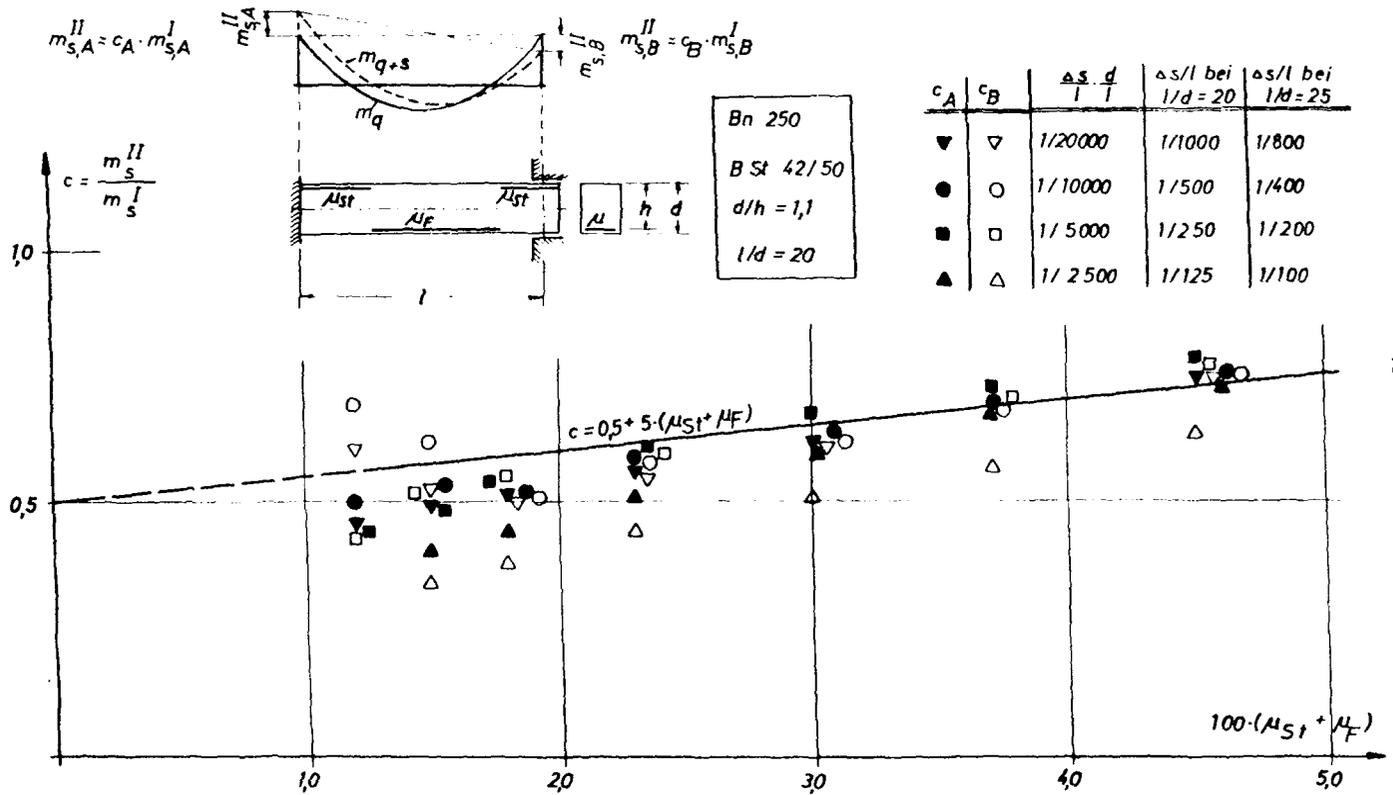
Es gilt:

$$c_A = \frac{m_{s,A}^{II}}{m_{s,A}^I}; \quad c_B = \frac{m_{s,B}^{II}}{m_{s,B}^I} \quad (6.4)$$

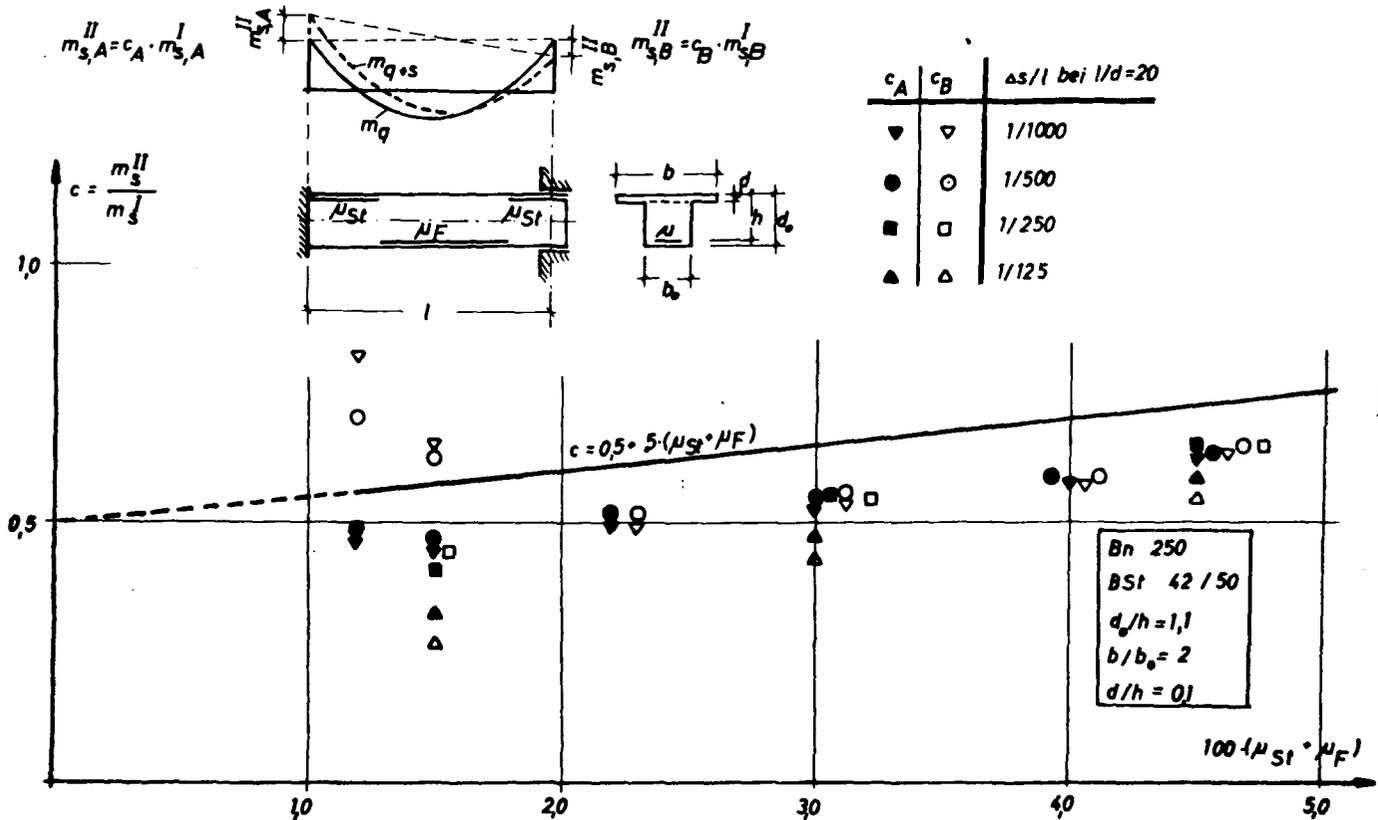
Die Iteration erfolgt ähnlich wie im Abschnitt 5.1 beschrieben, nur mit dem Unterschied, daß zwei Größen  $\Delta T$  und  $\Delta s$  zu optimieren sind. Mit Hilfe der Gleichungen (2.15) und (2.16) können Punkte der als Fläche deutbaren Funktionen

$$\Delta T = f(m_A, m_B) \quad (6.5)$$

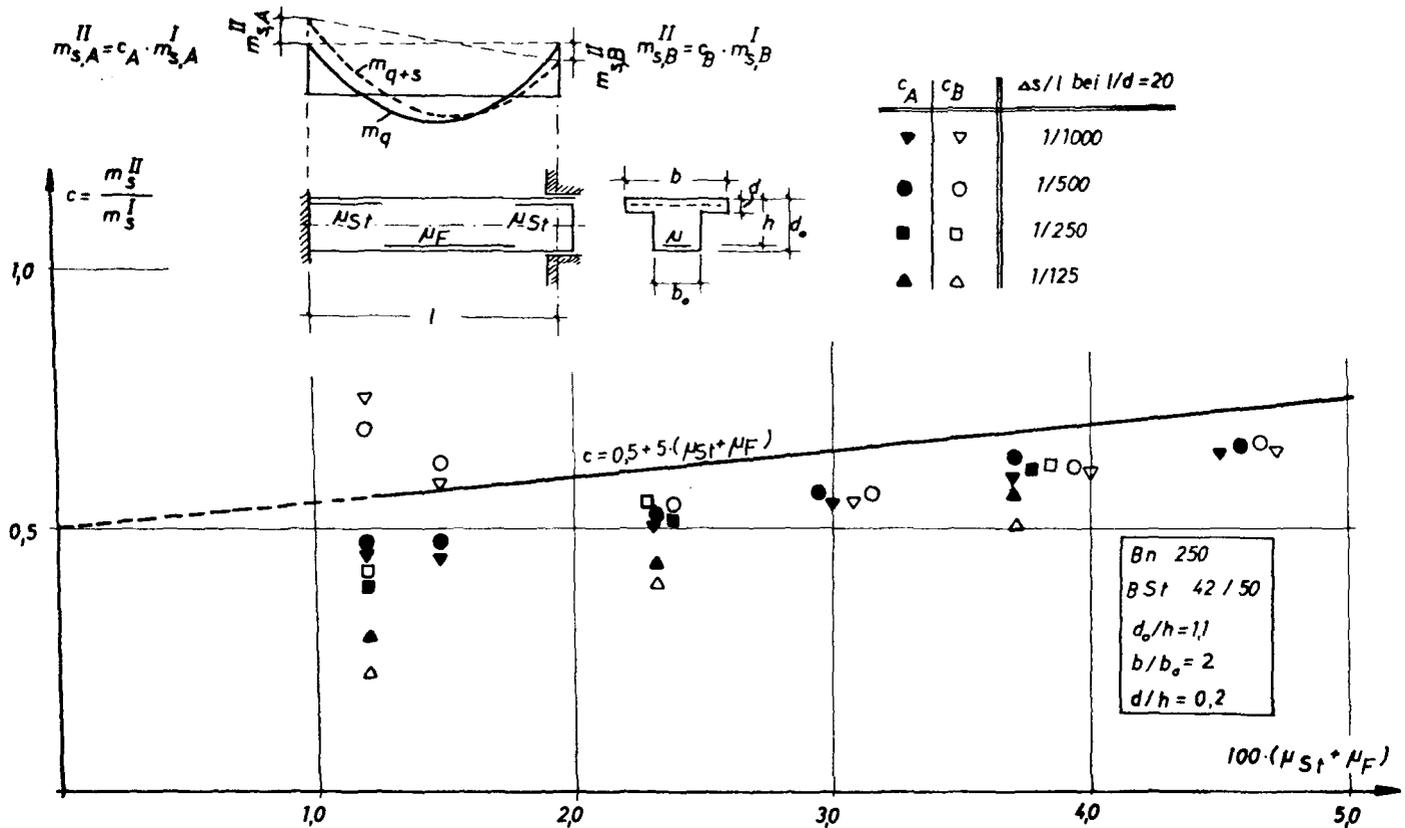
$$\Delta s = f(m_A, m_B) \quad (6.6)$$



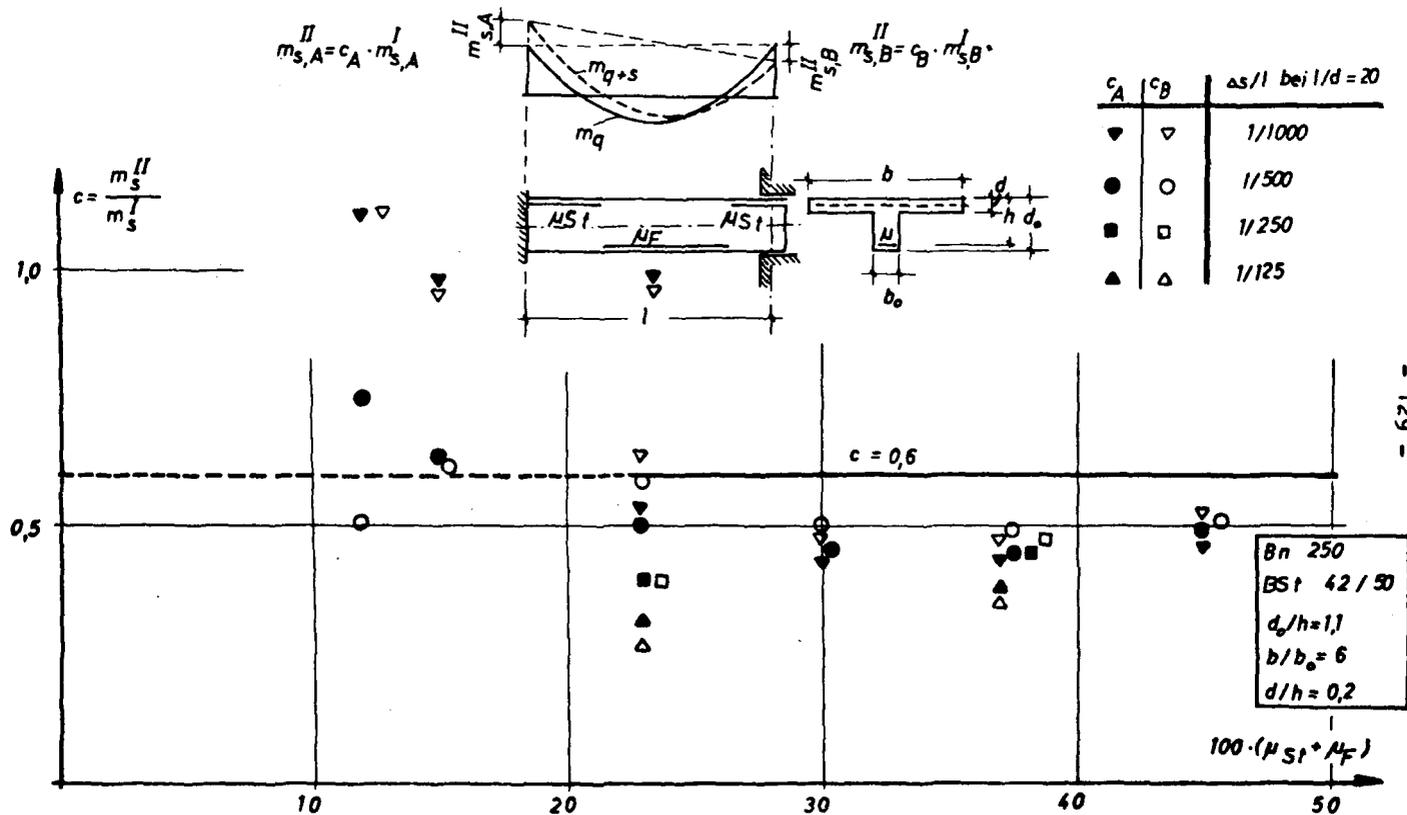
**Bild 6.1:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand infolge Stützensenkung



**Bild 62:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand infolge Stützensenkung



**Bild 6.3:** Bezogene Zwangsmomente im Gebrauchszustand infolge Stützensenkung



**Bild 6.4:** Bezogene Zwangsmomente im Gebrauchszustand infolge Stützensenkung

berechnet werden. In dieser Fläche bewegt man sich auf einer Linie für  $\Delta T = 0$ , bis der Sollwert für  $\Delta s$  gefunden ist.

Als zulässige Setzungsunterschiede sind nach [21] 2 cm anzusehen. Dem entspricht bei einer Stützweite von 5 m ein Verhältnis  $\Delta s/l = 1/250$ . Die Ermittlung der Zwangsmomente aus  $\Delta s$  wird für  $\Delta s/l = 1/1000, 1/500, 1/250$  und  $1/125$  durchgeführt. Das Verhältnis  $l/d$  wird mit 20 angenommen. Andere Balkenschlankheiten lassen sich durch entsprechende Umrechnung der Werte  $\Delta s/l$  berücksichtigen, wobei der Wert  $\Delta s/l \cdot d/l$  als konstant anzusetzen ist.

Durch die in Bild 6.1 bis 6.4 dargestellten Zwangsmomente für Balken mit Rechteck- und Plattenbalkenquerschnitt aus Bn 250 werden die Näherungsansätze nach Abschnitt 5.6.3 bestätigt. Die Werte  $c_A$  und  $c_B$  weichen bei nicht zu geringen Bewehrungsprozentsätzen nur geringfügig voneinander ab.

### 7. Der einseitig starr eingespannte, am anderen Ende frei aufliegende Träger unter Zwangbeanspruchung

Die Berechnung der Zwangsmomente kann nach der Bedingung  $w_{ges} = 0$  erfolgen. Für Zwangbeanspruchung durch einen Temperaturgradienten  $\Delta T$  folgt aus Gl. (2.16):

$$\int_0^1 \int_0^f \kappa(\xi) \cdot h \cdot d\xi \cdot d\xi + \frac{\Delta T \cdot \alpha_T}{2 \cdot d/h} = 0 \quad (7.1)$$

Bei Beanspruchung durch eine Setzungsdifferenz  $\Delta s/l$ :

$$\int_0^1 \int_0^{\xi} \chi(\xi) \cdot h \cdot d \xi \cdot d \xi + \frac{\Delta s}{l} \cdot \frac{h}{d} \cdot \frac{d}{l} = 0 \quad (7.2)$$

Wegen des gleichen Aufbaus der Gleichungen (7.1) und (7.2) lassen sich Temperaturbeanspruchungen in Setzungsdifferenzen umrechnen und umgekehrt. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{\Delta s}{l} = \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{2} \cdot \frac{l}{d} \quad (7.3)$$

Einem Temperaturgradienten  $\Delta T = 10^{\circ}$  entspricht somit bei einer Balkenschlankheit von  $l/d = 20$  eine Setzungsdifferenz von  $\Delta s/l = 1/1000$ .

Für die bezogenen Zwangmomente im Stadium I gilt:

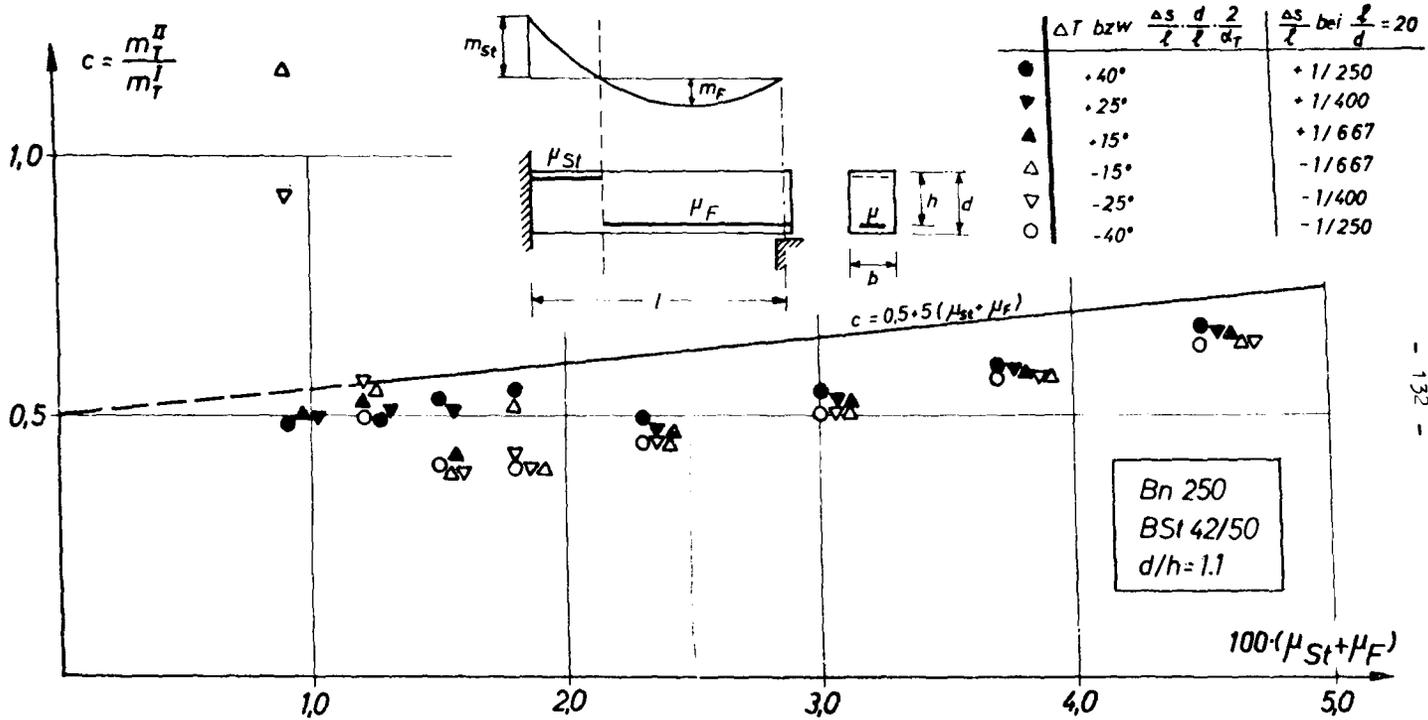
$$m_T^I = - \frac{1,5 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T}{d/h} \cdot B_0 \quad (7.4)$$

$$m_S^I = - \frac{3 \Delta s/l}{l/d \cdot d/h} \cdot B_0 \quad (7.5)$$

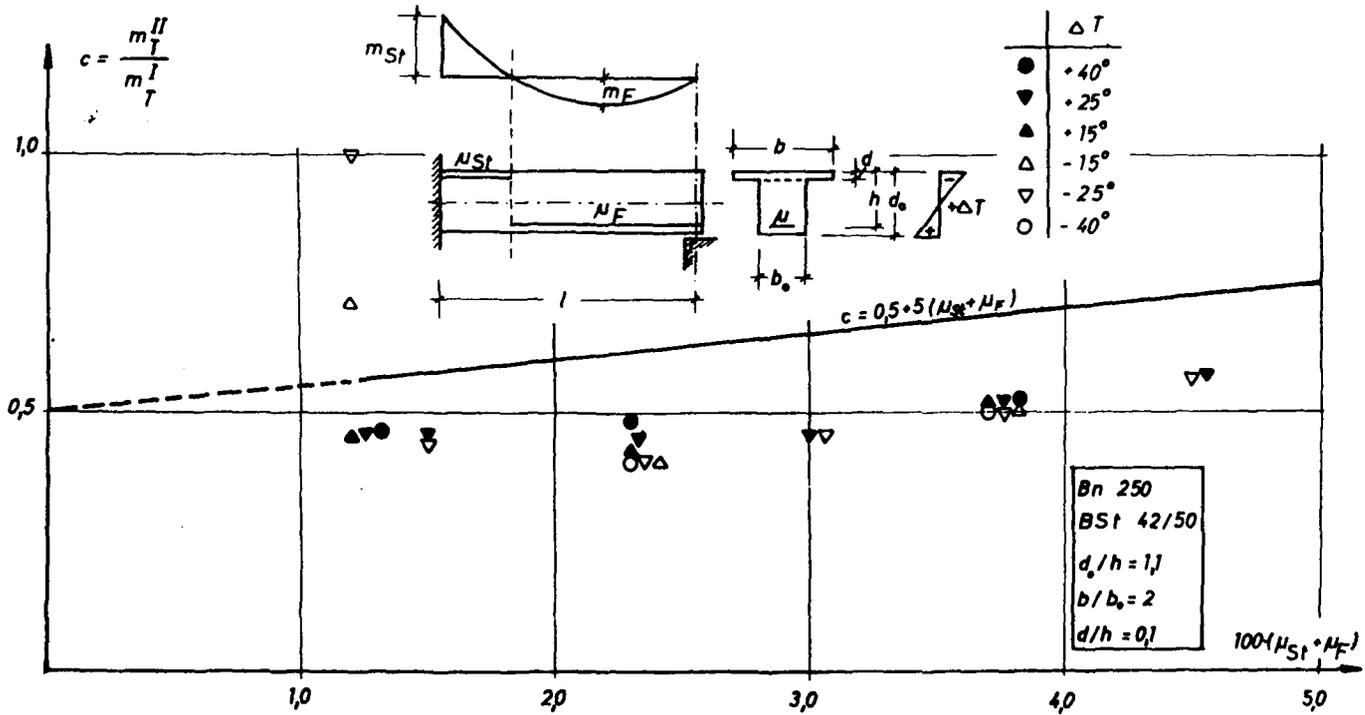
Für die bezogene mittlere Steifigkeit folgt:

$$c = \frac{m_T^{II}}{m_T^I} \quad \text{bzw.} \quad c = \frac{m_S^{II}}{m_S^I} \quad (7.6)$$

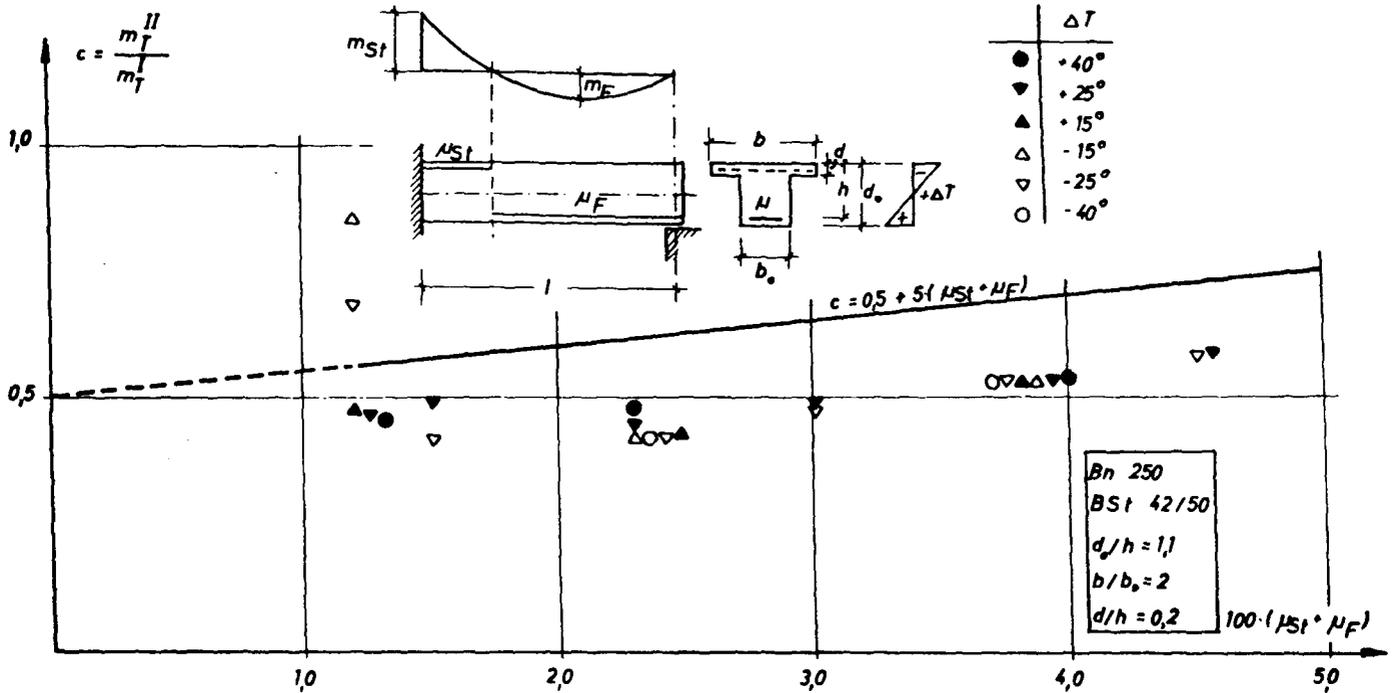
Die Ergebnisse für die Zwangmomente infolge  $\Delta T$  bzw.  $\Delta s$  sind in Bild 7.1 bis 7.4 für Balken aus Bn 250 mit Rechteck- bzw. Plattenbalkenquerschnitt dargestellt. Die Abnahme der Zwangmomente ist größer als beim beid-



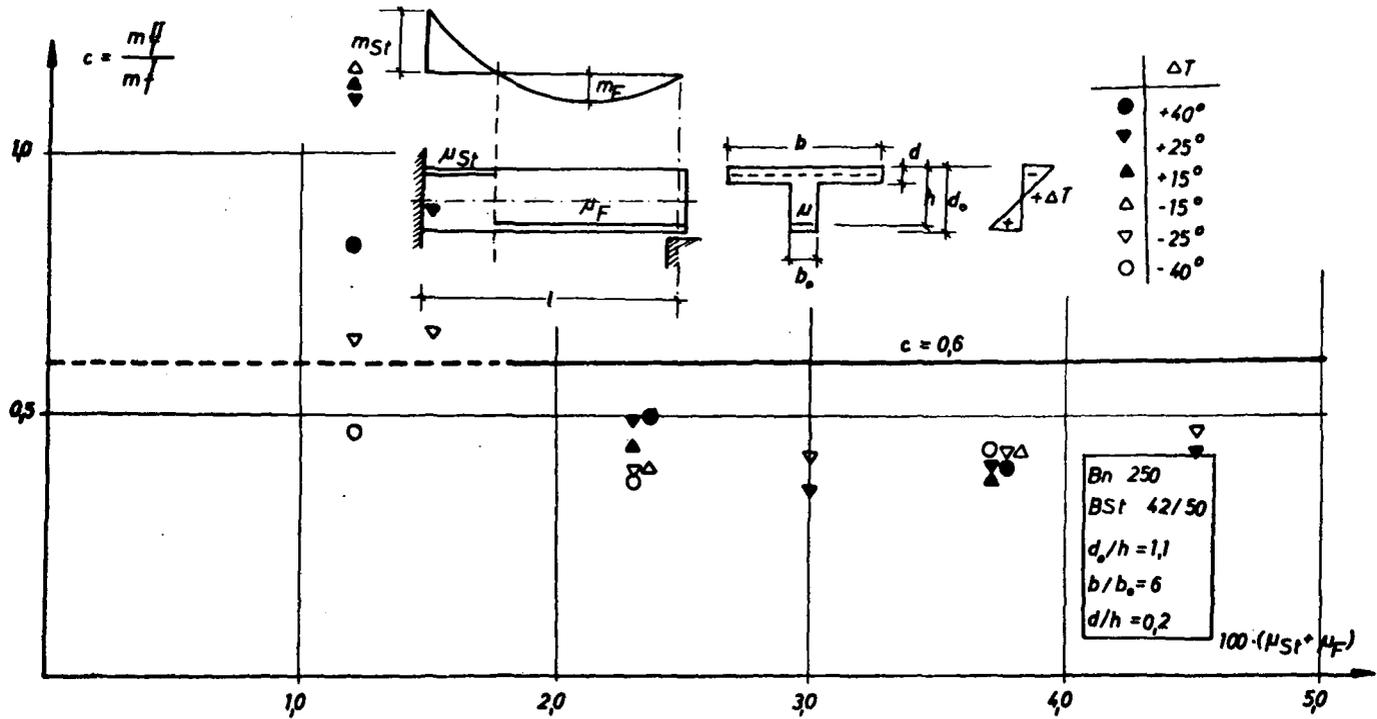
**Bild 7.1:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand



**Bild 7.2:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand



**Bild 7.3:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand



**Bild 74:** Bezogene Zwangmomente im Gebrauchszustand

seitig eingespannten Träger. Dies ist darauf zurückzuführen, daß sich bei der dreieckförmigen Momentenfläche infolge Zwang der meist im Stadium II befindliche Stützenbereich in stärkerem Maße als der Feldbereich auf die Größe des Zwangmomentes auswirkt als bei rechteckförmigem Momentenverlauf.

Die in Abschnitt 5.6.3 angegebenen Näherungsansätze sind in Bild 7.1 bis 7.4 eingetragen. Sie liefern auch beim einseitig eingespannten, am anderen Ende frei aufliegenden Träger gut zutreffende Ergebnisse.

#### 8. Zusammenfassung

An beliebig gelagerten, statisch unbestimmten Einfeldträgern aus Stahlbeton wurden die Zwangmomente bei kombinierter Beanspruchung durch äußere Last und Zwang unter Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Verformungsverhaltens rechnerisch ermittelt. Als Zwangwirkungen werden unterschiedliche Setzungen der Auflager sowie Temperaturdifferenzen zwischen Trägerober- und -unterseite, als äußere Belastung Streckengleichlasten behandelt. Der Einfluß von Normalkräften auf die Zwangmomente konnte durch von außen in den Träger eingeleitete Längskräfte erfaßt werden.

Der Berechnung der Formänderungen lagen die Verformungsgesetze für den Gebrauchszustand nach DIN 1045 E zugrunde. Das Mitwirken der Betonzugzone zwischen den Rissen wurde nach dem von Rao [11] beschriebenen Verfahren berücksichtigt. Eine Untersuchung über das Rißverhalten von durch reinen Biegezwang beanspruchten

Trägern zeigte, daß eine Berücksichtigung der einzelnen Risse nicht erforderlich ist und daß stattdessen mit mittleren Biegesteifigkeiten gearbeitet werden kann. Dadurch wurde eine Durchführung der Berechnungen in allgemeiner Form, unabhängig von bestimmten Stahldurchmessern ermöglicht.

Eingehende Untersuchungen der maßgebenden Einflußfaktoren führten zu geeigneten Vereinfachungen für systematische Berechnungen. Durch die Wahl der Belastungsfolge B, bei der nach der allein wirkenden äußeren Last die Zwangbeanspruchung aufgebracht und dann wieder abgebaut wird, konnte die Auswirkung von Umlagerungen der Momentenfläche aus Last auf die Zwangmomente weitgehend berücksichtigt werden.

Die Darstellung der Zwangmomente erfolgte für Träger mit vorgegebener Bewehrungsführung als Funktion von der äußeren Belastung. Dabei zeigte sich, daß in einem Schnitt, wo sich der Zwang ungünstig auf die Bemessung auswirkt, das für die maximale Beanspruchung maßgebende Zwangmoment den größtmöglichen Lastschnittgrößen zugeordnet ist. Im Erschöpfungszustand werden die Zwangschnittgrößen durch die dort auftretenden plastischen Verformungen stark abgebaut und spielen i.a. keine Rolle mehr. Dagegen beeinflussen sie das Verhalten im Gebrauchszustand in spürbarem Maße. Dieser wurde unter der Voraussetzung ermittelt, daß die Zwangschnittgrößen mit dem Sicherheitsbeiwert  $\nu = 1,0$  der Bemessung zugeführt werden. Die unter Gebrauchslast auftretenden Stahlspannungen und zur Begrenzung der Rißbreiten erforderlichen Stahldurchmesser wurden für einige ausgewählte Beispiele ausgewertet.

Aus den in den Abschnitten 5 bis 7 wiedergegebenen Ergebnissen für die Zwangsmomente im Gebrauchszustand wurden pauschale Abminderungsbeiwerte für die Biegesteifigkeit ermittelt. Eine pauschale Abminderung ist bei BSt 22/34 nicht möglich, da hier ebenso wie bei BSt 42/50 mit geringen Bewehrungsgehalten über weite Trägerbereiche der ungerissene Zustand erhalten bleibt, so daß nur eine unwesentliche Abminderung der Zwangsmomente erfolgen kann. Die Gültigkeit der Näherungsansätze wird daher durch die Angabe von Mindestbewehrungsgehalten eingeschränkt. Mit diesen pauschalen, für ganze Tragwerksabschnitte einheitlichen Abminderungsfaktoren wird eine einfache, wirklichkeitsnahe Berechnung der im Hoch- und Industriebau unter normalen Bedingungen auftretenden Zwangsmomente ermöglicht.

Literaturverzeichnis

- [1] Mörsch, E.: Die im runden Schaft eines Eisenbetonschornsteins durch ungleiche Erwärmung entstehenden Spannungen. Beton und Eisen, 23/1925.
- [2] Rüsck, H.: Die wirklichkeitsnahe Bemessung für lastunabhängige Spannungen. Deutscher Beton-Verein e.V., Vorträge Betontag 1965.
- [3] Eibl, J.: Zwängung und Rißbildung von Stahlbetonstäben bei Behinderung der Längsverformung. Die Bautechnik, 11/1969.
- [4] Falkner, H.: Zur Frage der Rißbildung durch Eigen- und Zwängspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen. Schriftenreihe des DAfStB., H.208, 1969.
- [5] Leonhardt, F., Frühauf, H. und Netzel, D.: Wasserturm ohne Wärmedämmung, Abminderung von Zwängkräften und Rißbeschränkung. Beton- und Stahlbetonbau, 6/1969.
- [6] Kordina, K.: Temperaturbeanspruchungen in kreiszylindrischen Stahlbetonbehältern. Revue C-Tijdschrift III, 6/1964.
- [7] Kordina, K.: Zur Frage der näherungsweise Ermittlung von Zwangschnittgrößen. IVBH - Symposium Madrid 1970, Schlußbericht.
- [8] - DIN 1045 - Beton- und Stahlbetonbau - Bemessung und Ausführung. Entwurf März 1968.

- [9] - DIN 1045 - Beton- und Stahlbetonbau - Bemessung und Ausführung.  
Januar 1972.
- [10] Heilmann, H.G., Hilsdorf, H. und Finsterwalder, K.: Festigkeit und Verformung von Beton unter Zugspannungen. Schriftenreihe des DAFStB., H. 203, 1969.
- [11] Rao, S.P.: Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte. Schriftenreihe des DAFStB., H. 177, 1966.
- [12] Cranston, W.B.: A Computer Method for the Analysis of Restrained Columns. Technical Report, Cement and Concrete Association, London, TRA/402, April 1967.
- [13] Schwarz, H. und Kasparek, K.-H.: Ein Beitrag zur Klärung des Tragverhaltens exzentrisch beanspruchter Stahlbetonstützen. Der Bauingenieur 42 (1967) Nr. 3, S. 84/90.
- [14] Beck, H.: Der Zusammenhang zwischen Biegemoment und Krümmung für den Stahlbeton-Rechteckquerschnitt. Stahlbetonbau - Berichte aus Forschung und Praxis - Festschrift Rüsck. W. Ernst und Sohn, 1969.
- [15] Quast, U.: Geeignete Vereinfachungen für die Lösung des Traglastproblems der ausmittig gedrückten prismatischen Stahlbetonstütze mit Rechteckquerschnitt. Dissertation TU Braunschweig, 1970.
- [16] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik. Springer-Verlag, 3. Auflage.
- [17] Rehm, G. und Martin, H.: Zur Frage der Rißbegrenzung im Stahlbetonbau. Beton- und Stahlbetonbau, 8/1968.

- [17] Rehm, G. und  
Martin, H.: Zur Frage der Ribbegrenzung  
im Stahlbetonbau.  
Beton- und Stahlbetonbau,  
8/1968.
- [18] Duddeck, H.: Traglasttheorie der Stabtrag-  
werke.  
Betonkalender 1972, Teil II.
- [19] Valentin, W.: Abminderung des Stützmomentes  
im Zweifeldträger.  
Österreichische Ingenieur-  
Zeitschrift, 6/1969.
- [20] Rabich, R.: Beitrag zur Berechnung sta-  
tisch unbestimmter Tragwerke  
aus Stahlbeton unter Berück-  
sichtigung der Ribbildung.  
Aus Theorie und Praxis des  
Stahlbetonbaues, W. Ernst  
und Sohn, 1969.
- [21] Kordina, K. und  
Quast, U.: Bemessung von schlanken Bau-  
teilen - Knicksicherheits-  
nachweis, Abschn. 4: Sicher-  
heitsfragen.  
Betonkalender 1972, Teil I.
- [22] - Grundbau - Taschenbuch, Bd.I.  
W. Ernst und Sohn, 1955.

**Fotodruck: Mainz, Aachen, Malteserstraße 9, am Ponttor, Telefon (02 41) 27305**