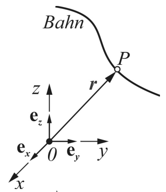
1. Massenpunkt

1.1 Kinematik

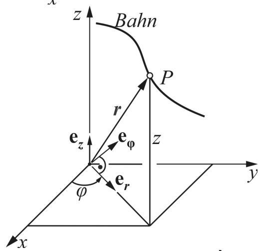
- Kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z\\ \mathbf{v}(t) &= \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\mathbf{e}_y + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z\\ \mathbf{a}(t) &= \ddot{x}(t)\mathbf{e}_x + \ddot{y}(t)\mathbf{e}_y + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z\end{aligned}$$



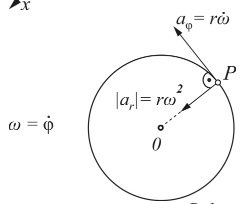
- Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{e}_z\\ \mathbf{v}(t) &= \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\,\mathbf{e}_z\\ \mathbf{a}(t) &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z\end{aligned}$$



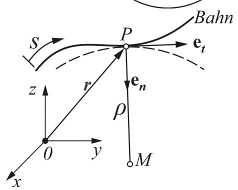
- Polarkoordinaten:
  Kreisbewegung

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= r\,\mathbf{e}_r\\ \mathbf{v}(t) &= r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\\ \mathbf{a}(t) &= -r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$



- Natürliche Koordinaten
  Bechleunigungsvektor

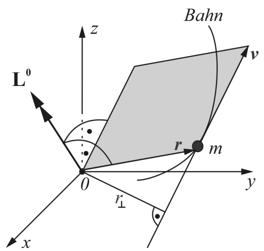
$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n$$



1.2 Kinetik

- Impuls: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.
- Impulssatz (Newton): $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$, m = konst: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}$
- Impulssatz: $m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t}\mathbf{F}dt = \hat{\mathbf{F}}$
- Momentensatz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}^0\right) &= \mathbf{M}^0\\ \mathbf{L}^0 &= \mathbf{r}\times m\mathbf{v}\\ \mathbf{M}^0 &= \mathbf{r}\times\mathbf{F}\end{aligned}$$



- (Sonderfall) Kreisbewegung:
- Drehimpuls:

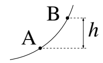
$$\mathrm{L}^0 = mrv = mr^2\omega = \Theta\omega$$

- Momentensatz:

$$\mathrm{M}^0 = \Theta^0\ddot{\varphi}$$

- Arbeitssatz $E_{K1} - E_{K0} = W_0^1$, E_K : kinetische Energie, W : Arbeit

Arbeitsanteile: 1.) Gewichtskraft



$A \rightarrow B:\quad W_G = -mgh$

$B \rightarrow A:\quad W_G = mgh$

2.) Feder: Spannen: $W_F = -\frac{c\Delta x^2}{2}$

Entspannen: $W_F = \frac{c\Delta x^2}{2}$

3.) Reibung: $W_R = -F_R\Delta s$

- Energiesatz $E_{K1} + E_{P1} = E_{K2} + E_{P2} =$ konst.,
  E_P : Potentielle Energie

2. System von Massenpunkten

2.1 Kinetik

- Schwerpunktsatz $m\mathbf{a}_S = \sum\mathbf{F}_i$
- Momentensatz $\frac{d}{dt}\left(\sum\mathbf{L}_i^0\right) = \sum\mathbf{M}_i^0$

– Momentensatz (Kreisbewegung): $\Theta_a\ddot{\varphi} = M_a$;

mit $\Theta_a = \sum_i m_i r_i^2$

2.2 Zentrischer Stoß

- Punktmasse / starre Wand
  – Stoßkräfte: $\hat{F}_R = e\hat{F}_K$, e : Stoßzahl, $0 \le e \le 1$
- Punktmasse / Punktmasse

$$\begin{aligned}m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2\\ \bar{v}_1 &= \frac{v_1m_1 + v_2m_2 - em_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \qquad \bar{v}_2 = \frac{v_1m_1 + v_2m_2 + em_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}\\ e &= -\frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)}{v_1 - v_2}.\end{aligned}$$

v : Geschwindigkeit vor dem Stoß

$\bar{v}$: Geschwindigkeit nach dem Stoß

3. Starre Körper

3.1 Kinetik der ebenen, starren Scheibe

- Momentensatz (bzgl. Schwerpunkt S oder Momentanpol π)

$$\Theta^P \ddot{\varphi} = \sum M_i^P \begin{cases} P = S \\ P = \pi \end{cases}$$

- Arbeits-/ Energiesatz

Arbeit der äußeren Kräfte und Momente: $W_0^1 = \int_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_0^1 M \mathrm{d}\varphi$

Kinetische Energie bzgl. des Schwerpunktes: $E_K = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \Theta^S \dot{\varphi}^2$

Kinetische Energie bzgl. des Momentanpols: $E_K = \frac{1}{2} \Theta^\pi \dot{\varphi}^2$

3.2 Massenträgheitsmomente homogener Körper

- Allgemeine Formel

$$\Theta^A = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \rho \mathrm{d}V$$

- Satz von Steiner

$$\Theta^A = \Theta^S + m r_{AS}^2, \quad r_{AS} = \text{ Abstand der Punkte A, S}$$

- Massenträgheitsmoment
  - eines schlanken, homogenen Stabes: $\Theta^S = \frac{1}{12} m \ell^2$ (Masse m, Länge ℓ)
  - einer homogenen Rechteckscheibe: $\Theta^S = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ (Masse m, Längen a, b)
  - einer homogenen Kreisscheibe: $\Theta^S = \frac{1}{2} m R^2$ (Masse m, Radius R)
  - einer homogenen Kugel: $\Theta^S = \frac{2}{5} m R^2$ (Masse m, Radius R)

- starre Scheibe aus einfachen Teilscheiben (ebener Fall)

$$\Theta^A = \sum \Theta_i^A = \sum \left(\Theta_i^{S_i} + m_i r_{S_i A}^2 \right)$$

- Punktmassen

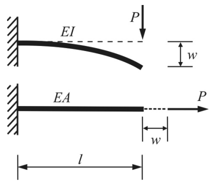
$$\Theta^A = m r_{SA}^2$$

4. Schwingungen

- Federsysteme

Parallelschaltung: $c_{ers} = \sum c_j$

Reihenschaltung: $\frac{1}{c_{ers}} = \sum \frac{1}{c_j}$



Kragträger: $w = \frac{Pl^3}{3EI}$

Stab: $w = \frac{Pl}{EA}$

- Ungedämpfte freie Schwingung

– Homogene Lösung der DGL: $x_h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

– Schwingungsdauer: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- Gedämpfte Schwingung

– Homogene Lösung der DGL:

Dämpfungsgrad: $D = \frac{\delta}{\omega}$

$D > 1 : x_h = e^{-\delta t} \left(A_1 e^{\mu t} + A_2 e^{-\mu t} \right), \quad \mu = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

$D = 1 : x_h = e^{-\delta t} \left(A_1 + A_2 t \right)$

$D < 1 : x_h = e^{-\delta t} \left(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t \right)$

mit der Kreisfrequenz des ged. Systems: $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \omega \sqrt{1 - D^2}$

Periodendauer: $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$.