

INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU  
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Amtliche Materialprüfstelle für das Bauwesen  
Prof. Dr. - Ing. K. Kordina - Prof. Dr. - Ing. G. Rehm

DIE TRAGLAST VON OFFENEN , KREISFÖRMIGEN  
STAHLBETONQUERSCHNITTEN

BRAZIER - EFFEKT

von

GYÖRGY IVÁNYI  
aus Szeged / Ungarn

ersitätsbibliothek  
nischen Universität  
raunschweig

**Fa**  
**559**  
**(11)**

BRAUNSCHWEIG

JULI 1968



UB Braunschweig 84



10181-617-7



INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU  
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Amtliche Materialprüfstelle für das Bauwesen  
Prof. Dr. - Ing. K. Kordina - Prof. Dr. - Ing. G. Rehm

# DIE TRAGLAST VON OFFENEN , KREISFÖRMIGEN STAHLBETONQUERSCHNITTEN

BRAZIER - EFFEKT

von



GYÖRGY IVÁNYI  
aus Szeged / Ungarn

HEFT 11

BRAUNSCHWEIG

JULI 1968



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	5
Literaturverzeichnis	6
1. <u>Einleitung</u>	12
1.1 Problemstellung	12
1.2 Annahmen	13
1.3 Allgemeines über das Tragverhalten der untersuchten Balken	14
1.4 Zusammenfassung	16
2. <u>Überblick über die Ergebnisse der elastischen Stabilitätstheorie hinsichtlich des untersuchten Schalenbalkens</u>	
2.1 Allgemeines; geschichtlicher Überblick	17
2.1.1 Beulen unter Axialdruck	17
2.1.2 Stabilitätsverlust unter reiner Biegebeanspruchung	18
2.2 Die nichtlinearen Differentialgleichungen flacher Schalen	19
2.3 Bestimmung der Beullast unter gleichmäßigem Axialdruck	21
2.3.1 Bestimmung der kritischen Beulspannung	21
2.3.2 Bestimmung der kritischen Druckspannung nach der nichtlinearen Theorie	22
2.3.3 Energetische Betrachtung der Ergebnisse	28
2.4 Stabilitätsverlust unter reiner Biegebeanspruchung	29
2.4.1 Erläuterung des Brazier-Effektes	29
2.4.2 Herleitung der Differentialgleichung und ihre Lösung	31
2.4.3 Näherungsverfahren zur Bestimmung des kritischen Biegemoments	35

	Seite
2.5 Stabilitätsverlust unter veränderlicher Biegebeanspruchung. Die Wirkung der Endscheiben	39
2.6 Zusammenfassung und kritische Betrachtung der Ergebnisse nach der Elastizitätstheorie	42
3. <u>Berechnungsmethode zur Ermittlung der Traglast eines "Schalenbalkens" unter Berücksichtigung der Deformationen</u>	
3.1 Annahmen	45
3.2 Herleitung der Deformationsgleichungen	46
3.3 Einführung von dimensionslosen Parametern	50
3.4 Auswertung der gewonnenen Ergebnisse	54
3.4.1 Querschnitt ohne Randglieder	54
3.4.2 Querschnitt mit Randgliedern	58
4. <u>Die Auswirkungen auf die Traglast von Nebeneinflüssen</u>	
4.1 Berücksichtigung der Nichtlinearität der Arbeitslinie von Beton	58
4.1.1 Annahmen	61
4.1.2 Bestimmung der Deformationsgleichungen	62
4.1.3 Auswertung der gewonnenen Ergebnisse	66
4.2 Anfangsdeformationen	69
4.3 Der Einfluß des Kriechens	71
5. <u>Versuchsergebnisse</u>	
5.1 Zielsetzung der durchgeführten Versuche	73
5.2 Asbestzement-Schalen	75
5.3 Mörtelbeton-Schalen	78
5.4 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse	84
6. <u>Kritische Betrachtungen</u>	84



## ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Abhandlung werden Stahlbetonbalken mit dünnwandigem, flachem, kreiszylindrischem Querschnitt auf ihre Tragfähigkeit untersucht. Da solche Balken, bedingt durch ihre Querschnittsausgestaltung, deformationsempfindlich und stabilitätsgefährdet sind, werden zunächst Stabilitätsuntersuchungen auf Grund der Theorie endlich großer Deformationen elastischer Schalen durchgeführt.

Es werden zwei mögliche Stabilitätsfälle, nämlich das Ausbeulen der Druckzone unter axialem Druck und die Verflachung der Querschnitte unter Biegebeanspruchung - in der Literatur Brazier-Effekt genannt - näher untersucht. Aus einer kritischen Gegenüberstellung dieser Ergebnisse ist ersichtlich, daß die größere Bedeutung dem Brazier-Effekt zukommt. Im Falle eines Stabilitätsverlustes infolge konstanter Biegebeanspruchung beträgt nämlich die kritische Druckspannung im Scheitelpunkt des Kreisquerschnitts nur rund ein Drittel der zum Ausbeulen der Druckzone unter Axialdruck gehörenden kritischen Beulspannung.

Auf Grund dieser Erkenntnisse werden die Untersuchungen an Stahlbetonbalken unter besonderer Beachtung der Querschnittsverflachung durchgeführt. Hierfür wird ein Näherungsverfahren entwickelt, das unter vereinfachenden Annahmen auch die Berücksichtigung der gerissenen Zugzone ermöglicht. Die Zulässigkeit der angesetzten Vereinfachungen wird einerseits durch Verwendung ähnlicher Annahmen für eine Rechenmethode nach der Elastizitätstheorie und Vergleich mit den genauen Ergebnissen, andererseits durch Versuchsergebnisse überprüft. Beide Kontrollen ergeben eine gute Übereinstimmung.

Die Rechenergebnisse zur Untersuchung praktischer Fälle sind in Form von Kurvenscharen wiedergegeben. Hierbei ist es möglich, durch Einführung dimensionsloser Rechengrößen im Einzelfall die maximal mögliche Ausnutzung des Querschnitts einfach zu ermitteln. Den Diagrammen ist außerdem zu entnehmen, ob der untersuchte Fall im stabilitätsgefährdeten Bereich liegt oder das Versagen infolge Überschreitens der Festigkeitsgrenzen des Betons bzw. Stahls erfolgt.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [1] Aass-Jakobsen: Die Berechnung der Zylinderschalen  
Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [2] Almroth, B.O.: Postbuckling Behavior of axially  
compressed Circular Cylinders  
AIAA Journal 3, 1963.
- [3] Beluzzi, O.: Un caso di instabilita per ovalizza  
zione nei tubi sollecitati a flessio-  
ne  
Ric. Ingegn. 1, 1933.
- [4] Beranek, W.J.-Bouma, A.L.-Van Riel,  
A.C.-Van Koten, H.: Investigations on Modell of eleven  
Cylindrical Shells made of Reinforced  
and Prestressed Concrete  
Proceeding of the Symposium on Shell  
Research, Delft, 1961, S. 79 - 101.
- [5] Berger, E.R.: Eine Näherungsgleichung für die Beul-  
last einer konzentrisch gedrückten  
Zylinderschale  
Beton- u. Stahlbetonbau 1953/12  
288 - 289.
- [6] Billington, D.P., Mark, R. Small Scale Model Analysis of Thin  
Shells  
ACI Journal, Juni 1965.
- [7] Bradshaw, R.R.: Some Aspects of Concrete Shell Buck-  
ling  
ACI Journal, March 1963.
- [8] Brazier, L.G.: On the Flexure of Thin Cylindrical  
Shells and other "Thin" Sections  
Proc. Royal Society, London, Ser. A.  
Vol. 116 (1927), 104 - 114.
- [9] Bychawski, Z.: Some Problems of Creep Bending and  
Creep Buckling of viscoelastic Sheet  
Panels in the Range of large Deflec-  
tions  
Non-classical Shell Problems, IASS  
Symposium Warsaw 1963, S. 368 - 383.
- [10] Chwalla, E.: Reine Biegung schlanker, dünnwandiger  
Rohre mit gerader Achse  
ZAMM, 1933, 48 - 53.

- [11] Corley, W.G.  
Sozen, M.A.: Time-Dependent Deflections of Reinforced Concrete Beams  
Journal of ACI, March 1966.
- [12] Donnell, L.H.: A new Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending  
Transactions of the ASME No. 11, 1934.
- [13] Dulácska, Ed.: Külpontosan Nyomott Héj-Ivek Stabilitása Építés-és Közlekedéstudományi Közlemények  
1963, Heft 1-2 (auf ungarisch).
- [14] Eggert, H.: Ein Beitrag zum Problem der Mindestfestigkeit bei Schalen  
Dissertation Darmstadt, 1965.
- [15] Fialkow, M.N.: Limit Analysis of simply supported Circular Shell Roofs  
Journal of Eng.Mech.Div., July 1958.
- [16] Flügge, W.F.: Statik und Dynamik der Schalen  
Springer-Verlag, Berlin, 1962.
- [17] Fuchssteiner, W.: Kreiszyinderschalen, Berechnung mit Polynomen  
Beton- u. Stahlbetonbau, 1960/5:  
106 - 113.
- [18] Fuchssteiner, W.: Die vereinfachte Berechnung zusammengesetzter Kreiszyinderschalen  
IASS Colloquium, Brüssel, 1961, Vortrag III/3.
- [19] Funk, P.: Über ein Stabilitätsproblem bei den durch Krümmung steif gemachten Meßbändern  
Österreichisches Ingenieur-Archiv, 1951, S. 387 - 397.
- [20] Girkmann, K.: Flächentragwerke, Vierte Auflage,  
Springer-Verlag, Wien, 1956.
- [21] Haidukow, G.K.: Limit Equilibrium Design of Shallow Shell Panels  
Nonclassical Shell Problems, IASS Symposium, Warsaw. 1963. S. 977 - 996.

- [22] Hampe, E.,  
Köppler, H.: Kriechen und Schwinden im Zustand II  
Bauplanung - Bautechnik, Heft 1, 1967
- [23] Hedgren, A.W.,  
Billington, D.P.: Mortar Model Test on a Cylindrical  
Shell of Varying Curvature and thick-  
ness  
ACI Journal, February 1967.
- [24] Hermann, G.,  
Bagge, C.F.: Theoretical and Experimental Stabili-  
ty  
Investigations of Cylindrical Shells  
subjected to Thermal Axial Compression  
and Mechanical External Pressure  
IASS Symposium, Budapest, 1965.
- [25] Janas, M.: Limit Analysis of nonsymmetric Plastic  
Shells by a generalized Yield Linie  
Method  
Non-classical Shell Problems,  
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S. 997-  
1010.
- [26] Kantorowitsch-  
Krylow: Näherungsmethoden der höheren Analy-  
sis  
Deutscher Verlag der Wissenschaften,  
Berlin 1956.
- [27] Kármán, Th.: Über die Formänderung dünnwandiger  
Rohre, insbesondere federnder Aus-  
gleichsrohre  
VDI-Zeitschrift, 1911, S.1889 - 1895.
- [28] Kármán, Th.,  
Tsien: The Buckling of cylindrical Shells  
under Axial Compression  
Journal of the Aeronautical Sciences,  
1941, S. 303 - 312.
- [29] Kaufmann, W.: Über die Stabilität dünnwandiger Hohl-  
zylinder und rechteckiger Bleche ober-  
halb der Proportionalitätsgrenze  
Der Stahlbau, 1937/1 : 1 - 4.
- [30] Kempner, I.: Post Buckling Behavior of Axially  
compressed Circular. Cylindrical Shells  
Journal of Aeronaut, 1948.
- [31] Keshava Rao, M.N.,  
Raman, N.V.: Lower Bounds for Collapse Loads of  
Cylindrical Shells with Edge Beams  
The Indian Concret Journal, November  
1963.
- [32] Kirchner, G.: Zur Berechnung langer Zylinderschalen  
Der Bauingenieur, 1958/7: 256 - 265.

- [33] Klöppel, K.  
Lie, K.H.: Beitrag zur Beulung von Schalen mit Hilfe der Energiemethode  
Deutscher Ausschuß für Stahlbau, 1908 - 1958, S. 65.
- [34] Kollár, L.: Stability of Centrally-Compressed Shell-Arches  
Acta Technica, Acad. Sci. Hung. Budapest, Tom. XXXII (1961), Fasc. 1 - 2, 11 - 38.
- [35] Kollár, L.: Stability of Bent Shell-Arches  
Acta Technica, Acad. Sci. Hung. Budapest, Tom. XXXII (1961), Fasc. 3 - 4, 267 - 297.
- [36] Kordina, K.:  
Ivanyi, G.: Heft 12 der Schriftenreihe des Instituts für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der TU Braunschweig.
- [37] Kordina, K.: The Influence of Creep on the Buckling Load shallow Cylindrical Shells  
Non-Classical Shell-Problems  
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S. 602-608.
- [38] Lorenz, R.: Die nichtachsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder  
Phys. Zeitschrift 1, 1911.
- [39] Lundgren, H.: Cylindrical Shells  
The Danish Technical Press, Kopenhagen 1960, Volume I.
- [40] Mehmel, A.: Einige Ergebnisse einer modellstatischen Untersuchung auf Durchschlagen einer auf 6 Stützen gelagerten Kugelsegmentkuppel großer Abmessungen  
Proc. of the Symposium on Shell Research, Delft, 1961, S. 342 - 345.
- [41] Mileykowski, J.E.: Some Problems of Analysis of Reinforced Concret Cylindrical Shell - Roofs taking into account Crack Formation  
Non-classical Shell Problems  
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S.1126-1139.
- [42] Mungan, J.: Die Beulsicherheit von Kreiszyklinderschalen unter Berücksichtigung verschiedener Hauptspannungsverhältnisse  
Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule München, Bericht Nr. 63, 1965.

- [43] Nakamura, T.: Limit Analysis of nonsymmetric sandwich Shells  
Non-classical Shell Problems  
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S.767-785.
- [44] Pflüger, A.: Zur Berechnung der axial gedrückten Kreiszyinderschale  
Der Stahlbau, 1963/6 : 161.
- [45] Pflüger, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik  
Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- [46] Prager, W.,  
Hodge, P.G.: Theorie ideal plastischer Körper  
Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [47] Rabich, R.: Die Statik der Schalenenträger  
Bauplanung - Bautechnik, 1956/1 :4-15.
- [48] Rabich, R.: Die Statik der Schalenenträger  
Bauplanung - Bautechnik, 1953/3 - 4.
- [49] Raman, N.V.,  
Keshava Rao, M.N.: Upper Bounds for Collaps Loads of Cylindrical Shells  
The Indian Concret Journal, May 1964.
- [50] Rüdiger, D.,  
Urban, J.: Kreiszyinderschalen  
B.G. Teubner-Verlag, Leipzig, 1955.
- [51] Sankaranarayanan, R.,  
Olszak, W.: The Load Carrying Capacities of Plates and Shells  
Non-classical Shell Problems  
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S. 842-866.
- [52] Sawczuk, A.: On Experimental Foundations of Limit Analysis  
Theory of Reinforced Concrete Shells  
Proc. of the Symposium on Shells,  
Delft, 1961, S. 217 - 231.
- [53] Schmidt, H.: Ergebnisse von Beulversuchen mit doppelt gekrümmten Schalenmodellen aus Aluminium  
Proc. of the Symposium on Shell Research, Delft, 1961, S. 159 - 181.
- [54] Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik  
VEB-Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.
- [55] Stabilini, L.: Instabilitätsprobleme im Stahlbau  
Der Bauingenieur, 1958/6 : 213 - 220.

- [56] Timoshenko, S.: Theory of elastic Stability  
Gere, J.M.: Mc Graw Hill-Verlag, New York, 1961.
- [57] Weinel, E.: Über Biegung und Stabilität eines  
doppelt gekrümmten Plattenstreifens  
Zeitschrift angew. Math.u.Mech., 1937.
- [58] Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre An-  
wendung in der Technik  
Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
- [59] Wolmir, A.S.: Biegsame Platten und Schalen  
VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.

## 1. EINLEITUNG

### 1.1 Problemstellung

Die Bauindustrie fordert vom konstruierenden Ingenieur in stets größerem Maße die Anwendung von schlankeren und wirtschaftlicheren Bauteilen. Diesem natürlichen Verlangen entsprechend finden z.B. Flächentragwerke, die früher nur selten gebaut wurden, heutzutage oft serienmäßige Verwendung.

Diese Entwicklung verlangt u.a. nach einer Verfeinerung der Berechnungsmethoden. Eine besondere Bedeutung kommt hierbei dem Studium des Tragverhaltens im Bruchzustand zu, dessen Ergebnisse oft eine bessere Ausnutzung vorhandener hoher Tragreserven ermöglichen.

Aus diesem Grunde werden in der nachfolgenden Abhandlung Stahlbetonbalken mit flächenartigem, flachem Querschnitt im Bruchzustand untersucht, um das Tragverhalten dieser Tragwerke besser erfassen zu können.

Von den zahlreichen Möglichkeiten zur Querschnittsausbildung wurde den Untersuchungen der flache Kreisquerschnitt wegen seiner häufigen baupraktischen Verwendung zugrunde gelegt. Die allgemeinen Aussagen gelten jedoch für alle flachen, dünnwandigen, offenen Querschnitte.

Aus der Theorie der Tonnendächer ist bekannt, daß Flächentragwerke mit solchen Querschnitten im Gebrauchszustand ohne besonderen Rechenaufwand zu erfassen sind. Experimentelle Versuche bestätigen außerdem, daß die gebräuchlichen vereinfachten Rechenmethoden auch bei Stahlbeton-Tonnenschalen ausreichend genaue Ergebnisse bieten.

Da solche Tragwerke, bedingt durch ihre Querschnittsform, stabilitätsgefährdet sind, muß die Sicherheit gegen Stabilitätsverlust ebenfalls bestimmt werden. In dieser Richtung weisen Experiment und Theorie keineswegs die vorher erwähnte gute Übereinstimmung auf. Genauso ungeklärt sind die Auswirkungen der Plastizität von Stahl und Beton auf das Trag- bzw. Stabilitätsverhalten.



Nachstehend wird versucht, diese Fragen für kreiszyllindrische Schalenbalken zu beantworten. Die theoretischen Untersuchungen werden zum Schluß mit den im Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Hochschule Braunschweig gewonnenen experimentellen Klein- und Großmodell-Versuchsergebnissen verglichen.

## 1.2 Annahmen

Der den Untersuchungen zugrunde gelegte "Schalenbalken" ist aus Bild 1 ersichtlich.

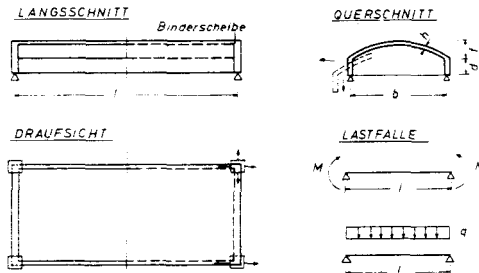


Bild 1

Nachstehend werden Annahmen getroffen, die die Grenzen der Untersuchungen festzulegen.

- Der schalenförmige Balken hat gleichbleibenden, kreisförmigen Querschnitt mit oder ohne Randglied.
- Die Belastung der Schale erfolgt entweder durch an beiden Balkenenden angreifende Biegemomente (Lastfall 1, reine Biegung) oder durch gleichmäßig verteilte Flächenlast (Lastfall 2, Biegung + Schub).
- Die Längsränder der Balken sind sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung frei verschieblich.

Um diese Bedingungen auch bei Querschnitten mit Randgliedern erfüllen zu können, wird eine Randträgerhöhe, die größer als die zweifache Scheitelhöhe des Schalensegmentes ist, ausgeschlossen.

- d) Der störende Einfluß der Endscheiben (siehe Bild 1) wird außer acht gelassen.
- e) Der Balken besteht aus Stahlbeton, wobei die Aufnahme der Zugspannungen der Stahleinlage voll zugewiesen wird. Eine evtl. vorhandene Druckbewehrung wird vernachlässigt.
- f) Es gilt das Gesetz ebenbleibender Querschnitte (Bernoulli-Hypothese).

Entgegen den Aussagen der Elastizitätstheorie (vgl. [1], [39], [41], [48], [50]) wird nachfolgend die Bernoulli-Hypothese als gültig angenommen, wenn im maßgebenden Querschnitt des Schalenbalkens noch vor Erreichen des Bruchzustandes balkenartige Ribbildung auftritt.

- g) Der Gebrauchszustand wird als bekannt vorausgesetzt und nicht näher untersucht. Es wird "Kurzzeit-Beanspruchung" zugrunde gelegt, dennoch wird auf die Möglichkeit der Berücksichtigung von zeitabhängigen Einflüssen, wie z.B. Kriechen und Schwinden, verwiesen.

### 1.3 Allgemeines über das Tragverhalten der untersuchten Balken

Untersuchungen über die Traglast fragen, ob ein Bauwerk die erforderliche Sicherheit gegen Bruch besitzt [46], [52]. Da im allgemeinen bei jeder Konstruktion verschiedene Ursachen zum Versagen führen können, ist eine gleichmäßige Sicherheit gegen alle diese Versagensmöglichkeiten anzustreben. Nimmt man als Beispiel den vollwandigen Balken, so ist die Aufgabe bekanntlich nur dann als konstruktiv richtig gelöst zu betrachten, wenn der Balken für Biegung und Schub eine gleich große Sicherheit aufweist.

Im Falle eines Balkens gemäß Bild 1 sind die im Bruchzustand maßgebenden Beanspruchungen die Längsdruck- und zugspannungen und die die Querbiegung hervorrufenden Spannungen. Alle anderen Schnittgrößen, wie Schubspannungen an den Auflagern, Längsbiegespannungen an den Endscheiben, üben

nur einen geringen Einfluß auf die Tragfähigkeit des Balkens aus, d.h. sie sind im Bruchzustand ohne Bedeutung [15], [31], [49].

Betrachtet man den Balken im Gebrauchszustand, stellt man fest, daß im Gebrauchszustand die Querbiegungsspannungen im allgemeinen unwesentlich sind, d.h. daß die der Bemessung zugrunde gelegte Biegebeanspruchung meistens mit einer Mindestbewehrung abgedeckt werden kann. Wenn man berücksichtigt, daß das Querbiegemoment infolge des biegeweichen Querschnittes bis zum Erreichen des Bruchzustandes nicht linear mit der Last anwächst und oft sogar das Vorzeichen wechselt, kann man leicht den Schluß ziehen, daß die Forderung nach gleichmäßiger Sicherheit nur ausnahmsweise erfüllt wird.

Nimmt man jenen Fall an, bei dem in Querrichtung infolge des anwachsenden Querbiegemomentes ein vorzeitig eintretender Plattenbruch nicht zu erwarten ist, tritt der Erschöpfungszustand des Balkens in der Haupttragrichtung ein, und zwar

- a) durch Versagen der Druck- bzw. der Zugzone infolge Spannungsüberschreitung im Beton oder Stahl;
- b) durch Stabilitätsverlust.

Im Falle a) handelt es sich um ein Spannungsproblem, bei dem zu bemerken ist, daß die behandelten Balken in der Regel Dachelemente und demzufolge unterbewehrt sind, so daß ein Versagen der Druckzone kaum zu erwarten ist. Die Untersuchung des Spannungsproblems kann mit Hilfe der Plastizitätstheorie oder des mit vereinfachenden Annahmen arbeitenden Traglastverfahrens (limit analysis) durchgeführt werden [15], [25], [31]. In beiden Fällen sind hinreichende materialkundliche Kenntnisse über Stahl und Beton erforderlich.

Im Falle b) liegt ein Stabilitätsproblem vor: unter gewöhnlichen Umständen versteht man darunter das Ausbeulen der Druckzone. Weniger bekannt ist, daß ein Balken mit schalenförmigem Querschnitt seine Stabilität auch unter reiner Biegung zu verlieren vermag. Diese Erscheinung ist in der

Literatur als Brazier-Effekt bekannt [39]. Für beide erwähnten Stabilitätsfälle stehen Lösungen bisher lediglich nach der Elastizitätstheorie zur Verfügung.

#### 1.4 Z u s a m m e n f a s s u n g

In der nachfolgenden Abhandlung wird ein Schalenbalken mit flachem, kreisförmigem, dünnwandigem Querschnitt auf seine Tragfähigkeit untersucht. Die Notwendigkeit einer solchen Untersuchung wurde in 1.1 erörtert. Durch allgemeine Annahmen wurde in 1.2 das Untersuchungsgebiet abgegrenzt. Als Wesentlichstes wurde vorausgesetzt, daß die Bernoulli-Hypothese gelte. In 1.3 ist das Tragverhalten des zugrunde gelegten Balkens qualitativ behandelt. Es wurde festgestellt, daß der Balken mit kreisförmigem Querschnitt stabilitätsgefährdet ist, wobei für mögliche Stabilitätsfälle das Ausbeulen der Druckzone bzw. das Verflachen des Querschnitts infolge des Brazier-Effektes zu untersuchen ist.

Auf Grund dieser allgemeinen Überlegungen wird nun im Kapitel 2 eine Stabilitätsuntersuchung nach der Elastizitätstheorie durchgeführt. Da die zu erörternden Ergebnisse zum großen Teil bekannt sind, werden die Ausführungen kurz gehalten. Die besondere Aufmerksamkeit wird dabei folgenden Fragen gewidmet:

- a) Der bisher noch nicht behandelten Tatsache, nach der die Grundgleichungen bei Beulen unter Axialdruck denen der Querschnittsverflachung unter reiner Biegung (Brazier-Effekt) gleich sind.
- b) Dem Vergleich eines Iterationsverfahrens mit der genauen Lösung für den Brazier-Effekt, um die Güte des Verfahrens, das später in Kapitel 3 für den Stahlbetonbalken entwickelt wird, zu zeigen.
- c) Den Besonderheiten, die aus einer entlang der Balkenachse veränderlichen Momentenlinie bzw. aus der Wirkung der Endscheiben folgen.

Die Untersuchungen werden an Hand der Theorie großer Deformationen durchgeführt. Die gewonnenen Ergebnisse der zwei untersuchten Stabilitätsfälle werden kritisch betrachtet und miteinander verglichen.

2. ÜBERBLICK ÜBER DIE ERGEBNISSE DER ELASTISCHEN STABILITÄTS-  
THEORIE HINSICHTLICH DES UNTERSUCHTEN SCHALENBALKENS

2.1 Allgemeines ; geschichtlicher  
Überblick

2.1.1 Beulen unter Axialdruck

Die ersten Lösungen für das Beulproblem einer geschlossenen Kreiszyinderschale unter axialem Druck nach der linearen Stabilitätstheorie der Schalen gaben LORENZ [38] (1908) und TIMOSHENKO [56] (1910) an. TIMOSHENKO entwickelte unter gleichen Annahmen eine Lösung für das zylindrische Schalenfeld. Die nach der linearen Stabilitätstheorie vollständige Lösung für den Fall gleichzeitigen axialen und radialen Druckes stammt von FLÜGGE [16] (1932). Seine vervollständigte Beultheorie berücksichtigt die Änderung der kritischen Last mit der Schalenlänge, wodurch sich Grenzfälle, wie das Knickproblem eines Kreisringes bzw. das Ausknicken eines Stabes mit kreiszylinderförmigem Querschnitt, ergeben.

Die Ergebnisse der linearen Stabilitätstheorie, die das Problem als Verzweigungsproblem behandelt, konnten in keinem Falle mit Versuchsergebnissen nachgewiesen werden. Da aus den Versuchen festgestellt werden konnte, daß Störeffekte, besonders Abweichungen von der genauen geometrischen Form, eine bedeutende Rolle spielen, wurde 1934 von DONNELL [12] versucht, diesen Einfluß näherungsweise zu berücksichtigen. Den wesentlichsten Fortschritt brachte jedoch die erste Studie von v. KÁRMÁN und TSIEN im Jahre 1941 [28]. Sie behandelt den Fall einer geschlossenen Zylinderschale unter Axialdruck nach der Theorie der großen Deformationen mit einem Lösungsansatz von 4 freien Parametern mittels der Energiemethode. Die Ergebnisse zeigen mit den Meßwer-

ten eine wesentlich bessere Übereinstimmung als die der linearen Theorie.

Dieselbe Untersuchung für ein zylindrisches Schalenfeld wurde von WOLMIR zum ersten Male 1944 durchgeführt und durch eigene Versuchsergebnisse bestätigt [59].

Seit diesen ersten Versuchen erschienen zahlreiche weitere Arbeiten, die sich im wesentlichen mit dem gleichen Problem befassen. Unter diesen sind besonders zwei hervorzuheben, die von KEMPNER [30] (1954) und von ALMROTH [2] (1963). Ihre Ergebnisse weisen ganz deutlich darauf hin, daß mit wachsender Zahl der angenommenen Ansatzglieder die Ergebnisse von v. KÁRMÁN und TSIEN noch weiter verfeinert werden können. Im ungünstigsten Fall ergibt sich nach ALMROTH mit einem neungliedrigen Ansatz nur rund ein Zehntel des Wertes der linearen Theorie, was einem Drittel des Rechenwertes von KÁRMÁN-TSIEN entspricht.

### 2.1.2 Stabilitätsverlust unter reiner Biegebeanspruchung

Mit der "Ovalisation" eines Rohrquerschnitts unter kleiner Biegebeanspruchung (linearisiertes Problem) befaßte sich zuerst v. KÁRMÁN [27] 1911.

BRAZIER [8] (1927) führte zum ersten Male Modellversuche mit geradachsigen Rohren durch, stellte unter höheren Laststufen den Stabilitätsverlust fest und gab eine Näherungslösung für die Stabilitätslast an. Seine Ergebnisse wurden von CHWALLA [10] (1933) verfeinert.

Für gerade Achse und offenen Querschnitt stellten BELUZZI [3] (1933-35) und FUNK [19] (1951) mittels Energiemethode weitere Näherungslösungen auf. Eine exakte Lösung für kreisförmige Längsachse und flache Kreisbogen-Querschnitte erbrachte WEINEL [57] (1937); seine Lösung ist jedoch für andere Querschnittsformen ungeeignet. Die allgemeine Differentialgleichung für beliebige Achsen- und Querschnittsformen stellte KOLLÁR [34], [35] (1960) auf.

2.2 Die nichtlinearen Differentialgleichungen flacher Schalen

Die Theorie großer Deformationen bei flachen Schalen geht von einer geometrischen Nichtlinearität aus und führt - in Hauptkrümmungs-Koordinatensystem dargestellt - zu folgendem nichtlinearen Differential-Gleichungssystem:

$$(1a-b) \quad \frac{D}{h} \nabla^4 w = \mathcal{L}(w, F) + \frac{1}{\rho_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{q}{h}$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} \mathcal{L}(w, w) - \frac{1}{\rho_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

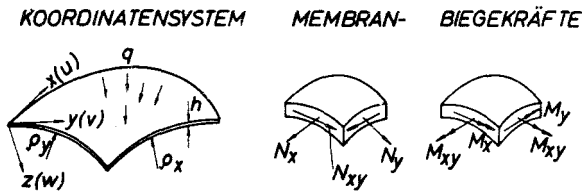


Bild 2

wobei außer den im Bild 2 erläuterten Bezeichnungen

F die Spannungsfunktion

$$(2a-c) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{h} N_y ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{h} N_x ; \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{1}{h} N_{xy}$$

$$D = \frac{EK^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{die Plattensteifigkeit}$$

E der Elastizitätsmodul

$\mathcal{L}$  nichtlineare Differentialoperator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, B) &= \frac{\partial^2(A)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2(B)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(A)}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2(B)}{\partial x^2} - \\ (3a-b) \quad &- 2 \frac{\partial^2(A)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2(B)}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$A = f_1(x, y); \quad B = f_2(x, y)$$

$\nabla^4$  linearer Differentialoperator vierter Ordnung

$$\begin{aligned} (4a-b) \quad \nabla^4(A) &= \frac{\partial^4(A)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4(A)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(A)}{\partial y^4} \\ &A = f(x, y) \end{aligned}$$

ist.

Über die gewöhnlichen Annahmen der technischen Biegetheorie hinaus wurde hierbei vorausgesetzt, daß infolge großer Deformationen

- a. Größen zweiter Ordnung in  $w$  und
- b. Die Rückwirkung des deformierten Zustandes auf das Kraftspiel

berücksichtigt werden müssen. Da Gln. (1a - b) nur für flache Schalen gelten sollen, wurde die Nichtlinearität der Verschiebungskomponente  $u$  und  $v$  außer acht gelassen und die Krümmungsbeziehung weiterhin als linear angesetzt.

Vernachlässigt man die nichtlinearen Glieder in Gln. (1a - b) und nimmt man gleichmäßig verteilte Randangriffe ( $N_{xr}$ ,  $N_{yr}$ ,  $N_{xyr}$ ) an, so lassen sich für den Fall Kreiszyinderschale ( $\rho_y = R$ ) die 2 simultanen Differentialgleichungen zu einer Differentialgleichung achter Ordnung zusammenfassen:

$$\begin{aligned} (5) \quad D \nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= -N_{xr} \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \\ &- 2N_{xyr} \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - N_{yr} \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

wobei der Index  $r$  auf die Randangriffe hinweist. Die so gewonnene Differentialgleichung ist die Ausgangsgleichung der



linearen Stabilitätstheorie flacher Kreiszyinderschalen.

2.3 Bestimmung der Beullast unter gleichmäßigem Axialdruck

2.3.1 Bestimmung der kritischen Beulspannung nach der linearen Stabilitätstheorie

Angenommen wird ein Lastfall nach Bild 3, wobei entlang der Erzeugenden die Navier'schen Randbedingungen gelten. Aus der linearisierten Gl. (5) ergibt sich für diesen Randangriff folgende Differentialgleichung:

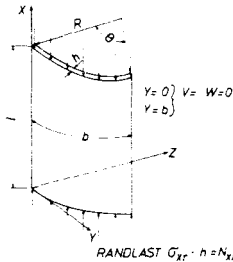
$$(6) \quad D \nabla^4 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_{xr} \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

Wählt man den Ansatz in Form der nachfolgenden Doppel-Fourierreihe:

$$(7) \quad w = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

ergibt sich dann folgende Gleichung für die Randspannung  $\tilde{\sigma}_{xr}$ :

$$(8) \quad \tilde{\sigma}_{xr} = \frac{D}{h b^2} \pi^2 c^2 + \frac{E}{R^2} \frac{b^2}{\pi^2 c^2}$$



wobei

$$(9) \quad c = \left( \frac{n^2 b}{l^2} + \frac{n^2}{b} \right) \frac{l}{m}$$

Bild 3 ist. Die kritische Spannung erhält man, wenn in Gl. (8) nach d differenziert und dessen Extremwert in dieselbe Gleichung wieder einsetzt, woraus sich

$$(10) \quad \tilde{\sigma}_{x,cr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{h}{R}$$

ergibt. Für Stahlbeton setzt man  $\nu = 0$ :

$$(11) \quad \tilde{\sigma}_{k,kr} = 0,577 E \frac{h}{R}$$

Diese kritische Spannung nach TIMOSHENKO [56] gilt nur für Fälle, bei denen der Zentriwinkel der Schale

$$(12) \quad \varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}$$

ist.

### 2.3.2 Bestimmung der kritischen Druckspannung nach der nicht-linearen Theorie

Zur Lösung der Gl. (1a - b) wählt man einen zweckmäßigen Ansatz für die Verschiebung  $w$ . Da Untersuchungen mehrfach ergaben, daß Ansätze mit einem Glied nur für ganz flache Schalen, die baupraktisch nicht möglich sind, eine befriedigende Näherung darstellen, wird nun ein Ansatz mit zwei Gliedern in folgender Form angenommen [59]:

$$(13) \quad w = a_1 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} + a_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{l} \sin^2 \frac{n\pi y}{b}$$

Im Ansatz (13) wird zunächst die Halbwellenzahl in beiden Richtungen als gleich groß angenommen. Diese Annahme setzt quadratische Beulfelder voraus, so daß  $\pi/l = \pi/b$  ist.

Setzt man nun diesen Ansatz in Gl. (1b) ein, so ergibt sich für die Spannungsfunktion eine inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung, für die sich eine partikuläre Lösung auf einfachem Wege gewinnen läßt:

$$\begin{aligned} F = & \frac{Ea_1^2}{32} (\cos 2n\alpha + \cos 2n\beta) + \frac{Ea_2^2}{32} (\cos 2n\alpha + \\ & + \cos 2n\beta) - \frac{Ea_3^2}{512} (\cos 4n\alpha + \cos 4n\beta) + \\ & + \frac{Ea_4^2}{800} (\cos 4n\alpha \cos 2n\beta + \cos 2n\alpha \cos 4n\beta) - \\ & - \frac{Ea_5^2}{64} \cos 2n\alpha \cos 2n\beta + \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} & - \frac{3Ea_2a_2}{200} (\sin \alpha x \sin 3\alpha \beta + \sin 3\alpha x \sin \alpha \beta) - \\ & - \frac{Ea_2}{4} \sin \alpha x \sin \alpha \beta - \frac{Ea_2}{16R} \frac{b^2}{\lambda^2 \pi^2} \cos 2\alpha x + \\ & + \frac{Ea_2}{64R} \frac{b^2}{\lambda^2 \pi^2} \cos 2\alpha x \cos 2\alpha \beta + \frac{Ea_2}{4R} \frac{b^2}{\lambda^2 \pi^2} \sin \alpha x \sin \alpha \beta \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha = \frac{\pi x}{l} ; \quad \beta = \frac{\pi y}{b}$$

Da diese Funktion die Randbedingungen nicht befriedigt, muß die homogene Lösung entsprechend gewählt werden.

Der einfachste Ansatz ist hierfür:

$$(15) \quad F_h = - \frac{\sigma_{xr} y^2}{2}$$

Dieser Ansatz erfüllt nur jene Bedingung, nach der die Randspannungen an beiden Enden des Schalenfeldes der äußeren Last entsprechen müssen. Weitere Ansatzglieder müßten die die Randbedingungen nicht befriedigenden Randkräfte der inhomogenen Lösung zum Verschwinden bringen. Solche Glieder vergrößern jedoch den Rechenaufwand. Den Fehler, der durch Vernachlässigung dieser Glieder entsteht, kann man verringern, wenn man Energieanteile an den äußeren Rändern nur aus solchen Kraftgrößen berücksichtigt, die den jeweiligen Randbedingungen entsprechen. In diesem Falle gelangt man dann zu folgendem Ausdruck:

$$(16) \quad \begin{aligned} \Pi = & \frac{Ehab}{2} \left[ \frac{\lambda^4 \pi^4}{b^4} \left( \frac{a_1^4}{32} + \frac{533a_2^4}{12800} + \frac{168a_1^2 a_2^2}{800} \right) + \right. \\ & + \frac{a_1^2}{8R^2} + \frac{9a_2^2}{128R^2} - \frac{5a_2^3}{64R} \frac{\lambda^2 \pi^2}{b^2} - \frac{5a_1^2 a_2}{16R} \frac{\lambda^2 \pi^2}{b^2} - \\ & \left. - \frac{2\sigma_{xr}}{E^2} - \frac{\sigma_{xr} a_1^2}{2E} \frac{\lambda^2 \pi^2}{b^2} - \frac{3\sigma_{xr} a_2^2}{8E} \frac{\lambda^2 \pi^2}{b^2} \right] + \\ & - \frac{1}{2} D (2a_1^2 + 4a_2^2) \frac{\lambda^4 \pi^4}{b^4} ab \end{aligned}$$

wobei  $\Pi$  die potentielle Energie des Schalenfeldes bezeichnet.

Nach Differentiation

$$(17) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$$

erhält man folgende zwei Gleichungen, die die Beziehung zwischen vorgegebener Randlast und Durchbiegung herstellen:

$$\begin{aligned} \sigma_{xr}^* &= 3,62N^2 + \frac{k^2}{4\pi^2N^2} + \frac{\pi^2}{8}N^2(1 + 3,36\psi^2)\zeta^2 - 0,625k\psi\zeta \\ (18a-b) \quad 0 &= 1,47N^2\zeta^2\psi^3 - 0,94k\zeta\psi^2 - \\ &\quad - (3,22N^2\zeta^2 - 0,0047\frac{k^2}{N^2} + 4,52N^2)\psi + 0,13k\zeta \end{aligned}$$

wobei 
$$\sigma_{xr}^* = \frac{\sigma_{xr}b^2}{Eh^2}; \quad \psi = \frac{a_2}{a_1}$$

(19a-d) 
$$\zeta = \frac{a_1}{h}; \quad k = \frac{b^3}{Rh}$$

Betrachtet man Gl. (18a), kann man feststellen, daß die ersten zwei Glieder durchbiegungsunabhängig sind und mit der Annahme  $m = n$  und  $l = b$  das Ergebnis der linearen Theorie wiedergeben:

$$(20) \quad \tilde{\sigma}_{xkr, lin}^* = 3,62N^2 + \frac{k^2}{4\pi^2N^2}$$

Aus Gl. (18b) ergibt sich  $\psi$  identisch Null, so lange keine Durchbiegungen vorhanden sind. Um die Ergebnisse für ein bestimmtes Krümmungsverhältnis darzustellen, variiert man die Verschiebungswerte  $\zeta$  von Null ab in Richtung der größeren positiven Werte, wobei die Halbwellenzahl zunächst noch konstant zu halten ist. Für jeden Wert von  $\zeta$  ist dann Gl. (18b) aufzulösen und die kleinste Wurzel in Gl. (18a) einzusetzen, wodurch sich bezogene Spannungsgrößen  $\tilde{\sigma}_{xr}$  bestimmen lassen. Wiederholt man den gleichen Vorgang für andere

Werte der Halbwellenzahl, so kann aus den zu den verschiedenen Halbwellenzahlen gehörenden  $\tilde{\sigma}_{xr}$ -Kurven in jedem Bereich die maßgebende ausgewählt werden (s. Bild 4).

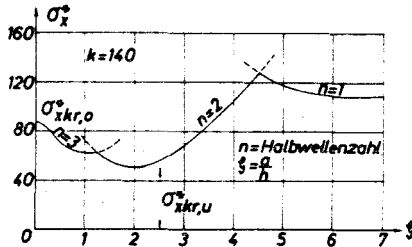


Bild 4

Führt man die obige Untersuchung für verschiedene Krümmungsverhältnisse durch, dann können die Ergebnisse für obere und untere kritische Spannungen mit zugehörigen Halbwellenzahlen in Abhängigkeit von der Krümmung dargestellt werden (s. Bild 5).

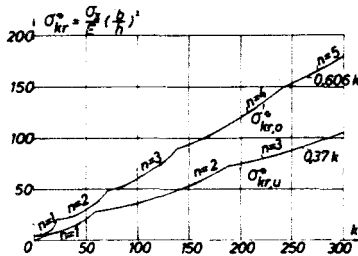


Bild 5

Aus dieser Darstellungsweise ergibt sich für die Tangente der Wellenkurven ( $\nu = 0,3$ )

$$\tilde{\sigma}_{xkr,0}^* = 0,605 k$$

bzw.

$$(21a-b) \quad \tilde{\sigma}_{xkr,u}^* = 0,370 k$$

Gl. (21b) stellt eine erste Näherung einer zu berücksichtigenden Abminderung der kritischen Spannung dar.

Ergänzt man den Ansatz (13), um Fälle  $m \neq n$  studieren zu können, ergibt sich dann für die untere kritische Spannung ein noch weiter verminderter Betrag von

$$(21c) \quad \bar{\sigma}_{x,kr,u} = 0,260 k$$

Die angegebenen Werte beziehen sich auf eine absolut formtreue Schale. In praktischen Fällen ist jedoch von großer Wichtigkeit zu wissen, wie Abweichungen von der genauen geometrischen Form das Stabilitätsverhalten der Schale beeinflussen. Im allgemeinen wird bei solchen Untersuchungen angenommen, daß die Formabweichung zur Beulfigur konform ist [12], [28], [59].

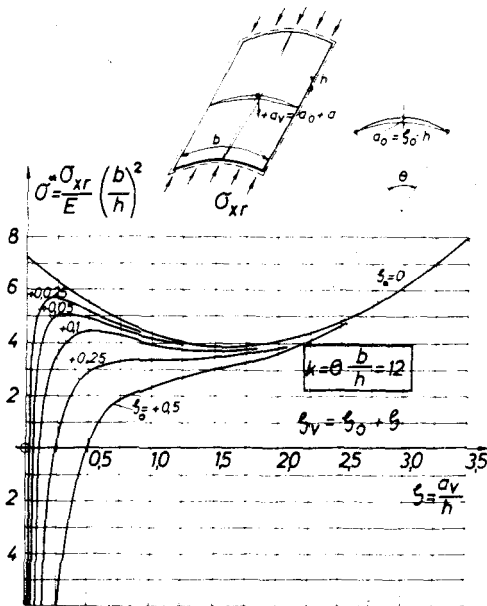


Bild 6

Auf dieser Grundlage beruhen die in Bild 6 wiedergegebenen Ergebnisse. Aus ihnen geht hervor, daß Anfangsdeformationen ein sehr starkes Herabsetzen der oberen kritischen Spannung bewirken. Demgegenüber wird die untere kritische Spannung erst bei beträchtlichen Formabweichungen, die praktisch nicht mehr als "Formuntreueheiten" zu bezeichnen sind, bemerkbar beeinflußt.

Der Vollständigkeit halber wurde in Bild 7 die "störende Wirkung" von Flächenlast auf das Beulverhalten der Schale für verschiedene Lastintensitäten wiedergegeben. Wie aus physikalischen Gründen zu erwarten ist, ändert die Flächenlast das Deformationsverhalten des Schalenfeldes in ähnlicher Form als wenn eine Anfangsdeformation vorhanden wäre.

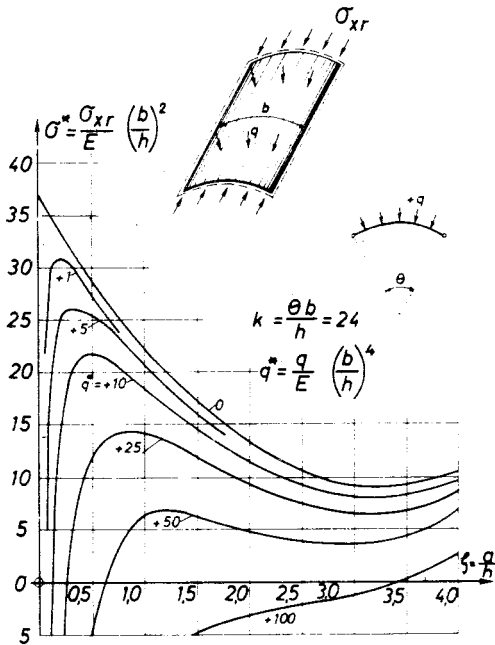


Bild 7

### 2.3.3 Energetische Betrachtungen der Ergebnisse

Um feststellen zu können, welche kritische Spannung einem

Sicherheitsnachweis von beulgefährdeten Konstruktionen zugrunde gelegt werden sollte, ist es zweckmäßig, die gesamte potentielle Energie des Systems zu studieren. Im einfachsten Fall verläuft die charakteristische Lastdurchbiegungskurve entsprechend Bild 8. Untersucht man die zu den verschiedenen im Bild dargestellten waagerechten Schnitten gehörende Funktion der potentiellen Energie, kann man drei voneinander abweichende Bereiche unterscheiden:

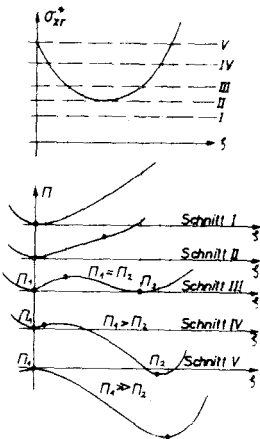


Bild 8

- a) Unter der unteren kritischen Spannung ist eindeutig nur eine einzige stabile Lage möglich, die dem ursprünglichen Zustand der Schale entspricht (Schnitt I).
- b) Über der unteren kritischen Grenze (Schnitt III-IV) sind 3 Gleichgewichtslagen möglich, von denen die ursprüngliche und die am tiefsten ausgebeulte stabil sind, während diejenige, zu der nur kleine Verschiebungen gehören, labil ist. Von den zwei stabilen Lagen wird nach Erreichen einer gewissen Spannungsgrenze (vgl. Schnitt III) die ausgebeulte ein kleineres Energieniveau besitzen. Von dieser Grenze ab ist eine schlagartige Durchbiegung zu erwarten.
- c) Im Schnitt an der oberen kritischen Spannung gehört zu dem ursprünglichen Zustand eine indifferente und zu dem jetzt schon einzigen ausgebeulten eine stabile Gleichgewichtslage (vgl. Schnitt V).



Den vorstehenden Betrachtungen entsprechend existieren drei verschiedene Auffassungen, um eine der Bemessung bzw. dem Nachweis zugrunde zu legende kritische Spannung anzugeben:

- a) Obere kritische Spannung: Da dieser Wert in Abhängigkeit von einem Störeffekt sehr stark schwankt, wäre es zu aufwendig, ihn von Fall zu Fall zu ermitteln. Legt man den Wert ohne Störungen zugrunde - mit einem entsprechend großen Sicherheitsbeiwert - so besteht kein richtiger Zusammenhang zwischen der ermittelten Sicherheitszahl und der Wirklichkeit. Trotzdem wird heute dieses Verfahren praktiziert.
- b) Spannung, bei der zu den zwei möglichen Gleichgewichtslagen gleich große potentielle Energie gehört (s. Bild 8, Schnitt III):  
  
Dieses Verfahren wäre zwar theoretisch das beste, erfordert aber einen sehr großen Rechenaufwand. Vorgeschlagen wurde diese Methode von v. KÁRMÁN-TSIEN.
- c) Die untere kritische Spannung: Da dieser Wert auch bei relativ großen Störeffekten ziemlich stabil bleibt, wäre es zweckmäßig, ihn den Berechnungen zugrunde zu legen. In diesem Falle ist natürlich ein wesentlich kleinerer Sicherheitsbeiwert notwendig.

## 2.4 Stabilitätsverlust unter reiner Biegebeanspruchung

### 2.4.1 Erläuterungen des Brazier-Effektes

Zur Erläuterung des Verflachungseffektes - in der Fachliteratur [34], [39] als Brazier-Effekt genannt - nimmt man einen Balken mit flachem, dünnwandigem, offenem Kreisquerschnitt (s. Bild 9) und läßt an beiden Enden des Balkens Biegemomente wirken. Es wird dabei angenommen, daß sich das Biegemoment als Momentensumme aller linear über die Höhe des kreisförmigen Querschnitts verteilten Längskräfte ergibt. Diese Annahme erlaubt, für jeden beliebigen Querschnitt dieselbe Spannungsverteilung vorauszusetzen.

Auf Grund der Biegung wird die Längsachse des Balkens gekrümmt; im gegebenen Falle wird der Krümmungsradius entlang der ganzen Balkenlänge konstant bleiben (reine Biegung). Betrachtet man das Gleichgewicht eines herausgeschnittenen Elementes  $dx = 1$  im deformierten Zustand (s. Bild 9), so

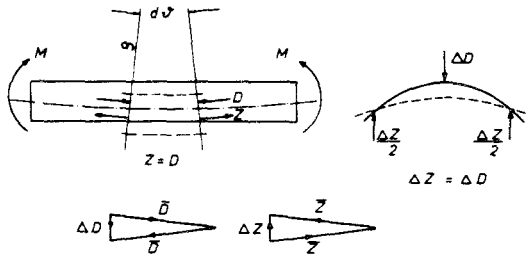


Bild 9

kann man feststellen, daß die Wirkungslinien der aus den inneren Schnittkräften resultierenden Druck- und Zugkomponente miteinander einen Winkel einschließen. Über diesen Winkel kann man aus ähnlichen Dreiecken bestimmen, daß er  $d\vartheta$  gleich ist. Das Gleichgewicht stellen dann die nach oben ( $\Delta Z$ ) bzw. nach unten ( $\Delta D$ ) gerichteten, den Querschnitt in seiner Ebene verbiegenden Umlenkkräfte her (vgl. Bild 9, Vektordreieck).

Eine Querbiegung des Querschnitts führt jedoch zur Verminderung der Steifigkeit und dadurch zum Krümmungszuwachs; gleichzeitig werden die Spannungen vergrößert: ihr Wert hängt mit dem angreifenden Biegemoment nicht mehr linear zusammen. Erhöht man das Biegemoment, so wird bei dessen bestimmter Größe der Zustand erreicht, in dem das Gleichgewicht infolge der großen Querbiegung nicht mehr herzustellen ist: der Querschnitt schlägt durch.

### 2.4.2 Herleitung der Differentialgleichung; ihre Lösung

Nachfolgend wird das in 2.2 eingeführte Differentialgleichungssystem (1a - b) für den speziellen Fall reiner Biegung umgeformt und mit den Ableitungen von KOLLÁR [34] verglichen.

Im vorliegenden Falle gilt dann

$$(22) \quad q = 0$$

bzw.

$$(23a-c) \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$$N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

da diese Schnittgrößen vertikale Komponenten enthalten, die nach der Annahme (22) ausgeschlossen sind.

Die Randmomente werden - wie im erläuternden Beispiel nach 2.4.1 - als Resultierende eines über die Querschnittshöhe linear verteilten Längskraftsystems  $N_x$  in den Balken eingeleitet, woraus sich für die Längskrümmung

$$(24a-b) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \text{konst.} ; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

ergibt. Schließlich folgt aus den Randbedingungen am Rande  $x = 0$  und  $x = \ell$ , daß die Querdeformationen in jedem Querschnitt gleich, d.h. nur von  $y$  abhängig sind:

$$(25a-b) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß beide gesuchten Größen  $w$  und  $F$  nur Funktionen von  $y$  sind, so daß statt partieller die einfache Differentiation genügt. Aus Gln.

(1a - b) erhält man dann die folgenden stark vereinfachten Differentialgleichungen:

$$(26a-b) \quad \frac{D}{h} \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{1}{\rho} \tilde{\sigma}_x$$

$$\frac{1}{E} \frac{d^2 \tilde{\sigma}_x}{dy^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{1}{R} \frac{1}{\rho}$$

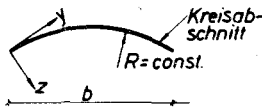
Integriert man die zweite Gleichung zweimal und setzt man den erhaltenen Wert von  $\tilde{\sigma}_x$  in die erste Gleichung ein, so bekommt man eine einzige Differentialgleichung vierter Ordnung. Sie lautet:

$$(27) \quad \frac{h^2}{12} w^{IV} = \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{w}{\rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{y^2}{2R} + k \right]$$

wobei  $k$  eine Integrationskonstante ist. Die zweite Integrationskonstante kann im Hinblick auf die Symmetrie im gewählten kartesischen Koordinatensystem (vgl. Bild 10) zu Null gesetzt werden. Führt man nun die folgende Bezeichnung nach KOLLÁR [34] ein:

$$(28) \quad 4\beta^4 = \frac{12}{k^2 \rho^2}$$

HAUPTKRÜMMUNGS-KOORDINATEN:

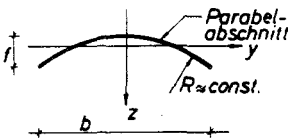


so erhält man die Differentialgleichung:

$$w^{IV} + 4\beta^4 w =$$

$$(29) \quad = 4\beta^4 \left[ \frac{y^2}{2R} + k \right]$$

KARTHESISCHE-KOORDINATEN:



Statt des Klammerausdrucks findet man bei KOLLÁR  $z_0(y)$  (vgl. Bild 10). Nimmt man wie KOLLÁR an, daß

$$(30) \quad z_0 = f \left( \frac{4y^2}{6^2} - \frac{1}{3} \right)$$

Bild 10

ist und errechnet man nach zweimaligen Differentiationen den Wert  $\frac{1}{R}$ , so ist ersichtlich, daß der Klammerausdruck von Gl. (29) dem von KOLLÁR identisch gleich ist.

Während der durchgeführten Vereinfachungen an Gl. (1a-b) entstand eine scheinbare Linearisierung des Problems: Gl. (29) ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung. Um auf die immer noch bestehende Nichtlinearität deutlich hinweisen zu können, untersucht man am zweckmäßigsten das innere Biegemoment eines Querschnitts:

$$(31) \quad M = \int_{(F)} N_x z \, dy$$

wobei

$$(32) \quad N_x = \frac{M}{J} z = \frac{z}{\rho} E h$$

und

$$(33) \quad z = z_0 + w$$

ist. Setzt man Gln. (32). (33) in Gl. (31) wieder ein, so ergibt sich folgende Beziehung

$$(34) \quad M = \int_{(F)} E h \frac{z^2}{\rho} \, dy = \frac{E h}{\rho} \int_{(F)} (z_0 + w)^2 \, dy$$

die zeigt, daß zwischen Biegemoment und Verschiebungen ein nichtlinearer Zusammenhang besteht.

Die Differentialgleichung (29) ist in ihrem Aufbau gleich der des elastisch gebetteten Balkens. Deren allgemeine Lösung lautet bekanntlich wie folgt:

$$(35) \quad w_k = A \operatorname{ch} \beta y \cos \beta y + B \operatorname{sh} \beta y \sin \beta y + \\ + C \operatorname{ch} \beta y \sin \beta y + D \operatorname{sh} \beta y \cos \beta y$$

wobei die vier Konstanten aus den Randbedingungen zu ermitteln sind. Die partikuläre Lösung ist einfach zu finden, sie ist jedoch von der Querschnittsform abhängig.

Bestimmt man die partikuläre Lösung für den Fall flachen Kreisquerschnitts und ermittelt die Konstanten A - D aus

Gl. (35) mittels Symmetrie- und Randbedingungen, so kann man die gewonnene Lösung in Gl. (34) einsetzen und die Integration durchführen. Hieraus ergibt sich [35]:

$$(36) \quad \frac{M}{EJ_0} \frac{\sqrt{3} b^2}{4h} = \left(\frac{\beta b}{2}\right)^2 \chi_2$$

wobei für  $\chi_2$  mit guter Näherung

$$(37) \quad \chi_2 = \frac{1}{1 + 0,160(\beta b/2)^4 + 0,084(\beta b/2)^6}$$

gilt [35]. Gl. (36) ist in Bild 11 graphisch wiedergegeben. Betrachtet man den Verlauf der dargestellten Kurve, so ist eindeutig festzustellen, daß sich der Querschnitt weicher verhält als ein vollwandiger Querschnitt und nach Erreichen einer gewissen Längskrümmung versagt. Aus den in Bild 11 eingetragenen Zahlenwerten lassen sich für beliebige geometrische Verhältnisse das kritische Moment sowie die kritische Lösungskrümmung (und daraus die Durchbiegung) errechnen.

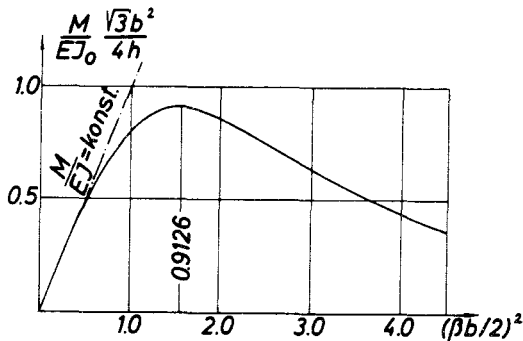


Bild 11

Zu einem späteren Vergleich mit den Ergebnissen 2.3.2 (s. 2.6!) ist es interessant, die kritische Druckspannung im Scheitelpunkt des Querschnitts zu kennen:

$$(38) \quad \sigma_{\text{xkrit}} = 0,086 E \frac{h}{R}$$

#### 2.4.3 Näherungsverfahren zur Bestimmung des kritischen Biegemomentes

Um das kritische Biegemoment für einen Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung versagender Zugzone zu ermitteln, schien eine geschlossene Lösung ähnlich der von KOLLAR (vgl. 2.42) wenig geeignet. Für dieses Problem wurde ein Näherungsverfahren entwickelt, das in 3. im einzelnen wiedergegeben wird.

Es ist jedoch von großer Wichtigkeit zu wissen, mit welcher Genauigkeit bei dieser Näherung gerechnet werden darf. Diese Untersuchung wurde im Rahmen dieser Arbeit auf zwei Wegen durchgeführt.

- 1) Unter Verwendung des gleichen Näherungsverfahrens für homogenes, elastisches Material;
- 2) durch Überprüfung der speziellen "stahlbetonartigen" Annahmen an Hand von Versuchsergebnissen.

Nachfolgend wird die erste Untersuchung durchgeführt; die gewonnenen Ergebnisse werden mit denen nach KOLLAR verglichen.

Es gelten die Annahmen mit Ausnahme von e) nach 1.2; an Stelle Annahme f) tritt für elastische Balken mit Endscheiben:

- f) Zur Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese wird die Erfüllung folgender geometrischer Bedingung gefordert:

$$(39) \quad \frac{\ell}{b} = 6,0$$

(vgl. hierzu: 2.5).

Zwecks Vereinfachung der Rechenarbeiten werden folgende zwei Näherungen getroffen:

- 1) Im beliebigen, deformierten Zustand kann der ursprünglich kreisförmige Querschnitt zur Bestimmung der jeweiligen Steifigkeit - und nur zu diesem Zweck - weiterhin als kreisförmig angenommen werden;
- 2) während der Bestimmung der Scheiteldurchbiegung kann die in Wirklichkeit stetige Quermomentenlinie durch eine geradlinige ersetzt werden.

Der den Untersuchungen zugrunde gelegte Balken ist in Bild 12 dargestellt. Es wird das kritische Biegemoment gesucht. Die Größen ohne Index beziehen sich auf einen beliebigen, deformierten Zustand; der Index 0 bezeichnet den Ausgangszustand.

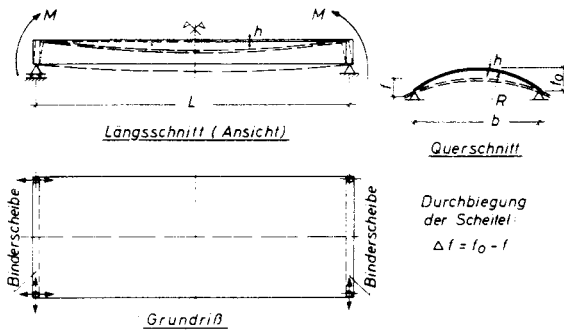


Bild 12

Um die Gesamtdruckkraft zu erhalten, ermittelt man zunächst das statische Moment der Druckzone und das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnitts. Hierbei wird der flache Kreisbogen durch eine Parabel ersetzt.



$$(40) \quad J = \frac{8kf^2b}{90} = 0,089kf^2b$$

$$(41) \quad S_{x0} = 0,586k \frac{2}{3} \frac{f}{3} = 0,129kbf$$

Unter der Einwirkung eines konstanten Biegemomentes entsteht folgende Druckkraft:

$$(42) \quad D = \frac{MS_{x0}}{J} = 1,45 \frac{M}{f}$$

Die vertikalen Resultierenden, die den Querschnitt in Querrichtung deformieren, erhält man nach Bild 9 (vgl. 2.4.1), indem man die Ähnlichkeit zwischen dem Vektordreieck und einem Element der Schale in Ansatz bringt:

$$(43) \quad \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$$

Setzt man nun die Verteilung der den Querschnitt biegenden

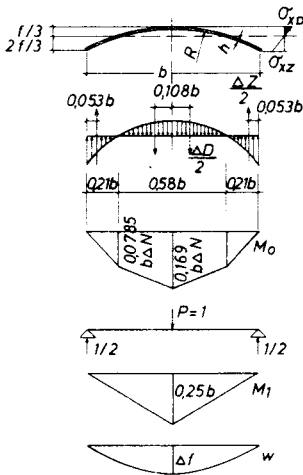


Bild 13

Kräfte der Längsspannungsverteilung gleich, - d.h. entlang der Bogenlänge parabelförmig - so kann man die aus der Querbiegung resultierende Scheiteldurchbiegung ermitteln. Dabei wird der Verlauf der krummlinigen Biegelinie mit Geraden abgegrenzt (s. Bild 13, vgl. Annahme 2), woraus sich die Durchbiegung des Scheitelpunktes zu:

$$(44) \quad \Delta f = 0,1745 \frac{\Delta D}{E} \left(\frac{b}{k}\right)^3$$

ergibt. Ersetzt man in Gl. (44)  $\Delta D$  durch Gl.(42) und Gl.(43), erhält sie dann

folgende Form:

$$(45) \quad \Delta f = 0,253 \left(\frac{M}{E}\right)^2 \left(\frac{b}{h}\right)^3 \frac{1}{J_f}$$

Für das Verhältnis  $\Delta f/f_0$  wird  $\alpha$  - bezogene Durchbiegung - eingeführt, woraus sich das Trägheitsmoment eines deformierten Querschnitts unter Ausnutzung Annahme 1 ermitteln läßt:

$$(46) \quad J = J_0 (1 - \alpha)^2$$

Der Parameter  $\alpha$  kann ebenso in Gl. (45) eingeführt werden. Mit der gleichzeitigen Berücksichtigung von Gl. (46) sowie durch Multiplikation der rechten Gleichungsseite mit  $J_0/J_0$  erhält man dann:

$$(47) \quad \alpha (1 - \alpha)^2 = 0,0225 \left(\frac{M}{EJ_0}\right)^2 \frac{b^4}{h^2} \cdot \frac{f_0}{f}$$

Da auf der rechten Seite Gl. (47)  $f_0/f$  durch  $\alpha$  ausgedrückt werden kann, erhält man nach weiteren Umformungen die endgültige Formel für das kritische Biegemoment:

$$(48) \quad \frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4h} = 2,89 \sqrt{\alpha (1 - \alpha)^3}$$

wobei auf der linken Seite Gl. (48) derselbe Ausdruck wie nach KOLLÁR [35] (vgl. Gl. (36)) steht.

Um das Maximum zu bestimmen, differenziert man Gl. (48) nach  $\alpha$ :

$$(49) \quad \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{4h} \right) = 2,89 \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha (1 - \alpha)^3}} \left( (1 - \alpha)^3 - 3\alpha (1 - \alpha)^2 \right) \right] = 0$$

Die Auflösung von Gl. (49) ergibt die Maximumstelle bei

$$(50) \quad \alpha = 0,25$$

Das zu dieser Stelle gehörende kritische Biegemoment wird dann:

$$(51) \quad \frac{M_{kr}}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{4h} = 0,935$$

Die Abweichung vom genauen Wert nach KOLLÁR (vgl. Bild 11) beträgt:

$$(52) \quad \delta = \frac{0,935 - 0,912}{0,912} \cdot 100 \approx 2,5\%$$

Dieser geringfügige Unterschied zwischen dem genauen und angenäherten Wert des kritischen Biegemoments rechtfertigt die eingeführten Rechenannahmen 1 und 2 im Falle des Stahlbetonquerschnitts.

## 2.5 Stabilitätsverlust unter veränderlicher Biegebeanspruchung:

Für die untersuchten Balken ist der baupraktisch häufigste Lastfall die gleichmäßig verteilte Flächenlast. Da bei diesem Lastfall keine Biegelinie mit konstanter, sondern jene mit veränderlicher Krümmung auftritt, werden nachstehend die daraus resultierenden Besonderheiten betrachtet. Der wesentliche Unterschied zur reinen Biegung besteht

darin, daß die veränderliche Biegebeanspruchung Biegeschubkräfte hervorruft, die in der ersten Näherung (vgl. WLASSOW [58], LUNDGREN [39]) die ganze Flächenlast in Querrichtung abtragen. Nimmt man einen nicht deformierbaren Querschnitt an (siehe Balkenanalogie), so entsteht ein Querbiegemomentsverlauf nach Bild 14,

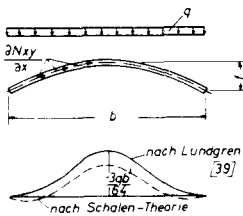


Bild 14

woraus ein dem Brazier-Effekt entgegengesetzter Deformationszustand resultieren würde. Da Querschnittdeformationen jedoch unter geringer Belastung auftreten, wird diese entgegengesetzte Tendenz zum Teil abgebaut, d.h. es ent-

steht nach der Schalentheorie ein kleineres negatives Biegemoment als nach der Balkenanalgie. Immerhin bleibt aber der Einfluß beträchtlich.

Wie in 2.4 beschrieben, hängt die Größe des kritischen Biegemomentes unter reiner Biegung lediglich von den Querschnittsgrößen ab, da sich bei dieser Beanspruchung jeder Querschnitt im gleichen Zustand befindet. Entsteht das Biegemoment aus einer Flächenlast, dann wird es von der Intensität der Flächenlast abhängig sein. Angenommen, die Deformationen aus den Schubkräften sind vernachlässigbar klein oder sogar Null, dann entspricht dieser Annahme ein unendlich langer Balken mit unendlich kleiner Flächenlast-Intensität. Je kleiner die Balkenlänge wird, eine um so größere Flächenlast ist erforderlich, um das kritische Biegemoment zu erreichen. Zur größeren Flächenlast gehören aber stets größere Schubdeformationen, die durch ihre entgegengesetzte Wirkung auf den Brazier-Effekt das kritische Biegemoment erhöhen.

Als sekundäre Einflüsse sind dabei folgende zu beachten:

- a) die direkte Wirkung der Flächenlast auf die Querschnittsdeformation, die zumindest als Störung in der Nähe des kritischen Moments miteinzubeziehen ist;
- b) der unterschiedliche Deformationszustand zweier benachbarter Querschnitte infolge der Krümmung der Momentenlinie.

Für einen Balken mit schalenförmigem Querschnitt ist es unbedingt erforderlich, daß er an beiden Enden mit starren Scheiben versehen ist, um die Auflagerkräfte richtig einzuleiten. Da die Endscheiben eine Behinderung der seitlichen Deformationsfähigkeit des Balkens bedeuten, ist genau wie bei den Auswirkungen der Schubdeformationen zu erwarten, daß sie das kritische Moment nach 2.4 erhöhen. Ebenso ist leicht einzusehen, daß auch die Wirkung der

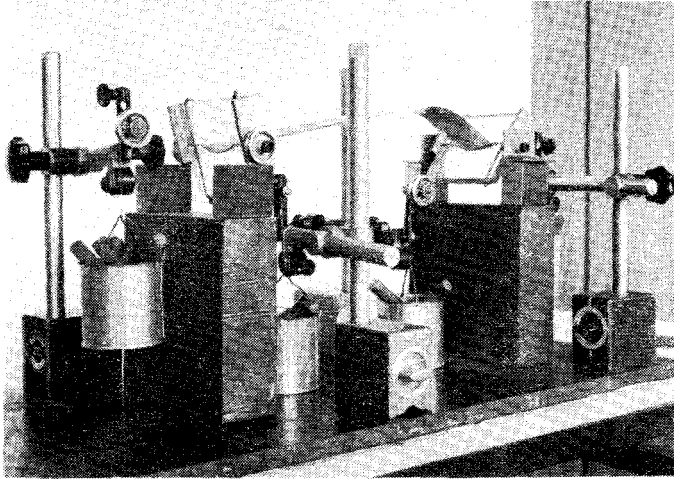


Bild 15

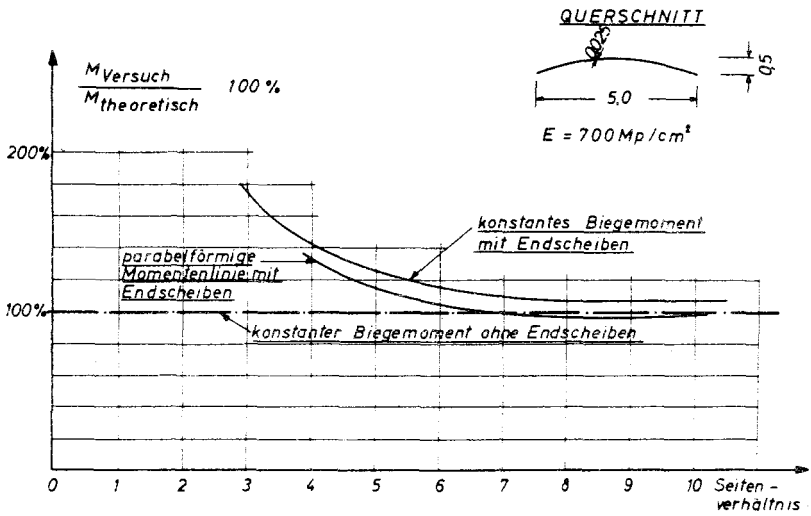


Bild 16

Endscheiben von der Balkenlänge abhängig ist, da bei einem unendlich langen Balken die Endscheiben keinerlei Einflüsse ausüben können.

Um die vorgenannten Probleme strenger zu behandeln, wäre es notwendig, lt. Gl. (1a - b) die vollständige Differentialgleichung zu lösen. Da die Lösung eine Vielzahl von Ansatzgliedern erfordert, wobei die einigermaßen genaue Berücksichtigung der Randbedingungen weiterhin große Schwierigkeiten mit sich bringt, schien es zweckmäßiger, diese Wirkungen experimentell zu studieren.

Die experimentellen Versuche wurden im Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der TH Braunschweig durchgeführt. Der Versuchsaufbau ist aus Bild 15 ersichtlich. Einzelheiten über die Versuche sind in [36] behandelt, nachfolgend werden lediglich die für das vorliegende Problem interessanten Endergebnisse wiedergegeben.

Es wurden zwei Lastfälle geprüft: reine Biegung mit Endscheiben und gleichmäßig verteilte Flächenlast.

Beide durchgeführten Serien ergaben mit einem geringen Unterschied dieselbe Gesetzmäßigkeit für die Erhöhung des kritischen Moments mit der Abnahme der Balkenlänge. Der gewonnene Zusammenhang ist in Bild 16 dargestellt. Daraus ist zu ersehen, daß bei einem Seitenverhältnis von 1 : 6 weder die Endscheiben noch die Flächenlast eine Abminderung des kritischen Momentes verursachen.

Selbstverständlich dienen diese Ergebnisse nur der allgemeinen Übersicht, da während der Untersuchungen ein wichtiger Parameter - das Schalendicke-Krümmungsradius-Verhältnis - konstant 1 : 250 gehalten wurde.

## 2.6 Zusammenfassung und kritische Betrachtung der Ergebnisse nach der Elastizitätstheorie

Im vorangegangenen Kap. 2 wurden - nach einem geschichtlichen Überblick (2.1) sowie der Erläuterung der geome-

trisch nichtlinearen Grundgleichungen für die Stabilitätstheorie flacher Schalen (2.2) - die für das vorliegende Problem in Frage kommenden zwei Arten des Stabilitätsverlustes, nämlich

1. Beulen unter Axialdruck (2.3) und
2. Verflachung des Querschnitts unter reiner Biegung (2.4, Brazier-Effekt)

auf Grund der Elastizitätstheorie behandelt. Dabei wurde die für den 2. Fall gültige, stark vereinfachte Differentialgleichung entgegen der Methode von KOLLAR direkt aus Gln. (1a - b) gewonnen und nachgewiesen, daß den 2 genannten Randwertproblemen dieselbe allgemeine Differentialgleichung zugrunde liegt.

Weiterhin wurde in 2.43 die Güte eines vom Verfasser entwickelten Näherungsverfahrens am elastischen Schalenbalken untersucht und festgestellt, daß bei Verwendung einer solchen Näherung der begangene Fehler innerhalb baupraktisch vertretbarer Grenzen bleibt. Dieses Verfahren wird demnächst für Stahlbetonbalken ausgedehnt und an Hand von Versuchsergebnissen überprüft.

In 2.5 wurde schließlich der Fall behinderter Deformationszustände (durch Schub oder durch Endscheiben) betrachtet. Für diesen Fall wurden lediglich qualitative Versuchsergebnisse angegeben.

Es bleibt nun die Frage zu klären, welche Stabilitätsuntersuchung in Abhängigkeit von der Querschnittsausbildung durchzuführen wäre, d.h. welcher Fall der Bestimmung eines geeigneten Sicherheitsbeiwertes zugrunde gelegt werden sollte. Diese Frage ist sicherlich eindeutig zu beantworten für den Balken mit Querschnitt ohne Randglied. Vergleicht man hierzu die kritische Druckspannung beim Beulen unter gleichmäßig verteiltem Axialdruck (Gl. (21)) mit der beim Stabilitätsverlust unter reiner Biegebean-

spruchung (Gl. (38)), stellt man fest, daß zum Ausbeulen der Druckzone das Dreifache der kritischen Spannung unter reiner Biegung gehört, d.h. daß dieser Fall nicht maßgebend ist. Diesen großen Unterschied der kritischen Spannungen gleicht eine Behinderung des freien Deformationszustandes auch nicht aus (vgl. 2.5).

Ausgehend von dem Fall Querschnitt ohne Randglieder ändere man nun gedanklich die Randträgerhöhe von Null ab in Richtung größerer Werte. Damit ändert sich auch die Beanspruchung des stabilitätsgefährdeten Schalensegmentes: Der ursprünglich nur gebogene Schalenteil wird exzentrisch gedrückt. Läßt man gedanklich die nach Erreichen gewisser Randträgerhöhen sicherlich eintretende Scheibenwirkung - die in Wirklichkeit das ganze Segment entlastet - außer acht, so würde theoretisch bei unendlich hohen Randträgern ein axialer Druckzustand eintreten (Plattenbalken). Um eine "kritische Spannung" zur beliebigen Randträgerhöhe zu definieren, sollten dementsprechend jedesmal zwei Durchschlagprobleme superponiert werden. Zu einer Superposition darf jedoch der DUNKERLEY'sche Satz nicht verwendet werden; dies gilt nur für lineare Probleme (vergl. [13]). Streng genommen sind dabei die Fälle zwischen reiner Biegung und axialem Druck nach der Elastizitätstheorie keine echten Stabilitätsprobleme. Ein totaler Scheitelverlust des Segments bringt nicht unbedingt das Versagen mit sich. Ebenfalls verliert der axiale Druck den Charakter eines Stabilitätsverlustes, wenn eine Störung - in diesem Falle durch Flächenlast - gleichzeitig vorhanden ist (vgl. 2.3.2).

Von diesen Überlegungen ausgehend, wird demnächst mit Hilfe des in 2.4.3 angeführten Iterationsverfahrens nicht die Ermittlung einer "kritischen Spannung" angestrebt, sondern ein Lösungsweg angegeben, nach dem das Deformationsverhalten des Balkens zu beschreiben ist. Der Begriff der "kritischen Spannung", der für den Beton von Natur aus nicht ganz eindeutig ist, wird dann durch einen Faktor er-



setzt, der die Verminderung der Tragfähigkeit infolge der aufgetretenen Deformationen bezüglich des nicht deformierten Zustandes ausdrückt. Stabilitäts- und Spannungsprobleme werden ebenfalls in Abhängigkeit von dem so eingeführten Faktor zu unterscheiden sein.

3. BERECHNUNGSMETHODE ZUR ERMITTLUNG DER TRAGLAST UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER DEFORMATIONEN

3.1 A n n a h m e n

Über die allgemeinen Annahmen nach 1.2 sowie über die Rechenannahmen nach 2.4.3 hinaus wird die Erfüllung folgender weiterer Bedingungen vorausgesetzt:

- a) Die maßgebenden Querschnitte im mittleren Bereich des langen, gleichmäßig belasteten Balkens sind vom Beginn der Laststeigerung an im gerissenen Zustand.

Diese Annahme trifft für das Anfangsstadium nicht zu; der Gebrauchszustand wird hier jedoch nicht näher untersucht (vgl. 1.2).

- b) Der Erschöpfungszustand stellt sich bei niedrigeren Betonspannungen der Druckzone ein, so daß der E-Modul des Betons als konstant angenommen werden darf.

Unter dieser Bedingung bleiben alle Gleichungen relativ einfach. Eine Lösung unter Berücksichtigung des plastischen Verhaltens des Betons wird in 4.1 erbracht.

- c) Der Schalenteil des Querschnitts ist flach genug, um die Annahmen

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$$

und

$$s \approx b$$

zu erfüllen. Demzufolge braucht zwischen flachem Kreisbogen und Parabel kein Unterschied gemacht zu werden.

Den nachfolgenden Betrachtungen liegt stets ein freier, unbehinderter Deformationszustand zugrunde. Über das Entstehen des äußeren Biegemomentes wird zunächst noch nichts ausgesagt. Untersuchungen hinsichtlich Schubdeformationen und Behinderung des freien Deformationszustandes durch Endscheiben - vgl. mit ähnlichen Untersuchungen an elastischem Material in 2.5 - werden erst in 5. an Hand von Versuchsergebnissen durchgeführt.

### 3.2 Ermittlung der Deformationsgleichungen

Die in den nachstehenden Ableitungen vorkommenden Bezeichnungen sind in Bild 17 erklärt. Der Index o bezeichnet den ursprünglichen Zustand. Größen ohne Index gelten für beliebige, deformierte Zustände.

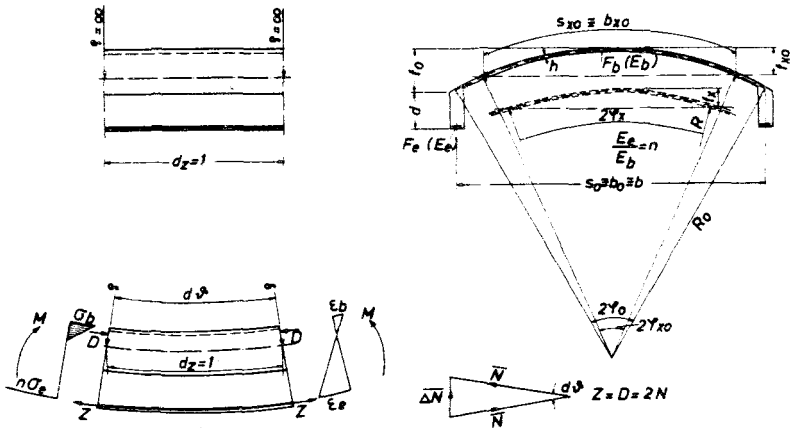


Bild 17

Unter Ausnutzung des Gesetzes ebener Querschnitte sowie Annahme a) und b) kann in einem beliebigen, deformierten Zustand die Lage der Nulllinie aus der Gleichheit der sta-

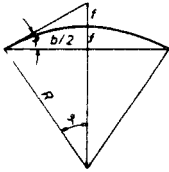
tischen Momente von Druck- und Zugzone ermittelt werden:

$$S_{xD} = S_{xZ}$$

$$(53a-c) \quad S_{xD} = \frac{4}{3} R \varphi_x h f_x$$

$$S_{xZ} = 2 \lambda F_E (f - f_x + d)$$

Im folgenden wird als Unbekannte  $\varphi_x$  gewählt. Drückt man die Größen  $f$  bzw.  $f_x$  mit den zugehörigen Zentriwinkeln bzw.  $\varphi_x$  aus, so gilt nach Annahme c) (vgl. Bild 18):



$$(54) \quad \frac{b}{2} : R = 2f : \frac{b}{2}$$

woraus sich

$$(55) \quad f = \frac{R \varphi_x^2}{2}$$

ergibt.

Bild 18

Unter Ausnutzung von Gl. (55) ergibt sich nun Gl. (53a) wie folgt:

$$(56) \quad \frac{2}{3} R^2 h \varphi_x^3 + \lambda F_E R \varphi_x^2 - \lambda F_E (2d + R \varphi_x^2) = 0$$

Aus Gl. (56) kann die einzige unbekannte Größe  $\varphi_x$  bestimmt werden. Um das Trägheitsmoment des Querschnitts zu bestimmen, benutzt man für das Teilträgheitsmoment der Druckzone folgenden, für flache Parabel- und Kreisbogenquerschnitte geltenden Ausdruck:

$$(57) \quad J_D = \frac{8}{90} b f^2 h$$

Das zu der in Gl. (56) ermittelten Nulllinienlage gehörende Trägheitsmoment lautet dann:

$$(58) \quad J = 0,178 h f_x^2 \frac{b_x}{2} + 2 \varphi_x R h \frac{4f_x}{9} + 2 \lambda F_E (f - f_x + d)^2$$

oder mit den Zentriwinkeln ausgedrückt:

$$(59) \quad J = 0,267R^3 h \varphi_x^5 + 2hFe \left( \frac{R\varphi_x^2}{2} - \frac{R\varphi_x^2}{2} + d \right)^2$$

Sind  $\varphi_x$  und  $J$  bekannt, dann kann die Zugkraft bestimmt werden:

$$(60) \quad N = \frac{M}{J} \left( \frac{R\varphi_x^2}{2} - \frac{R\varphi_x^2}{2} + d \right) Fe n$$

Die vertikalen Resultierenden ( $\Delta N$ ), die den Querschnitt in seiner Ebene verbiegen, sind von der Längskrümmung des Balkens abhängig. Die Ähnlichkeit zwischen dem Vektordreieck und dem  $ABC \triangle$  (im Längsschnitt des Balkens, vgl. Bild 17) ergibt:

$$(61) \quad \Delta N : N = 1 : \rho$$

Für die rechte Seite gilt bekanntlich:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$$

so daß sich  $\Delta N$  aus Gl. (61) wie folgt ausdrücken läßt:

$$(62) \quad \Delta N = \frac{MN}{E_b J}$$

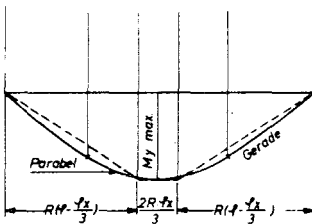
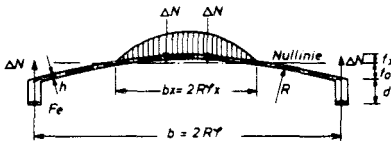


Bild 19

Nachdem somit die auf den Schalenquerschnitt in Querrichtung wirkenden Biegekräfte bekannt sind, kann nunmehr die von diesen erzeugte Verminderung der Scheitelhöhe ( $\Delta f$ ) ermittelt werden. Hierzu schneidet man aus dem Balken einen Streifen mit der Breite 1 heraus und betrachtet diesen als

Balken mit flach gekrümmter Achse. Da die Verteilung der vertikalen Kräfte gleich denen der Längskräfte ist, können die Vertikalkomponenten der Zugkraft als Reaktionskräfte der aus den Druckkräften entstehenden Last aufgefaßt werden (siehe Bild 19). Entsprechend der linearen Längskraftverteilung entlang der Querschnittshöhe entsteht eine parabelförmige Lastverteilung im Bereich der Druckzone.

Die daraus resultierende Momentenlinie ist in Bild 19 wiedergegeben; ihre maximale Ordinate beträgt in der Mitte des Querschnitts

$$(63) \quad M_y = \Delta N R \left( \varphi - \frac{\varphi^2}{3} \right)$$

Nimmt man nun statt des aus Geraden und einer Parabel vierter Ordnung bestehenden Verlaufes näherungsweise eine mit Geraden begrenzte trapezförmige Momentenlinie an, so kann die Durchbiegung in der Mitte des Querschnitts aus nachfolgendem, bestimmtem Integral errechnet werden:

$$(64) \quad \Delta f = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{M_1 M_2}{E_b} ds = \\ = \frac{12}{E_b h^3} \int_{-b/2}^{+b/2} M_1 M_2 dy$$

Nach Durchführung der Integration sowie einigen Umformungen erhält man dann:

$$(65) \quad \Delta f = \frac{4 \Delta N R^3}{E_b h^3} \left[ \left( \varphi - \frac{\varphi^2}{3} \right)^3 + \varphi \left( \varphi - \frac{\varphi^2}{3} \right) \left( \varphi - \frac{\varphi^2}{6} \right) \right]$$

Die aufgeführten Formeln ermöglichen es, die Deformation eines Querschnitts bei vorgegebener Größe des angreifenden Biegemoments zu ermitteln. Das Ergebnis wird jedoch nur für kleine Biegemomente genau genug sein, da unter einem großen Biegemoment die Deformationen ebenfalls groß werden und ihre Rückwirkung auf den ursprünglichen Zustand nicht mehr zu vernachlässigen ist. Dies bedeutet, daß in

diesem Falle der Rechengang mehrmals wiederholt werden muß, um eine bessere Näherung zu erreichen. Eine solche Iteration läßt sich auch verallgemeinern, wenn die Gleichungen dimensionslos dargestellt werden.

Nachfolgend werden die Gln. (53) - (65) entdimensioniert und demnach in ihrer allgemeinen Form ausgewertet.

### 3.3 Einführung von dimensionslosen Parametern

Wie bereits in 2.6 darauf hingewiesen wurde, erscheint es bei dem untersuchten Problem zweckmäßiger, an Stelle der kritischen Spannung die Abminderung der Traglast infolge Querschnittsdeformationen anzugeben. Dies läßt sich u.a. damit begründen, daß Stabilitätsfälle - soweit die Auswertungen ergaben - praktisch seltener sind; die Traglast wird jedoch in jedem Falle durch die Deformationen herabgesetzt. Diese Verminderung könnte mit einer "kritischen Spannung" nicht wiedergegeben werden.

Dementsprechend wurde für die nachfolgende dimensionslose Darstellung der Abminderungsfaktor - Lastparameter - wie folgt gewählt:

$$(66) \quad \alpha = \frac{M_{\text{Brazier}}}{M_{\text{Grenz}}} < 1,0$$

wobei  $M_{\text{Brazier}}$  das maximal aufnehmbare Biegemoment unter Berücksichtigung der Deformationen,  
 $M_{\text{Grenz}}$  das Bruchmoment des nicht deformierten Querschnitts ist.

Da nach Annahme b) - 3.1 - der Bruch durch Fließen der Stahleinlage eintritt, lautet dann die Bedingung hierfür:

$$(67) \quad M_{\text{Grenz}} = \frac{\bar{\sigma}_a J_0}{\left( \frac{R_0 \bar{v}_0^2}{2} - \frac{R_0 \bar{v}_0^2}{2} + d \right) n}$$



In Gl. (67) wurde dabei eine Erhöhung der Tragfähigkeit durch Plastifikation der Betondruckzone außer acht gelassen.

Führt man nun für die geometrischen und physikalischen Größen die in Tafel I zusammengestellten Parameter ein, so lassen sich Gln. (53) - (65) entdimensionieren. Weiterhin wurden der Übersichtlichkeit halber die in Tafel II definierten Hilfsgrößen verwendet.

T a f e l I

Bezeichnung	Inhalt des Ausdrucks	Bemerkung
$\rho_0$	$R_0/h$	Krümmungsparameter
$\delta$	$d/f_0$	bezogene Randträgerhöhe
$\mu$	$nF_e/bh$	Bewehrungsgehalt
$n$	$E_e/E_0$	-
$\varepsilon$	$\bar{\sigma}_{ex}/E_e$	Fließdehnung des Stahls
$\phi$	$\eta_z/\varphi$	bezogene Nulllinienlage
$\alpha$	$\Delta f/f_0$	bezogene Scheiteldurchbiegung

Wie sich aus Tafel II ergibt, sind sämtliche Hilfsgrößen nur von  $\phi$  bzw.  $\alpha$  abhängig, so daß in Kenntnis der Parameter - einschließlich - nur 2 Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten notwendig sind.

T a f e l II

Bezeichnung	abhängig von	Inhalt des Ausdrucks
$\chi$	$\phi, \kappa$	$\frac{0,267\phi_0^5 + \mu(1-\phi_0^2+\delta)^2}{0,267\phi^5 + \mu(1-\phi^2 + \frac{\delta}{1-\kappa})^2}$
$\omega$	$\phi, \kappa$	$\frac{1-\phi^2 + \frac{\delta}{1-\kappa}}{(1-\phi_0^2+\delta)^2}$
$\lambda$	$\phi$	$(1-\phi/3)^3 + \phi(1-\phi/3)(1-\phi_0)$
$\Omega$	$\phi, \kappa$	$\frac{1-\phi^2 + \frac{\delta}{1-\kappa}}{1-\phi_0^2 + \delta}$
$\Lambda$	$\phi$	$\frac{\phi^2}{1-\phi_0^2 + \delta}$

Die erste Gleichung ergibt sich aus der Gleichheit der statischen Momente von Druck- und Zugzone (vgl. Gl.(56):

$$(68) \quad \frac{1}{3}\phi^3 + \mu\phi^2 - \mu\left(\frac{\delta}{1-\kappa} + 1\right) = 0$$

während man die zweite Gleichung aus Gl. (65) - aus der Deformationsgleichung - gewinnt:

$$(69) \quad \kappa(1-\kappa)^3 = 32\alpha^2\varepsilon^0\mu\delta^2 \left[ \chi(\phi, \kappa) \cdot \omega(\phi, \kappa) \cdot \lambda(\phi) \right]$$

wobei die außer den eckigen Klammern stehenden Größen Kon-



stante sind. Gibt man nun  $\varepsilon$ ,  $\mu$  und  $f_0$  vor, so kann man zum beliebigen Wert von  $\alpha$  aus Gleichungssystem (68) - (69)  $\chi$  und  $\phi$  ermitteln. Hierbei dient  $\phi$  hauptsächlich zur Kontrolle, da die vorgeführten Gleichungen nur für den Fall gelten, wenn die Nulllinie im Schalensegment bleibt:

$$(70a) \quad f_x \leq f$$

Es muß außerdem gesichert werden, daß die Stahleinlage zum Fließen kommt. Nimmt man näherungsweise an, daß Beton und Stahl bei etwa gleich großen Dehnwerten zu fließen beginnen, (z.B. Stahl III), so gilt:

$$(70b) \quad f_x \leq \frac{1}{2} (f+d)$$

Drückt man Gl.n. (70a-b) in dimensionsloser Form aus, erhält man folgende zwei Grenzwerte für  $\phi$  :

$$(71a-b) \quad \phi \leq 0,1707 \sqrt{1+\delta}$$
$$\leq 1,0$$

Um diese Werte auf Bewehrungsprozente zu beziehen, setzt man sie in Gl. (68) ein. Nach einigen Umformungen erhält man dann:

$$(72a-b) \quad \mu_{max} \leq 0,236 \sqrt{1+\delta}$$
$$\leq \frac{1}{3\delta}$$

Die bezogenen Stahl- und Betonspannungen lassen sich aus den nachfolgenden Gleichungen bestimmen:

$$(73) \quad \sigma_e^* = \frac{\tilde{\sigma}_e}{\sigma_{eR}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \chi \Omega$$

$$(74) \quad \sigma_b^* = \frac{\tilde{\sigma}_b}{\sigma_e} \cdot n = \frac{\alpha}{1-\alpha} \chi \lambda$$

### 3.4 Auswertung der gewonnenen Ergebnisse

Bei der Auswertung von Gln. (68) - (69) kann man zwischen 2 Fällen unterscheiden:

1. Querschnitt ohne Randglieder ( $d = 0$ ). In diesem Falle enthält Gl. (68) nunmehr eine Unbekannte  $\phi$ , deren Wert unverändert bleibt, während  $\alpha$  von 0 bis  $\alpha_{\max}$  anwächst. Diese Tatsache folgt unmittelbar aus Annahme 1 nach 2.4.3, wonach die Querschnitte während der Verflachung geometrisch ähnliche, flache Kreisbogenabschnitte bleiben.
2. Querschnitt mit Randgliedern ( $d \neq 0$ ). Für den allgemeinen Fall muß jeweils das nichtlineare Gleichungssystem (67) - (68) aufgelöst werden. Dies geschieht am besten iterativ unter Zuhilfenahme eines elektronischen Rechners.

Nachfolgend werden die aufgeführten zwei Fälle im einzelnen behandelt.

#### 3.4.1 Querschnitt ohne Randglieder ( $d = 0$ )

Wie bereits erwähnt, bleibt in diesem Falle  $\phi = \phi_0 = \text{konstant}$ , so daß sich die Hilfsgrößen vereinfacht - nach Tafel III - errechnen lassen.

Auf Grund dieser Vereinfachung ist Gl. (68) nur einmal aufzulösen, um  $\phi_0$  zu bestimmen; danach sind  $\chi$ ,  $\omega$  und  $\lambda$  nach Tafel III zu bestimmen und in Gl. (69) einzusetzen.

Gl. (69) lautet dann:

$$(75) \quad \alpha(1-\alpha)^3 = A\alpha^2$$

wobei A lediglich von Ausgangsgrößen abhängig ist. Gl.

(76) gibt einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Lastparameter und bezogener Durchbiegung; eine Iteration erübrigt sich.

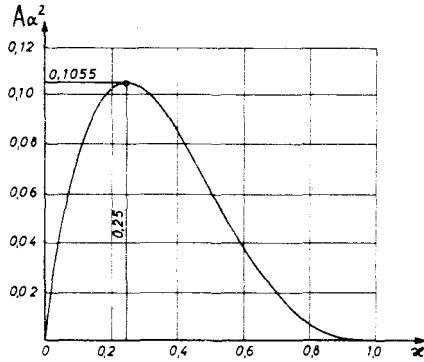


Bild 20

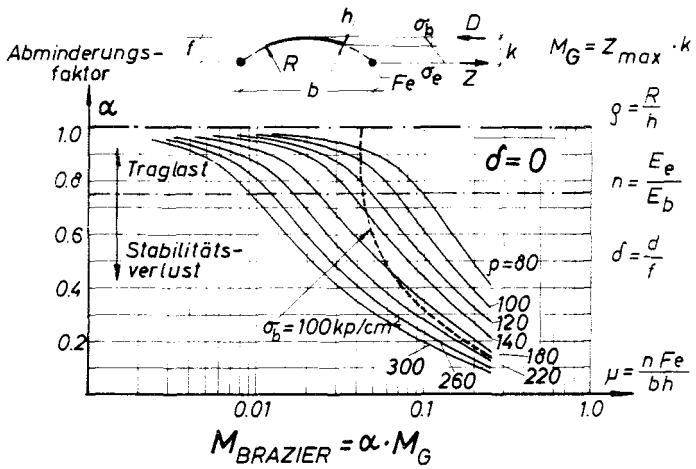


Bild 21

T a f e l III

Bezeichnung	abhängig von	Inhalt des Ausdrucks
$\chi$	—	1,0
$\omega$	$\phi_0$	$\frac{1}{1-\phi_0^2}$
$\lambda$	$\phi_0$	$(1-\phi_0/3)^3 + \phi_0(1-\phi_0/3)(1-\phi_0)$
$\Omega$	—	1,0
$\Lambda$	$\phi_0$	$\frac{\phi_0^2}{1-\phi_0^2}$

Um den größtmöglichen Wert von  $A\alpha^2$  zu bestimmen, differenziert man nach  $\alpha$ :

$$\frac{d(A\alpha^2)}{d\alpha} = (1-\alpha)^3 - 3\alpha(1-\alpha)^2$$

woraus sich eine Maximumstelle bei

$$(76) \quad \alpha = 0,25$$

ergibt.  $A\alpha^2$  beträgt an dieser Stelle

$$(77) \quad A\alpha^2 = 0,1055$$

Gl. (75) wurde in Bild 20 dargestellt. Vergleicht man nun den Kurvenverlauf mit dem nach Gl. (36), kann man die Ähnlichkeit beider Kurven sofort erkennen. Nach Gln. (76) und (77) kann  $A\alpha^2$  nur bis zu einer bestimmten Grenze (bei  $\alpha = 0,25$ ) anwachsen; diese Grenze gibt den oberen Grenzwert auch für  $\alpha$  an, da A eine vorgegebene Konstante ist.

Die Maximumstelle der in Bild 20 wiedergegebenen Kurve stellt gleichzeitig die Stabilitätsgrenze dar. Danach ist für jeden Querschnitt die Stabilitätslast eindeutig zu bestimmen. Ob nun diese Grenze niedriger oder höher als die Traglast liegt, kann man nur mit Überprüfung der Stahlspannung entscheiden. Für den vorliegenden Fall ( $\tilde{\sigma} = 0$ ) läßt sich Gl. (73) wie folgt vereinfachen:

$$(78) \quad \tilde{\sigma}_e^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Erreicht ein Querschnitt seine Traglast, so ist in Gl.

(78)  $\tilde{\sigma}_e^* = 1,0$  zu setzen. Daraus ergibt sich das Kriterium für Traglastfälle:

$$(79) \quad \alpha = 1 - \kappa$$

An Hand von Gln. (76) und (79) kann dann festgestellt werden, in welchen Fällen die Stabilitätslast oder die Traglast maßgebend ist:

a)  $\alpha = 1 - \kappa = 1 - 0,25 = 0,75$

In diesem Falle sind Traglast und Stabilitätslast gleichzeitig erreicht.

b)  $\alpha > 0,75$

Das Fließen der Stahleinlage tritt eher ein als die zum Durchschlagen des Querschnitts erforderliche Deformation = 0.25: Traglast-Fall.

c)  $\alpha < 0,75$

Der Stabilitätsverlust des Querschnitts erfolgt vor dem Fließen der Stahleinlage: Stabilitäts-Fall.

Für eine einfache Ermittlung des Abminderungsfaktors wurde Gl. (75) für verschiedene Bewehrungsprozente in Abhängigkeit von dem Krümmungsparameter  $\rho$  ausgewertet. Den Berechnungen wurde eine Fließdehnung von  $\epsilon = 2,5 \%$  zugrunde gelegt. Vergleichsrechnungen ergaben, daß die An-

derung dieses Wertes nur einen geringen Einfluß auf den Abminderungsfaktor  $\alpha$  ausübt.

Die Rechenergebnisse sind in Bild 21 aufgetragen. Da die Bewehrungsprozente  $\mu$  in einem großen Bereich streuen, wurden sie im logarithmischen Maßstab dargestellt. Als Scharparameter wurde der Krümmungsparameter gewählt. In der Kurvenschar wurde die Stabilitätsgrenze bei  $\alpha = 0,75$  mit gestrichelter Linie eingetragen.

### 3.4.2 Querschnitt mit Randgliedern ( $d \neq 0$ )

Für den allgemeinen Fall ( $d \neq 0$ ) muß das vollständige Gleichungssystem aufgelöst werden:

$$\frac{1}{3} \phi^3 + \mu \phi^2 - \mu \left( \frac{\delta}{1-\alpha} + 1 \right) = 0$$
$$\alpha (1-\alpha)^3 = 32 \alpha^2 \varepsilon^2 \mu \rho_o^2 \left[ \chi(\phi, \alpha) \cdot \omega(\phi, \alpha) \cdot \lambda(\phi) \right]$$

Dies geschieht am besten iterativ: aus der ersten Gleichung wird jeweils  $\phi$  bestimmt; in Kenntnis von  $\phi$  können die Hilfsgrößen und danach  $\alpha$  aus der zweiten Gleichung errechnet werden. Ist  $\alpha$  nun für mehrere  $\alpha$ -Werte bekannt, so kann die Deformationskurve (ähnlich wie im Bild 20) dargestellt werden. Um zu entscheiden, ob der untersuchte Fall Stabilitäts- oder Traglast-Fall ist, muß die Stahlspannung überprüft werden.

Da die Durchführung einer solchen Untersuchung zu umfangreichen Rechenarbeiten führt, wurde sie für mehrere Werte von  $\delta$  mittels Computer durchgeführt. Die Ergebnisse sind in ähnlicher Form wie bei  $\delta = 0$  in den Bildern 22 - 25 dargestellt.

## 4. DIE AUSWIRKUNGEN VON NEBENEINFLÜSSEN AUF DIE TRAGLAST

### 4.1 Berücksichtigung der Nicht-linearität der Betonarbeitslinie

In Kapitel 3 wurde ein Verfahren entwickelt, nach dem bei

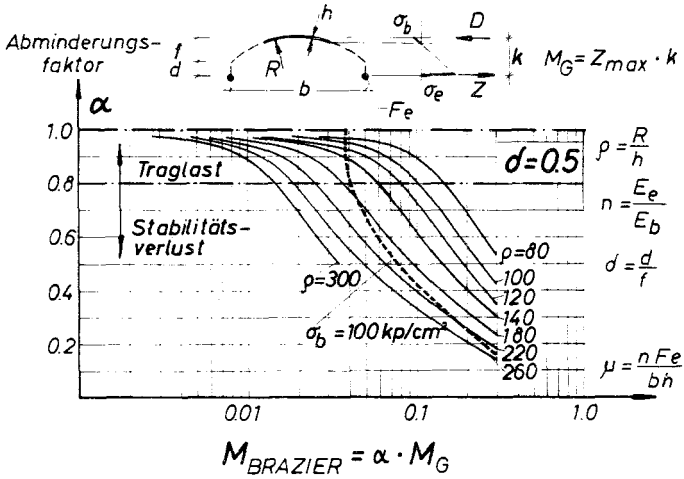


Bild 22

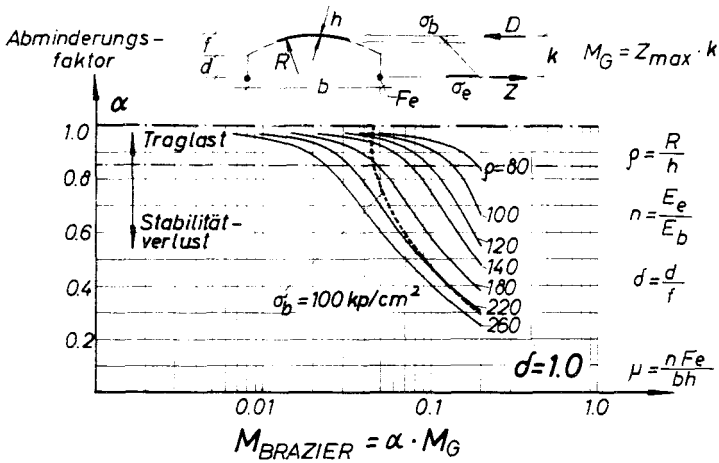


Bild 23

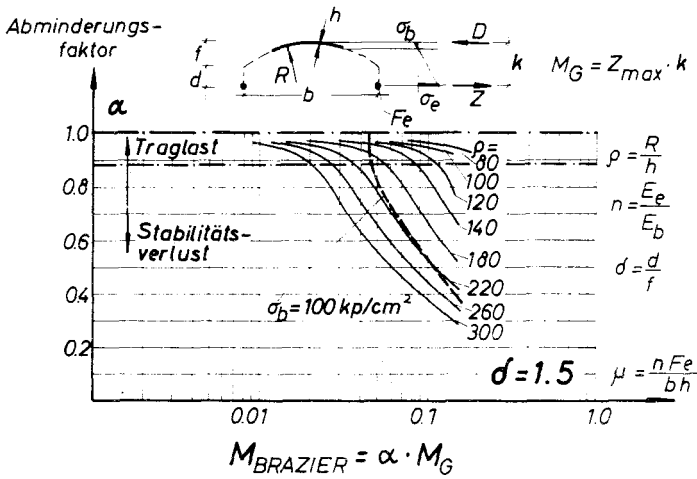


Bild 24

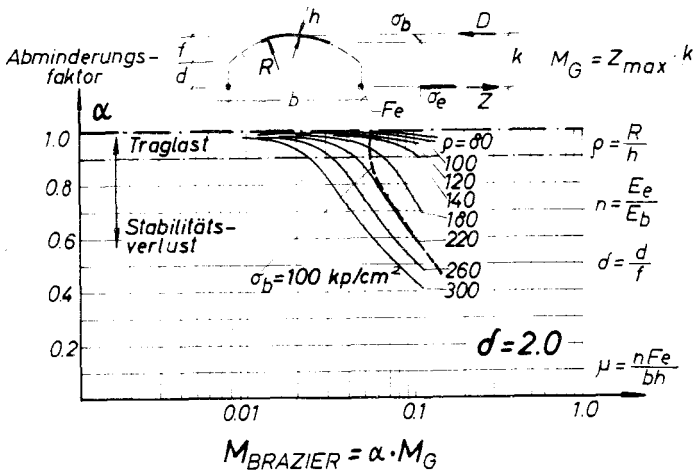


Bild 25



der Bestimmung der Traglast von Balken mit flachem, kreiszylindrischem Querschnitt der durch die Deformation entstehende Abminderungseffekt berücksichtigt werden kann. Eine Analyse der gewonnenen Gleichungen ergab, daß die Annahmen hinsichtlich der Linearität der Spannungsverteilung in der Betondruckzone zu den errechneten kritischen bzw. Traglast-Spannungen nicht im Widerspruch stehen, da in den meisten baupraktischen Fällen die maximalen Spannungen unter  $100 \text{ kg/cm}^2$  lagen. Es gibt jedoch Fälle, vor allem bei kleineren  $\rho$  - bzw. größeren  $\tilde{\sigma}$ -Werten, bei denen die ermittelten Spannungen - allerdings bei nicht baupraktischen Bewehrungsprozenten - der Annahme vom linearen Stoffgesetz für Beton widersprechen. Nachfolgend werden für diese Fälle unter Berücksichtigung einer nichtlinearen Arbeitslinie des Betons die Bestimmungsgleichungen hergeleitet. Der Einfachheit halber wird dabei den Berechnungen ein Querschnitt ohne Randglieder zugrunde gelegt.

#### 4.1.1 Annahmen

Es gelten sinngemäß die Annahmen nach 1.2 und 3.1; Annahme b) nach 3.1 wird wie folgt ersetzt:

Die Arbeitslinie des Betons kann mit ausreichender Genauigkeit durch eine Parabel II. Ordnung beschrieben werden:

$$(80) \quad \tilde{\sigma}_b = \beta_p \left( 2 - \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_p} \right) \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_p}$$

wobei  $\beta_p$  die Prismenfestigkeit  
 $\epsilon_p$  die zur  $\beta_p$  gehörende Dehnung

ist. Es wird weiterhin angenommen, daß sich das Versagen des Querschnitts durch Fließen der Stahlbewehrung einstellt.

Um die Ableitungen in analytisch einfacher Form zu halten, wird der flache Kreisbogenquerschnitt durch folgende

Parabel (s. Bild 26) festgelegt:

$$(81) \quad z = f\left(\xi - 4 \frac{y^2}{b^2}\right)$$

#### 4.1.2 Bestimmung der Deformationsgleichungen

Die für die nachstehenden Ableitungen nötigen Bezeichnungen sind in Bild 26 enthalten.

Aus dem Gesetz der ebenen Querschnitte geht hervor, daß die Dehnung in einer beliebigen Faser der Druckzone

$$(82) \quad \varepsilon = \frac{z E_b}{\xi f}$$

ist. Setzt man  $\varepsilon$  nach Gl. (82) in das Stoffgesetz nach Gl. (80), dann erhält man die in beliebiger Faser der Druckzone herrschende Spannung unter Berücksichtigung der Querschnittsform:

$$(83) \quad \tilde{\sigma}_b = \beta_p \left[ 2 - f\left(\xi - \frac{4y^2}{b^2}\right) \frac{E_b}{E_p} \cdot \frac{1}{\xi f} \right] f\left(\xi - \frac{4y^2}{b^2}\right) \frac{E_b}{E_p} \cdot \frac{1}{\xi f}$$

Die Gesamtdruckkraft ergibt sich aus dem Integral über der Druckzone:

$$(84) \quad N = 2h \int_0^{y_s} \tilde{\sigma}_b ds = 2h \int_0^{y_s} \tilde{\sigma}_b dy = \\ = 2hb\beta_p \sqrt{\xi} \left[ \frac{2}{3} E_R - \frac{4}{15} E_R^2 \right]$$

wobei

$$(85) \quad E_R = \frac{E_b}{E_p}$$

die relative Randspannung in der Druckzone bedeutet.

Nun bestimmt man die Zugkraft in der Stahleinlage:

$$(86) \quad Z = 2F_e \tilde{\sigma}_e$$

### ARBEITSLINIEN

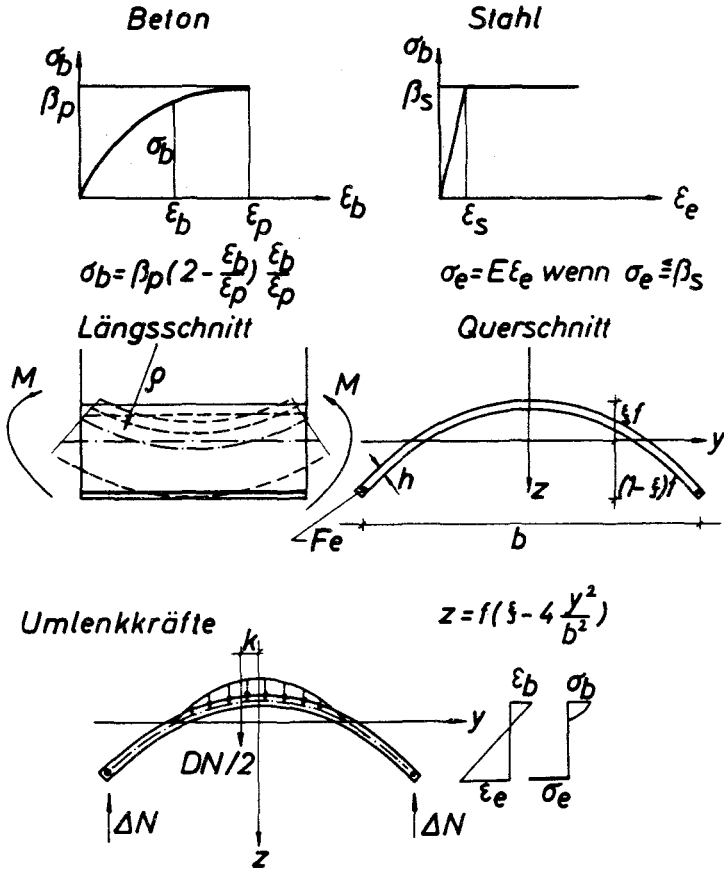


Bild 26

Mit Einführung von  $\bar{\mu}$

$$(87) \quad \bar{\mu} = \frac{F_e}{bh}$$

bzw. unter Berücksichtigung des aus Bild 26 hervorgehenden Zusammenhanges

$$(88) \quad \varepsilon_e = \varepsilon_b \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)$$

kann geschrieben werden:

$$(89) \quad \begin{aligned} Z &= 2F_e \bar{\sigma}_e = 2F_e \varepsilon_e E_e = \\ &= 2\bar{\mu}bh\varepsilon_R \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) E_e \varepsilon_p \end{aligned}$$

Führt man  $\gamma$  wie folgt ein

$$(90) \quad \gamma = \frac{E_e \varepsilon_p}{\beta_s}$$

wobei  $\beta_s$  die Streckgrenze des Stahles ist, erhält Gl. (89) ihre endgültige Form:

$$(91) \quad Z = 2\bar{\mu}bh\varepsilon_R \gamma \beta_s \frac{1-\xi}{\xi}$$

Für die unbekanntenen  $\varepsilon_R$  und  $\xi$ -Werte ergibt sich die erste Bestimmungsgleichung aus dem Kräftegleichgewicht:

$$Z = N$$

$$(92a-b) \quad \frac{\beta_p}{\gamma \bar{\mu} \beta_s} \left[ \frac{2}{3} - \frac{4}{15} \varepsilon_R \right] = \frac{1-\xi}{\xi \sqrt{\xi}}$$

Um die zweite Gleichgewichtsgleichung zu erhalten, bestimmt man die Momentenanteile von Beton und Stahl, bezogen auf die Nulllinie

$$(93a) \quad \begin{aligned} M_b &= 2h \int_0^{y_s} \bar{\sigma}_b z dy = \\ &= 2hfb\varepsilon_R \beta_p \xi \sqrt{\xi} \left[ \frac{8}{15} - \frac{8}{35} \varepsilon_R \right] \end{aligned}$$

und

$$(93b) \quad \begin{aligned} M_e &= Z_f(1-\xi) = \\ &= 2fbh\bar{\mu}\epsilon_R\gamma\beta_s \frac{(1-\xi)^2}{\xi} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das innere Moment zu

$$(94) \quad \begin{aligned} M &= M_b + M_e = \\ &= 2fbh\epsilon_R \left[ \bar{\mu}\gamma\beta_s \frac{(1-\xi)^2}{\xi} + \beta_p \xi \sqrt{\xi} \left( \frac{8}{15} - \frac{8}{35}\epsilon_R \right) \right] \end{aligned}$$

Aus (Gln. (92) und (94) kann  $\epsilon_R$  und  $\xi$  eindeutig ermittelt werden. Ist  $\epsilon_R$  und  $\xi$  bekannt, so können auch die Längskrümmung und Umlenkkräfte bestimmt werden:

$$(95) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_p}{\xi f} = \epsilon_p \frac{\epsilon_R}{\xi f}$$

bzw. analog zu Gl. (61)

$$(96) \quad \Delta N = \frac{N}{\rho}$$

Um die Querbiegung des Querschnitts zu erfassen, muß der Hebelarm der Druckkraft, der zur halben Druckzone (s. Bild 26) gehört, bestimmt werden. Errechnet man das statische Moment aus folgendem Integral:

$$(97) \quad \begin{aligned} S &= h \int_0^{\frac{h}{2}} \tilde{\sigma}_b y dy = \\ &= hb^2 \epsilon_R \beta_p \xi \left[ \frac{1}{8} - \frac{\epsilon_R}{24} \right] \end{aligned}$$

so ergibt sich der Hebelarm zu

$$(98) \quad k = \frac{S}{N/2} = \frac{b\sqrt{\xi}}{2} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{3-\epsilon_R}{25-\epsilon_R}$$

Setzt man die zwei Grenzwerte für  $\epsilon_R$  in Gl. (98) ein,

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_R = 0 & k = \frac{3}{8} \frac{b\sqrt{f}}{2} \\ (99a-b) & \\ \varepsilon_R = 1,0 & k = \frac{5}{12} \frac{b\sqrt{f}}{2} \end{array}$$

kann man feststellen, daß der Unterschied in den Hebelarmen höchstens 13 % beträgt, was aber für das Biegemoment nur 4 - 5 % Abweichung bedeutet. Demzufolge kann angenommen werden, daß die weiteren Ableitungen für die Bestimmung der Querdeformationen nach 3.2 gelten (s. hierzu Gln. (63) und (65)).

#### 4.1.3 Auswertung der gewonnenen Ergebnisse

Ein Vergleich der Gleichungen nach 4.1.2 mit denen nach 3.3 ergibt folgende Unterschiede zwischen beiden Methoden:

- a) Während nach Kapitel 3.3 lediglich Gl. (68) aufzulösen war, aus der die einzige Unbekannte  $\varphi_x$  bestimmt werden konnte, müssen nach 4.1.2 aus Gln. (92) und (94) zwei Unbekannte  $\varepsilon_R$  und  $\xi$  eliminiert werden, um den Spannungszustand zu erfassen.
- b) Der Wert  $\xi$  hängt von der Randspannung ab, im Gegensatz zu  $\varphi_x$ , der nur vom Bewehrungsgehalt und geometrischen Größen abhängig ist.
- c) Das Biegemoment-Krümmungs-Verhältnis ist nach 4.2.3 selbst bei Vernachlässigung der Querschnittsdeformationen bereits nicht linear, da das Arbeitsdiagramm des Betons durch eine nichtlineare Funktion beschrieben wird.

Es wird nachfolgend untersucht, welche Einflüsse die oben genannten Unterschiede auf die Verflachung des Querschnitts bzw. die Abminderung der Traglast haben.

Den Einfluß der Randdehnung auf die Nulllinienlage kann man nach Gl. (92) studieren. Bestimmt man den  $\xi$ -Wert aus den zwei Grenzfällen ( $\varepsilon_R = 0$  und  $\varepsilon_R = 1,0$ ), so ergeben sich

folgende zugehörige Nulllinienlagen:

$$(100a-b) \quad \begin{array}{ll} \epsilon_R = 0 & \xi = 0,64 \frac{\sigma_p}{\mu \beta_s} \end{array}$$

$$\epsilon_R = 1,0 \quad \xi = 0,74 \frac{\sigma_p}{\mu \beta_s}$$

Die ermittelten Koeffizienten setzen jedoch voraus, daß die Betondruckzone vor dem Fließen der Bewehrung die maximalen Spannungen bzw. Dehnungen erreichen kann, was einem sehr hohen Bewehrungsgehalt entspricht. Dieser Fall ist bei Dachkonstruktionen kaum denkbar. Erreicht nun die Bewehrung die Fließgrenze eher als die Druckzone, wird die Lage der Nulllinie in umgekehrter Richtung, d.h. nach oben wandern. Diese Tatsache hebt dann die Wirkung des ersten Einflusses auf.

Um den Einfluß der nichtlinearen Arbeitslinie des Betons auf die Längskrümmung festzustellen, leitet man den entsprechenden Ausdruck für das bezogene Biegemoment nach beiden Methoden her.

Das Biegemoment kann nach 3.2 aus folgendem Ausdruck errechnet werden:

$$(101) \quad M = \frac{\sigma_e J}{\left(\frac{R_e^2}{2} - \frac{R_e^2}{2}\right)n}$$

Führt man auch hierbei die entsprechenden Abkürzungen ein, erhält man den gesuchten Zusammenhang wie folgt:

$$(102) \quad m_I = \frac{M}{fbh\sigma_e} = \frac{0,53}{\lambda} \cdot \frac{\xi^2 \sqrt{f}}{1-\xi} + \bar{\mu}(1-\xi)$$

Mit geringen Umformungen gelangt man zur zweiten Gleichung (vgl. Gl. (94)):

$$(103) \quad m_{\underline{I}} = \frac{M}{fbkG_e} = \frac{\beta_p}{\beta_s} \left( \frac{16}{15} - \frac{16}{35} \varepsilon_R \right) \frac{\xi^2 \sqrt{\xi}}{1-\xi} + \bar{\mu}(1-\xi)$$

Gln. (102) und (103) haben einen ähnlichen Aufbau, wobei jedoch zu bemerken ist, daß über formelle Unterschiede hinaus auch Unterschiede in der Ermittlung von  $\xi$  bestehen. Legt man einem Vergleich die gesamten rechten Seiten beider Gleichungen zugrunde, ergeben sich folgende Vergleichswerte, wenn  $\bar{\mu} \approx 5\%$  beträgt:

1.  $\varepsilon_R = 0, \quad \xi = 0,64 \quad (\text{vgl. Gl. (100a)})$

Daraus folgt nach Gl. (103)

$$m_{\underline{II}} = 0,0665$$

und nach Gl. (102) ebenfalls

$$m_{\underline{I}} = 0,0665, \text{ wenn } n \approx 10,0$$

gewählt wird.

2.  $\varepsilon_R = 1,0 \quad \xi = 0,74 \quad (\text{vgl. Gl. (100b)})$

Nach Gl. (103) beträgt

$$m_{\underline{II}} = 0,0685$$

und nach Gl. (102) ebenfalls

$$m_{\underline{I}} = 0,0685, \text{ wenn } n \approx 10,0 \text{ ist.}$$

Die Ergebnisse stimmen vollkommen mit ähnlichen Untersuchungen für andere Querschnitte überein, wonach die Biegemoment-Verdrehungs-Diagramme im Falle starker Bewehrung mit ziemlicher Genauigkeit gerade verlaufen und dem Stadium II entsprechen. Beträchtliche Krümmungen in diesen Linien sind nur im Falle schwacher Bewehrung zu erwarten; diese Fälle haben jedoch keine Bedeutung für das behandelte Problem, da hierbei die kritische Spannung (oder Traglastspannung) entsprechend niedrig liegt.



#### 4.2 Anfangsdeformationen

In 2.3.2 wurde auf den großen Einfluß von Anfangsdeformationen, die zur Beulfigur ähnlich sind, im Falle zentrischen Druckes hingewiesen. Es liegt dort dasselbe Problem wie bei einem Knickstab mit Anfangsexzentrizität vor. Wie bekannt, führt eine solche Anfangsausbiegung zur nicht-linearen Beschleunigung des Stabilitätsverlustes. Beim Beulen unter Axialdruck treten z.B. infolge Formabweichungen Störungsmomente in der Schale auf, die sonst erst im Moment des Durchschlagens auftreten würden.

Um Aussagen über die Wirkung von Anfangsdeformationen im Falle des Brazier-Effektes machen zu können, muß man zwischen 2 Möglichkeiten von Formabweichungen unterscheiden:

- a) Abweichung von der vorgegebenen Längskrümmung  
- im vorliegenden Fall von der geraden Achse;
- b) Abweichung von der genauen geometrischen Querschnittsform - im behandelten Problem vom flachen Kreisbogenquerschnitt.

Der Fall a) kann auf Grund der Arbeiten von KOLLÁR studiert werden. KOLLÁR fand, daß der Zusammenhang zwischen kritischem Biegemoment und Krümmung der Längsachse wie folgt lautet:

$$(104) \quad \frac{M_{kr}}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{4h} = \frac{0,912}{1 + 0,488(\beta b/2)^2 + 0,0155(\beta b/2)^4}$$

Hierbei ist  $\beta$  nach Gl. (28) definiert. Nach Gl. (104) ergibt sich für das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{Stützweite: } \ell &= 10,0 \text{ m} \\ \text{Querschnittsbreite } b &= 2,0 \text{ m} \\ \text{Schalendicke } h &= 0,06 \text{ m} \end{aligned}$$

das kritische Biegemoment des ursprünglich geradachsigen

Balkens zu:

$$\frac{M_{kr}}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{4h} = 0,912$$

Beträgt die ungewollte Durchbiegung in der Balkenmitte

$$\eta = 0,05 \text{ m} \quad (= l/200)$$

so beträgt das kritische Biegemoment

$$\frac{M_{kr}}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{4h} = 0,860$$

was einer Abminderung von

$$\delta = \frac{0,912 - 0,860}{0,912} \cdot 100 \approx 5,5\%$$

entspricht. Legt man nun den Betrachtungen eine Querschnittsbreite von

$$b = 4,0 \text{ m}$$

zugrunde, so wird bei derselben anfänglichen Durchbiegung die Abminderung

$$\delta = \frac{0,912 - 0,730}{0,912} \cdot 100 \approx 20,0\%$$

erreichen. Aus diesem einfachen Beispiel ist ersichtlich, daß ein baulicher Fehler besonders bei "kurzen" Balken rasche Abminderungen des kritischen Moments ergeben kann. Um solche Erscheinungen auszuschließen, empfiehlt sich eine Überhöhung der Balkenmitte.

Sind Formabweichungen gemäß b) vorhanden, so können sie nach den Diagrammen 21 - 25 berücksichtigt werden. Hierfür kann allgemein festgestellt werden, daß einer linearen Änderung des Krümmungsparameters  $\varphi_0$  eine lineare Änderung des Abminderungsfaktors  $\alpha$  entspricht - selbstverständlich nur im kleinen Bereich, über den jedoch bauliche Fehler üblicherweise nicht hinausgehen. Ein Beispiel soll diese Gesetzmäßigkeit zeigen: Besitzt ein Querschnitt ohne Rand-

glied ( $d = 0$ , vgl. Bild 21) bei einem Bewehrungsgehalt von  $\mu = 0,76$  ( $n = 10$ ) eine Anfangskrümmung von  $\rho_0 = 220$  und ist infolge eines Ausführungsfehlers die tatsächlich erreichte Krümmung  $\rho'_0 = 240$  - was einem Fehler von 9,1 % entspricht - so wird der ursprüngliche Wert  $\alpha_{220} = 0,32$  auf  $\alpha_{240} = 0,29$  vermindert, der Fehler beträgt also 9,4 %.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß eine ungewollte Längskrümmung des geradachsigen Balkens, die zur raschen Verminderung des kritischen Biegemomentes führt, mit relativ einfachen Mitteln vermieden werden kann; bauliche Fehler in der Querkümmung beeinflussen das kritische Moment nur geringfügig.

#### 4.3 Der Einfluß des Kriechens

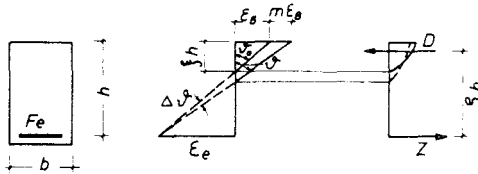
Wie bekannt, treten in Stahlbeton-Konstruktionen unter Dauerlast infolge Kriechens und Schwindens zeitabhängige Deformationen auf. Diese Deformationen sind in erster Linie durch die Ausnutzung des Querschnitts bedingt, jedoch spielen Querschnittsform, Betonqualität, Bewehrungsgehalt und Anordnung der Bewehrung auch eine wesentliche Rolle.

Für einfach bewehrte Rechteckquerschnitte kann im allgemeinen vorausgesetzt werden, daß die Stahlspannungen in der Zugbewehrung durch das Kriechen nicht beeinflußt werden. Daraus folgt, daß sich in der Druckzone eine Spannungsumlagerung abspielt, wobei in der Größe der Gesamtdruckkraft bzw. des Hebelarmes keine wesentlichen Veränderungen auftreten. Bezeichnet man die Verdrehung des Querschnitts unter kurzzeitiger Belastung durch  $v_0^q$  und die endgültige Verdrehung in  $t = \infty$  durch  $v_k^q$  (s. Bild 27), lautet der Zusammenhang zwischen  $v_0^q$  und  $v_k^q$  in allgemeiner Form:

$$(105) \quad \frac{v_k^q}{v_0^q} = 1 + f(\phi, \mu, \varphi(t))$$

wobei  $\varphi(t)$  das Kriechmaß bezeichnet. Der Wert von  $f(\phi, \mu, \varphi(t))$  kann bedingen, daß  $\dot{v}_k$  doppelt so groß wie  $\dot{v}_0$  wird. Versuchsergebnisse [11] zeigten folgenden empirischen Zusammenhang:

$$(106) \quad f(\phi, \mu, \varphi(t)) \approx 3\xi$$



$$\frac{\Delta v}{v_0} = m\xi; \quad m \approx 3 \text{ (nach [11])}$$

Bild 27

Diese einfache Form gibt selbstverständlich nur einen Anhalt für die Größenordnung der zu erwartenden Deformationen.

Für den behandelten Balken mit flächenartigem Querschnitt wurde in 3.3 festgestellt, daß die Querschnittsdeformationen von der Längskrümmung quadratisch abhängen. Dies gilt aber nur für den Fall, wenn die Krümmungsänderung aus äußerem Biegemoment resultiert. Im Falle eines Kriecheinflusses bleibt das angreifende Biegemoment konstant, und nur die Krümmung wird infolge zeitabhängiger Einflüsse größer werden. Um diese Wirkung näherungsweise zu ermitteln, drückt man die Krümmung für einen deformierten Zustand dimensionslos aus:

$$(107) \quad \frac{M}{EJ} \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4h} = \frac{0,86}{\mu \lambda (1-\phi^2)} \cdot \sqrt{\alpha(1-\alpha)^3}$$

Nach geringen Umformungen kann Gl. (107) auf dieselbe Form gebracht werden wie Gl. (75):

$$(108) \quad \left( \frac{\frac{M \cdot \sqrt{3} b^2}{EJ} \cdot \frac{0,86}{\mu \lambda (1 - \phi^2)}}{4h} \right)^2 = \alpha (1 - \alpha)^3 = A \alpha^2$$

d.h.

$$\alpha = k \frac{M}{EJ} \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4h}$$

ist. Geht man nun von  $(EJ)_0$  auf  $(EJ)_k$  über, so wird ebenfalls

$$(109) \quad \alpha_k = \frac{(EJ)_k}{(EJ)_0} \cdot \alpha_0$$

werden. Aus Gl. (109) geht hervor, daß die Kriechdeformationen in der ersten Näherung einer linearen Vergrößerung der Querschnittsausnutzung entsprechen. Sind die Kriechdeformationen jedoch sehr groß, so muß eine genauere Untersuchung durchgeführt werden, deren Umfang über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausgeht.

## 5. VERSUCHSERGEBNISSE

### 5.1 Zielsetzung der durchgeführten Versuche

Das in Kap. 3 gezeigte Berechnungsverfahren enthält einige Annahmen, deren Richtigkeit an Hand von Versuchsergebnissen bestätigt werden sollte. Besonders wichtig erschien es dabei, folgende Probleme zu klären:

- a) Nach der Elastizitätstheorie wäre die Annahme der Bernoulli-Hypothese für Balken mit derart flachem, dünnwandigem Querschnitt überhaupt nicht möglich. Berücksichtigt man jedoch, daß bei Stahlbetonbalken infolge Ribbildung die Zugkräfte allein von der Stahleinlage aufgenommen werden, bleibt im Falle einer

nichtgeradlinigen Dehnungsverteilung diese Wirkung nur für die Druckzone von Einfluß. Da Vergleichsrechnungen erwiesen haben, daß die aus dem Umlenkraftsystem resultierende Quermomentenverteilung näherungsweise geradlinig abgegrenzt werden darf (vgl. 2.4.3), konnte man annehmen, daß die nicht genau erfaßte Spannungsverteilung in der Druckzone Abweichungen innerhalb vertretbarer Grenzen mit sich bringt.

- b) Unter 2.5 wurde für elastische Balken mit schalenförmigem Querschnitt die Wirkung der Schubdeformationen und der Einfluß der Endscheiben untersucht. Auf eine direkte mathematische Lösung mußte dabei verzichtet werden; die Ergebnisse wurden auf experimentellem Wege gewonnen. Es hat sich gezeigt, daß Schubdeformationen genauso wie Endscheiben etwa von einem Seitenverhältnis von 1 : 6 (Breite : Länge) an die Wirkung des Brazier-Effektes erheblich herabsetzen, so daß bei einem Seitenverhältnis von 1 : 2 das kritische Biegemoment beinahe das Zweifache des unendlich langen Balkens beträgt. Ausgehend von Modellvorstellungen wurde jedoch angenommen, daß dieser den Brazier-Effekt vermindern den Wirkung bei Stahlbetonschalen eine weit geringfügigere Bedeutung zukommt. Diese Vorstellung beruht darauf, daß im mittleren Querschnitt, wo das maximale Biegemoment auftritt, infolge der Rißbildung eine sprunghafte Änderung im Trägheitsmoment des Gesamtbalkens eintritt. Dies bedeutet, daß sich eine "Gelenkwirkung" einstellt, die die Wirkung der Endscheiben offensichtlich vermindern muß. Dabei kann eine ähnliche Schubwirkung, wie in 2.5 beschrieben, nur in der Druckzone auftreten.

Es ist demnach unbegründet, für Stahlbetonbalken die bei Zugrundelegung der Elastizitätstheorie gefundene Wirkung von Endscheiben und Schubdeformationen in Rechnung zu stellen.

Um die obigen Fragen zu klären, wurden zwei Versuchsserien durchgeführt:

- 1) Versuche an bewehrten Asbestzementschalen,
- 2) Großversuche an bewehrten Mörtelbetonschalen.

Nachfolgend werden die wichtigsten Versuchsergebnisse wiedergegeben. Eine näher eingehende Beschreibung dieser bzw. anderer an Schalenbalken durchgeführten Versuche kann in Heft 12 der Schriftenreihe des Instituts für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der TU Braunschweig studiert werden [36].

## 5.2 Kleinmodellversuche an bewehrten Asbestzementschalen

Um Kosten und Versuchseinrichtungen kleinzuhalten, wurden zunächst Modellversuche an bewehrten Asbestzementschalen durchgeführt. Man hoffte, daß sich wegen der niedrigen Spaltzugfestigkeit des Modellwerkstoffes Asbestzement ein stahlbetonähnliches Tragverhalten der Modelle einstellen werde.

Querschnitt der Asbestzementschale

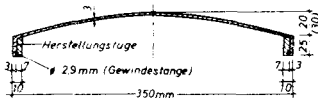


Bild 28

Die Querschnittsanordnung der Modelle zeigt Bild 28. Die Randbalken wurden aus 2 Teilen zusammengeklebt, um die Längsbewehrung der Schale einzubetten. Wegen der besseren Haftfestigkeit wurden Gewindestangen verwendet. Auf eine Bewehrung des Schalensegments konnte

wegen der hohen Biegezugfestigkeit des Asbestzementes verzichtet werden.

Die Länge des Schalenbalkens betrug einheitlich 1 m. Daraus resultiert ein Seitenverhältnis Breite : Länge von 1 : 2,9. Es wurden Schalen mit Stichhöhen von 2 bzw. 3 cm

hergestellt, demzufolge betrug der Krümmungsparameter 225 bzw. 150.

Die Belastung der Schale erfolgte durch 34 angehängte Büchsen auf einer ölhydraulischen Bühne, die angehoben und abgesenkt werden konnte.

Gemessen wurden die Deformationen mit mechanischen Meßuhren bzw. die Dehnungen mit Dehnungsmeßstreifen.

Während des Versuchsablaufes konnte eine stahlbetonähnliche Rißbildung bei sämtlichen Modellen festgestellt werden. Die Schalen mit einer Stichhöhe von 3 cm erlitten jedoch bei der Rißbildung durch die entstehende dynamische Beanspruchung eine so große Überlastung, daß sich der Verbund zwischen Gewindestange und Asbestzement löste und das Modell schlagartig zusammenbrach. Demgegenüber waren die Schalen mit 2 cm Stichhöhe nach der Rißbildung noch weiter belastbar, so daß jedesmal die Verflachung des Querschnitts beobachtet werden konnte.

Die Durchbiegungsmessungen in Abhängigkeit von der Belastung finden sich in Bild 29.

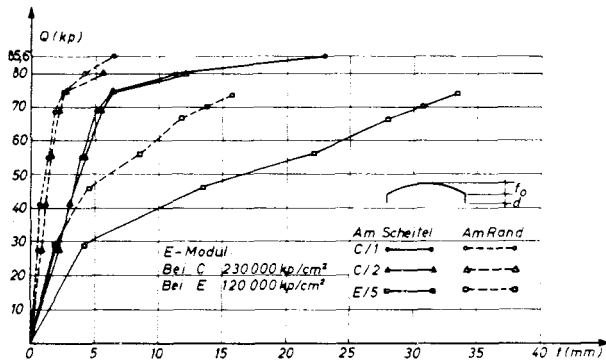
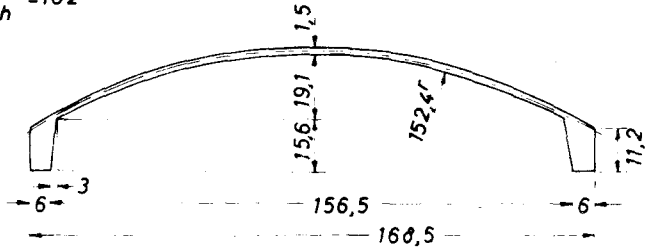


Bild 29



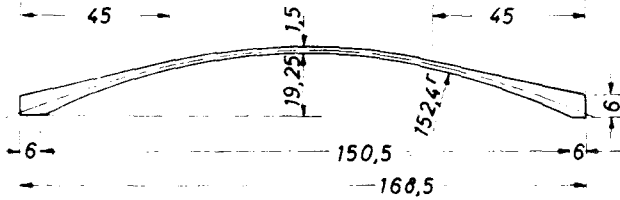
### Versuchsschale Nr.1

$$\frac{R}{h} = 102$$



### Versuchsschale Nr.2

$$\frac{R}{h} = 102$$



### Versuchsschale Nr.3

$$\frac{R}{h} = 167$$

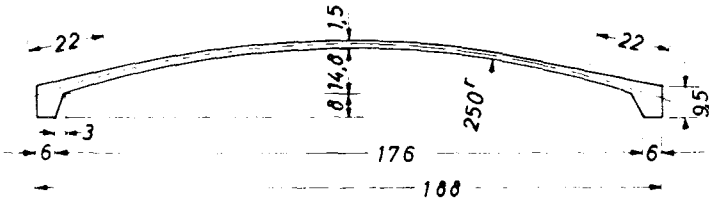


Bild 30

Hierzu sei bemerkt, daß das Diagramm der Schale E/5 von Anfang an den gerissenen Zustand darstellt. Wie aus dem Belastungsdiagramm ersichtlich ist, stellte sich der Stabilitätsverlust zwischen  $Q = 76,9 - 85,6$  kp ein. Eine Vergleichsrechnung, bei der auch die ungewollten Anfangsdeformationen bzw. Abweichungen in der Schalendicke berücksichtigt worden sind, ergab im Mittel  $Q = 78,4$  kp. Nach den Berechnungen ergab sich, daß die Schalenmodelle im stabilitätsgefährdeten Bereich lagen. Dies resultiert aus dem hohen Bewehrungsgehalt bzw. aus dem großen Krümmungsparameter.

### 5.3 Versuche an bewehrten Mörtelbetonschalen

Die an Kleinmodellen gesammelten Erfahrungen sollten zum Abschluß an Großmodellen mit wirklichkeitsnahen Abmessungen nachgeprüft werden. Hierfür wurden 3 Versuchskörper aus bewehrtem Mörtelbeton hergestellt. Die Querschnittsanordnungen zeigt Bild 30. Um die übrigen Schalenabmessungen möglichst kleinzuhalten, wurde die Schalendicke mit 1,5 cm festgelegt. Diese Sollabmessung wurde bei Schale Nr. 1 noch nicht erreicht. Durch Verwendung eines geeigneten Rüttelbrettes wurden dann die Abweichungen bei Schale Nr. 2 bzw. 3 auf 0,5 mm herabgesetzt.

Wegen der kleinen Schalendicke wurde die max. Korngröße des Mörtelbetons mit 7 mm festgelegt. Die erzielten Festigkeitswerte sind in Tafel 1 zusammengefaßt.

Die Schalenmodelle wurden im Alter von 28 Tagen belastet. Die Belastungseinrichtung ist aus Bild 31 zu ersehen.

Außer den mechanisch gemessenen Durchbiegungen wurden die Betonstauchungen bzw. die Stahldehnungen mit Dehnungsmeßstreifen registriert. Die wichtigsten Ergebnisse sind in Bild 32 - 34 wiedergegeben.

Nachfolgend werden die einzelnen Versuche näher beschrieben:



### Schale Nr. 1

Bei dieser Schale sollte die Belastungs- und Meßeinrichtung erprobt werden. Bei dem vorgegebenen Krümmungsparameter  $\rho_o = 102$  wurde der Bewehrungsgehalt so gewählt, daß sich ein Traglastfall einstellen sollte. Der rechnerische Abminderungsfaktor betrug  $\alpha = 0,96$ . Nach dem Versuch ergab sich eine Momententragfähigkeit von  $M_{\text{Bruch}} = 3,07$  Mpm. Das rechnerische Grenzmoment - ohne Deformationen, wie in Punkt 3.3 definiert - beträgt  $M_{\text{Grenz}} = 3,05$  mpm, woraus sich ein tatsächlicher Abminderungsfaktor von  $\alpha_{\text{Versuch}} = 1,01$  errechnen läßt. Der Bruch erfolgte durch Fließen der Längsbewehrungsstäbe.

### Schale Nr. 2

Hierbei wurde die Wirkung einer gleichmäßig veränderlichen Schalenverdickung erprobt. In diesem Falle werden nämlich die Schubdeformationen beträchtlich größer als bei gleichbleibender Schalendicke. Es war daher anzunehmen, daß der rechnerische Abminderungsfaktor  $\alpha = 0,87$  durch die Schubdeformationen vergrößert wird.

Der Bruch erfolgte tatsächlich vollkommen "biegebalkenartig". Das Bruchmoment betrug  $M_{\text{Bruch}} = 3,12$  Mpm, woraus sich ein gemessener Abminderungsfaktor von  $\alpha_{\text{Versuch}} = 1,18$  ergibt. Der Bruch trat durch Fließen der Bewehrungseinlage ein; gleichzeitig war festzustellen, daß sich die Plastifikation der Biegedruckzone beim Fließen der Stahleinlage deutlich ausbilden konnte.

### Schale Nr. 3

Als Abschluß der Serie wurde ein Stabilitätsfall konstruiert, bei dem eine sehr deutliche Abminderung der Tragfähigkeit ohne Fließen der Längsbewehrung zu erwarten war.

Der rechnerische Abminderungsfaktor betrug  $\alpha = 0,56 - 0,54$ .

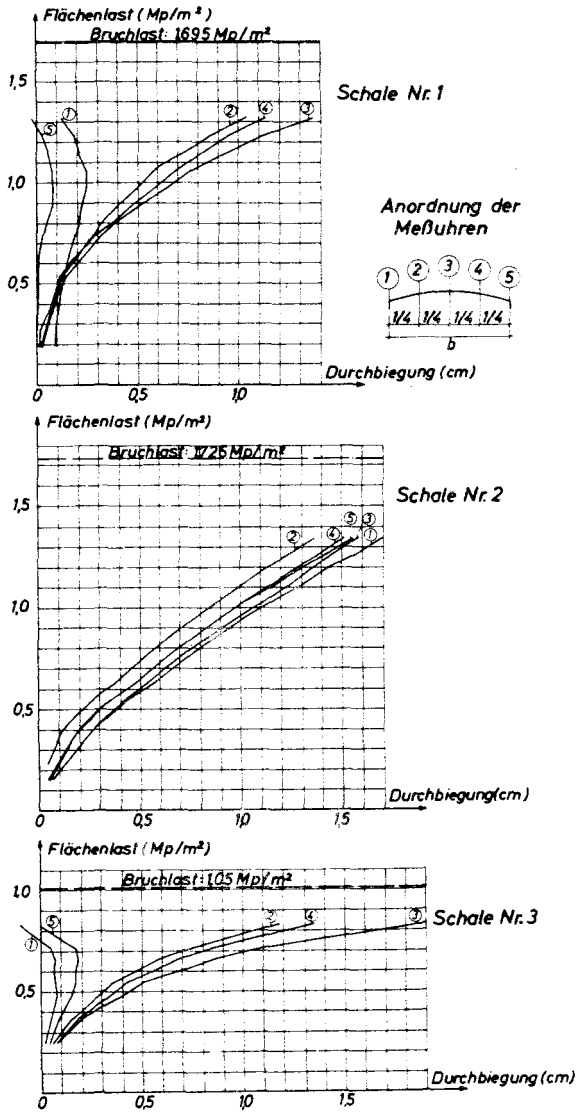


Bild 32

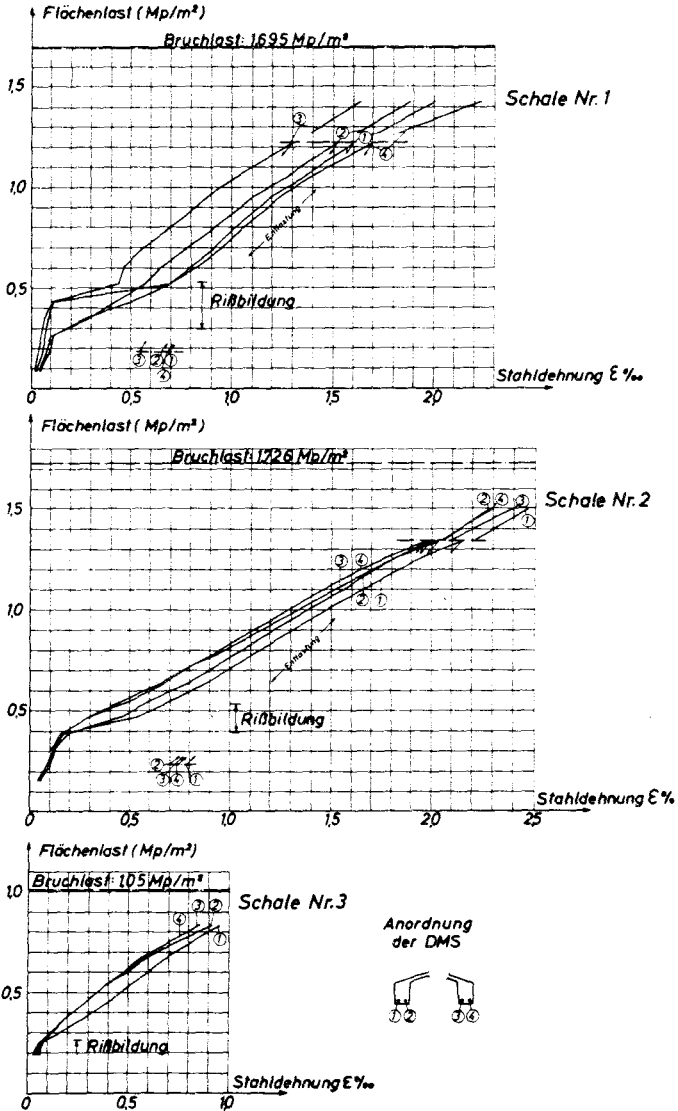


Bild 33

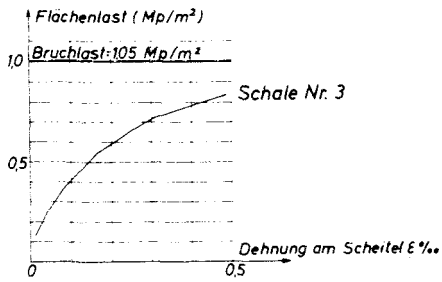
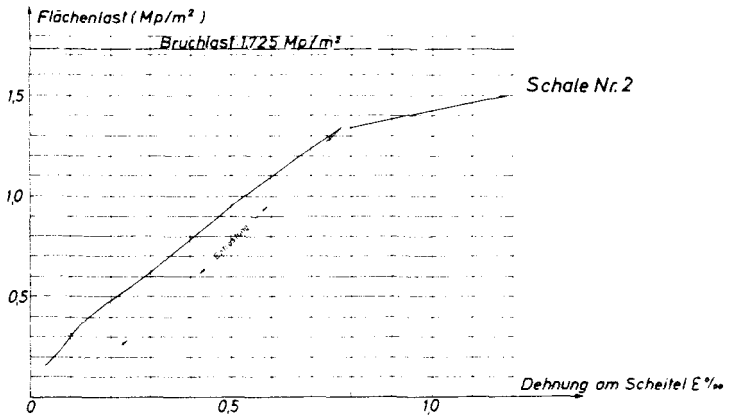
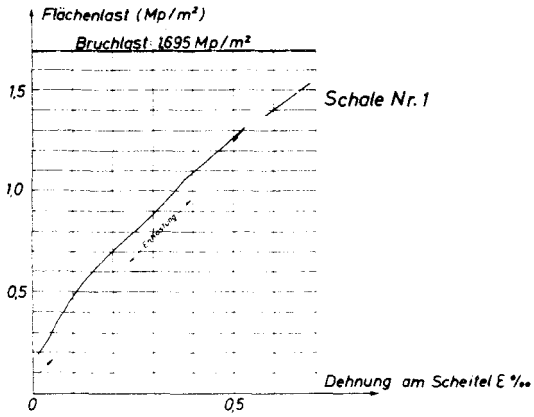


Bild 34

Der Bruch erfolgte bei einem Biegemoment von  $M_{\text{Bruch}} = 2,4$  Mpm, das Grenzmoment ergab sich zu  $M_{\text{Grenz}} = 4,36$  Mpm, woraus eine tatsächliche Abminderung von  $\alpha_{\text{Versuch}} = 0,55$  zu errechnen ist.

#### 5.4 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die in Pkt. 5.1 gestellten Fragen durch die Versuchsergebnisse beantwortet werden können. Es hat sich gezeigt, daß bei versagender Zugzone im Vergleich zu einem elastischen Material die Wirkung der Endscheiben bzw. der Schubdeformationen erheblich herabgesetzt wird, so daß man bei der Beurteilung der vorhandenen Sicherheit beide Wirkungen außer acht lassen darf. Weiterhin hat sich ergeben, daß im Falle eines unterbewehrten Querschnitts, wie das bei Schale Nr. 1 der Fall war, die Definition des Grenzmomentes nach Stadium II als Bezugsgröße richtig ist.

Besonders beachtenswert sind die Ergebnisse von Schale Nr. 2. Hierbei zeigte sich, daß eine einfache Schalendickung am Rande bereits genügt, den Brazier-Effekt durch die sich einstellende Schubdeformation zu verhindern.

Damit könnte auf einfache Weise die Stabilitätsgefahr bei ganz flachen, heute kaum noch üblichen Zylinderschalen entscheidend herabgesetzt werden.

#### 6. KRITISCHE BETRACHTUNGEN

In Kapitel 3 wurde ein neuartiges Rechenverfahren zur Bestimmung der Traglast eines Stahlbetonbalkens mit schalenförmigem Querschnitt entwickelt. Auf Grund der in 2.6 zusammengefaßten Ergebnisse der elastischen Stabilitätstheorie wurde dabei berücksichtigt, daß wegen der gewählten Querschnittsform bis zum Erreichen des Bruchzustan-



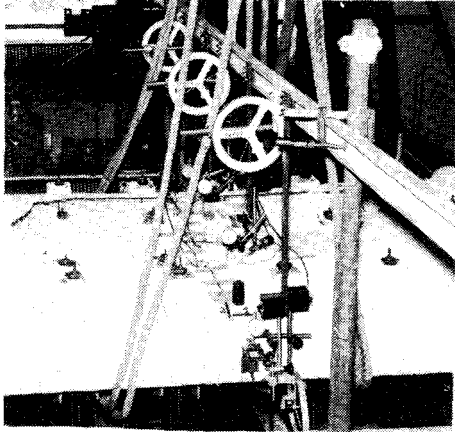


Bild 35 Schale Nr. 1



Bild 36 Schale Nr. 2



Bild 37 Schale Nr. 3

des beträchtliche Deformationen auftreten, die gegebenenfalls zum Stabilitätsverlust des Balkens - Brazier-Effekt - führen können. Nachfolgend werden einige spezielle Fragen des vorgeschlagenen Verfahrens sowie der Sicherheit erörtert.

Stahlbetonbalken mit flächenartigem Querschnitt werden in der Regel für den Gebrauchszustand nach der elastischen Schalentheorie behandelt. Stabilitätsuntersuchungen werden ebenso mit Hilfe der Elastizitätstheorie (gemäß der in 2.3 wiedergegebenen Ergebnisse) durchgeführt, wobei die neue DIN-Vorschrift (Neufassung DIN 1045, Fassung Dezember 1966) nach 27.1.2 eine Sicherheitszahl von  $\nu = 5$  gegenüber der "wirklichkeitsnah" nachgewiesenen Stabilitätslast vorsieht.

Da eine solche Untersuchung in den meisten Fällen eine rechnerische Sicherheit gegen das Ausbeulen der Druckzone in der Größenordnung von 8 - 20 (s. [50], Seite 271, 280, 288, 302, 320) ergibt, sagt das erzielte Ergebnis relativ wenig über das tatsächliche Tragverhalten des Bauteils aus. Dabei entspricht der dem Nachweis zugrunde gelegte Lastfall (zentrischer Druck) nur in wenigen Fällen der wirklichen Beanspruchungsart (vgl. die Ausführungen in 2.6).

Einen dem Stahlbeton besser entsprechenden Nachweis schlägt LUNDGREN [39] vor, indem er empirisch die maximale Druckspannung wie folgt festlegt:

$$\tilde{\sigma}_{zul} = \frac{\beta p}{1 + \frac{\beta p}{\sigma_{kr}}}$$

Bei einem Faktor von 0,2 für die kritische Spannung (untere kritische Grenze vgl. Gl. (21c)) ergibt sich:

$$\tilde{\sigma}_{zul} = \frac{\beta p}{1 + \frac{5\beta p}{E_b} \cdot \frac{R}{h}}$$

Gegen diese zulässige Spannung fordert aber LUNDGREN eine vierfache Sicherheit, die wahrscheinlich noch als übertrieben angesehen werden kann, wenn sie als echte Beulsicherheit aufzufassen ist.

Wie bereits erwähnt, wurde unter Stabilitätsverlust in Kapitel 3 nicht das Ausbeulen der Druckzone infolge der Normalkräfte verstanden, sondern derjenige Zustand, bei dem das innere Gleichgewicht in dem maximal beanspruchten Balkenquerschnitt infolge der aus der Längskrümmung resultierenden Umlenkkräfte nicht mehr herzustellen ist. Stellt sich der Erschöpfungszustand ohne "Gleichgewichts-unmöglichkeit", d.h. mit dem Fließen der Stahlbewehrung ein, wird die zu diesem Zustand gehörende Last als Traglast bezeichnet. Auch in diesem Falle bringt die Berücksichtigung der Deformationen einen Abminderungseffekt hinsichtlich des nichtdeformierten Zustandes mit sich; dem Stabilitätsverlust geht jedoch das Fließen der Bewehrung voran.

Die Ermittlung der Bruchsicherheit sollte nach dem vorgeschlagenen Verfahren wie folgt vor sich gehen:

Man bestimmt das maximale Biegemoment ( $M_1$ ) im Gebrauchszustand und das Grenzmoment ( $M_G$ ) nach Gl. (67). Aus diesen errechnet man die vorhandene Ausnutzung  $\alpha_1$  unter Gebrauchslast:

$$\alpha_1 = \frac{M_1}{M_G}$$

Die maximal mögliche Ausnutzung ( $\alpha_G$ ) läßt sich nach Ermittlung der nötigen Parameter den Diagrammen 21 - 25 entnehmen. Die vorhandene Sicherheit beträgt dann:

$$\nu = \frac{\alpha_G}{\alpha_1}$$

Für die Größe des Sicherheitsfaktors sollte man dann  
a) im Falle, wenn  $\alpha_G$  im Traglast-Bereich liegt,

$$\nu \geq 2,0$$

b) im Stabilitätsfall

$$\nu \geq 2,5$$

verlangen. Die unterschiedlichen Sicherheitsbeiwerte begründet die Tatsache, nach der der Querschnitt im Stabilitätsfall - wie auch Versuchsergebnisse ergaben - schon unter geringerer Last deformationsempfindlicher ist als der nicht stabilitätsgefährdete Querschnitt.

Eine Überprüfung der Ergebnisse durch mehr als tausend gerechnete Beispiele (diese Ergebnisse sind z.T. in den Bildern 21 - 25 dargestellt) ergab, daß die vorgeschlagene Rechenmethode etwa bis zu Randträgerhöhen, die doppelt so groß wie die Scheitelhöhe sind, sinnvoll verwendet werden kann. Diese Verhältnisse entsprechen denen der Baupraxis. Über diese Grenze hinaus ergibt sich bei Traglastfällen nur ein unwesentlicher Abminderungseffekt, bei Stabilitätsfällen aber eine sehr hohe Druckspannung im Scheitel, die ein örtliches Ausbeulen bzw. das Versagen der Druckzone erwarten läßt.

Eine theoretische Untersuchung über den Einfluß der Balkenlänge auf die Querschnittsdeformation wurde nicht angestellt. Um diese Frage zu klären, wurden die in 5. beschriebenen Klein- und Großmodellversuche durchgeführt.

Eine beruhigende Übereinstimmung zwischen Annahmen und dem wirklichen Tragverhalten der Modellschalen stellte sich schon bei den Asbestzementschalen heraus: die Meßwerte streuen innerhalb 10 % um die errechnete Stabilitätslast (s. Bild 29).

Absichtlich wurden die Mörtelbeton-Versuche ebenso in einem geometrischen Bereich durchgeführt, in dem das Tragwerk unter Gebrauchslast keineswegs als Balken zu betrachten wäre. Die gewonnenen Ergebnisse zeigen jedoch, daß die Endscheiben im Falle der Schale Nr. 3, bei der ein Stabilitätsfall konstruiert wurde, kaum eine

Abweichung von der errechneten Stabilitätslast verursachen. Geringere Abweichungen werden durch die Streuung in den Materialkennwerten hinreichend erklärt.

