

Übungen zur Vorlesung
Nebenläufigkeitstheorie
Blatt 4

Prof. Dr. Roland Meyer
Eren Keskin & Jan Grünke

Abgabe bis 25.06.2026 um 15:00

Aufgabe 4.1 (Parikhbild regulärer Sprachen)

Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ zählt die *Parikhbild* $\Psi(w) \in \mathbb{N}^\Sigma$ die Anzahl der Vorkommen jedes Buchstabens in w . Zum Beispiel gilt $\Psi(aabbb)[a] = 2$ und $\Psi(aabbb)[b] = 3$. Das Parikhbild einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\Psi(L) := \{\Psi(w) \mid w \in L\}$.

Zeige, dass die Parikhbilder regulärer Sprachen genau die semilinearen Mengen sind, d.h. zeige folgende zwei Eigenschaften:

- (a) Für eine reguläre Sprache L ist die Parikhbild $\Psi(L)$ semilinear.

Hinweis: Verwende Induktion und reguläre Ausdrücke.

- (b) Für jede semilineare Menge $S \subseteq \mathbb{N}^d$ gibt es eine reguläre Sprache L über $\Sigma = \{a_1, \dots, a_d\}$ mit $S = \Psi(L)$.

Aufgabe 4.2 (Quantorenelimination für Presburger-Arithmetik)

Eliminiere die Quantoren und vereinfache die folgenden Formeln in der Presburger-Arithmetik:

- (a) $\exists x. 2x + 3y \leq z \wedge x \geq 1$
 (b) $\exists x. [x + u \geq 0 \vee x \equiv_5 2] \rightarrow [3x + t \leq 1 \wedge 1 \leq 2x - u]$
 (c) $\neg \forall x. 3x < 2y \vee y < 2x$

Aufgabe 4.3 (Kontrollzustands-Erreichbarkeit)

Let $\mathcal{V} = (Q, C, T)$ be a VASS. Das *Kontrollzustands-Erreichbarkeitsproblem* fragt: gegeben $q_0, q_f \in Q$ und $v_0 \in \mathbb{N}^C$, entscheide, ob es ein $v_f \in \mathbb{N}^C$ gibt, so dass $(q_0, v_0) \rightarrow^* (q_f, v_f)$ gilt. Gib einen Algorithmus zur Lösung dieses Problems an. Was ist die Komplexität des Kontrollzustands-Erreichbarkeitsproblems?

Aufgabe 4.4 (\mathbb{Z} -Erreichbarkeit)

Let $\mathcal{V} = (Q, C, T)$ be a VASS and $\Delta \in \mathbb{Z}^{C \times T}$ so that $\Delta[c, t] = z[c]$ for all counter $c \in C$ and transition $t = (q, z, q') \in T$. Widerlege die folgende Behauptung:

Es gibt genau dann einen \mathbb{Z} -Lauf von (q_0, v_0) nach (q_f, v_f) , wenn es einen Parikhbild $x \in \mathbb{N}^T$ gibt, das folgende Bedingungen erfüllt:

$$\text{(Kirchhoff)} \quad \forall q \in Q. \quad \sum_{t=(q,z,q') \in T} x[t] - \sum_{t=(q',z,q) \in T} x[t] = \begin{cases} -1 & \text{if } q = q_0 \neq q_f \\ 1 & \text{if } q = q_f \neq q_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{(Markierungsgl.)} \quad v_f = v_0 + \Delta \cdot x$$

Abgabe bis 25.06.2026 um 15:00 an jan.gruenke@tu-bs.de.