

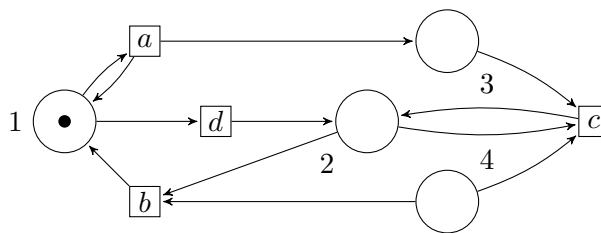
Übungen zur Vorlesung
Nebenläufigkeitstheorie
Blatt 1

Prof. Dr. Roland Meyer
Eren Keskin & Jan Grünke

Abgabe bis 07.05.2026 um 13:15

Aufgabe 1.1 (Rackoff's Theorem)

Betrachte das Petrinetz $N = (\{1, 2, 3, 4\}, \{a, b, c, d\}, W)$ mit Gewichten wie unten dargestellt. Die Anfangsmarkierung von Interesse ist $M_0 = (1, 0, 0, 0)^T$ und die Endmarkierung ist $M_f = (1, 0, 10, 100)^T$.



Berechne $\minSeq(3, M_0)$, $ball(M_f)$ und $f(3)$ aus dem Beweis des Satzes von Rackoff und argumentiere, warum sie korrekt sind.

Aufgabe 1.2 (Wohlquasiordnungen)

Beweise oder widerlege, dass die folgenden Relationen Wohlquasiordnungen sind:

- a) Die lexikographische Ordnung $(\{0, 1\}^*, \leq_{lex})$ über binäre Wörter:

$u \leq_{lex} v$ genau dann, wenn u ein Präfix von v ist oder das erste Symbol $u[\ell]$ das nicht mit $v[\ell]$ übereinstimmt, die Bedingung $u[\ell] < v[\ell]$ erfüllt.

Beachte, dass $u[\ell]$ das ℓ -te Symbol von u bezeichnet.

- b) Die colexikographische Ordnung $(\{0, 1\}^*, \leq_{colex})$ definiert durch:

$u \leq_{colex} v$ genau dann, wenn u ein Postfix von v ist oder das letzte Symbol $u[\ell]$ das nicht mit $v[\ell]$ übereinstimmt, die Bedingung $u[\ell] < v[\ell]$ erfüllt.

- c) Die Radixordnung $(\{0, 1\}^*, \leq_{radix})$ über binäre Wörter:

$u \leq_{radix} v$ genau dann, wenn $|u| < |v|$ oder $|u| = |v| \wedge u \leq_{lex} v$

- d) Die Quasiordnung $(\mathbb{N}, |)$, wobei $a | b$ bedeutet, dass a b teilt.

- e) Die Quasiordnung $(P \uplus Q, \leq_+)$, wobei (P, \leq_P) und (Q, \leq_Q) Wohlquasiordnungen sind mit $P \cap Q = \emptyset$, und

$t \leq_+ t'$ genau dann, wenn $(t, t' \in P$ und $t \leq_P t')$ oder $(t, t' \in Q$ und $t \leq_Q t')$.

Aufgabe 1.3 (Königs Lemma)

Ein Baum $T = (V, \rightarrow)$ ist ein gerichteter Graph mit einem ausgezeichneten Wurzelknoten, sodass jeder Knoten (außer der Wurzel) genau einen Vorgänger hat und keine Zyklen existieren. Ein Baum heißt *endlich verzweigend*, falls jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat. Beweise Folgendes: Ein unendlicher, endlich verzweigter Baum enthält einen unendlichen Pfad, der in der Wurzel beginnt.

Hinweis: Falls $v \rightarrow v'$ gilt, nennen wir v' einen *Nachfolger* von v und v einen *Vorgänger* von v' . Ein Pfad ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Knoten v_0, v_1, v_2, \dots , sodass v_{i+1} ein Nachfolger von v_i ist. Ein Zyklus ist ein Pfad v_0, v_1, \dots, v_n , sodass $v_0 = v_n$ gilt.

Aufgabe 1.4 (Terminierung für WSTS)

Sei $S = (Q, \leq, I, \rightarrow)$ ein WSTS. Angenommen, es gilt

- $I = \{q_0\}$ ist eine ein-elementige Menge von Anfangszuständen,
- $q \leq q'$ ist für alle $q, q' \in Q$ entscheidbar,
- die Menge $post(q) = \{q' \mid q \rightarrow q'\}$ ist für jedes $q \in Q$ endlich, und $post$ ist berechenbar.

Dann *terminiert* S , wenn jede Transitionsfolge, die in I beginnt, endlich ist.

Zeige, dass das *Terminierungsproblem* entscheidbar ist. Das heißt: Gegeben ein WSTS S , entscheide, ob S terminiert.

Hinweis: Konstruiere einen Baum, der alle Transitionsfolgen beginnend in q_0 darstellt, und verwende das Lemma von König sowie beide Annahmen, um zu entscheiden, ob es einen unendlichen Pfad in diesem Baum gibt.

Abgabe bis 07.05.2026 um 13:15 an jan.gruenke@tu-bs.de.