

**1. Elastizitätstheorie**

**1.1 Dehnung**

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; 2\epsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} ; 2\epsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

(i) Transformation

$$\epsilon_\xi = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\epsilon_\eta = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\varphi$$

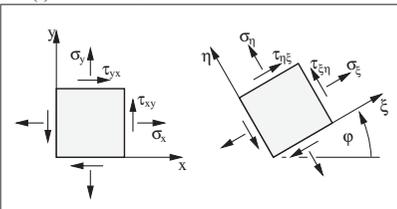
(ii) Hauptdehnungen

$\epsilon$  extremal:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} ; \epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$

**1.2 Spannung**

(i) Transformation

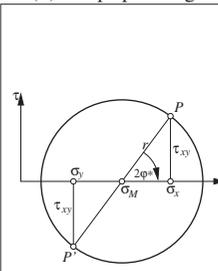


$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_\eta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

(ii) Hauptspannungen



$\sigma$  extremal:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} ; \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\tau$  extremal:

$$\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} ; \tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

**1.3 Elastizitätsgesetz**

• 3D Dehnung aus Spannung

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] ; \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] ; \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} ; \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} ; \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

• 3D Spannung aus Dehnung

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] ; \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)] ;$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} ; \tau_{yz} = G\gamma_{yz} ; \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

mit  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Mit Lamé-Konstanten

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

**1.4 Ebene Zustände**

- Ebener Spannungszustand:  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ .
- Ebener Verzerrungszustand:  $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ .

**2. Stäbe**

• Normalspannung

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

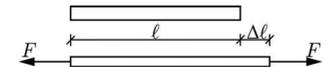
• DGL der Verschiebung

$$EAu' = N(x),$$

$$(EAu')' = -p(x)$$

• Längenänderung

$$\Delta\ell = F \cdot \ell / EA, \quad EA \text{ und } F \text{ konstant.}$$



**3. Balken**

**3.1 Geometrische Eigenschaften des Querschnittes**

• Statisches Moment:  $S_y = \int_A z \, dA, \quad S_z = \int_A y \, dA$

• Flächenträgheitsmoment:  $I_y = \int_A z^2 \, dA$   
 $I_z = \int_A y^2 \, dA$   
 $I_{yz} = -\int_A yz \, dA$

• Polares Moment:  $I_S = \int_A r^2 \, dA$

$$= I_y + I_z$$

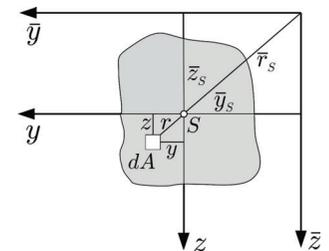
• Satz von Steiner:

$$I_{\bar{y}} = I_y + \bar{z}_S^2 A$$

$$I_{\bar{z}} = I_z + \bar{y}_S^2 A$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} - \bar{y}_S \bar{z}_S A$$

$$I_{\bar{S}} = I_S + \bar{r}_S^2 A$$



	Rechteck	Dreieck	Kreis	dünner Kreisring	Halbkreis
$I_y$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\pi R_M^3 t$	$\frac{\pi R^4}{8}$
$I_z$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{36}(b^2 - ba + a^2)$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\pi R_M^3 t$	$\frac{R^4}{72\pi}(9\pi^2 - 64)$
$I_{yz}$	0	$\frac{bh^2}{72}(2a - b)$	0	0	0

• Transformation: Siehe 1.2 (mit  $\sigma_x = I_y$ ,  $\sigma_y = I_z$ ,  $\tau_{xy} = I_{yz}$ )

### 3.2 Balken unter Biegung

- Normalspannung

(i) Gerade Biegung:  $\sigma = \frac{M}{I} z$

- (ii) Schiefe Biegung + Normalkraft:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{1}{\Delta} \left[ (-M_z I_y + M_y I_{yz}) y + (M_y I_z - M_z I_{yz}) z \right],$$

mit  $\Delta = I_y I_z - I_{yz}^2$ .

- DGL der Biegelinie

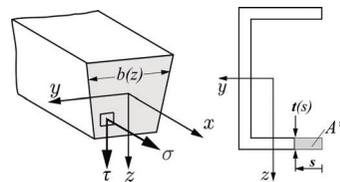
$$EI w'' = -M(x); \quad (EI w'')' = -Q(x); \quad (EI w''')' = q(x).$$

- Schubspannung infolge Querkraft

$$\tau(z) = \frac{Q_x S_y^*(z)}{I_y b(z)}; \quad S_y^*(z) = \int_{A^*} z dA.$$

- Dünnwandige Querschnitte

$$\tau(s) = \frac{Q_x S_y^*(s)}{I_y t(s)}.$$



### 3.3 Torsion

- Schubspannung:  $\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$ ;

- DGL der Verdrehung

$$GI_T \vartheta' = M_T;$$

$$(GI_T \vartheta')' = -m_T.$$

Querschnitt	$W_T$	$I_T$
dünnwandiges Kreisrohr 	$2\pi R_m^2 t$	$2\pi R_m^3 t$
dickwandiges Kreisrohr 	$\frac{\pi R_a^3}{2}(1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi R_a^4}{2}(1 - \alpha^4)$
Vollkreisquerschnitt 	$\frac{\pi R^3}{2}$	$\frac{\pi R^4}{2}$
dünnwandige geschlossene Hohlquerschnitte 	$2A_m \cdot t_{min}$ $A_m$ : die von der Profilmittellinie eingeschlossene Fläche.	$\frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{ds}{t}}$
schmales Rechteck 	$\frac{1}{3} h t^2$	$\frac{1}{3} h t^3$
zusammengesetzte Profile 	$\approx \frac{1}{3} \frac{\sum h_i t_i^3}{t_{max}}$	$\approx \frac{1}{3} \sum h_i t_i^3$

### 3.4 Knickung

- DGL

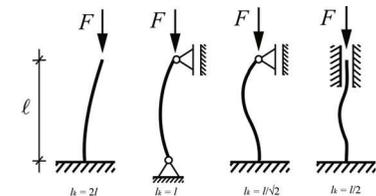
$$w^{IV} + \lambda^2 w'' = 0,$$

mit  $\lambda^2 = F/EI$ , EI Konstant

Ansatz

$$w = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \lambda x + D$$

- $F_{krit} = \pi^2 \frac{EI}{\ell^2 k}$



## 4. Energiemethoden

### 4.1 Äußere Arbeit und gespeicherte Energie

- Äußere Arbeit

$$W = \int F du = \frac{1}{2} Fu \quad ; \quad W = \int M d\varphi = \frac{1}{2} M\varphi$$

- Formänderungsenergie pro Längeneinheit

$$d\Pi = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \quad (\text{Stab unter Zug/Druck}) \quad d\Pi = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} \quad (\text{Balken unter Biegung})$$

$$d\Pi = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{GA_S} \quad (\text{Balken unter Querkraft}) \quad d\Pi = \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{GI_T} \quad (\text{Stab in Torsion})$$

### 4.2 Satz von Castigliano

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F_i} = u_i \quad ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = F_i \quad ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial M_i} = \varphi_i \quad ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = M_i$$

### 4.3 Satz von Betti

$$F_j u_{ji} = F_i u_{ij}$$

$u_{ij}$ : Verschiebung an Stelle  $i$  aufgrund einer Kraft an Stelle  $j$

Entsprechendes für Momente und Verdrehungen.

### 4.4 Arbeit virtueller Kräfte

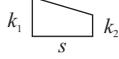
$$\mathbf{1}u = \int \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \int \frac{Q\bar{Q}}{GA_S} dx + \int \frac{M_T\bar{M}_T}{GI_T} dx$$

$N, M, Q, M_T$ : Schnittgrößen aufgrund äußerer Lasten

$\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}, \bar{M}_T$ : Schnittgrößen aufgrund virtueller Kraft  $\mathbf{1}$

Entsprechendes für virtuelle Momente und Verdrehungen.

## 4.5 Koppeltafel zu 4.4

$M$				
	$sik$	$\frac{1}{2}sik$	$\frac{1}{2}sik$	$\frac{1}{2}si(k_1+k_2)$
	$\frac{1}{2}sik$	$\frac{1}{3}sik$	$\frac{1}{6}sik$	$\frac{1}{6}si(k_1+2k_2)$
	$\frac{1}{2}s(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}s(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}s(2i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}s(2i_1k_1+2i_2k_2+i_1k_2+i_2k_1)$
quadratisch		$\frac{2}{3}sik$	$\frac{1}{3}sik$	$\frac{1}{3}si(k_1+k_2)$
quadratisch		$\frac{2}{3}sik$	$\frac{5}{12}sik$	$\frac{1}{12}si(3k_1+5k_2)$
quadratisch		$\frac{1}{3}sik$	$\frac{1}{4}sik$	$\frac{1}{12}si(k_1+3k_2)$
kubisch		$\frac{1}{4}sik$	$\frac{1}{5}sik$	$\frac{1}{20}si(k_1+4k_2)$
kubisch		$\frac{3}{8}sik$	$\frac{11}{40}sik$	$\frac{1}{40}si(4k_1+11k_2)$
kubisch		$\frac{1}{4}sik$	$\frac{2}{15}sik$	$\frac{1}{60}si(7k_1+8k_2)$

◦ Kennzeichnet den Nullpunkt der Dreieckslast