Nachname : …………………………… **Klausurnummer :** ……………………………

Vorname : …………………………… **Matrikelnummer :** ……………………………

Hinweise zur Klausur:

Nachname, Vorname und Matrikelnummer in die vorgesehenen Felder eintragen. Bitte verwenden Sie **keinen** Bleistift, grünen oder roten Stift (Korrekturfarben!). **Jedes Blatt** mit Namen und Matrikelnummer versehen, Blätter **durchlaufend nummerieren** und **nur einseitig** beschreiben! Jede Aufgabe auf einem **neuen Blatt** beginnen. Die **Klausurnummer** bitte **merken** oder **notieren**!
Zulässige Hilfsmittel: Formelblatt, 2-seitig, ohne Lösungswege. Taschenrechner, nicht programmierbar.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

1. Aufgabe (7 Punkte)

Beiliegend finden Sie einen FEniCS-Programmcode. Beschreiben Sie, welches FE-Problem der Code löst, insbesondere:

a) Welches ist die Geometrie (Skizze)?

b) Welches sind die Randbedingungen?

c) Was ist die schwache Form des Problems?

d) Welcher Art sind die Ansatzfunktionen?

2. Aufgabe (9 Punkte)

Das abgebildete Dreieckselement hat die Ansatzfunktionen $N_1 - N_3$ in lokalen Koordinaten $\xi_1, \xi_2 \in [0,1]$. Die Feldgrößen $T_1 - T_3$ an den Knoten seien bekannt, Koordinaten siehe Zeichnung.

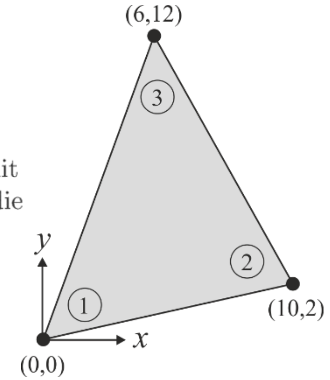
a) Bestimmen Sie den Wert von T an der Stelle $(x,y) = (5,7)$.

Zur Bestimmung des Lastvektors soll das Integral

$$f_1 = \int_\Omega N_1(\xi_1,\xi_2)k(\xi_1,\xi_2)dA \text{ mit } k(\xi_1,\xi_2) = 2\alpha\xi_2$$

ermittelt werden.

b) Berechnen Sie f_1 durch Gauß-Integration mit drei Punkten **GP**. Geben Sie an, wie groß die Gewichte $w_1 = w_2 = w_3$ sein müssen und warum dies so ist. Bis zu welcher Ordnung ist die Integration exakt?



Gegeben:

$N_1 = \xi_1,\ N_2 = \xi_2,\ N_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$

$T_1 = 0,\ T_2 = 20,\ T_3 = -5,\ \alpha$

GP: $(\xi_1,\xi_2) = (0,\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2},0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Hinweis: Die Jakobi-Matrix ist konstant.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Das dargestellte Stabwerk besteht aus drei Stäben gleicher Dehnsteifigkeit EA. Es wird durch eine Einzelkraft F belastet.

Bestimmen Sie

a) die Element-Steifigkeitsmatrizen,

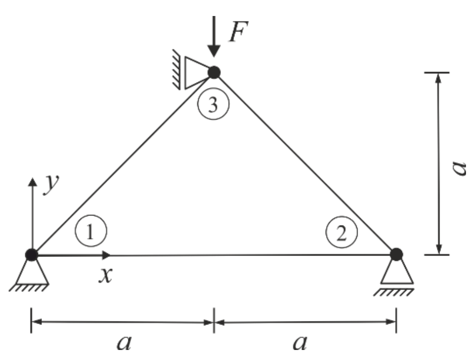
b) die Gesamt-Steifigkeitsmatrix,

c) den Lastvektor und

d) die unbekannten Verschiebungen.

Hinweis: Der Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung für ein Stabelement im Winkel ϕ zur x-Achse ist

$$\begin{pmatrix} f_x^1 \\ f_y^1 \\ f_x^2 \\ f_y^2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} cos^2(\phi) & sin(\phi)cos(\phi) & -cos^2(\phi) & -sin(\phi)cos(\phi) \\ sin(\phi)cos(\phi) & sin^2(\phi) & -sin(\phi)cos(\phi) & -sin^2(\phi) \\ -cos^2(\phi) & -sin(\phi)cos(\phi) & cos^2(\phi) & sin(\phi)cos(\phi) \\ -sin(\phi)cos(\phi) & -sin^2(\phi) & sin(\phi)cos(\phi) & sin^2(\phi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \end{pmatrix}$$



4. Aufgabe (11 Punkte)

Die Biegung eines Balken wird durch die Differentialgleichung

$$EIw_{,xxxx} = q$$

beschrieben.

a) Bestimmen Sie schwache Form des Problems auf dem Gebiet $a \leq x \leq b$. Vereinfachen Sie die Randterme mittels der bekannten Zusammenhänge $EIw_{,xxx} = -Q$ und $EIw_{,xx} = -M$.

b) Geben Sie die diskrete schwache Form in Matrixschreibweise für das einzelne Element an.

Zur letztendlichen Lösung des Problems werden geeignete Ansatzfunktionen benötigt.

c) Welche Anforderungen werden an Ansatzfunktionen allgemein gestellt?

d) Welche spezifischen Anforderungen an die Kontinuität ergeben sich im konkreten Fall?

5. Aufgabe (3 Punkte)

Die zeitabhängige Wärmeleitung kann durch die halbdiskrete Form

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{KT} = \mathbf{F}$$

beschrieben werden, mit Wärmekapazitätsmatrix $\mathbf{C}$, Wärmeleitungsmatrix $\mathbf{K}$, Lastvektor $\mathbf{F}$ und Temperaturvektor $\mathbf{T}$.

Wie kann die zeitliche Diskretisierung erfolgen? Geben Sie eine mögliche Gleichung an. Wie ist die Stabilität des von Ihnen gewählten Verfahrens?

Klausur FEM SS 17 ①

2) a.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = N_i(\xi_1, \xi_2)\, \underline{x}_i$$

$$\text{I} \quad 5 = \xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 10 + (1-\xi_1-\xi_2) \cdot 6$$

$$\text{II} \quad 7 = \xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 2 + (1-\xi_1-\xi_2) \cdot 12$$

$$\text{I} \quad -6\,\xi_1 + 4\,\xi_2 = -1$$

$$\text{II} \quad -12\,\xi_1 - 10\,\xi_2 = -5 \qquad \text{II} - 2\cdot\text{I}$$

$$0 \quad -18\xi_2 = -3 \qquad \underline{\xi_2 = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}}$$

in I $\quad -6\xi_1 + \frac{4\cdot 1}{6} = -1$

$$6\xi_1 = \frac{10}{6} \qquad \underline{\xi_1 = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}}$$

$$\underline{T}(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 T_1 + \xi_2 T_2 + \xi_3 T_3$$

$$= \frac{5}{18} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 20 + \left(1 - \frac{5}{18} - \frac{1}{6}\right) \cdot (-5)$$

$$= \frac{20}{6} - \frac{50}{18} = \frac{10}{18} = \underline{\frac{5}{9}}$$

b.

$$f_1 = N_1(\underline{\xi}_i)\, k(\underline{\xi}_i)\, |J(\underline{\xi}_i)|\, w_i$$

$$N_1(\underline{\xi}_i) = \xi_1 = 0 \;/\; \tfrac{1}{2} \;/\; \tfrac{1}{2}$$

$$k(\underline{\xi}_i) = 2\alpha \cdot \tfrac{1}{2} \;/\; 0 \;/\; 2\alpha \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$J = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial N}{\partial \xi_1} = 1 \,|\, 0 \,/\, -1 \qquad \frac{\partial N}{\partial \xi_2} = 0 \,/\, 1 \,|\, -1$$

$$J = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} \qquad |J| = 108$$

$$f_1 = \left[0 \cdot \alpha \cdot w_1 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 \cdot w_2 + \tfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot w_3\right] \cdot 108$$

$$= 54\,\alpha\, w_3$$

$$\Sigma w_i \overset{!}{=} A_{ref} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{6}$$

$$\underline{f_1 = 9\alpha}$$

Regel exakt bis 2. Ordnung

3) a.

Element 1 $\quad \phi = 0 \quad$ Knoten $1 \to 2$

$$\frac{EA}{2a}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Element 2 $\quad \phi = 45° \quad$ Knoten $1 \to 3$

$$\frac{EA}{\sqrt{2}\,a}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Element 3 $\quad \phi = -45° \quad$ Knoten $3 \to 2$

$$\frac{EA}{\sqrt{2}a}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b.

$$K = \frac{EA}{2a}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1x & 1y & 2x & 2y & 3x & 3y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1x \\ 1y \\ 2x \\ 2y \\ 3x \\ 3y \end{array}$$

c., d.

$$\hat{K} = \frac{EA}{2a}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} \cdot \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}$$

3) d.

(3)

$$\underbrace{\frac{EA}{2\sqrt{2}\,a}}_{k}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_{2x}\\ u_{3y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -F\end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad (\sqrt{2}+1)\,u_{2x} + u_{3y} = 0$$

$$\text{II} \quad u_{2x} + 2u_{3y} = -\frac{F}{k}$$

$$\underline{u_{3y}} = -\frac{1}{2}\frac{F}{k} - \frac{1}{2}u_{2x}$$

$$\text{in I} \quad \sqrt{2}\,u_{2x} + u_{2x} - \frac{1}{2}u_{2x} - \frac{1}{2}\frac{F}{k} = 0$$

$$u_{2x}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{F}{k}$$

$$u_{2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}+1}\,\frac{F}{k}$$

$$\underline{u_{3y}} = -\frac{1}{2}\frac{F}{k} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{2}+1}\,\frac{F}{k}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}+1}+1\right)\frac{F}{k}$$

4) a.

④

$EI\, w^{IV} = q$

$EI \int v \cdot w^{IV} = \int v\, q$

$= EI \left\{ [v \cdot w''']_a^b - \int v'\, w''' \right\} = \int v \cdot q$

$= EI \left\{ [v \cdot w''']_a^b - [v' \cdot w'']_a^b + \int v''\, w'' \right\} = \int v \cdot q$

$= -[v_b Q_b - v_a Q_a] + [v_b' M_b - v_a' M_a] + EI \int v''\, w'' = \int v \cdot q$

$$EI \int v''\, w'' = \int v\, q + [v_b Q_b - v_a Q_a] - [v_b' M_b - v_a' M_a]$$

b. $v = \underline{N}^T \hat{\underline{v}}$ $\quad w = \underline{N}^T \hat{\underline{w}}$

$$EI \int \hat{\underline{v}}^T \underline{N}'' \underline{N}''^T \hat{\underline{w}} = \int \hat{\underline{v}}^T \underline{N}\, q + \hat{\underline{v}}^T [\underline{N}_b Q - \underline{N}_a Q_a] - \hat{\underline{v}}^T [\underline{N}_b' M_b - \underline{N}_a' M_a]$$

$$EI \int \underline{N}'' \underline{N}''^T \hat{\underline{w}} = \int \underline{N}\, q + [-Q_a \quad M_a \quad Q_b \quad -M_b]^T$$

optional

c.
- Differenzierbarkeit und Stetigkeit
- δ- Eigenschaft $\quad N_i(x_j) = \delta_{ij}$
- Kompakter Support
- Vollständigkeit

d.
- 2-fach stetig differenzierbar
- C^1 stetig

5) Zeitliche Diskretisierung mit Finiten Differenzen

z.B. Euler

$$\dot{T}_{n+1} = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t}$$

$$C \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} + K T_{n+1} = F_{n+1}$$

$$\left[K + \frac{1}{\Delta t} C\right] T_{n+1} = F_{n+1} + \frac{1}{\Delta t} C T_n$$

Methode ist unbeschränkt stabil, erfordert aber in jedem Zeitschritt die Lösung eines LGS.