Nachname : ……………………………

Klausurnummer : ……………………………

Vorname : ……………………………

Matrikelnummer : ……………………………

<u>Hinweise zur Klausur:</u>

Nachname, Vorname und Matrikelnummer in die vorgesehenen Felder eintragen. Bitte verwenden Sie **<u>keinen</u>** Bleistift, grünen oder roten Stift (Korrekturfarben!). **<u>Jedes Blatt</u>** mit Namen und Matrikelnummer versehen, Blätter **<u>durchlaufend nummerieren</u>** und **<u>nur einseitig</u>** beschreiben! Jede Aufgabe auf einem **<u>neuen Blatt</u>** beginnen. Die **<u>Klausurnummer</u>** bitte **<u>merken</u>** oder **<u>notieren</u>**!
<u>Zulässige Hilfsmittel:</u> Formelblatt, 2-seitig, ohne Lösungswege. Taschenrechner, nicht programmierbar.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

1. Aufgabe (7 Punkte)

Transiente Massendiffusion wird in einem eindimensionalen Gebiet $x \in [a, b]$ durch die Differentialgleichung

$$c_{,t} + q_{,x} - f = 0$$

beschrieben. Das konstitutive Gesetz

$$q = -D\, c_{,x}$$

stellt einen linearen Zusammenhang zwischen Massenfluss und Konzentrationsgradienten dar.

a) Bestimmen Sie die schwache Form des Problems und vereinfachen Sie die Randterme unter Zuhilfenahme des konstitutiven Gesetzes.

b) Geben Sie die räumlich diskretisierte schwache Form für ein einzelnes Element in Matrixschreibweise an.

c) Diskretisieren Sie in der Zeit und begründen Sie die Wahl Ihrer Diskretisierungsmethode.

2. Aufgabe (13 Punkte)

Das abgebildete Viereckselement hat die Ansatzfunktionen $N_1 - N_4$ in lokalen Koordinaten $\xi, \eta \in [-1, 1]$. Die Verschiebungen $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_4$ an den Knoten seien bekannt, Koordinaten siehe Zeichnung.

a) Bestimmen Sie die Jakobi-Matrix $\mathbf{J}(\xi, \eta)$.

b) Bestimmen Sie den Wert der Verschiebung $\boldsymbol{u}$ sowie die Dehnungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ am Punkt $(\xi, \eta) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

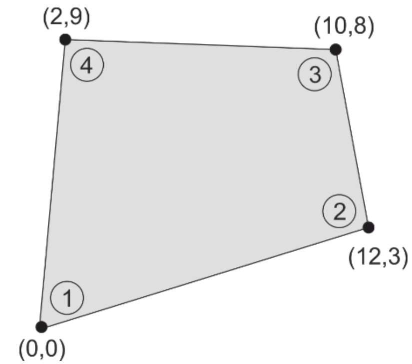
c) Zeigen Sie, dass die Ansatzfunktionen am Punkt 1 Interpolationseigenschaft besitzen.

d) Was ist über die Stetigkeit des interpolierten Feldes $\boldsymbol{u}(x, y)$ an den Elementgrenzen bekannt?

Gegeben:

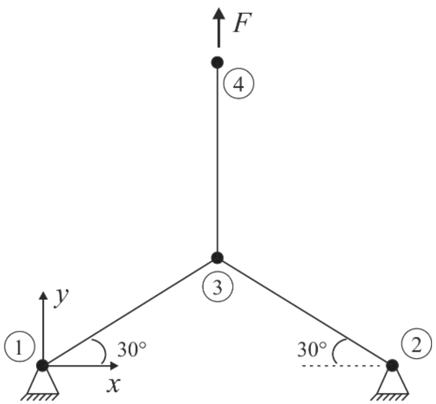
$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$, $N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$, $N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$,
$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

$\boldsymbol{u}_1 = (0, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (10, 5)$, $\boldsymbol{u}_3 = (-5, 10)$, $\boldsymbol{u}_4 = (20, -10)$



3. Aufgabe (9 Punkte)

Ein Fachwerk aus drei identischen Stäben (Länge l, Dehnsteifigkeit EA) wird durch eine Einzelkraft F belastet. Bestimmen Sie die Verschiebung des Knotens 3.



Gegeben: F, $\frac{EA}{l} = k$

Hinweis: Der Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung für ein Stabelement im Winkel φ zur x-Achse ist

$$\begin{pmatrix} f_x^1 \\ f_y^1 \\ f_x^2 \\ f_y^2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} cos^2(\varphi) & sin(\varphi)cos(\varphi) & -cos^2(\varphi) & -sin(\varphi)cos(\varphi) \\ sin(\varphi)cos(\varphi) & sin^2(\varphi) & -sin(\varphi)cos(\varphi) & -sin^2(\varphi) \\ -cos^2(\varphi) & -sin(\varphi)cos(\varphi) & cos^2(\varphi) & sin(\varphi)cos(\varphi) \\ -sin(\varphi)cos(\varphi) & -sin^2(\varphi) & sin(\varphi)cos(\varphi) & sin^2(\varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \end{pmatrix}$$

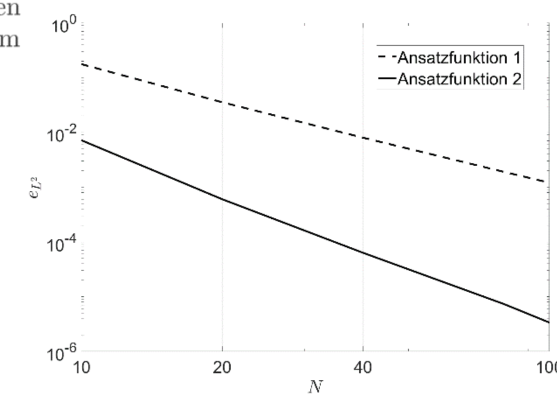
4. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Randwertproblem wurde mittels der Finite-Elemente Methode gelöst. Es ergab sich der abgebildete Verlauf des Fehlers in der L^2-Norm in Abhängigkeit der Anzahl N der Elemente (pro Richtung). Es wurden Ansatzfunktionen zweier Ordnungen verwendet.

a) Geben Sie die Konvergenraten (gerundet auf ganze Zahlen) an.

b) Welcher Ordnung waren die Ansatzfunktionen?

c) Welche Konvergenzraten werden für die H^1-Norm erwartet?



5. Aufgabe (7 Punkte)

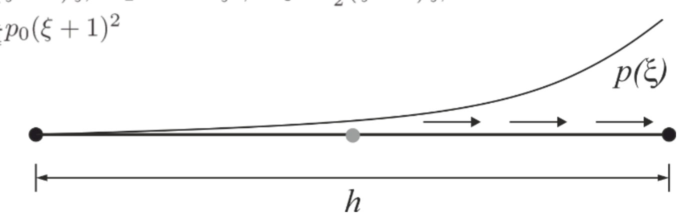
Auf ein Stabelement mit quadratischen Ansatzfunktionen wirke eine quadratisch zunehmende Streckennormalkraft $p(\xi)$.

Bestimmen Sie den Lastvektor per Gauß-Quadratur (Integrationspunkte siehe Tabelle).

Gegeben:

$N_1 = \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi,\ N_2 = 1 - \xi^2,\ N_3 = \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi,$

$p(\xi) = \frac{1}{4}p_0(\xi + 1)^2$



ξ^{GP}	$-\sqrt{3/5},\ 0,\ \sqrt{3/5}$	w^{GP}	5/9, 8/9, 5/9