Nachname : .... **Klausurnummer :** ....

Vorname : .... **Matrikelnummer :** ....

Hinweise zur Klausur:

Nachname, Vorname und Matrikelnummer in die vorgesehenen Felder eintragen. Bitte verwenden Sie **keinen** Bleistift, grünen oder roten Stift (Korrekturfarben!). **Jedes Blatt** mit Namen und Matrikelnummer versehen, Blätter **durchlaufend nummerieren** und **nur einseitig** beschreiben! Jede Aufgabe auf einem **neuen Blatt** beginnen. Die **Klausurnummer** bitte **merken** oder **notieren**!
Zulässige Hilfsmittel: Formelblatt, 2-seitig, ohne Lösungswege. Taschenrechner, nicht programmierbar.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

1. Aufgabe (8 Punkte)

Beiliegend finden Sie einen FEniCS-Programmcode. Beschreiben Sie, welches FE-Problem der Code löst, insbesondere:

a) Erstellen Sie eine Skizze der Geometrie, einschließlich Abmessungen.

b) Tragen Sie die Randbedingungen in die Skizze ein.

c) Geben Sie die schwache Form des Problems an.

d) Welche Änderung am Code wäre notwendig, um Ansatzfunktionen 3.Ordnung zu verwenden? Was wäre zu ändern, um das Netz zu verfeinern? (Tragen Sie die Änderungen direkt im Code ein.)

2. Aufgabe (15 Punkte)

Das abgebildete Viereckselement hat die Ansatzfunktionen $N_1 - N_4$ in lokalen Koordinaten $\xi, \eta \in [-1, 1]$. Die Feldgrößen $p_1 - p_4$ an den Knoten seien bekannt, Koordinaten siehe Zeichnung.

a) Zeigen Sie, dass die Ansatzfunktionen die Eigenschaft *partition of unity* erfüllen. Warum ist dies eine notwendige Eigenschaft von Ansatzfunktionen? Nennen Sie eine weitere notwendige Eigenschaft!

b) Bestimmen Sie die Jakobi-Matrix $\mathbf{J}(\xi, \eta)$.

c) Bestimmen Sie den Wert der Feldgröße p sowie deren Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ am Punkt $(x, y) = (\frac{46}{16}, \frac{95}{16})$.

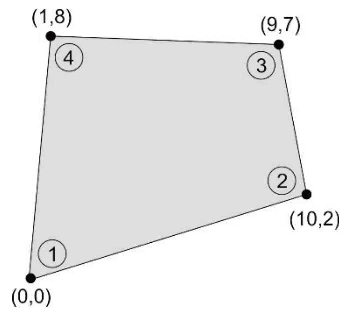
Auf das Element wirke eine Lastfunktion der Art $f(\xi, \eta) = \alpha\xi + \beta\eta$. Das Integral $\int\int N_1 f \,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ soll per Gauß-Quadratur berechnet werden.

d) Geben Sie die Formel zur Berechnung des Integrals an. Wie viele Integrationspunkte sind erforderlich, und warum? Welcher Effekt kann auftreten, wenn zu wenig Integrationspunkte verwendet werden? Welchen Betrag hat die Summe der Gewichtungsfaktoren, und warum?

Gegeben:

$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$, $N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$, $N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$,
$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

$p_1 = 0$, $p_2 = 10$, $p_3 = -5$, $p_4 = 20$



3. Aufgabe (7 Punkte)

Die Wärmeleitung in einer Scheibe soll berechnet werden, hierzu wurde die Scheibe in drei Elemente aufgeteilt. Die - rein fiktive - Wärmeleitmatrix $\mathbf{K}^e$ eines Einzelelements (rechts) sei bekannt.

Geben Sie

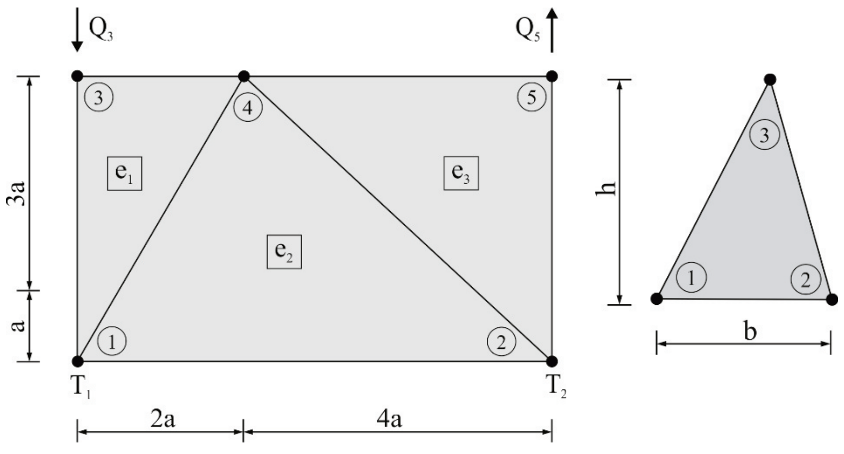
a) die globale Wärmeleitmatrix und

b) das globale Gleichungssystem unter Berücksichtigung der gegebenen Randbedingungen

an.

Gegeben:

$$\mathbf{K}^e = k\begin{bmatrix} b & b-h & \frac{2bh}{b-h} \\ b-h & \frac{b^2}{h} & -\frac{(b-h)^2}{b+h} \\ \frac{2bh}{b-h} & -\frac{(b-h)^2}{b+h} & h \end{bmatrix}$$



4. Aufgabe (7 Punkte)

Eine (fiktive) Reaktions-Diffusion-Gleichung lautet:

$$g(c) + \beta\frac{\mathrm{d}^2 c}{\mathrm{d}x^2} = 0 \text{ mit } g(c) = \alpha(1-c)$$

a) Bestimmen Sie schwache Form des Problems auf dem Gebiet $0 \leq x \leq l$.

b) Vereinfachen Sie die Randterme mittels des Zusammenhangs $q = -\beta\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$.

c) Geben Sie die diskrete schwache Form an.

d) Bringen Sie das Ergebnis aus c) in die Form $\mathbf{Mc} = \mathbf{f}$

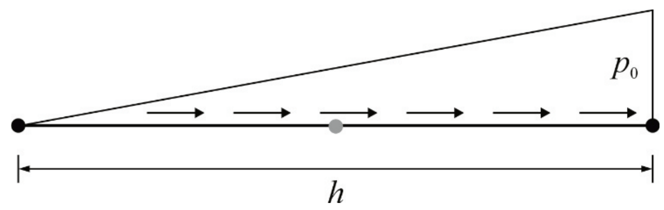
5. Aufgabe (4 Punkte)

Auf ein Stabelement mit quadratischen Ansatzfunktionen wirke eine linear zunehmende Streckennormalkraft $p(\xi)$.

Bestimmen Sie analytisch den Lastvektor.

Gegeben:

$N_1 = \frac{1}{2}(\xi-1)\xi,\ N_2 = 1-\xi^2,\ N_3 = \frac{1}{2}(\xi+1)\xi$



②

a) $\frac{1}{4}\left[(1-\xi)(1-\eta)+(1+\xi)(1-\eta)+(1+\xi)(1+\eta)+(1-\xi)(1+\eta)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[2(1-\eta)+2(1+\eta)\right] = 1$ ✓

b) $J = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}$

$N_{1,\xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta)$ | $N_{1,\eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)$

$N_{2,\xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)$ | $N_{2,\eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)$

$N_{3,\xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)$ | $N_{3,\eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)$

$N_{4,\xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta)$ | $N_{4,\eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)$

$x_{,\xi} = x_1 N_{1,\xi} + x_2 N_{2,\xi} + x_3 N_{3,\xi} + x_4 N_{4,\xi}$

$= 0 + 10\cdot\frac{1}{4}(1-\eta) + 9\cdot\frac{1}{4}(1+\eta) - 1\cdot\frac{1}{4}(1+\eta)$

$= \left(\frac{10}{4}+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{10}{4}+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)\eta = \underline{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\eta}$

$y_{,\xi} = 0 + 2\cdot\frac{1}{4}(1-\eta) + 7\cdot\frac{1}{4}(1+\eta) - 8\cdot\frac{1}{4}(1+\eta)$

$= \left(\frac{2}{4}+\frac{7}{4}-\frac{8}{4}\right) + \left(-\frac{2}{4}+\frac{7}{4}-\frac{8}{4}\right)\eta$

$= \underline{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\eta}$

$x_{,\eta} = 0 - \frac{10}{4}(1+\xi) + \frac{9}{4}(1+\xi) + \frac{1}{4}(1-\xi)$

$= \left(-\frac{10}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{10}{4}+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)\xi$

$= \underline{-\frac{1}{2}\xi}$

$y_{,\eta} = 0 - \frac{2}{4}(1+\xi) + \frac{7}{4}(1+\xi) + \frac{8}{4}(1-\xi)$

$= \left(-\frac{2}{4}+\frac{7}{4}+\frac{8}{4}\right) + \left(-\frac{2}{4}+\frac{7}{4}-\frac{8}{4}\right)\xi$

$= \underline{\frac{13}{4} - \frac{3}{4}\xi}$

c) Punkt in (ξ,η)

I $\quad x_1 = \frac{49}{\cancel{16}\,4} = \frac{1}{4}\left[0\cdot(1-\xi_1)(1-\eta_1) + 10(1+\xi_1)(1-\eta_1) + 9\cdot(1+\xi_1)(1+\eta_1) + 1\cdot(1-\xi_1)(1+\eta_1)\right]$

II $\quad y_1 = \frac{85}{\cancel{16}\,4} = \frac{1}{4}\left[0 + 2(1-\xi_1)(1-\eta_1) + 7\cdot(1+\xi_1)(1+\eta_1) + 8\cdot(1-\xi_1)(1+\eta_1)\right]$

I $\quad \frac{49}{4} = (\underbrace{10+9}_{20}+1) + (\underbrace{10+9}_{18}-1)\xi_1 + (\underbrace{-10+9}_{0}+1)\eta_1 + (\underbrace{-10+9-1}_{-2})\xi_1\eta_1$

$\frac{49}{4} = 20 + 18\xi_1 - 2\xi_1\eta_1$

(2) c) ...

$\xi = -\frac{1}{2}$ $\qquad \eta = \frac{1}{2}$

$$p = N_i\, p_i = \frac{1}{4}\Big[(1+\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2})\cdot 0 + (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2})\,10$$
$$- (1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{2})\,5 + (1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{2})\,20\Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{3}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 10 - \frac{3}{4}\cdot 5 + \frac{9}{4}\cdot 20\Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{10}{4} - \frac{15}{4} + \frac{180}{4}\Big] = \frac{175}{16}$$

$$\underline{\underline{J}} = \cancel{\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}\eta} \begin{bmatrix} \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\eta & \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\eta \\ -\frac{1}{2}\xi & \frac{13}{4} - \frac{3}{4}\xi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{J}}(-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{29}{8} \end{bmatrix}$$

		①	②	③	④
$N_{,\xi}$	@ $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$
$N_{,\eta}$		$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$\begin{pmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{pmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{pmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{pmatrix}$$

$p_{,x} = N^i_{,x}\, p_i$

$p_{,y} = N^i_{,y}\, p_i$

d) $\iint N_1\, f\, d\xi\, d\eta = \sum_i N_1(\xi_i; \eta_i)\, f(\xi_i; \eta_i)\, w_i$

$N_1 \cdot f$ ist 2. Ordnung in ξ und η $\rightarrow$ 2 GP pro Richtung

Sonst: hourglassing

$\sum w_i = A_{ref} = 4$, sonst wird konst. Funktion bereits falsch integriert

3

a)

	1	2	3	4	5
1	□	□	□	□	
2	□	□		□	□
3	□		□	□	
4	□	□	□	□	□
5		□		□	□

□ e_1
□ e_2
□ e_3

b)

$$[K] \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix}_{ges.} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ 0 \\ -Q_5 \end{pmatrix}$$

4

a)

$$\int_0^l w \cdot \left[\alpha(1-c) + \beta \frac{d^2c}{dx^2} \right] dx = 0$$

$$\int_0^l w\alpha(1-c)\,dx + \left\{ \left[w\beta \frac{dc}{dx} \right]_0^l - \int_0^l \frac{dw}{dx} \beta \frac{dc}{dx}\,dx \right\} = 0$$

$$\int_0^l \beta \frac{dw}{dx} \frac{dc}{dx}\,dx = \left[w\beta \frac{dc}{dx} \right]_0^l + \int_0^l w\alpha(1-c)\,dx$$

b)

$$\int_0^l \beta \frac{dw}{dx} \frac{dc}{dx}\,dx - \int_0^l w\alpha(1-c)\,dx = w_0 q_0 - w_l q_l$$

c)

$$c = \underline{N}^T \underline{\hat{c}} \qquad w = \underline{N}^T \underline{\hat{w}} = \underline{\hat{w}}^T \underline{N}$$

$$\underline{\hat{w}}^T \int_0^l \beta \, \underline{N}_{,x} \underline{N}^T_{,x}\,dx \, \underline{\hat{c}} + \underline{\hat{w}}^T \int_0^l \alpha \, \underline{N}\,\underline{N}^T\,dx \, \underline{\hat{c}}$$

$$= \underbrace{\left[w_0 q_0 - w_l q_l \right]}_{b} + \underline{\hat{w}}^T \int_0^l \underline{N} \, \alpha \, dx$$

$$b = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ -q_l \end{pmatrix}$$

(4) d)

$$\int_0^\ell \beta\, N_{,x} N_{,x}^T\, dx\, \hat{c} + \int_0^\ell \alpha\, \underline{N}\,\underline{N}^T\, dx\, \hat{c} = \underline{q} + \int_0^\ell \underline{N}\,\alpha\, dx$$

$$\underline{\underline{M}} = \int_0^\ell \beta\, \underline{N}_{,x} \underline{N}_{,x}^T\, dx + \int_0^\ell \alpha\, \underline{N}\,\underline{N}^T\, dx$$

$$\underline{f} = \underline{q} + \int_0^\ell \underline{N}\,\alpha\, dx$$

(5)

$$\hat{f} = \int_0^h \underline{N}\, p\, dx = \int_{-1}^{1} \underline{N}\, p\, \frac{h}{2}\, d\xi$$

$$p(\xi) = \alpha\xi + \beta$$

$$p(-1) = 0 \qquad p(1) = p_0$$

$$-\alpha + \beta = 0 \qquad \alpha + \beta = p_0$$

$$2\beta = p_0 \qquad \beta = \tfrac{1}{2}p_0 \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}p_0$$

$$p(\xi) = \tfrac{1}{2}p_0(\xi + 1)$$

$$f_1 = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(\xi-1)\xi\, \tfrac{1}{2}p_0(\xi+1)\, d\xi = \tfrac{1}{4}p_0 \int_{-1}^{1} (\xi^2 - \xi)(\xi+1)\, d\xi$$

$$= \tfrac{1}{4}p_0 \int_{-1}^{1} \xi^3 + \xi^2 - \xi^2 - \xi\, d\xi = \tfrac{1}{4}p_0 \left[\tfrac{1}{4}\xi^4 - \tfrac{1}{2}\xi^2\right]_{-1}^{1}$$

$$= \tfrac{1}{4}p_0 \left[-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right] = 0 \cdot \tfrac{h}{2}$$

$$f_2 = \tfrac{1}{2}p_0 \int_{-1}^{1} (1 - \xi^2)(\xi+1)\, d\xi = \tfrac{1}{2}p_0 \int_{-1}^{1} \xi + 1 - \xi^3 - \xi^2\, d\xi$$

$$= \tfrac{1}{2}p_0 \left[-\tfrac{1}{4}\xi^4 - \tfrac{1}{3}\xi^3 + \tfrac{1}{2}\xi^2 + \xi\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{2}p_0 \left[-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + 1\right]$$

$$= \tfrac{4}{6}p_0 \cdot \tfrac{h}{2} = \tfrac{1}{3}h p_0$$

$$f_3 = \tfrac{1}{4}p_0 \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(\xi+1)\xi(\xi+1)\, d\xi$$

$$= \tfrac{1}{4}p_0 \int_{-1}^{1} (\xi^2 + \xi)(\xi+1)\, d\xi = \tfrac{1}{4}p_0 \int_{-1}^{1} \xi^3 + \xi^2 + \xi^2 + \xi\, d\xi$$

$$= \tfrac{1}{4}p_0 \left[\tfrac{1}{4}\xi^4 + \tfrac{2}{3}\xi^3 + \tfrac{1}{2}\xi^2\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{4}p_0 \left[\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}p_0 \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{h}{2} = \tfrac{1}{6}h p_0$$