SS 2026 21.05.2026

Übungen zur Vorlesung
Nebenläufigkeitstheorie
Blatt 3

Prof. Dr. Roland Meyer
Eren Keskin & Jan Grünke
Abgabe bis 11.06.2026 um 15:00

Aufgabe 3.1 (Linear Unabhängige Periode)

Beschreiben Sie die unten gegebenen linearen Mengen $L_i \subseteq \mathbb{N}^3$ als eine Vereinigung von linearen Mengen $L_i = \bigcup_j b_{i,j} + P_{i,j}$ deren Periode $P_{i,j} \subseteq \mathbb{N}^3$ linear unabhängig sind.

a) $L_1 = (2,3,0) + \{(2,2,2),\ (1,2,1),\ (2,3,2)\}^*$

b) $L_2 = (2,1,0) + \{(2,1,0),\ (0,1,1),\ (1,2,3),\ (1,2,0)\}^*$

Aufgabe 3.2 (Primvolle Erfüllbarkeit)

Entwerfen Sie einen Algorithmus, um das folgende Problem zu lösen. Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus korrekt ist.

ALL-PRIMES-FEASABILITY

Gegeben: $A \in \mathbb{Z}^{\ell \times k}, b \in \mathbb{Z}^\ell$

Entscheide: Für alle prim $n \in \mathbb{N},$ gibt es ein $y \in \mathbb{N}^d$ mit $A \cdot y \geq b$ und $y[1] = n$.

Verwenden Sie dabei das Dirichlet Primzahltheorem:

Theorem 1 *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Für alle $0 < a < n$ das teilerfremd mit n ist, gibt es unendlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ mit $a \equiv p_i \mod n$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Ihr Algorithmus darf annehmen, dass gegeben $A \in \mathbb{Z}^{\ell \times k}$ und $b \in \mathbb{Z}^\ell$, die semilineare Beschreibung $B, P \subseteq \mathbb{N}^d$ der Lösungsmenge $B + P^* = \mathsf{sol}(A \cdot x \geq b)$ berechnet werden kann.

Aufgabe 3.3 (Understanding Semilinear Sets)

Zeigen oder widerlegen Sie die unten angegebenen Aussagen.

a) Alle semilineare $S \subseteq \mathbb{N}$ können als

$$S = F \cup (B + \{p\}^*)$$

geschrieben werden, wobei $p \in \mathbb{N}$ und $B, F \subseteq \mathbb{N}$ endlich.

b) Seien $p, r \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann

$$\{p, r\}^* = \mathbb{N} \setminus F$$

für ein endliches $F \subseteq \mathbb{N}$.

c) Alle semilineare $S \subseteq \mathbb{N}^2$ können als

$$S = F \cup (B + P^*)$$

geschrieben werden, wobei $B, F, P \subseteq \mathbb{N}^2$ endlich.

d) Falls $S \subseteq \mathbb{N}^d$ semilinear ist, ist S^* es auch.

Aufgabe 3.4 (Presburger Logik)

Für jede Teilaufgabe, konstruieren Sie eine Formel in Presburger Logik mit den gegebenen Eigenschaften. Sei $\Delta(x)$ eine Presburger Formel mit den freien Variablen $x \in \mathbb{N}^d$.

a) Ψ *mit keinen freien Variablen:* Ψ gilt gdw. es unendlich viele $y \in \mathbb{N}^d$ gibt, sodass $\Delta(y)$ gilt.

b) $\Phi_c(x)$ *mit d freien Variablen, $x \in \mathbb{N}^d$:* Sei $c \in \mathbb{N}^d$. Für alle $y \in \mathbb{N}^d$, $\Phi_c(y)$ gilt gdw. $\Delta(y)$ gilt und y maximisiert das innere Product $\langle y, c\rangle$ unter Vektoren die $\Delta(x)$ erfüllen, also

$$\langle y, c\rangle = \max\{\langle u, c\rangle \mid u \in \mathbb{N}^d,\ \Delta(u)\}$$

c) Γ_A *mit einer freien Variable, $x \in \mathbb{N}$:* Sei $A \in \mathbb{Z}^{\ell \times d}$. Dann für alle $s \in \mathbb{N}^1$ gilt $\Gamma_A(x)$ gdw.

$$\max_{b \in B} ||b||_1 = s$$

wobei $B = \min\{y \in \mathbb{N}^d \mid \Delta(y)\}$, die Menge von minimalen Elementen die $\Delta(x)$ efüllen bzgl. der $\leq_A$-Ordnung.

Abgabe bis 11.06.2026 um 15:00 an jan.gruenke@tu-bs.de.